PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE GOIÁS
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO STRICTO SENSU EM EDUCAÇÃO

SÉRGIO RICARDO ABREU REZENDE

ENSINO DESENVOLVIMENTAL E INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA COM O GEOGEBRA: UMA INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA SOBRE O TEOREMA DE TALES

GOIÂNIA – GOIÁS
2016

SÉRGIO RICARDO ABREU REZENDE

ENSINO DESENVOLVIMENTAL E INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA COM O GEOGEBRA: UMA INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA SOBRE O TEOREMA DE TALES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Stricto Sensuem Educação da Pontifícia UniversidadeCatólica de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação.

Orientador: Professor Dr. Duelci Aparecido de Freitas Vaz.

Área de concentração:

GOIÂNIA - GOIÁS
2016

R467e Rezende, Sérgio Ricardo Abreu
Ensino desenvovimental de investigação matemática como o geogebra[manuscrito]: uma intervenção pedagógica sobre o Teorema de Tales/ Sérgio Ricardo Abreu Rezende..-- 2016.
187 f.; il. 30 cm

Texto em português com resumo em inglês
Dissertação (mestrado) -- Pontifícia Universidade Católica de Goiás, Programa de Pós-Graduação Strcto Senso em Educação,Goiânia, 2016
Inclui referências f. 172-178

1. Davydov, VasiliiÌ¿ Ivanovich. 2. Matemática - Estudo e ensino. 3. Matemática - Investigação. 4. Ensino médio. I.Vaz, Duelei Aparecido de Freitas. II.Pontifícia Universidade Católica de Goiás. III. Título.

CDU: 37.016:51(043)

“ENSINO DESENVOLVIMENTAL E INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA COM O GEOGEBRA: UMA INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA SOBRE O TEOREMA DE TALES”

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Educação da Pontifícia Universidade Católica de Goiás, aprovada em 24 de agosto de 2016.

BANCA EXAMINADORA

Duelci Aparecido de Freitas Vaz

Dr. Duelci Aparecido de Freitas Vaz / PUC Goiás (Presidente)

Dr. Luciano Duarte da Silva / IFG

Dra. Raquel Aparecida Marra da Madeira Freitas / PUC Goiás

Dra. Beatriz Aparecida Zanatta / PUC Goiás (suplente)

Dra. Elivanete Alves de Jesus / Unievangélica (suplente)

Ao meu pai ***Edmar***(in memoriam), a minha mãe ***Aparecida***, a minha esposa ***Manoela***, aos meus filhos: ***Lara*** e ***Vítor*** e ao meu neto, ***Vítor Rafael*** e a sua mãe, ***Dayara***.

AGRADECIMENTOS

A minha família, base de tudo. Àquela com quem amo partilhar a vida, minha esposa Manoela. Aos meus filhos: Lara e Vítor e ao meu neto Vítor Rafael que, nos momentos de tensão, me oferecia sempre um sorriso e a sua mãe Dayara, que nos momentos de sufoco me ajudava com as intermináveis digitações e mudançasno texto. À Nice, que muito me ajudou nas sucessivas correções do texto.

Aos meus familiares, amigos e colegas de trabalho das escolas: Instituto de Educação de Goiás- IEG e Escola Municipal Nova Conquista- EMNC, que me apoiaram e me incentivaram ao longo dessa caminhada.

Ao meu orientador professor Dr. Duelci, que foi mais que um orientador, foi um grande amigo, compartilhou seus conhecimentos de forma simples e eficaz e não mediu esforços para o meu sucesso nessa jornada.

Àescola campo, aos gestores e educadores que acolheram o experimento com todo carinho. Ao professor regente e aos alunos que se dedicaram a participar inteiramente da pesquisa, compartilhando suas dificuldades e aprendizados.

À professora Dra. Raquel e ao professor Dr. Luciano, pelas ricas observações realizadas no processo de qualificação. É um prazer tê-los na banca examinadora.

Aosprofessores do mestrado em educação, que nos privilegiaram compartilhando seus conhecimentos e linhas de pesquisas, influenciando, assim, na formação individual de cada mestrando. Entre eles: Prof. Dr. Libâneo, Prof.ª Dra. Beatriz Zanatta, Prof.ª Dra. EliandaTiballi, Prof.ª Dra. Joana Peixoto, Prof.ª Dra. Lúcia Helena Rincón, Prof.ª Dra. Maria Esperança Carneiro, Prof. Dr. José Baldino, Prof. Dr. Duelci e Prof.ª Drª. Sandra Limonta.

À Secretaria Estadual de Educação de Goiás e à Secretaria Municipal de Educação de Goiânia, por concederem a licença para o aprimoramento profissional.

RESUMO

A pesquisa buscou identificaras contribuições da teoria do ensino desenvolvimentalcombinada à investigação matemática para o ensino e a aprendizagem do teorema de Tales. Essa questão decorre da problemática em que se insere o ensino de matemática no contexto da escola brasileira atualmente, sobretudo no ensino médio, em que se verifica pouca aprendizagem dos alunos em relação a conceitos fundamentais dessa disciplina. Este estudo fundamentou-se em princípios da teoria do ensino desenvolvimental de Davydov e da investigação matemática a partir das ideias de Ponte. O *software*Geogebra foi utilizado na atividade dos alunos para o estudo do teorema de Tales. Desse modo, o objetivo geral foi esclarecer quais são as contribuições da teoria do ensino desenvolvimental ao ensino e aprendizagem do teorema de Tales quando combinada à investigação matemática, com o apoio do *software* Geogebra. Como objetivos específicos, buscou-se identificar quais as mudanças apresentadas na aprendizagem dos alunos ao longo da realização do experimento didático formativo sobre o teorema de Tales; o que a investigação matemática com o Geogebra pode agregar nas aulas e ampliar a base conceitual dos alunos, desenvolver a visão geométrica no plano, bem como ampliar a capacidade de fazer conjecturas, interpretar e resolver problemas relativos ao teorema de Tales.A pesquisa foi de natureza qualitativa, por meio de experimento didático formativo, tendo como campo empírico uma escola da rede estadual de ensino do Estado de Goiás. Nesta escola foi pesquisada uma turma de 2º ano do ensino médio, tendo como participantes os alunos, seus pais e o professor de matemática, que também atuou como colaborador da pesquisa. Os dados foram coletados por meio de observação direta não participante, questionários, entrevistas semiestruturadas, organizados e analisados conforme os procedimentos da análise qualitativa. Os resultados mostram que a combinação de princípios da teoria do ensino desenvolvimental com a investigação matemática e a utilização do softwareGeogebra potencializou o aspecto investigativo na atividade de estudo teorema de Tales pelo aluno. A introdução do *software* Geogebra possibilitou concretizar de forma dinâmica a integração entre a álgebra e geometria, permitindo ao aluno o trabalho ativo com o objeto teorema de Tales, facilitando a identificação do seu núcleo conceitual e das relações que o envolvem. Os alunos expressaram que o estudo do teorema de Tales, da forma proposta, contribuiu para a compreensão da geometria de forma mais significativa, facilitando a aprendizagem. Conclui-se que o ensino do teorema de Tales estruturado com base na teoria de Davydov e na investigação matemática, por meio do software Geogebra, pode resultar em melhor aprendizagem desse conceito pelos alunos. Para isso, é indispensável que o professor tenha conhecimento da teoria do ensino desenvolvimental e da investigação matemática, como também as funcionalidades do *software* Geogebra.

Palavras-chave: Ensino desenvolvimental. Ensino de matemática. Teorema de Tales. Investigação matemática. Geogebra.

ABSTRACT

The research sought to identify the contributions of the theory of developmental education combined with mathematical research for the teaching and learning of Thales' Theorem. This question stems from the problems in which it operates the teaching of mathematics in the context of Brazilian school today, especially in high school, where there is little student learning in relation to fundamental concepts of this discipline. This study was based on principles of developmental teaching theory of Davydov and mathematics research from the bridge of ideas. The Geogebrasoftware was used on the student activity for the study of Thales' Theorem. Thus, the overall objective was to clarify what are the contributions of developmental teaching theory to teaching and learning of Tales theorem when combined with mathematical research, with the support of the Geogebrasoftware. The specific objectives, we sought to identify the changes presented in student learning over the completion of the formative educational experiment on the Thales' Theorem; what mathematical research with Geogebra can add the classes and expand conceptual basis of the students, develop the geometric vision in the plan as well as expand the ability to make conjectures, interpret and solve problems related to Thales' Theorem. The research was qualitative in nature, through training teaching experiment, with the empirical field a school of state schools of the State of Goiás. In this school was searched a second grade high school class, with the participating students, their parents and the math teacher who also worked as a collaborator of the research. Data were collected through non-participant direct observation, questionnaires, semi-structured interviews, organizedand analyzed according to the procedures of qualitative analysis. The results show that the combination of principles of developmental teaching theory to mathematics research and the use of the Geogebrasoftware potentiated the investigative aspect of the theorem study activity of Tales by the student. The introduction of the Geogebrasoftware enabled realize dynamically integration between algebra and geometry, allowing the student to the active work with the theorem of Thales object, facilitating the identification of its conceptual core and relationships that involve. Students expressed that the study of Tales theorem, as proposed, contributed to the understanding of the most significant geometry, facilitating learning. It is concluded that the Tales theorem teaching structured based on the Davydov theory and mathematics research through the Geogebrasoftware , can result in better learning of this concept by the students. Therefore, it is essential that the teacher be aware of developmental teaching theory and mathematical research, as well as the features of the Geogebrasoftware .

Key words: Developmental education. Math education.Theorem of Thales.Mathematical research.Geogebra.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE SIGLAS

BDTD - Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações.

ENEM- Ensino Nacional do Ensino Médio.

EJA - Educação de Jovens e Adultos.

INEP - Instituto de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira.

IDEB - Índice de Desenvolvimento da Educação Básica

MEC - Ministério da Educação.

PCN - Parâmetros Curriculares Nacionais.

PIBID - Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência.

PISA - Programa Internacional de Avaliação de Alunos.

TIC - Tecnologia da Informática e Comunicação.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Ha vários anos lecionando matemática, sempre nos preocupou a busca de uma teoria que tivesse uma forte articulação com o conhecimento científico, mas que, ao mesmo tempo, tivesse a preocupação com a imersão social e histórica do ser humano. Nesse sentido, a teoria do Ensino Desenvolvimental (DAVIDOV,1998), fortemente ancorada na Teoria Histórico Cultural, apresenta muitas respostas a essas inquietações.

Percebendo certo poder de atração que a tecnologia tem sobre o aluno, principalmente a informática, surgiu o nosso desejo de estudar formas de trabalhar o ensino da matemática fazendo o uso de um *software* que possibilitasse esseensino. Assim, pensamos em um trabalho que fizesse uma articulação entre o conhecimento matemático, a teoria do Ensino Desenvolvimental e, de forma colaborativa, aliasse a investigação matemática com o Geogebra.

A teoria do Ensino Desenvolvimental ea Investigação Matemática, com uso do Geogebra, nos mostram que é possível realizar a pesquisa em matemática, mesmo nas séries iniciais dos níveis fundamental e médio. Então, de forma natural,planejamos o nosso trabalho de pesquisa tendo como fundamentação teórica o ensino desenvolvimental, apoiado na investigação matemática com o *software* Geogebra, estudo este que foi concretizado na aplicação de um experimento didático formativo sobre o teorema de Tales.

Nosso tema, de maneira ampla, é o ensino e a aprendizagem de matemática. No sentido mais restrito, estamos interessados nas contribuições da teoria do ensino desenvolvimental ao ensino e aprendizagem do teorema de Tales quando utilizamos a investigação matemática com o Geogebranum experimento didático formativo.

Ao consultarmos a Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações - BDTD - utilizando simultaneamente os descritores ensino desenvolvimental, investigação matemática em sala de aula e o uso do *software*Geogebra, constatamos apenas três trabalhos de pesquisa nessa área. Eles pertencem a Oliveira (2015), cujo título é “A Investigação Matemática com o Geogebra no estágio com pesquisa do curso de licenciatura em Matemática da UEG/Iporá”;o estudo de Barros (2015), intitulado “Formação de conceitos matemáticos: um estudo baseado no Ensino Desenvolvimental”, e o trabalho de Melo (2014), denominado “O *software*Geogebra como elemento mediador na formação do conceito de polígonos semelhantes”.

No levantamento que fizemos na base de dados da BDTD, são poucas aspesquisas sobre ensino de matemática que trabalham de forma conjunta: ensino desenvolvimental, investigação matemática em sala de aula e o *software* Geogebra, nos níveis fundamental e médio[1].

Ao acrescentar teorema de Tales, tomados os quatro descritores simultaneamente, não encontramos trabalhos nessa base de dados[2]. Essa constatação reforçou a necessidade e a relevância da presente pesquisa, que busca articular uma teoria geral de ensino – o ensino desenvolvimental de Davydov –, uma proposta de ensino emanada da área da educação matemática – a investigação matemática – e a tecnologia informática representada pelo *software*geogebra.

A questão central que a pesquisa buscou esclarecer foi: quais são as contribuições da teoria do ensino desenvolvimental ao ensino e aprendizagem do teorema de Tales quando combinada à investigação matemática e com apoio no *software* Geogebra?

As inquietações que nos motivaram a essa pesquisa foram: considerando que Davydov defende a ideia de que o estudo de um conceito pelo aluno inicia-se pela apreensão de seu núcleo, qual é o núcleo do conceito do Teorema de Tales? O que o professor leva em conta para utilizar esse núcleo na estruturação da atividade do aluno?Qual o potencial do *software*Geogebra para trabalhar de forma integrada as visões algébricas e geométricas no teorema de Tales? O que o *software* Geogebra pode agregar àsaulas de matemática no sentido de ampliar a base conceitual dos alunos, desenvolver a visão geométrica no plano, bem como ampliar nos alunos a capacidade de fazer conjecturas, interpretar e resolver problemas relativos ao teorema de Tales; considerando a proposta da investigação matemática, como poderia ser estruturado o ensino do teorema de Tales? Que exigências devem ser observadas?

Em busca de responder a essas indagações, a pesquisa teve o objetivo geral de analisar quais contribuições da teoria do ensino desenvolvimental ao ensino e aprendizagem do teorema de Tales quando combinada à investigação matemática e com apoio no softwareGeogebra.

Nesta pesquisa, usaremos como referência teórica os conceitos provenientes da: Teoria Histórico Cultural, da Teoria do EnsinoDesenvolvimental, e da metodologia de ensino denominada Investigação matemática em sala de aula, e abordaremos expressões relacionadas

---

[1]Pesquisas orientadas por Dr. Duelci Aparecido de Freitas Vaz.
[2]Veja anexo A – Busca avançada no arquivo de dissertações e teses da BDTD usando os 4 descritores ao mesmo tempo (intersecção).

ao uso da informática na educação e a investigação matemática com o Geogebra[3] e, como pesquisa de campo, realizamos o experimento didático formativo sobre o teorema de Tales. Todas as teorias, expressões e conceitos aqui usados serão abordados no segundo capítulo. Assim, mostraremos, entre outros, um item sobre o experimento didático formativo, no qual realçamos as contribuições teóricas sobre o seu entendimento e elaboração, cuja base teórica está ancorada em três autores: Libâneo (2007), Aquino (2013) e Freitas (2014).

‘Na execução do experimento a investigação matemática com o Geogebrapossibilitou que fosse realizado um estudo de forma colaborativa. Na exposição teórica sobre a investigação matemática e ao longo da descrição e análise do experimento, pudemos verificar como algumas práticas de pesquisas desenvolvidas por pesquisadores matemáticos são factíveis de serem trazidas para o trabalho de ensino e aprendizagem de matemática na sala de aula.

A criação e testes de conjecturas, de reflexão, bem como a formalização são discutidos na perspectiva de desenvolver no aluno e nos professores o gosto pelo pensamento investigativo. Acreditamos que a investigação matemática com o Geogebra é importante para reproduzir o nuclear de alguns conceitos científicos da Matemática, bem como é um agente potencializador no processo de ascensão do pensamento abstrato ao concreto. Para ancorar o trabalho com o *software*Geogebra, o qual é uma tecnologia educacional, abordamos alguns pontos que julgamos importantes sobre a relação das Teorias da Informação e Comunicação – TIC com a Educação, passando de forma prática com o uso do computador na sala de aula, até chegar ao *software* Geogebra.

A pesquisa, por meio de experimento didático formativo, foi de natureza qualitativa eteve como campo empírico uma escola da rede estadual de ensino do Estado de Goiás. Nesta escola, foi pesquisada uma turma de 2º ano do ensino médio, tendo como participantes os alunos, seus pais e o professor de matemática, que também atuou como colaborador da pesquisa.

Os dados são provenientes de observações do pesquisador na referida turma quando colocada em atividade, da aplicação de questionários junto aos responsáveis pelos alunos, bem como da aplicação de um questionário respondido pelos alunos, da avaliação diagnóstica, das atividades impressas realizadas pelos alunos, da aplicação de uma avaliação escrita final e das entrevistas finais gravadas em áudio respondidas por todos os alunos e pelo professor.

---

[3]Ao usar a expressão investigação matemática com o Geogebra, já fica implícita a utilização da investigação matemática em sala de aula, juntamente com o *software*Geogebra, conforme entendimento de Vaz (2012).

Esta dissertação é composta portrês capítulos.No primeiro capítulo, apresentamos dados oficiais referentes ao desempenho dos alunos em matemática provenientes do: exame*Programme for InternationalStudentAssessment*(Pisa), Prova Brasil e Exame Nacional do Ensino Médio (Enem). Fazemos uma exposição sobre as dificuldades por que passa o ensino de Geometria no Brasil. Apresentamos o nosso problema de pesquisa, a justificativa os objetivos gerais e específicos.

No segundo capítulo, fazemos a discussão teórica na qual está fundamentada a nossa pesquisa. Abordamos a formação e propagação da teoria histórico-cultural, o materialismo histórico e dialético, Vygotskye suas contribuições ao ensino e àdidática, a proposta nuclear de Davydov: ensino e formação de conceitos, a base teórica de um experimento didático formativo, suasetapas de elaboração e análise, as cinco condições para a realização de um experimento didático formativo segundo Libâneo. Discorremos também sobre a relação das tecnologias da informação e comunicação (TIC) com o processo educacional,discutimos três mitos apontados por Joana Peixoto sobre a tecnologia e a inovação pedagógica; discutimos sobre o uso do computador na sala de aula; apontamos e discutimos as possibilidades de que esse uso possa intensificar o processo de ensino aprendizagem na visão de Davidov.

Dando sequência a fundamentação do trabalho, realizamos uma discussão sobre a metodologia investigação matemática em sala de aula, mostramos como é uma aula de investigação; abordamos a investigação matemática com o Geogebra; descrevemos com base na história da matemática a gênese e o movimento lógico-histórico do teorema de Tales, mostramos quando o teorema de segmentos proporcionais passa a se chamar teorema de Tales, apresentamos enunciados curiosos do teorema de Tales em alguns países; apresentamosem a “A essência do teorema de Tales” a maneira como no livro Elementos de Euclides é apresentado e demonstrado a proposição que viria a se chamar mais tarde de teorema de Tales; apresentamos uma demonstração do teorema de Tales mais fácil de ser assimilada pelo aluno do ensino médio.

No terceiro capítulo, inicialmente fazemos a introdução ao capítulo, discorremos sobre a metodologia da nossa pesquisa; posteriormente, caracterizamos a escola na qual fizemos a pesquisa; caracterizamos o *software*Geogebra; na sequência passamos a discorrer sobre a realização e análise do experimento formativo sobre o teorema de tales. Para finalizar essa parte, realizamos a narração e a análise da entrevista realizada com todos alunos que participaram do experimento.

CAPÍTULO 1

PONTOS FUNDAMETAIS DA PESQUISA

No presente capítulo, como afirmamos na introdução deste trabalho, analisamos os dados sobre as dificuldades apresentadas pelos alunos em relação ao ensino e aprendizagem de matemática. Primeiro observamos a realidade brasileira e no segundo momento nos dedicamos aos dados locais, pertencentes aos alunos de nosso estado.

Na sequência, enunciamos nossa questão de pesquisa e realizamos uma reflexão sobre o ensino de geometria ofertado em nossas escolas. Finalizamos o capítulo tratando do objetivo geral de nosso estudo e de seus objetivos específicos.

1.1 DADOS SOBRE AS DIFICULDADES DOS ALUNOS EM MATEMÁTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO

Na argumentação em prol da justificativa da nossa pesquisa,apresentamosinicialmente os dados dos testes do PISA, da Prova Brasil e do Exame Nacional do Ensino Médio(Enem). Todos estes instrumentos se enquadram na categoria de avaliações externas, com as quais não concordamos e não as defendemos. O motivo que nos levou a lançar mão desses dados foi o de embasar o nosso trabalho com os dados publicados que encontramos, sem defendê-los[4].

Nas provas do Enem, a parte referente à matemática tem apresentado um baixo nível de acerto por parte da maioria dos candidatos. Conforme dados do Portal do MEC[5] relativos aodesempenho dos candidatos no Enem 2014, o desempenho em matemáticafoi 7, 3% menor que do Enem 2013, sendo que nesses anos, como de costume, as notas já eram ruins. Num total de 1000 pontos, a média nacional de pontos obtida pelos alunos em matemática no Enem de 2014 foi de 473,5 pontos, fato que equivale a ter nota de 4,73. Quando se estabelece um intervalo de desempenho entre mínimo e máximo, o desempenho mínimo, segundo o mesmo jornal é de 318,5 pontos e o desempenho máximo fica com 973,6. Por esse motivo é que a

---

[4]Nós utilizamos esses dados por serem oficiais e porque, embora façam parte do sistema de avaliação externa da escola pública brasileira, apresentam informações relevantes sobre a situação da aprendizagem escolar da matemática em todas as regiões do país. No entanto, eles não abordam aspectos qualitativos que interferem no desempenho dos alunos.

[5] Esses dados foram inicialmente divulgados pelo Jornal doJornal Correio Brasiliense, título da matéria: MEC revela média de notas dos alunos no Enem 2014. Endereço:<http://www.correiobraziliense.com.br/euestudante/>, acesso: 12/04/2015. Posteriormente foram divulgados pelo Portal do MEC, título: Enem 2014 Resultado individual, Brasília, janeiro de 2015. <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=16869-apresentacao-coletiva-enem-13012015&Itemid=30192>. Acesso: 31/08/2016

média nacional ficou em 473,5 pontos. Quando se observa o desempenho médio em matemática por região, temos: Centro Oeste com 467,3 pontos, região Nordeste: 456,1 pontos, região Sudeste 496,5 pontos, região Sul 487,8 pontos e a média nacional, como já havíamos ditoanteriormente é de 473,5 pontos. O desempenho em matemática por dependência administrativa das escolas brasileiras: rede Federal com média de 589,6 pontos, Rede Estadual com 451,5 pontos, rede Municipal com 472,4 pontos e a rede Privada com 583,3 pontos em média.

As provas do Pisa têm periodicidade de três anos, com as seguintes áreas de conhecimento: leitura, matemática e ciências. Em cada edição,ela ocorre para uma dessas áreas. Em 2003, o foco recaiu sobre a área de matemática, fato que se repetiu em 2012.

Ao comparar o desempenho dos nossos alunos em matemática, tendo como referência os anos de 2003 e 2012, o Brasil foi o país que teve o maior crescimento em matemática. Mas a nossa pontuação ainda é muito ruim em relação aos países que estão melhores no índice, com pontuação ao redor de 500 pontos.

Muito sugestivo é o quadro comparativo dos resultados do Brasil no PISA, iniciando em 2000:

Quadro 1 – Participação do Brasil na avaliação PISA

	Pisa2000	Pisa2003	Pisa2006	Pisa2009	Pisa2012
N º de alunos	4893	4452	9295	20127	18589
Leitura	396	403	393	412	410
Ciências	375	390	390	405	405

Fonte: <http://inep.gov.br>

Odesempenho do Brasil em matemática é sempre pior que o de leitura e ciências, em todos os anos constantes na referida tabela. Ao observar o nível de proficiência em matemática da distribuição em termos de percentagem de nossos alunos, veremos que em 2003 mais de 50% obtiveram notas abaixo do nível 1 e mais de 75% ficaram abaixo do nível 2. No Pisa, os níveis vão de 1 até 6. Já no ano de 2012, mais de 34 % obtiveram notas abaixo no nível 1 e mais de 50% ficaram em matemática abaixo do nível 2.(Relatório nacional Pisa 2012, p. 21)

A Prova Brasil é aplicada no 5º ano e no 9º do ensino fundamental e no 3ºano do ensino fundamental. A Prova Brasil de matemática do 5º ano tem variação de 9 níveis, divididos em intervalos de pontuação de 25 pontos e iniciando com 125 pontos.

A Prova Brasil de matemática do 9º ano tem variação de 9 níveis, dividido em intervalos de pontuação de 25 pontos e iniciando com 200 pontos. Já no caso do 3º ano do ensino médio a Prova Brasil de matemática tem pontuação dividida em 10 níveis, iniciando o nível 1 com 225 pontos, com intervalos também de 25 pontos por níveis.

O desempenho médio em matemática no Brasil na Prova Brasil 2011, pegando o total do Brasil foi: 209,6 na 5ª série, 250,6 nas 9ª, ambas no ensino fundamental, e de332,8 na 3ªsérie do fundamental[6]. O desempenho médio em matemática na Região Centro Oeste naProva Brasil 2011, no total foi: 215,9na 5ª série, 253,3 na 9ª, ambas no ensino fundamental, e de 278,6 na 3ª série do fundamental. Conforme quadro de desempenho médio em matemática de escola do estado de Goiás Prova Brasil 2011:

Quadro 2 – Desempenho médio em matemática na Prova Brasil em Goiás

Dependência Administrativa	5º ano do ensino fundamental	9º ano do ensino Fundamental	3ª série ensino Médio
Estadual	214,2	244,0	267,0
Pública*	210,1	243,4	267,0
Privada	247,8	251,5	276,2

Fonte:<http://sistemasprovabrasil2.inep.gov.br/resultados/ >

Desempenho médio em matemática de escolas do município de Goiânia na Prova Brasil 2011: 206,9 no 5º ano e 234,9 no 9º ano, ambos no ensino fundamental[7].

Quando se leva em consideração que a pontuação máxima de um 5º ano é 350 pontos, do9º ano é de 425 pontos e do 3º ano é de 475 pontos, fica bem evidente que temos um longo caminho a percorrer no sentido da melhoria do ensino de matemática nessas três importantes fases da nossa juventude.

Outro dado importante é que o desempenho médio do município de Goiânia na 5ªsérie somente é melhor que o desempenho municipal a nível nacional, na mesma série, mas é pior que o desempenho municipal da região Centro Oeste e o desempenho municipal médio do Estado de Goiás. Quando é feito o comparativo do desempenho do município de Goiânia na 9ª série do ensino fundamental, esse se apresenta inferior ao desempenho municipal: nacional, da Região Centro Oeste e municipal do Estado de Goiás.

Ao longo dos levantamentos de dados para a montagem das tabelas anteriores, referente à Prova Brasil no ano de 2011 é sempre comparado o desempenho dos alunos nas disciplinas de Português e matemática. Em todas as tabelas originais analisadas nesse ano, os

[6] Fonte: INEP. Disponível em:<http://sistemasprovabrasil2.inep.gov.br/resultados/ > Acesso: 12/04/2015.
[7] Fonte: INEP. Disponível em:<http://sistemasprovabrasil2.inep.gov.br/resultados/ >.

desempenhos dos alunos em matemática se mostraram ligeiramentemelhores do que o de Português. Como nossa pesquisa é direcionada para o ensino de matemática, fizemos um recorte só para essa disciplina.

Do acompanhamento do desempenho dos nossos alunos na prova Brasil e no Enem, levando em consideração os descritores dessas provas em matemática, conforme publicado nas estatísticas e da nossa experiência profissional de 30 anos como professor de matemática no ensino fundamental e médio, destacamos algumas dificuldadesem comum entre os alunos: pouco entendimento conceitual da matéria, limitada capacidade de realizar as principais operações básicas da matemática (somar, subtrair, multiplicar, dividir) reduzida visão geométrica, tanto no plano como no espaço. Tudo isso, culminando com a dificuldade em resolver problemas práticos, principalmente problemas que envolvam aspectos relativos ao teorema de Tales.

A matemática é uma ciência de atuação que vai muito além delaprópria,enquanto ciência funciona como instrumental para várias outras, como, por exemplo: a física e a química, em todos os níveis de ensino. Isto significa que a baixa aprendizagem emmatemática acarreta certamente dificuldades com a física e ou com a química.Então,é preciso melhorar, superar esse tipo de dificuldade de aprendizagem em matemática.

1.2 JUSTIFICATIVA

A presente pesquisa tem como propósito pesquisar de que maneirapode-se combinar princípios da teoria do ensino desenvolvimental e da investigação matemática tendo o *software*Geogebra como um recurso tecnológico no ensino do Teorema de Tales. Queremos identificar quais as mudanças se pode observar na aprendizagem dos alunos que participaram do estudo.

Ao ensinar matemática com base na teoria do ensino desenvolvimental, contribuímos para que o aluno adquira conhecimento científico de forma reflexiva,rompendo com uma visão de ensino de matemática mecânico, factual e estanque. A investigação matemática em sala de aula é uma metodologia de ensino que pode ser usada em todas as fases do ensino da matemática e que coloca em evidência o processo de descoberta, do desafio, para o ensino da matemática.

A motivação para realizar essa pesquisa vem de várias fontes. Percebemos em sala de aula o interesse dos alunos por assuntos referentes à tecnologia, principalmente em relação ao uso da informática.

Outra razão que nos move ao estudo desse tema está relacionada à exposição que fizemos dos dados relativos aos testes: PISA, da Prova Brasil e do Enem, que mostram que o ensino da Matemática nos níveis fundamental e médio não estão satisfatórios e muito tem que ser tem que ser feito no sentido da melhoria do ensino e aprendizagem da matemática.

Existe um espaço didático-pedagógico no ensino da matemática, o qual precisa ser mais discutido e trabalhado no sentido de ver formas de melhorar a aprendizagem da disciplina. Quanto se faz um recorte sobre o ensino da Geometria, então, se percebe que não só existe um grande espaço de trabalho e pesquisa na busca de como ensino melhor.

Quando fechamos um pouco mais no sentido de um recorte ainda mais específico e elegemos o teorema de Tales, pelas suas implicações matemáticas e físicas, percebemos que esse espaço didático-pedagógico não é só grande. Sobre ele tem ainda pouca pesquisa e discussão. Falando numa linguagem mais matemática, esse espaço é ainda pouco denso. Nele e sobre ele, ainda cabe muita pesquisa e discussão no sentido de levar o aluno a melhor se apropriar da sua base conceitual e operatória, refletindo na capacidade de interpretar e resolver problemas relativos a esse importante teorema.

Objetivo geral

Identificar e analisar quais as contribuições da teoria do ensino desenvolvimental ao ensino e aprendizagem do teorema de Tales quando combinada à investigação matemática e com apoio no software Geogebra.

Objetivos específicos

Identificar as contribuições da teoria do ensino desenvolvimental ao ensino e aprendizagem do teorema de Tales.

Identificar mudanças apresentadas na aprendizagem dos alunos ao longo da realização do experimento didático formativo sobre o teorema de Tales.

Identificar o potencial do *software* Geogebrapara trabalhar de forma integrada as visões algébricas e geométricas no teorema de Tales.

Identificar o que a investigação matemática com oGeogebra pode agregar nas aulas e ampliar a base conceitual dos alunos, desenvolver a visão geométrica no plano, bem como ampliar a capacidade de fazer conjecturas, interpretar e resolver problemas relativos ao teorema de Tales.

CAPÍTULO 2

TEORIA DO ENSINO DESENVOLVIMENTAL COMO UM APORTE PARA O ENSINO TEOREMA DE TALES

A Teoria Histórico-Cultural - THC é a corrente da psicologia que explica o processo de desenvolvimento da mente humana tendo como base o materialismo histórico e dialético e foi fundada L. S. Vygotsky. Seus seguidores fizeram novas formulações e ampliaçõesda base teórica original (LIBÂNEO;FREITAS, 2006, p.1).

A Teoria Histórico-Cultural nasceu das pesquisas desencadeadas pelos pensadores soviéticos:Vygotsky, Leontiev e Lúria, em 1920, grupo cujo líder foi Vygotsky. Suas pesquisas derivavam da psicologia e pedagogia na busca de explicações para a origem e desenvolvimento do psiquismo humano como processo social, histórico e mediado, incluindo: os processos cognitivos, as emoções, a consciência, a atividade, a linguagem, o evoluir do desenvolvimento e a aprendizagem do ser humano.

2.1 FORMAÇÃO E PROPAGAÇÃO DA TEORIA HISTÓRICO-CULTURAL

Libâneo e Freitas (2000, p. 41)descrevem quea escola de Vygotsky teve três gerações principais: a primeira geração foi encabeçada por Vygotsky, juntamente como Leontiev e Lúria e outros pesquisadores; a segunda geração, liderada por Lúria, desenvolveu seus estudos no início da década de 30,os quais culminaram com a formulação da teoria da atividade. Vários outros pesquisadores dessa geração fizeram pesquisas em áreas bem específicas, entre elespoderíamos destacar: Galperin (na psicologia infantil), Boyovich (na psicologia da personalidade), Elkonin (na psicologia do desenvolvimento), Zaporoyetz (na psicologia da evolução) e Levina (na psicologia da educação).A terceira geração da Escola de Vygotsky abrange o período de 1960 e 1970, da qual fazem parte os seguintes pesquisadores: Davidov, Zinchenko, Vitaly Rustsov e Lektorsky. Essa geração desenvolveu seus trabalhos nos tempos da grande rivalidade da guerra fria, a qual era travada pelas duas superpotências da época, Estados Unidos e União Soviética.

Em 1961, a obra de Vygotsky, intitulada *Pensamento e Linguagem*,foi publicada nos Estados Unidos. Tal fato marcou a influência do pensamento de Vygotsky junto a setores da intelectualidade americana. Hoje,conforme apontam Libâneo e Freitas (2000), existem vários especialistas americanos em Vygotsky, merecendo destaque, entre outros: M. Cole, Vera John-Steiner, Ellen Souberman, Sylvia Scribner, Louis Moll e James V. Wertsch. Os mesmos autores também destacam que o pensamento de Vygotsky e seus desdobramentos ganharam a atenção de vários estudiosos espalhados pelo mundo, fato que mostra a importância do seu legado, a força e a abrangência de suas ideias.

2.2O MATERIALISMO HISTÓRICO E DIALÉTICO

A base da teoria histórico-cultural é o materialismo histórico e dialético, que será tratado neste item. O materialismo é uma concepção filosófica para a qual a matéria é fundamento primeiro de toda e qualquer coisa, ser ou fenômeno. Conforme escreveAlves (2010, p.1) "Para os materialistas, a única realidade é a matéria em movimento, que, por sua riqueza e complexidade, pode compor tanto a pedra quanto os extremamente variados reinos animal e vegetal, e produzir efeitos surpreendentes como a luz, o som, a emoção e a consciência". Em outras palavras, a matéria tem a primazia de formar tudo que existe no universo, passando pelos reinos animal e vegetal, e até pela emoção e pelaconsciência humana.

A contraposição do materialismo é o idealismo, para o qual a primazia é atribuída àideia, ao pensamento e ao espírito. Conforme entende Alves (2010,p.2),a concepção materialista é uma ciência que recebeu do pensador Karl Marx o nome de materialismo histórico, a qual tem como objeto as transformações de natureza econômica e social, que são determinadas através do desenvolvimento dos meios de produção.Conforme Alves (2010):

> O materialismo dialético pode ser definido como a filosofia do materialismo histórico, ou o corpo teórico que pensa a ciência da história. Os princípios fundamentais do materialismo dialético são quatro: (1) a história da filosofia, que aparece como uma sucessão de doutrinas filosóficas contraditórias dissimula um processo em que se enfrentam o princípio idealista e o princípio materialista; (2) o ser determina a consciência e não inversamente; (3) toda a matéria é essencialmente dialética, e o contrário da dialética é a metafísica, que entende a matéria como estática e a histórica; (4) a dialética é o estudo da contradição na essência mesma das coisas.(ALVES, 2010, p.1)

O materialismo dialético é uma filosofia, um corpo teórico o qual pensa a história, ou seja, pensa todo legado humano construído ao longo do processo histórico e possui quatro princípios. No primeiro princípio está garantida a sua historicidade, mas principalmente uma historicidade centrada na disputa entre as concepções filosófica materialista e idealista. No segundo princípio é reafirmado a primado da matéria sobre o espírito, no qual é o ser a base material, o determinante da consciência. No terceiro princípio é assegurada que a matéria não está parada, amorfa, estagnada. Neste princípio, está assegurado que a matéria é dialética muda, apresenta contradições, ela está em movimento, está em constante transformação, ou seja, a matéria é vista,estudada e analisada ao longo de todo um processo. O quarto princípio reafirma o estudo da contradição. Ou seja, está sendo estudada a matéria não como um todo harmônico e, sim, como algo que apresenta contradições em sua essência.

Alves (2010, p.2) apresenta o entendimento de que para o materialismo dialético não há dualismo e/ou dicotomia entre o campo social e o individual, entre o campo objetivo e o subjetivo, entre aquilo que é interno em detrimento do que é externo. O homem para o marxismo não é somente uma determinação histórica, é também um transformador da sua história e realiza tal transformação através da práxis.

O materialismo histórico e dialético mostra que as contradições sociais é o motor do desenvolvimento e das transformações sociais. Marx assinala que as mudanças históricas ocorridas na sociedade e na base da vida material ocasionam mudanças no ser humano. Desse modo, a sociedade é uma construção histórica e fruto das interações entre os homens. O trabalho, entendido como atividade humana está no centro desta relação. O homem enquanto ser social se forma por meio de suas atividades desenvolvidas em condições históricas e o essencial dessas atividades é produzido nas suas relações sociais. Esse fato é importante por evidenciar que a essência humana não é algo abstrato e vindo de cada indivíduo, masadvém do aglutinar das relações que o homem estabelece ao longo da sua vida(ALVES, 2010).

A lógica dialética tem por finalidade estudar e descrever as formas históricas e universais da atividade prática, a qual é, por sua vez, também originada da vida prática humana. Sendo assim, todo o desenvolvimento do pensamento está intimamente ligado à atividade prática e àrelação que os seres humanos estabelecem entre si, constituindo esses fenômenos e objetos uma totalidade, através das contradições, movimentos e transformações(ALVES, 2010).

Se os fenômenos e objetos são constituídos dessa forma, então como conhecê-los e compreendê-los? Marx responde a essa pergunta dizendo que é preciso conhecer as coisas como elas realmente são, compreendendo sua essência e não como aparenta ser. Ao estudar um fenômeno, se faz necessário identificar o que o constitui, estabelecer suas relações com a totalidade, ver o que está atrás da sua aparência e, ainda, compreender por que motivo o fenômeno aparece de uma dada forma. Marx mostrou que o diferencial entre o homem e os demais seres é a sua ação transformadora, a qual é denominada práxis e esta é uma característica essencialmente humana(ALVES, 2010).

Marx, no volume I, parte III, secção1,de*OCapital*, aborda o trabalho humano que, por questão de espaço, não vamos citaraqui. Vamos somente comentar.Na referida secção1, o autor realça que no processo de trabalho participam o ser humano e a natureza. Nesse processo, o homem coloca em ação todas as forças naturais proveniente do seu corpo de forma a transformar o recurso natural em algo de utilidade para sua sobrevivência. Marx ainda realça que "não se trata de formas instintivas", ou seja, o homem no processo de trabalho não age como um animal, só pelo instinto. O homem não só age sobre aquilo que ele opera, ele vai além, antes de transformar material natural, ele imagina e pensa. Ele vai transformar a natureza já sabendo os traços fundamentais que o material terá após a transformação. Isso nenhum animal consegue fazer, esse ato de projetar, dar uma forma e sentido ao material natural para satisfazer uma dada necessidade, antes do processo da transformação, é uma característica humana.

Para Freitas e Peres (2014, p.13), “A práxis se expressa através do trabalho, ao mesmo tempo, atividade produtora consciente, histórica e prática. Para Marx, teoria e prática são indissociáveis: teoria é a reflexão da realidade e prática é a ação refletida”, o que deixa clara a ideia da unidade dialética entre teoria e prática. No processo do trabalho, o homem não só se relaciona com a natureza, mas também com outros homens. Dessa forma, o trabalho se constitui num agente para a sociabilidade do próprio homem. Essas relações estabelecidas entre os homens, ao longo do processo produtivo, vão se constituir nas relações de produção.

Rosa e Andriani(2002) abordam as relações entre homem e natureza, o processo do trabalho, as relações de produção, a infraestrutura e a determinação da organização da sociedade e afirmam que:

> Segundo a proposição marxista, o homem atua praticamente e conscientemente sobre a natureza, construindo o mundo objetivo e a si mesmo na medida em que procura satisfazer suas necessidades. É nesse ponto que o homem se diferencia dos demais animais: pelo fato de produzir seus próprios meios de existência, o que faz em relação com a natureza e com os outros homens. É a partir desta organização que se procura conhecer a história e a realidade, partindo-se assim de indivíduos reais, concretos, inseridos e determinados pela realidade objetiva [...]. Na produção de seus meios de existência os homens se relacionam com a natureza, de onde se extrai os meios de produção e os objetos de trabalho, e se relacionam ainda com os outros homens, no que chamamos relações sociais de produção. Este conjunto de relações constitui a infraestrutura, ou seja, a base material da sociedade, que determina a organização concreta dos homens, o que implica dizer que a forma de organização da sociedade está determinada pelo modo como os homens se organizam dentro dela para produzir seus meios de existência. (ROSA;ANDRIANI,2002, p.2)

O homem, para atender a suas necessidades, relaciona-se com a natureza por meio do processo do trabalho. Essa relação é feita de forma consciente, previamente pensada e imaginada (planejada), objetivando ao atendimento de uma dada necessidade humana. Essa relação homem natureza e outros homens, travada ao longo do processo de trabalho, é denominada de relação de produção. É através da forma de si relacionar, entre si e com a natureza, que o homem procura estudar a história e melhor entender a realidade. Lembremos que o homem marxista não só tenta entender a realidade, mas também atuar sobre ela de forma a produzir algo socialmente melhor.

Outro ponto importante recai sobre a infraestrutura, a qual mostra que é a base material que gera e determina a maneira como a sociedade se organiza e não o contrário.

Rosa e Andriani(2002) referem-seàsuperestrutura da sociedade:

> Juntamente com esta infraestrutura desenvolve-se um conjunto de ideias que a expressam e servem para a reprodução do sistema. Este conjunto de ideias corresponde à superestrutura da sociedade, isto é, sua instância política e ideológica. As transformações que ocorrem nesta superestrutura, ou seja, nas ideias e conhecimentos produzidos em uma sociedade, são determinadas pelas mudanças que se concretizam historicamente nas bases materiais (infraestrutura), uma vez que com elas surge a exigência de novas ideias explicativas e novas regras.(ROSA;ANDRIANI, 2002, p.2)

Dessa forma, fica evidenciado que a superestrutura da sociedade, ou seja, suas ideias que servem e que se destinam àreprodução do sistema é o que Marx denomina de superestrutura da sociedade, a qual se materializa principalmente através das instituições: políticas, jurídicas e ideológicas. As modificações que ocorrem nessas instituições, na superestrutura einfraestrutura, são decorrentes de mudanças motivadas pela base material da sociedade, ou seja, na infraestrutura social.

Diante da importância da produção dos bens materiais na vida da sociedade, se faz necessário abordar alguns conceitos relativos ao processo produtivo. Para tanto, usaremos o livro de economia política de Levy Leontiev[8].

Levy Liontiev(1975, p. 2), em sua obra "La actividad laboral de los hombres encaminada a la creación de bienes materiales de vida se denomina *producción*" argumenta que a atuação dos homens no sentido de produzir bens materiais necessários a vida é chamada de produção. Emrelaçãoàprodução,Levy Liontiev(1975) escreve:

> [...] laciênciaestablece, que, en todas las fases deldesarrollo de lasociedad, laproducciónencierratres elementos fundamentales. En primer lugar, elpropiotrabajodelhombre, en segundo lugar, el objeto sobre el que recaeeltrabajo y, emtercer lugar, losmedios de trabajo. El trabajoes una determinada actividaddelhombre. Se llama objeto deltrabajo a todo sobre lo que recaeeltrabajodelhombre. Se denominanmedios de trabajolas cosas conayuda de lascualeselhombreejercesuefecto sobre el objeto deltrabajo.(LEONTIEV, 1975, p. 2)

---

[8]A intenção é diferenciar Levy Liontiev de Alexei N. Leontiev o criador da Teoria da Atividade.

Nas várias fases de desenvolvimento vivido pela sociedade, a produção abarca três partes fundamentais: a primeira parte é o trabalho em si do próprio homem; a segunda parte ésobre aquilo que recai (que recebe o trabalho humano) e a terceira partesão os meios de trabalho. Para não deixar dúvida, o autor diz didaticamente: "o trabalho é uma determinada atividade do homem"(LEVY LIONTIEV, 1975, p. 2). Ou seja, o trabalho não é uma atividade abstrata, é uma atividade destinada a um fim, tem um objetivo e uma determinada necessidade humana a ser atendida.

Após abordarmos alguns traços importantes do materialismo histórico e dialético, retomemos a questão da relação trabalho e educação. No capitalismo, o trabalhador não se apropria da essência do fruto do seu trabalho. Fato idêntico também se dá com a educação. Esta, em vez de formar o homem, produz nele deformação. No capitalismo, o homem não fica com a totalidade da riqueza produzida pelo seu trabalho. Ela vai para o dono dos meios de produção, o capitalista. Para o trabalhador restao seu salário, que nada mais é que o mínimo necessário para que continue tendo força de trabalho.

Com a educação ocorre algo parecido, pois esta não é um mecanismo para a sua libertação enquanto ser humano. A educação no capitalismo é também para o trabalhador mais um mecanismo de manter a sua alienação. O nosso foco em relação à educação ocorre em outro sentido. A educação tem que formar o ser humano no amplo sentido da palavra. Assim, Freitas e Peres(2014) colocam a relação do trabalho com a educação:

> O trabalho, ao tornar-se alienado do homem trabalhador, adquire conotação negativa. O mesmo ocorre com a educação, que também se torna alienada e, em vez de formar o ser humano, deforma-o. [...] Ou seja, é uma formação que assegura o desenvolvimento, a potencialidade do ser humano em toda a sua integralidade: tal deve ser a finalidade da educação.(FREITAS;PERES, 2014, p.14)

As autoras chamam a atenção para a relação de negatividade do trabalho e da educação enquanto meio de alienação, na visão do Capitalismo. Em contrapartida,elas defendem uma formação educacional para o homem, na qual ele consiga trabalhar e desenvolver todas as suas capacidades. De forma indireta, elas estão se referindo ao conceito marxista de ominilateralidade, de que se não fossem as amarras impostas pelo Capitalismo, o homem poderia chegar ao topo de sua capacidade produtiva e também a um alto grau de consumo e de prazer.

2.3 VIGOTISKY CONTRIBUIÇÕES AO ENSINO E À DIDÁTICA

Tendo como base ateoria marxista do materialismo histórico dialético, Vygotsky[9] juntamente com sua equipe, desenvolveu a teoria histórico-cultural, que tem como tese básica que a mente do ser humano se desenvolve nas relações sociais, que os homens estabelecem entre si e não na dependência dos fatores biológicos, que o homem trazem sua carga genética.

Conforme descrevemLibâneo e Freitas (2007, p.43) “para Vygotsky, a constituição histórico-social do desenvolvimento psicológico humano ocorre no processo da atividade humana, por meio da apropriação da cultura e mediante a comunicação com outras pessoas”. Desse modo, o processo de formação do homem ocorre em suas relações com outras pessoas, que vão se apossando de todo complexo cultural e artístico acumulado ao longo da história da humanidade.

Vygotsky mostra que essa complexa rede de apropriação social das realizações humanas se dá desde a infância e prolonga ao longo de toda a vida do ser humano. A título de exemplo, para Vygotsky,esse complexo processo se inicia com o bebê, ao fazer o gesto de apontar, por meio de suas interações sociais com a mãe, e vai se intensificando e se tornando, cada vez mais, elaborado, diversificado e se prolonga pela vida.

Na luta pela sobrevivência, o homem desenvolveu uma série de ferramentas, as quais serviram como uma grande base material para nossa vida em sociedade. Os desenvolvimentos dessas ferramentas vão de simples instrumentos, como uma faca, até ferramentas com elevadíssimo nível de complexidade, como, por exemplo, o caminhão. Paralelamente, também foi necessário desenvolver ferramentas não materiais, as quais têm uma base mais subjetiva, como a atividade pensante, a qual tem uma dimensão individual que se constitui nas relações

Libâneo e Freitas (2007, p.43) apresentam a distinção entre as atividades externas e internas :[...] a atividade externa constitui-se nas relações sociais, originando todas as criações humanas como resultado da ação humana sobre a natureza e a realidade social, e atividade interna constitui-se como atividade pensante, que forma a consciência individual, determinada e inserida na atividade coletiva”. Assim, a atividade externa é definida como sendo as relações sociais que geram todas as criações do homem para que ele possa atuar na natureza e na realidade social. Já a atividade interna, é aquela relacionada ao pensamento eà consciência individual do homem.

---

[9]Vygotsky é grafado por: Vygotsky ou por Vigotski. Nas citações e no comentário seguimos a forma que o autor utilizou.

No entendimento de Vygotsky (ANO), existem diferenças conclusivas entre os animais e os humanos. Os animais são praticamente dependentes de seus traços genéticos, enquanto os seres humanos conseguem dominar e transmitir toda produção cultural da humanidade para suas novas gerações. Dessa forma, o homem tem a vantagem desua superação em relação à natureza. Para ele, os traços caracteristicamente humanos são obtidos via domínio da sua base cultural, através das interações sociais com outros seres humanos.

A título de exemplo, podemos afirmar que somente sabemos o que é uma enxada quando aprendemos a usá-la como enxada, sabendo por que e para qual finalidade ela foi feita. Para que isso aconteça, se faz necessário a mediação de outra pessoa. Tal mediação pode ocorrer de forma: oral, prática, proposital ou não.

Existe uma grande necessidade da mediação dos mais velhos, dos mais experientes, dos professores na tarefa de transmitir para as novas gerações todo legado cultural e artístico da humanidade. Conforme entendimento de Mello (2004, p. 139) se a Terra sofresse uma avaria na qual somente sobrevivessemas crianças com os instrumentos criados pelo homem, a vida continuaria, mas a história humana teria que começar novamente. Não haveria pessoas mais experientes para ensinar a essas crianças a usar os instrumentos, a ler os livros etc. As crianças, embora tivessem herdado toda cultura material e espiritual da humanidade, não teriam como se apropriar de todo esse legado.

Desde criança, o homem vai se apropriando de frações importantíssimas da cultura humana, num processo gradual, que opera de forma dialética tanto no plano individual e interno como também no planosociale externo, através das mediações. Vygotsky, em sua obra Pensamento e Linguagem (1989, p.30) apresenta o entendimento de que o "caminho" entre a criança e um dado “objeto" é mediado por um ser humano mais experiente. Esse processo de ligação é "complexo" e passa pelos campos "das histórias individual e social".O conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal – ZDP é um importante conceito em Vygotsky.Libâneo (2007) o define como:

> O conceito de zona de desenvolvimento proximal é básico para o ensino. Para Vygotsky, há dois níveis articulados de desenvolvimento: o desenvolvimento real e o desenvolvimento potencial. O desenvolvimento real (atual, funções já maduras) indica o nível de desenvolvimento das funções mentais que a criança consegue realizar coisas por si próprias, sem o auxílio do adulto ou de colegas. O desenvolvimento potencial (funções em maturação) é aquilo que uma criança ainda não consegue realizar de forma independente, mas o faz com a colaboração de pessoas mais experientes (por exemplo, a mãe, a professora). A zona de desenvolvimento proximal é a distância (no sentido de espaço compartilhado) entre o desenvolvimento real e o desenvolvimento proximal. Conforme Vigotsky, "a discrepância entre a idade real ou o nível de desenvolvimento atual, que é definida com o auxílio dos problemas resolvidos com autonomia, em colaboração com outra

> pessoa, determina a zona de desenvolvimento imediato da criança" (cf. A construção do pensamento e da linguagem, p. 327). Com base nesse conceito, toda relação pedagógica na sala de aula depende de atividades compartilhadas, cooperativas, de interação, de interlocução, entre professores e alunos e dos alunos entre si. Por meio dessas atividades, os alunos se apropriam dos conhecimentos, das habilidades, das atitudes, e desenvolvem suas competências cognitivas. (LIBÂNEO, 2007, p. 2)

O desenvolvimento real é constituído de funções mentais sedimentadas. Nesse nível de desenvolvimento, o aluno consegue fazer as atividades sem a ajuda do outro. Já o desenvolvimento potencial é composto de funções mentais em processo de maturação. Nesse nível, o aluno consegue realizar atividades com a ajuda de alguém, podendo ser o professor, ou pessoa mais experiente (pode ser um adulto ou mesmo um colega com mais experiência). A chamada de zona de desenvolvimento proximal - ZDP é a diferença entre desenvolvimento real e o desenvolvimento potencial. A importância do conceito de ZDP nos leva a concluir que a relação pedagógica depende da realização de atividades de forma: cooperativa, dividida, com diálogo entre professor e aluno, bem como entre aluno e aluno.

Como vamos abordar os conceitos científicos, se faz necessário tratarda distinção entre definição e conceito. Segundo Libâneo:

> **Definição** – A definição é a explanação do significado de uma palavra, a simples descrição de um objeto, ou, descrição de uma palavra ou locução pela indicação de suas características genéricas e específicas, de sua finalidade, pela sua inclusão num determinado campo do conhecimento. As definições são elementos necessários nas comunicações verbais, na argumentação, na construção dos sistemas científicos. **Conceito** – conceito é uma representação mental de um objeto real no nosso pensamento que se forma por meio de abstrações, a partir de características, atributos, propriedades, comuns a uma classe de objetos e fenômenos em suas relações, num sistema de conceitos. Os conceitos gerais ultrapassam o âmbito da percepção imediata. (LIBÂNEO, 2011, p.).

Assim, a definição é uma exposição do que significa uma palavra, a descrição de um objeto, usando suas características, tanto as genéricas quanto as específicas, a finalidade do que está sendo descrito e a sua inclusão num dado campo do conhecimento humano. Já conceito é a representação de algo que já foi interiorizado e se encontra na mente humana devidamente catalogado, com todas as suas características e propriedades, em relação a um sistema de conceitos.

Os conceitos, espontâneos ou cotidianos, são aqueles adquiridos de forma espontânea, sem intencionalidade e fora, por exemplo, da escola e como tal não possuem uma base mais sistematizada. Já os conceitos científicos são adquiridos de forma sistemática, intencional, na escola, de forma mediada e devidamente planejada pelo professor (FREITAS; PERES, 2014).

É no ensino escolar que a criança aprende os conceitos científicos e é justamente essa uma das principais funções da escola. De acordo com Freitase Peres(2014, p.17):"O ensino escolar é como uma ponte entre os conceitos cotidianos e os conceitos científicos".

Vygotsky (2005, p.135) realça a diferença entre conceitos espontâneos e conceitos científicos ao afirmar que: "Um conceito espontâneo origina-se de situações concretas, por sua vez, o conceito científico envolve uma atitude mediada em relação ao objeto".A base de elaboração dos conceitos espontâneos é o mundo concreto, o mundo imediato, já os conceitos científicos requerem mediação "em relação ao objeto".

Segundo Freitas ePeres(2014), a complexa operação de formação de conceitos é uma atividade mental de forma superior, que tem como característica a passagem dos processos não mediados do pensamento humano, para os processos mediados por leis gerais. Vygotsky (2000, p.173) entendia que através das relações sociais, por meio de interação e comunicação, acontece a internalização dos conceitos, por meio de: "reconstrução interna de uma operação externa". Ele ainda chamava a atenção para o fato de que à medida que aprende um conceito, o estudante não mais pensa no objeto de forma imediata e, sim, de uma maneira mediada.

A formação de conceitos não é uma mera soma de um grande volume de conexões inferiores, que adquire uma forma complexa do ponto de vista quantitativo. O processo de formação de conceitos não pode ser reduzido do ponto de vista qualitativo a nenhum tipo de operação associativa, por maior que seja, mas apresenta, conforme entendimento de Vygotsky (2000, p.177), um grande traço característico "a passagem de processos imediatos a operações mediadas por leis".

Como existe total dependência do processo de apropriação dos conceitos da capacidade psíquica, ao ensinar conceitos científicos há a necessidade de também ensinar a pensar esses conceitos, objetivando formar as capacidades psíquicas correspondentes. Ou seja, ao ensinar conceitos matemáticos temos que dispor de uma correspondente didática da matemática relativa a esses conceitos (LIBÂNEO,2013).Outros conceitos de Vygotsky serão abordados ao longo da nossa exposição nos trabalhos de Davidov, Leontiev e na abordagem teórica sobre o experimento didático formativo.

2.4PROPOSTA NUCLEAR DE DAVYDOV: ENSINO E FORMAÇÃO DE CONCEITOS

VasilyVasilyevichDavidov nasceu em 1930, em Moscou, e faleceu em 1998. Entrou no Departamento de Psicologia da Faculdade de Filosofia, da Universidade Estadual de Moscou, cursou Filosofia e Psicologia, formando-se em 1953, fez carreira com o pesquisador e cientista na área de psicologia pedagógica (LIBÂNEO; FREITAS, 2013). Davidov desenvolveu suas pesquisas, na última metade do século XX, como parte de um amplo projeto de transformação das escolas e da qualidade do ensino russo.

Para Davidov, a função mais importante da escola é propiciar todos os meios necessários para que o aluno se aproprie do conhecimento, adquirindo um pensamento teórico conceitual. Na sua visão, compreender realmente um conceito significa compreender a essência de tal conceito. Davidov compartilhava as palavras de Lenin quando esse dizia: "entender significa expressar em forma de conceitos" (DAVIDOV, 1988, p. 72).

O pensamento teórico é um tipo de conhecimento que permite entrar na essência do objeto, procurando a sua relação principal, sem se ater aos fatos isolados ou com as características imediatas e diretas do objeto. Ele necessita de um sujeito indagador que estude o objeto e o fenômeno, numa visão sistêmica, enxergando-os como uma rede de relações conceituais ligadas a um todo. O pensamento teórico não se satisfaz em somente classificar os objetos e fenômenos por meio de observações indiretas das suas características particulares e imediatas. O que de fato constitui o pensamento teórico é a sua essência, a qual é acessada e compreendida através das relações mediadas e é justamente esse tipo de pensamento que se encontra nos conceitos científicos (DAVIDOV, 1988).

Os conceitos científicos são provenientes de processos e procedimentos de investigação de uma ou mais áreas do conhecimento humano, bem como de pesquisas, as quais requerem um tipo de pensamento e análise peculiar. Quanto ao pensamento, esse necessita de ações mentais de abstração, generalização e conceito. O aluno, ao aprender um novo conteúdo, ou mesmo um novo aspecto do conteúdo, não deve apropriar-se só do resultado, mas de todo processo utilizado, o qual culminou na origem desse conteúdo. A importância desse processo resideno fato deque o aluno aprendendo poderá desenvolver as funções mentais relativas a esse objeto.Com a proposta de Davidov (1988), a organização do ensino passa pela organização da atividade para o aluno e proporciona as conclusões científicas relativas aos objetos e seus respectivos conceitos.

Para Vygotsky (2000, p. 226) "o conceito surge quando uma série de atributos abstraídos torna a sintetizar-se, e quando a síntese abstrata assim obtida torna-se forma basilar de pensamento [...]". Ou seja, ao abstrair vários atributos de um objeto, após fazer a síntese, é que a criança (o aluno) produz essa fórmula básica e original de pensamento, que é o conceito do objeto em questão. De posse dessa base conceitual é que ele percebe e passa a conhecer a realidade ao seu redor.Como o conceito teórico é a essência do objeto, ele propicia ao sujeito a oportunidade de acessar o movimento dialético entre essência e aparência, bem como entreas conexões internas e externas do objeto. O movimento de pensamento que se estabelece para compreender o objeto é um movimento que vai do pensamento abstrato para o pensamento concreto, é também esse o método usado pelo marxismo para o conhecimento da realidade.

Davidov(1988) preconiza que a estratégia educacional básica para possibilitar aos alunos a reprodução do pensamento teórico são as tarefas que possibilitam a formação de abstrações e generalizações das ideias principais e nucleares do objeto. O professor, ao propor tarefas e ações aos seus alunos,deveque ter como meta que estas têm que propiciar a investigação de problemas relativos ao objeto do conhecimento. Elas têm de desvendar o processo de origem, compreender as transformações, bem como perceber a principal relação que se apresenta no objeto em estudo. O estudante, quando compreende o núcleo de um conteúdo ou objeto, passa a transitar pelo seu pensamento, os traços abstratos até chegar à forma concreta do objeto. O autor mostra que o aluno ao começar a fazer o uso da abstração e a generalização, como maneira de deduzir as relações particulares do objeto e também para uni-las com outras abstrações. Desse modo, ele transforma suas estruturas mentais iniciais em um conceito, o qual representa o núcleo ou a essência do que está sendo estudado. Tão logo o estudante consiga fazer a abstração do objeto, ele deve fazer sua generalização.

A Generalização no entendimento de Davidov é o processo que, por meio de comparações, o indivíduo consegue fazer a separação de algumas propriedades repetidas. Ou seja, ele retira de um fenômeno, aquelas características, periféricas e repetidas e aquilo que fica e permanece é essência de fenômeno ou objeto. Conforme entendimento de Freitas e Peres(2014, p.22), a generalização é o caminho, a estrada que conduz os alunos aos conceitos científicos (conceitos escolares),e é a escola a grande propagadora dos conceitos científicos.Davidov, falando sobre a generalização, num seminário na Faculdade de Psicologia de Amsterdã , em 1992, citava Vygotsky:

> “A generalização - escreveu Vygotsky - é um ato do pensamento perfeitamente conceitual (semântico) que reflete a realidade de modo bastante diferente de como esta é refletida nas sensações e nas percepções imediatas”. E, em seguida, acrescenta a seguinte observação: “Existem todos os fundamentos para considerar o significado da palavra como unidade do pensamento e da linguagem, mas também como unidade de generalização, de comunalidade, de comunicação e de pensamento”. (VYGOTSKY, 1982-86, vol. 2. p. 19 apud DAVIDOV, 1997, p. 1)

Assim, Vygotsky (1998) atenta-se para o fato de que no processo de generalização de um dado fenômeno ou objeto, a realidade se apresenta de uma forma bastante diferente daquilo que lhe é imediato e periférico,pois existe uma unidade no processo de generalização entre o pensamento e a linguagem, de comunalidade, ou seja, certo sentido de pertencimento entre mais de uma pessoa, de comunicação e pensamento, daquilo ou sobre aquele conceito ou fenômeno objeto da generalização. Fruto da análise de suas experimentações, o autorencontrou quatro tipos de generalizações: amontoados sincréticos, complexos, pseudoconceito e conceito.

Vygotsky (1998) compreende as generalizações do tipo amontoado sincrético, como o próprio nome diz, são aquelas que remetemàideia de amontoado, de sincrético, aquilo que é misturado ou que é proveniente de várias origens. Ele usa a expressão: “conexão desconexa”, para expressar que o amontoado não tem uma característica clara e advém de impressões casuais. Na generalização do complexo, se recorre somente à experiência sensível e imediata, sem um forte nexo unificante, e esses podem ainda serem mudados ao longo do processo. Não existe nenhuma hierarquia entre os nexos usados no processo.A generalização pseudoconceito é um caso particular do caso complexo. Davidovafirmasobre o pseudoconceito:

> Portanto, a criança pode livremente escolher e unir em um mesmo grupo todos os triângulos independentemente da cor, da medida, e assim por diante. Não obstante, uma análise específica demonstra que a unificação foi efetuada pela criança segundo um genuíno reconhecimento visual do traço caracterizando o triângulo na evidência (o fechamento, a interseção característica das linhas, etc.) sem qualquer identificação das propriedades geométricas desta figura, ou seja, sem a "ideia" do triângulo. (DAVIDOV, 1992, p. 2-3)

Dessa forma, a criança quis de maneira livre reunir no grupo do triângulo todos os desenhos que ela observou que de alguma maneira remetiamà forma de uma figura com três lados, mesmo não tendo ainda dominado o conceito de triângulo. Decorre disso a expressão muito bem nomeada de pseudoconceito.

Ainda sobre o pseudoconceito, Vygotsky mostra a importância e o uso dele no nosso diaadia:

> Pelos pseudoconceitos - ele escrevia – se realiza muito frequentemente o pensamento em nossa vida cotidiana. As formas superiores do pensamento por complexos sob o aspecto do pseudoconceito são a forma de transições em que se conserva, também, o nosso pensamento cotidiano, que se baseia na linguagem comum. (VYGOTSKY, apud DAVIDOV, 1992,p.3).

Davidovafirmaque Vygotsky, por ter vivido pouco, não teve tempo suficiente para analisar os conceitos científicos e explorar todas as suas potencialidades, deixando essa tarefa para seus seguidores, conforme fica claro na seguinte citação de Davidov:

> Embora Vygotsky estivesse consciente do fato de que a análise dos conceitos científicos requer instrumentos da lógica dialética, não teve tempo, todavia, para assimilá-los de modo suficiente para utilizar plenamente suas potencialidades. Este objetivo foi transmitido e perseguido, então, durante várias décadas por seus alunos e continuadores (Elkonin, Ilyenkov e outros) e entre estes eu me pus também. Por isso, junto com meus colaboradores, dedicamos nossas pesquisas à identificação dos

> critérios bastante precisos para a diferenciação entre os dois tipos do pensamento humano, - cotidiano ou empírico, e científico, ou teórico, e também para os dois tipos fundamentalmente diferentes de generalização e de conceito que estes tipos de pensamento pressupõem.(DAVIDOV, 1992, p.7)

Ainda no mesmo artigo,Davidov estabelece um critério para diferenciar o conceito científico de um empírico. O conceito científico (teórico) é aquele em que o seu conteúdo, mediante algumas ações intelectuais, especialmente a reflexão, estabelece determinadas relações genéticas estáveis de pertencimento àcélula (componente, receptáculo) de um sistema que esteja sedesenvolvendo. Na base dessa célula, se pode deduzir o conceito e todo o desenvolvimento desse sistema. No caso do conceito empírico, não existe essa dinâmica de movimento. Nos conceitos científicos, existe todo um processo de dinâmica do seu movimento, conforme fica devidamente explicitado na seguinte citação de Davidov:

> Um critério para o conceito autenticamente científico ou teórico é, segundo nós, aquele seu conteúdo que, mediante certas ações intelectivas, particularmente a reflexão, fixa certas relações genéticas fixas de pertencimento ou a "célula" de um determinado sistema de objetos em desenvolvimento. Sobre a base desta célula, pode-se deduzir mentalmente por este conceito o processo total do desenvolvimento do sistema dado. Em outras palavras, o pensamento e os conceitos empíricos consideram os objetos como constantes e acabados, enquanto que o pensamento e os conceitos teóricos analisam os processos do seu desenvolvimento. (DAVIDOV, 1992, p.7)

Davidov termina o artigo reafirmando as bases teóricas deixadas por Vygotsky, bem como seguindo inclusive três "posições" levantadas pelo próprio Vygotsky. "São elas: uso do método de investigação da posição da análise casual; distinção entre generalizações das coisas" e "generalização dos pensamentos e a posição de que o conceito teórico está presente no pensamento, através da reflexão" (DAVIDOV, 1992, p.7).

De acordo com Davidov (2013), diante da filosofia e pedagogia, a ideia de atividade é entendida como o processo, a maneira pela qual a realidade é transformada pelos esforços do ser humano. O trabalho é a essência, é a síntese dessa transformação. Tanto a atividade humana material quanto a espiritual são decorrentes do trabalho e todas elas têm como foco principal a transformação da realidade para atender às necessidades humanas.

O psicólogo russo A. N. Leontiev (DATA) e seus seguidores diziam que entre os principais componentes da atividade estão: necessidades, motivos, objetivos, condições, meios de seu alcance, ações e operações. Davidov dizia que:

> Uma particularidade importante da atividade consiste em que ela tem sempre um caráter objetivo evidente e não evidentes todos os seus componentes têm um ou outro conteúdo de objeto, e ela própria está obrigatoriamente dirigida para a edificação criativa de um produto material ou espiritual determinado (assim, graças

> á atividade do trabalhador se edificam máquinas, edifício reais, enquanto na atividade do escritor e do pintor se criam obras de arte). (DAVIDOV, 2013, p. 1)

A atividade tem sempre um objetivo, um propósito, que pode ser relacionado à esfera material (construir um prédio) ou um caráter relacionado à esfera subjetiva (pintar um quadro ou compor uma música, por exemplo).Como no uso do termo atividade está imbuída a intencionalidade em uma ou mais esferas particulares da vida humana, evidentemente que se tem de deixar claro quais são os conteúdos envolvidos e os produtos finais que se pretendem com tal atividade.

Da associação da psicologia histórico-cultural e da teoria da atividade com a educação emerge uma melhor "compreensão das relações entre cultura, aprendizagem e desenvolvimento humano" (LIBÂNEO, 2004, p. 118). Ou seja, o ensino como a educação são formas que, de maneira organizada, possibilitam a apropriação pelo homem de toda capacidade cultural e espiritual construída e objetivada sócio-historicamente. Segundo o entendimento de Libâneo(2004, p. 118), se faz necessário que "o sujeito realize determinada atividade" objetivada a essa apropriação culturalpara que todo esse processo ocorra.

Libâneo(2004), interpretando a teoria da Atividade de Leontiev, entende: que a apropriação resulta da reprodução pelo sujeito da capacidade e procedimentos da conduta humana, os quais foram formados sócio-historicamente e também, que toda ação humana está orientada para um objeto e como tal, essa conduta tem um caráter objetal.Ou seja, o processo de apropriação vem da reprodução de uma dada capacidade ou procedimento já criado por alguém, e como tal faz parte do legado desenvolvido ao longo da história. Se alguém desenvolve uma dada ação, ela está ligada a um dado objetivo. Por isso dizemos que essa ação tem um caráter objetal.

O homem, ao tentar se "apropriar" de um dado objeto, desenvolve ações as quais interagemcom as propriedades e relações desse objeto, e isso permite que o homem vá construindo as imagens que correspondem ao objeto que se queira apropriar. Esse processo é denominado de "internalização da atividade externa" (LIBÂNEO, 2004, p. 119). Nesse sentido, é necessário enfatizar que nem todo processo humano é chamado de atividade. ConformeLibâneo(2004, p. 118), "Por esse termo designamos apenas aqueles processos que, realizando as relações do homem com o mundo, satisfaz uma necessidade especial a ele". Ou seja, para receber o nome da atividade uma dada ação humana tem que satisfazer uma necessidade "especial", bem determinada, desse homem na sua relação com o mundo.

Libâneo e Limonta, (2015, p.2) mostram que, do ponto de vista estrutural, uma atividade é formada por "necessidades, motivos, finalidades e condições de realização da atividade".A realização de uma dada atividade depende das ações, as quais terão várias operações correspondentes. "Na consciência do homem se refletem os conteúdos objetais das necessidades, dos motivos, das finalidades e das condições para que estas sejam alcançadas; as imagens deste reflexo orientam as ações e toda a atividade humana em uma ampla consideração"(DAVIDOV, 2002, apud LIBÂNEO, 2015, p.2). Dessa forma,Davidov mostra o papel da consciência na orientação da execução das ações necessárias para consumar uma dada atividade.

Os autores, ainda objetivando clarear melhor, o tipo de processo que vem, realmente, a ser uma atividade, afirmam: "Por atividade designamos os processos psicologicamente caracterizados por aquilo a que o processo, como um todo, se dirige (seu objeto), coincidindo sempre com o objetivo que estimula o sujeito a executar esta atividade, isto é, o motivo"(LIBÂNEO; LIMONTA, 2015, p.3).Ou seja, a atividade não é qualquer processo no qual ocorra envolvimento do sujeito. A atividade é um processo psicológico no qual todo o processo é dirigido a um dado objetivo, objetivo este que é um estimulante ao sujeito (esse estimulante é o motivo) a realizara sua execução. A atividade está imersa nas questões psicológicas e envolveemoções e sentimentos. A esse respeito, Libâneo e Limonta (2015) explicam:

> Outro traço psicológico importante da atividade é que um tipo especial de experiência psíquicas - emoções e sentimentos- está especialmente ligado a ela. Estas experiências não dependem de processos separados, particulares, mas são sempregovernadas pelo objeto, direção e resultado da atividade da qual elas fazem parte. (LIBÂNEO; LIMONTA, 2015, p.3)

Ou seja, a emoção e o sentimento não são alheios ao processo da atividade. Essas experiências psíquicas estruturais estão presentes na atividade. Libâneo (2004) falando sobre a estrutura da atividade, aborda a questão da seguinte maneira:

> A estrutura da atividade é constituída pelas necessidades, motivos, finalidades e condições de realização da atividade [4]. A atividade surge de necessidades, as quais impulsionam motivos orientados para um objeto. O ciclo que vai de necessidades a objetos se consuma quando a necessidade é satisfeita, sendo que o objeto da necessidade ou motivo é tanto material quanto ideal. Para que esses objetivos sejam atingidos, são requeridas ações. O objetivo precisa sempre estar de acordo com o motivo geral da atividade, mas são as condições concretas da atividade que determinarão as operações vinculadas a cada ação. (LIBÂNEO, 2004, p. 119)

Desse modo, a atividade vem no sentido de satisfazer uma necessidade concreta, e a essa necessidade aciona os motivos, os quais são canalizados para um dado objeto. Uma vez satisfeita essa necessidade,o processo da atividade está finalizado. Para atingir os objetivos vinculados, a atividade é desenvolvida em ações. Sabendo que o objetivo tem de estar em perfeito acordo com o motivo determinante da atividade, lembremos que serão os condicionantes práticos que ditarão cadaoperação necessária à ação.

A estrutura da atividade apresenta um caráter dinâmico, como a existente entre a atividade e a ação. Libâneo e Limonta (2015) observam que:

> O motivo da atividade, sendo substituída, pode passar para o objeto(o alvo) da ação, como o resultado de quea ação é transformada em uma atividade. Este é um ponto excepcionalmente importante. Esta é amaneira pela qual surgem todas as atividades e novas relações com a realidade. Esse processo é precisamente abase psicológica concreta sobre a qual ocorrem mudanças na atividade principal e, consequentemente, as transições de um estágio do desenvolvimento para o outro. (LIBÂNEO;LIMONTA, 2015, p.4)

Conforme mostram os autores,o motivo da atividade podetransformar o objeto (o alvo) pelo simples fato de uma ação ser transformada numa atividade. Esse mecanismo de troca de uma ação se transformando numa atividade correlata, é ditado pela realidade. Assim, é precisamente esse o processo que determina a mudança na atividade principal.

A teoria da atividade é rica e diversificada. O objetivo de abordá-la de forma sintética, no presente trabalho, foi no sentido de apresentar a sua contribuição na formação da teoria do ensino desenvolvimental. Davidov soube com maestria usá-la em sua teoria. Como exemplo disso, podemos citar a atividade de estudo ou atividade de aprendizagem, dependendo do termo que se prefira usar.A caracterização geral da atividade de estudo (no caso das crianças):

> Atividade de aprendizagem das crianças na escola passa por: a) ser uma atividade humana material ou mental transformadora da realidade da pessoa; b) possui também um conteúdo específico relativo ao objeto e isso a diferencia dos demais tipos de atividade humana (como exemplo jogos ou um tipo específico de trabalho); c) ela sempre apresenta, envolve um elemento novo e ou modificado, ou melhor, um princípio criativo ou transformador.(DAVIDOV, 2013, p. 1)

A criança apropria (incorpora, aprende) um dado material de certa atividade de estudo, quando e somente quando, ela tem necessidade e motivação interior para tal. Além disso, existe nesse processo a transformação do material apropriado, gerando um novo produto de cunho espiritual, o conhecimento. O autor explica que somente assim existe uma plena atividade humana (DAVIDOV, 2013, p. 2).

Os motivos e as necessidades educacionais conduzem a criança para a obtenção, por ela mesma, do conhecimento. Isso ocorre como o resultado da transformação que acontece no material da tarefa de estudo dado ao aluno. Essas transformações evidenciam as relações internas (ou essenciais) e ficam perceptíveis no material. O aluno na escola, por meio do raciocínio e da investigação, passa a descobrir a origem das manifestações externas no material por ele assimilado. Davidov(2013, p.2) chama de necessidade educacional aquela que o aluno tem de experimentar e/ou observar, de uma forma concreta (real) ou mental, o material de estudo com a finalidade de separar o que é o seu essencial-geral do particular, com o objetivo de observar suas ligações. Para o autor, a procura (demanda) da criança pelo ensinamento é exatamente à vontade (aspiração) de adquirir conhecimento a respeito do geral, ou melhor, aquele conhecimento teórico de alguma coisa, obtido através da experimentação do objeto. Na transformação do objeto, aparece de forma obscura (disfarçada) o "elemento criativo", aquele algo novo, a qualidade educativa e atuante, a qual forma a aprendizagem daqueles conhecimentos, referente ao objeto que fora experimentado pelo aluno.

Existe um grande vínculo (correlação) entre: a atividade de estudo, a aprendizagem e o ensino. Na atividade de estudo estão incluídos os processos de aprendizagem, que somente acontecem (se realizam) "quando existe uma transformação objetiva deste ou daquele material" (DAVIDOV, 2013, p. 2). O autor afirma que:

> Deve-se enfatizar, que a atividade de estudo e a meta de estudo a ela correspondente estão ligadas antes de tudo com a transformação do material, quando para além de suas particularidades multifacéticasexteriores, se pode descobrir, afixar e estudar a base essencial ou interior e deste modo compreender todas as manifestações exteriores desse material. (DAVIDOV, 2013, p. 2)

Nesse sentido, ele reafirma que cada atividade de estudo tem uma ou mais metas de estudo correspondente. Ambas (atividade de estudo e meta) são ligadas à transformação material, quando vão além das várias faces exteriores que se pode descobrir, objetivando extrair e estudar aquilo que é essencial, mais interior. Desta forma, serão entendidas todas as manifestações de caráter exterior do material analisado nesta pesquisa. Muito enfático e didático, o autor repete:

> [...] mais uma vez: os conhecimentos, que refletem a interligação do interno com o externo, da essência com o fenômeno, do primitivo com o derivado, são chamados de *conhecimentos teóricos*. Mas estes só podem ser aprendidos reproduzindo-se o próprio processo de seu *surgimento*, obtenção e conformação, ou seja, transformando novamente certo material. Este material tem destinação educacional, haja vista que ele agora está destinado apenas a percorrer de novo os caminhos que outrora já trouxeram de fato as pessoas à descoberta e formulação dos conhecimentos teóricos. (DAVIDOV, 2013, p. 3)

Assim, o autor retoma o significado de conhecimento teórico, bem como afirma que esse tipo de conhecimento somente pode ser aprendido refazendo seu processo: desde seu surgimento, passando pela obtenção e conformação, para o transformarem um novo material. Mas não é um material qualquer, no caso da tarefa de estudo, a transformação resulta em um material destinado àescola, ao ensino. De acordo com o autor, a experimentação é a única maneira por meio da qual o aluno consegue entender a ligação do que é interno com o que é externo de algo novo que foi apropriado (assimilado).

Essas atividades de aprendizagem têm que apresentar-se “organizada adequadamente”, ou seja, a criança tem que ter uma necessidade interna e estar devidamente motivada, caso contrário, a atividade de aprendizagem não logrará êxito.Para Davidov (2013),o binômio necessidade e motivo levam a criança à apropriação do conhecimento, com a transformação de um material para ela fornecido. A criação de experimentos, por parte do professor,éuma importante parte integrante da atividade. Os experimentos e as transformações levarão o aluno a se esforçar no sentido de perceber as inter-relações existentes entre os aspectos gerais e particulares do objeto, isso significa se apropriar do conhecimento científico.

Apropriação e a aprendizagem estão bastante relacionadas com a atividade de estudo. As pessoas, independentemente da idade, se apropriam de forma contínua do conhecimento durante a execução das mais variadas atividades (por exemplo, trabalho e jogos). Davidov lembra que: “[...] a atividade de estudo que envolve processos de apropriação é realizada somente quando esses processos tomam a forma de uma transformação dirigida-ao-objetivo de um material particular” (DAVIDOV, 1999, p.3). O autor está dizendo que o processo de aprendizagem somente se realiza quando ele se apresenta como uma transformação dirigida ao objeto de um dado material.

A atividade de estudo e os objetivos de aprendizagem estão ligados ao processo de transformação no material de estudo do aluno, uma vez que esse, ao estudar, percebe e fixa o componente central que evidencia traços importantes de aspectos externos de um dado material. Dessa maneira, o aluno entende a relação existente entre os aspectos externos do material e as respectivas mudanças em seu aspecto (transformação). Davidovtem toda uma atenção especial na organização da atividade de estudo dos alunos. Para ele: “Antes de tudo, esta é uma organização do processo de estudo-educativo, que realiza com base na necessidade dos próprios alunos de dominar as riquezas espirituais das pessoas” (2013, p.3). Em primeiro lugar, o principal componente desse processo é a necessidade dos alunos de se apropriar das riquezas espirituais e das pessoas, ou seja, de se apropriar dos traços subjetivos humanos: os valores morais, as normas de convivência com os outros, as noções de direito e de cidadania, por exemplo. O autor entendia que a necessidade do aluno tinha que ser procurada e despertada de forma gradual e constante.

Para Davidov (2013), a segunda condição para a correta organização da atividade de estudo “é a colocação perante os alunos de uma tarefa de estudo cuja solução é o que justamente irá exigir deles a experimentação com o material a ser assimilado. Não é possível resolver a questão de estudo sem esta transformação" (DAVIDOV,2013, p.3). Esse segundo ponto organizativo da atividade é a elaboração, por parte do professor, de uma tarefa de estudo para os alunos. No entanto, tem que ser uma tarefa que provoque neles a experimentação do material que se pretende compreender, bem como a sua transformação.

Dessa forma, a tarefa de estudo, que é tão somente o começo do desdobramento da atividade na sua plenitude, exige dos alunos da escola uma análise das condições de origem destes ou daqueles conhecimentos teóricos e o domínio das formas de ações generalizadas correspondentes.Não podemos esquecer que ela é somente uma parte da atividade. Um terceiro ponto a ser observado, na organização da atividade de estudo, seria "exigir dos alunos da escola uma análise das condições de origem destes ou daqueles conhecimentos teóricos e o domínio das formas de ações generalizadas correspondentes" (DAVIDOV, 2013, p.3). Falando de outra maneira, o aluno, ao resolver a tarefa de estudo, descobre nela arelação original, essencial.

Podemos criar tarefas de estudo que envolvam várias disciplinas. Para isso, elas têm que despertar no aluno a atenção "plena e correta de ações e operações no processo da sua execução. A ação fundamental e primordial é a transformação pelo aluno de uma tarefa que não pode ser resolvida pelos métodos que ele conhece" (DAVIDOV, 2013, p.4). O objetivo de tal ação é encontrar e perceber uma base geral de particularidades parciais de todas as tarefas de uma mesma espécie.

Chama-se confecção de modelo, a uma tarefa de estudo em que,em sua forma objetiva, gráfica ou simbólica, já tenha uma relação descoberta e vivenciada na própria tarefa que o aluno está resolvendo. Davidov chama atenção para: "não é toda representação deste ou daquele material que se pode chamar de modelo, mas somente aquela que fixa certa relação geral (essencial) das condições da tarefa de estudo que está para ser resolvida" (DAVIDOV, 2013, p.4).Ao transformar o próprio modelo numa ação de estudo, objetivando estudar de forma minuciosa todas as propriedades existentes na relação geral que o modelo evidenciou, Davidov chama esse tipo de ação de estudo especial.

Nas ações de estudo, é feita também a abordagem das ações de controle e avaliação. No entendimento de Davidov, o controle é a garantia para o aluno que executou a tarefa de estudo de forma correta, já a ação avalia se o aluno apropriou a forma geral ou a essência da tarefa. No caso de ter se apropriado ou não do objeto, a ação de avaliação, quando bem feita, permite avaliar o grau com que o aluno apropriou-se da forma geral (o aluno apropriou parcialmente, satisfatoriamente ou não se apropriou?) (DAVIDOV, 2013).

O ensino desenvolvimental tem como objetivo desenvolver e ou aperfeiçoar a consciência e a personalidade do aluno. A atividade de estudo, devidamente preparada pelo professor, desenvolve de forma proposital a consciência e o pensamento teórico (científico) e isso favorece o desenvolvimento da personalidade do estudante.O pensamento teórico e a consciência realizam de uma forma aparente-ativa, aparente-figurativa, ou seja, ambos (pensamento teórico e consciência) têm uma dimensão real (concreta e ativa) e também outra dimensão subjetiva (não real), bem como verbal-discursiva (ou seja, uma dimensão relacionada à fala, ao discurso). Tanto o pensamento teórico como a consciência "estão devidamente representados na ciência, na arte, na moral e no direito" (DAVIDOV, 2013, p.5).

A elaboração de boas e bem organizadas tarefa de estudo leva o homem (o aluno) a estabelecer uma relação racional-dialética, com a sua realidade, objetivando encontrar soluções tanto para a sua vida prática quantopara a de ordem subjetiva. Essas tarefas de estudos prepararam o aluno para separar o que é externo do internoepara compreender a essência dos fenômenos. Como bem assinala Davidov(2013, p.5): "é sabido, que as manifestações externas não são semelhantes à sua essência interior".

O que é chamado de pensamento teórico ou científico é também chamado de pensamento dialético. O conhecimento teórico criauma consciência teórica, e essa dirige a atenção do homem para um melhor entendimento das suas próprias ações cognitivas, para fazer a análise do seu próprio conhecimento. Essa análise é chamada em filosofia, de reflexão. "Sabemos que somente a consciência e o pensamento dialético é que são capazes de solucionar as contradições" (Davidov, 2013, p.5). Mediante a reflexão (capacidade de fazer análise do seu próprio conhecimento), com bom e dinâmico conhecimento teórico, é possível ao homem encontrar perspectivas de soluções para as várias contradições que a dinâmica da vida lhe impõe.

Ao longo do processo educacional, é de fundamental importância formular o pensamento dialético em todas as suas etapas. Para tanto, se faz necessário, como bem assinalouDavidov(2013, p.5), desenvolver nos alunos "capacidades: criativas, de ativismo, da independência, isto é, no final de contas o desenvolvimento de sua personalidade". O professor quando bem organiza as atividades de estudo, desenvolve as capacidades anteriormente citadas. Eleconsegueavançar aos poucos, no sentido de fazer junção entre a experimentação escolar e a experimentação vinda da pesquisa. Desse modo, ele aumenta a capacidade criativa dos alunos, realçando positivamente suas personalidades.Davidov (1999, p.5) propõe teses principais destinadasà elaboração denovos programas escolares. Dentre elas, podemos citar:

Tese1- “Os programas da escola tradicional estão elaborados em correspondência com as exigências lógico-formais sobre o pensamento humano”(DAVIDOV, 1999, p.5). Nestes programas, o material de estudo é organizado de forma que o processo de apropriação do pensamento do aluno vai da observação de particularidades externas de um dado objeto (aparência), à percepção de elementos: iguais, equivalentes ou comuns, os quais são nomeados por palavras (1999, p. 6). É importante observar que, dessa forma, o aluno apropria-se do “conhecimento geral”, mas como proveniente da comparação de fenômenos particulares. O pensamento do aluno acontece do particular para o geral do fenômeno. Davidov (2013[10], p.6), sobre essa maneira equivocada do aluno se apropriar do conhecimento, diz: “Os programas escolares, que são precisamente o que proporciona tal movimento do pensamento no processo de assimilação dos conhecimentos, vêm a ser um catálogo, uma classificação ou uma conglomeração de conhecimentos”.

Tese 2- O ensino, com uso dos programas tradicionais, desenvolve nos alunos noções e conceitos empíricos. Mas para desenvolver, como entende Davidov (2013, p.6)noções e conceitos empíricos e bom senso, o aluno não precisaria frequentar a escola.

Tese 3 –Davidov afirma que:

> Nossos programas são formulados com base na compreensão dialética do pensamento. O material escolar desses programas são *transformados ativamente* pelos alunos antes de tudo por meio da execução de determinadas *ações* materiais ou mentais. No processo de tal transformação os alunos descobrem e evidenciam no material certa *relação geral* ou essencial, de cujo estudo se pode descobrir suas numerosas manifestações particulares. Neste caso, o «conhecimento geral» é imediatamente assimilado pelos alunos por meio da análise atuante do material. Suas manifestações particulares são distinguidas do «conhecimento geral». O pensamento dos alunos move-se do «geral para o particular». Os programas escolares que propiciam tal movimento do pensamento, fixam os sistemas integrais dos conhecimentos. As *ações* dos alunos desempenham papel decisivo na sua aprendizagem.(DAVIDOV, 2013, p. 6)

O programa proposto por Davidové concebido na dialética do pensamento. Inicialmente os alunos transformam, de forma ativa, o material de estudo epor meio de ações materiais ou mentais percebem e separam nele relações gerais (essenciais). Ao longo do seu estudo, o aluno também percebe aspectos particulares no objeto de estudo. Dessa forma, o conhecimento acontece do geral para o particular. Ao organizar o currículo dessa nova forma pedagógica, é propiciado aos alunos estabelecerem relações entre os sistemas de forma mais integrada. O principal agente de apropriação do conhecimento nesse currículo de novo tipo são as ações desenvolvidas pelos alunos.

[10]Davidov (2013, p. 6) ou Davidov (1999, p. 5) se refere ao mesmo texto, o qual foi publicado numa revista soviética em 1999 e traduzido para o programa de mestrado e doutorado em educação da PUC.Go em 2013.

Tese 4- Davidov (1999) afirma que:

> Como mostram investigações psicológicas-pedagógicas especiais, o ensino sistemático de alunos seguindo os nossos programas forma neles conceitos teóricos e desenvolve o pensamento teórico, voltado para a busca das condições do surgimento destas ou daquelas relações. O pensamento teórico orienta o homem nas relações gerais, permite-lhe deduzir delas diversas consequências particulares. Tal pensamento não anula a necessidade também do pensamento empírico, simplesmente ele é de um tipo novo e se destina à solução de tarefas especiais. (DAVIDOV, 1999, p.7)

Nesse sentido, o autor ressalta que o aluno que de forma regular e sistemática usa o programa de novo tipo, forma conceito teórico e desenvolve o pensamento teórico, o qual é direcionado para a busca das condições que propiciam o surgimento de vários tipos de relações. Isso permite ao aluno, ao homem, direcionado pelas relações gerais, melhor entender e se posicionar nas situações particulares. Dessa forma, o pensamento teórico não anula ou torna desprezível o pensamento empírico.

2.5 EXPERIMENTO DIDÁTICO FORMATIVO

Nessa parte do texto, faremos uma discussão sobre o que vem a ser um experimento didático formativo e sobre como elaborar um experimento didático formativo. Para tanto, utilizamos três textos referenciais: Experimento didático como procedimento de investigação em sala de aula, do professor Libâneo (2007); Pesquisa em didática: o experimento didático-formativo, da professora Raquel (FREITAS, 2009); O Experimento Didático Formativo: contribuições de L. S. Vigotski, L. V. Zankov e V. V. Davidov, do professor Orlando (AQUINO, 2013). Todos devidamente referenciados na presente dissertação.Vygotsky marcou uma profunda virada no estudo da psicologia humana ao basear esse estudo no materialismo histórico e dialético, dando origem a uma psicologia marxista.Conforme Freitas (2009):

> Ograndeinvestimento de Vygotsky foi a constituição de uma psicologia com base no materialismo histórico e dialético, capaz da tarefa de que investigar e compreender a constituição dos fenômenos psicológicos humanos na sua complexidade, na sua origem processual histórica enraizada nas relações sociais e resultante de processos de mediaçãopela atividade humanaconcreta. Era a base para a prospecção de uma psicologia marxista. (FREITAS, 2009, p. 3)

Vygotsky estabelece uma visão processual e histórica da psicologia, tendo como base as relações sociais, mediadas pela atividade humana. Ele entendia com muita propriedade que nessas relações sociais, estabelecidas nas relações laborais humanas,é que se encontravam as leis fundamentais e as bases inicias da vida psíquica do ser humano. Ao longo dos seus trabalhos,Vygotsky usa os termos: "experimentos" ou "estudo experimental" para se referir às pesquisas por ele realizadas.

Segundo Aquino (2013, p. 1) "a tese provada por vygotsky na década de 30, de que a instrução e a educação impulsionam o desenvolvimento mental dos sujeitos que aprendem, e com isso contribuem ao amadurecimento de novas formações intelectuais". Assim, a instrução e a educação trazem crescimento para as pessoas, que contribuem para a obtenção de novos desenvolvimentos. Aquino (2013) pontua que a didática desenvolvimental está assentada, do ponto de vista filosófico, na dialética materialista e do ponto de vista psicológico, na psicologia histórico-cultural iniciada com Vygotsky11. Essa didática é desenvolvimental por se destinar a produzir desenvolvimento no homem, nas suas duas grandes dimensões: nas "funções psicológicas superiores (memória lógica, fala, abstração, generalização, pensamento teórico, etc.), e também na formação integral da personalidade [...]" (AQUINO, 2013, p. 1).

A necessidade humana de se desenvolver socioeconomicamente cria a necessidade da preparação imediata de pessoas para a vida social. Essas demandas ocorrem na esfera pessoal (individual) e familiar, o que por sua vez força o estado e também as forças progressistas da sociedade rumo a uma formação de homem a mais abrangente possível. Para atender tal necessidade de formação, se faz necessário criar todo um processo de "preparação dos sujeitos sociais: trata-se de formação integral da personalidade humana" (AQUINO, 2013, p.2). E, nesse sentido, a pedagogia, segundo Aquino (2013, p. 2) "tem como objeto de estudo o processo de formação integral dos sujeitos para a vida social [...] a formação do homem precisa ser multidimensional, quer dizer: cognitiva, mental, física, ética, moral, afetiva, volitiva".

O referido autor defende que um homem está educado quando tiver: valores, boas condutas no plano social e individual, ter responsabilidades no plano da cidadania, ser portador de sensibilidade, capacidade emotiva e principalmente conhecimento científico. A didática para conseguir essa formação integral da pessoa humana, tem que desenvolver práticas socioeducacionais que abarquem três processos inter-relacionados: "a instrução, o desenvolvimento e a educação" (AQUINO, 2013, p. 2). Esses processos somente acontecem efetivamente ao longo processo do ensino-aprendizagem, ou seja, o esperado desenvolvimento humano necessita das escolas para se materializar.

[11]Vygotsky é grafado de varias maneiras, vamos grafar conforme a grafia usada por cada autor usado na presente dissertação.

Aquino(2013) explica que na Didática Desenvolvimental o nosso objeto de estudo são os processos,montados de forma bastante consciente, com finalidade cognitiva e direcionados a provocar mudanças muito bem estudadas na formação da personalidade. O autor, aliao objeto de estudo da Didática Desenvolvimental, que são processos conscientes com a tese de Vygotsky, de que a forma de trabalhar o estudo (o ensino por extensão) tem que estar em estreita correspondência ao que se vai estudar, assevera que a Didática Desenvolvimentalprecisa de métodos que atendama essas duas demandas (processos conscientes e metodologia em correspondência com o objeto de estudo). Um desses métodos é justamente o experimento didático formativo.

As contribuições filosóficas utilizadas pelo experimento didático formativo são variadas. Uma delas é atribuída a Zankov, intitulada Princípio dialético da multilateralidade no abarcamento do objeto (AQUINO, 2013). Esse princípio nos diz que o objeto a ser estudado tem que procurar ser compreendido emsuas várias dimensões, relacionadas ao sistema que ele se encontra. Aquino (2013) entende que o método de pesquisa terá de levar em consideração as várias faces do sistemadidático experimental, que exercem interferência sobre o processo de desenvolvimento dos alunos, contemplando tanto suas relações internas, quanto as externas.

Para estudar o desenvolvimento do pensamento do aluno através da ação do professor,Zankov foi buscar suportena teoria do conhecimento de Lenin (AQUINO, 2013). Lenin ensinava que a nossa inteligência, ao observar algo particular(individual) e disto tirar um conceito,não é um ato simples e imediato, como o de um reflexo num espelho. Isso é um ato complexo, de duplo movimento, em formato de ziguezague, que possibilita até a fantasia de um voo para fora da vida. Mais ainda, esse ato pode ser a possibilidade de transformar um conceito abstrato, a ideia, numa fantasia.

Aquino (2013)assevera queVigotiskse apoiavana teoria do conhecimento de Lenin e enfatizava o papel da unidade de contraposições: realidade-fantasia, objeto-representação, e a abordagem em forma de ziguezague como importantes para a pesquisa. O autor também explica que Zankov defendia que a relação entre ensino e desenvolvimento devia ser estudada tendo como base os fatos amplos de forma diversificada e não de forma abstrata e geral.

Baseado na filosofia de Engels,Zankov faz um alerta:

> [...] em toda ciência seja natural ou históricatem a partir dos fatos, das formas objetivas e dinâmicas da matéria, as concatenações (as relações, ligações) não devem se construir e se impor sobre os fatos, senão se descobrir nestes e, uma vez descobertas, demonstrar por via experimental, até onde seja possível (AQUINO, 2013, p.4).

Zankov, baseado em Engels, afirma que as relações e ligações não podemse sobrepor aos fatos em si e que, no processo investigativo, temos que procurar fazer a demonstração e ou reconstrução dos fatos pela via experimental até onde seja possível.Conforme entendimento de Aquino (2013,p.5), Zankov soube fazer cumprir essa"exigência metodológica Marxista", usando a mesma para organizar o trabalho investigativo, bem como, para encontrar dados de forma bastante ampla, mais ao mesmo tempo fidedignos, para permitir a solução de problemas levantados pelos pesquisadores. Esse cuidado é demonstrado por Aquino (2013,p.5) ao apresentar a seguinte citação de Zankov:

> E própria do experimento, na sua qualidade de método científico geral, a mudança sistemática das condições da observação do fenômeno e de suas relações com outros fenômenos com o que se expressa à ação ativa sobre o objeto de estudo. A aplicação do experimento na investigação científica permite estudar as relações de determinadas facetas do processo e achar as causas que condicionam a *necessidade* de que apareça o fenômeno dado. Desse modo, o experimento permite evidenciar as leis da esfera da realidade objeto de estudo. [...]A lei expressa certa ordem da relação necessária e estável entre os fenômenos, mediante a qual, uma mudança em um de seus elementos, provoca outra mudança absolutamente concreta nos demais". (ZANKOV, 1984 apud AQUINO, 2013,p.5).

Zankov mostra a necessidade de, no experimento didático formativo, como um método científico, o pesquisador fazer várias formas de observação do fenômeno, bem como da relação desses com outros fenômenos que, de alguma forma, interferem no fenômeno estudado. Para melhor explicar essa ideia, ele mostra que o experimento permite estudar as variadas faces do processo em curso, bem como ascausas que provocam que o fenômeno se manifeste de uma dada forma. Ele também deixa claro que existe uma lei na relação entre os fenômenos observados, de forma que se houver qualquer mudança num elemento que seja, essa provocará algum tipo de mudança nos demais elementos desse fenômeno.

Levando em consideração que um dos grandes objetos das pesquisas de Zankov era "revelar a relação entre a organização do ensino e o processo geral de desenvolvimento dos escolares" (AQUINO, 2013,p.5), se faz necessário planejar as tarefas de ensino levando em conta a sua especificidade. Aquino (2013) apresenta o entendimento de que, baseado nas pesquisas de Zankov, a especificidade do experimento didático formativo passa pela atividade de estudo feita pelos alunos, sob a organização e a supervisão do professor, por um sistema experimental devidamente integrado ao plano de ensino, pelas tarefas de aprendizagem, pelo trabalho e pela preparação anterior do professor, pelos manuais (livros) da disciplina, bem como pela ideia geral norteadora da experiência.

Zankov, mais uma vez,recorre a mais um "postulado filosófico" de Lenin: "a atividade consequente do homem é uma forma do processo objetivo". Aquino (2013) nos explica que tal postulado consta no resumo da obra:A ciência da Lógica, de Hegel escrito por Lenin. Como consequência desse postulado, Aquino (2013, p. 6) conclui que: "[...] a investigação científica permite descobrir a lógica objetiva que estabelece a ordem, a relação casual, necessária e estável entre processos e fenômenos estudados; neste caso, entre o ensino e o desenvolvimento mental da criança".Perceber a relação de causa, de necessidade e estabilidade entre o ensino e o desenvolvimento mental da criança, nos permite avançar rumo a melhores processos de ensino e desenvolvimento mental dela, e por extensão do aluno de uma maneira geral.

2.5.1 Fundamentos teóricos do experimento didático formativo

A segunda tese de Zankovreconhece o embasamento nas "teses psicológicas" de: Vygotsky, Rubinstein, Leontiev. Essa tese fala sobre "o condicionamento histórico da psique humana", ou seja, o processo investigativo da psique humana tem base histórica. O embasamento em Vygotsky está em “a fonte da evolução histórica da conduta não há que buscá-lo no interior do homem, senão fora dele, no meio social ao qual pertence" (VYGOTSKI, 1956, p. 449). A partir dessa citação, Aquino (2013, p.6) apresenta o entendimento de que a "psique da criança é de caráter social, e que a força motriz para o seu desenvolvimento é a cooperação e o ensino".

Outro importante mérito de Vygotsky, devidamente reconhecido por Zankove, conforme mostrado por Aquino (2013, p.6) é o"princípio de etapas concernentes à idade". Com base nesse princípio,Zankovmostra que as característicasespecíficas de cada etapa "são mudanças na estrutura funcional da consciência". O postulado inicialmente formulado por Vygotsky e desenvolvido por Rubinstein, o qual fala da unidade entre a consciência e atividade, é usado segundo entendimento de Aquino (2013) por Rubinstein para mostrar o que é dominante em termos de atividade em cada idade. Assim Rubistein, conclui que na idade pré-escolar a atividade dominante é o jogo, ao passo que ao aluno ingressar na escola, a atividade jogo fica em segundo plano e a atividade de estudo passa a ser determinante.

Zankovmostra que com o desenvolvimento da psicologia enquanto ciência, a pedagogia pode melhorse estruturar e que os aspectos psicológicossão relevantes ao se estudar problemas pedagógicos relativos ao desenvolvimento e ao ensino.

A Zona de Desenvolvimento Próximo (ZDP)é uma contribuição Vygotskyana importantepara a sustentação das pesquisas desenvolvidas por Zankov, pois, segundo Aquino (2013, p.8),Zankov se refere à Zona de Desenvolvimento Próximo e afirma que:

> A ideia de como atua o ensino sobre o desenvolvimento da criança se evidencia graças à diferenciação introduzida por L. Vygotsky entre os dois níveis do desenvolvimento da criança. O primeiro dele é o nível do desenvolvimento atual. Alcançou-se como resultado de ciclos já cumpridos do desenvolvimento e se manifesta na solução independente de tarefas intelectuais por parte da criança O segundo nível o constitui a zona de desenvolvimento mais perto e mostra a marcha dos processos que se caracterizam por seu estado de formação, ainda em trânsito do processo de maturação. Este nível aparece na solução de problemas que a criança não pode efetuar por sua conta, mas sim com a ajuda do adulto, na atividade coletiva, mediante a imitação. Mas, aquilo que a criança pode fazer hoje em colaboração, amanhã poderá fazê-lo por si mesmo(ZANKOV, 1984, apud AQUINO, 2013,p. 13-14)

Desse modo, pode-se concluir que há dois níveis de desenvolvimento para as crianças em relação ao ensino: desenvolvimento atual e o desenvolvimento proximal.Este último é um nível no qualos processos de desenvolvimentos se apresentam em trânsito, em processo de maturação. No níveldenominado pelo autor como atual,a criança não apresenta dependência do adulto na atividade coletiva.Zankov demonstra a dinâmica desse processo de desenvolvimento, mostrando que se a criança hoje faz algo mediante a colaboração de alguém, amanhã fará por sua conta, de forma independente.

O entendimento demonstrado por Aquino (2013, p.9)em relação à citação deZankov, é que o ensino deve se direcionar, não somente para as funções maduras, mas principalmente para as funções em processo de maturação, por entender que essas funções são determinantes para avançar o desenvolvimento e o autor afirma que: "o que hoje conforma a zona de desenvolvimento próximo amanhã passará a ser a esfera do desenvolvimento atual”(AQUINO, 2013, p.9).

Esse mesmo autor também defende que esses dois postulados nos "permitem acreditar na influência positiva da didática experimental sobre os sujeitos que aprendem" (AQUINO, 2013, p. 9). Diante disso, ele conclui que o experimento não é composto somente pelo conteúdo de uma dada disciplina ou pelos seus métodos e procedimentos, mas é contemplado num contexto mais amplo no qual acontece um complexo processo do ensino e aprendizagem, o qual passa entre outros por: trabalho dos professores, nas atividades de estudo, nos meio e recursos, nos acompanhamentos,e nas avaliações, e por que não, no esforço do aluno.

Para Freitas (2014, p. 8) "O experimento didático formativo é utilizado na investigação pedagógica que busca explorar uma questão central: que relação há entre a didática e o desenvolvimento cognitivo dos alunos?” A citação de Freitas deixa clara a grande questão central motivadora para o experimento didático, a qual é estudar as relações entre a didática e o desenvolvimento cognitivo do aluno, ou seja, estudar o desenvolvimento da capacidade de aprender e todo processo ai decorrente.

Conforme a autora, responder a pergunta anteriormente citada passa por toda uma base teórica e filosófica do materialismo histórico e dialético, pela teoria histórico cultural, pela teoria da atividade,bem como, pela teoria do ensino desenvolvimental.

Para Libâneo (2007):

> O experimento formativo é um método de investigação utilizado por psicólogos russos vinculados à teoria histórico-cultural[2]que consiste em estudar as mudanças no desenvolvimento do psiquismo por meio da ativa influência do pesquisador na experimentação, ou em outras palavras, pela formação dirigida dos processospsicológicos que serão investigados. (LIBÂNEO, 2007, p. 2)

Assim, compreende-se que o experimento é destinado a estudar o processo formativo, estudar as mudanças que ocorrem no psiquismo, em que os pesquisados não só observam, mas influenciam de forma ativa os processos psicológicos investigados. Em relação àexpressão"formativo"Libâneo (2007, p.3) explica que: "Em outras palavras, a ação formativa refere-se aos processos que vão produzindo mudanças no sujeito". No nosso caso, como vamos fazer um experimento didático formativo sobre o teorema de Talles, estamos preparando um experimento para produzir mudanças cognitivas nos alunos relativas a todo quadro conceitual, histórico e operatório que abarca o teorema de Tales, incluindo a influência da mediação pedagógica com um *software* .

A nota de número dois que aparece na citação longa, anteriormente exposta, se refere ao esclarecimento da Teoria Histórico Cultural, que foi desenvolvida por Vigotisk, a partir da década de 20, na União dasRepúblicas Socialistas Soviéticas, para essa teoria entre outros, contribuíram: Leontiev, Luria, Galperin e Davidov. De uma forma clara e concisa Libâneo (2007, p. 2) explica a Teoria Histórico-cultural e afirma que: "essa teoria busca compreender o desenvolvimento da mente humana como vinculado à cultura, ou seja, o papel da cultura na formação das funções psicológicas superiores (e dentro da cultura, o ensino e aprendizagem)".

Para a teoria Histórico-Cultural, a parte preponderante do desenvolvimento da mente humana não se dá pela sua base biológica e, sim, por meio da interação social no sentido amplo entre as pessoas (seja na vida social, seja ao longo das interações sociais decorrente do processo produtivo).No plano do ensino, o método do experimento formativo, ou experimento didático formativo "está associado ao conceito de zona de desenvolvimento proximal" (LIBÂNEO, 2007, p.), conceito esse desenvolvido inicialmente por Vigotisk. Nesse método, os alunos e professores "são sujeitos sociais" em que, ao longo das suas interações, um participa no processo de constituição subjetiva do outro.

O termo experimento de ensino é usado para designar um experimento formativo na sala de aula. Libâneo (2007, p. 3) apresenta o entendimento de que o experimento de ensino é uma intervenção pedagógica, materializada através de um plano intencional, o qual tem como principal objetivo interferir nas ações mentais do aluno, para ocasionar mudanças em seu nível de desenvolvimento mental. O autor pontua as ideias gerais acerca do experimentode ensino da seguinte maneira: "O experimento é uma ação docente deliberada de ajudar o aluno a aprender algo, a desenvolver ações mentais visando dominar e usar conceitos, com o acompanhamento passo a passo da formação dessas ações mentais, no processo” (LIBÂNEO, 2007, p. 3).

Aquino (2013, p.12) explica a ideia norteadora do experimento didático-formativo, ao afirmar: "[...] é que o processo de ensino-aprendizagem-desenvolvimento, organizado conscientemente em determinadas condições, eleva a qualidade da aprendizagem e do desenvolvimento integral dos escolares". Dessa forma, fica evidente a ideia do experimento didático-formativo como sendo aquele em que se trabalha meios de elevar em qualidade a aprendizagem e o desenvolvimento integral do aluno.

Aquino (2013, p.13) assevera o queconsidera mais importante e característicono experimento didático:

> A essência do método consiste em permitir estudar os processos de trânsito da psique de uma formação a outra. Também ajuda a pesquisar as condições em que surge um ou outro fenômeno psíquico e a criação experimental das condições necessárias para que esses fenômenos se manifestem. (AQUINO, 2013, p.13)

Desse modo, fica claro que o experimento didático é um método que permite acompanhar e perceber todo o processoda formação da psique. Com ele também, é possível estudar as circunstancias em que aparece um dado fenômeno psíquico, e ainda fazer de forma experimental as condições necessárias para que ocorra. O autor entende que o experimento didático formativo é o meio que permite esclarecer a teia de relações existente entre o ensino e o desenvolvimento mental dos alunos. Ao mesmo tempo, ele não desmerece o grau de importância de outrasabordagens metodológicas usadas para os mesmos fins. Isso fica devidamente comprovado quando afirma que:

> [...] é difícil imaginar outra metodologia de pesquisa capaz de revelar a lógica existente entre o processo de ensino e o desenvolvimento mental dos escolares, na medida em que o facilita o experimento pedagógico. Isso, em modo algum desconhece a importância de outros caminhos metodológicos. (AQUINO, 2013, p.14-15)

Vygotsky, em sua teoria, mostra que nossas funções psíquicas não são de bases naturais, mas, sim, de base social, ou seja, são as bases sociais, por meio de seus modelos que formam nossas funções psíquicas (AQUINO, 2013).Libâneo (2009) diferenciando o experimento didático da pesquisa-ação, mostra como se dá o planejamento, a ação, a observação e a reflexão no experimento didático, quando afirma que:

> No experimento formativo podemos ter:
> a) o planejamento da ação, que consiste em delinear os objetivos e as ações a serem realizadas em relação a uma determinada prática pedagógica;
> b) a ação consiste em por em prática ("experimentar") um procedimento formativo (vide adiante) em um conjunto de aulas, no período de 2 a 4 meses;
> c) a observação consiste do registro de eventos realizados ao longo das aulas por meio da observação das ações realizadas pelo professor e pelos alunos;
> d)a reflexão consiste da análise propriamente dita, ou seja, com base em determinados critérios, os registros são analisados para se e extrair lições do experimento e formular uma reconstrução da prática. A análise reflexiva deve ser enriquecida, também, com a avaliação de desempenho dos alunos. (LIBÂNEO, 2009, p. 4)

Assim, o autor avança rumo aos traços gerais da metodologia do experimento. Ele mostra que o planejamento da ação é fazer um esboço dos objetivos e das ações propriamente ditas de uma prática pedagógica. Além disso, mostra que, do ponto de vista prático, a ação consiste em experimentar uma dada prática formativa, dividida num certo número de aulas (LIBÂNEO, 2009).

Para a nossa pesquisa, uma vez que desenvolvemosum experimento didático formativo sobre o teorema de Tales, essa palavra experimentar adquire um forte censo prático do ponto de vista da matemática.Sobre a observação, Libâneo (2009) diz que se trata de observar de forma atenta os registros tanto do professor aplicador do experimento, bem como dos alunos, ao longo da realização do experimento formativo.Quanto à reflexão, o autor afirma que é um processo de análise, decorrente dos dados observados no experimento, incluindo a avaliação feita pelos próprios alunos. Essa reflexão se destina a fazer e tirar importantes conclusões e/ou, se for o caso, fazer a reconstrução do experimento.

2.5.2As quatro etapas de um experimento didático formativo

Aquino (2013, p.16) afirma que: "Provavelmente, as etapas em que deve ser realizado um experimento didático-formativo seja a parte mais móvel e flexível do método". Na sequência, ele apresenta o entendimento baseado na sua experiência que o experimento é constituído de quatro partes, podendo ser reduzidas para três partes.As quatro partes são: "revisão da literatura e diagnóstico da realidade a ser estudada", "elaboração do sistema didático experimental", "desenvolvimento do experimento didático-formativo" e por último, "análise dos dados e elaboração do relatório".

2.5.2.1 Etapa da revisão da literatura e diagnóstico da realidade a ser estudada

Baseado na Teoria histórico-cultural, Aquino (2013) produz um recorte para a fundamentação da pesquisa, bem como seu quadro teórico. É preciso realizar um levantamento para saber se existem estudos similares, caso exista,é necessário fazer a revisão dos estudos encontrados para montar uma justificativa da pesquisa. O instrumento é a pesquisa bibliográfica e ou revisão da literatura.

É necessário fazer um diagnóstico da prática pedagógica em relação a uma dada disciplina no seu respectivo nível de ensino. Conforme diz Aquino (2013, p. 17) "O propósito é definir os rasgos que caracterizam a metodologia tradicional de ensino". De acordo com o autor, o objetivo dessa tarefa é mostrar as características marcantes da metodologia tradicional que está sendo usada para se ensinar. É igualmente importante saber caracterizar a turma e o professor na qual se vai aplicar o experimento.

Ao sintetizar as tarefas, nessa etapa,é possível elaborar um quadro teórico da pesquisa, diagnosticar a metodologia tradicional do ensino, até então utilizada. Na sequência, deve-se fazer um diagnóstico dos alunos e dos professores com os quais vamos trabalhar o experimento.

2.5.2.2 Etapa da elaboração do sistema didático experimental

Baseado nos resultados da primeira etapa, o pesquisador vai elaborar um plano de ensino que contemple a essência dos conceitos a serem ensinados. Aquino (2013), baseado em Davidov (2013), aponta nove pontos relevantes a serem observados na reestruturação do programa das disciplinas:

> Para lograr o colocado por Davidov na citação acima, a estruturação dos Programas das disciplinas deve-se apoiar nos seguintes critérios metodológicos:
> 1) Sem mudar o conteúdo fundamental do programa vigente, devem-se buscar os princípios gerais de organização e os fundamentos dos conteúdos, segundo a lógica da ciência, assim como suas potencialidades pedagógico-didáticas.
> 2) O ponto anterior deve preservar o Programa, e cada uma de suas unidades, da fragmentação e da falta de sistematicidade dos conteúdos de ensino.
> 3) Buscar as correspondências entre os objetivos didáticos da disciplina e os conteúdos organizados segundo os seus princípios lógicos gerais.

> 4) Os objetivos do programa devem refletir a apropriação da experiência humana, expressada em conhecimentos, habilidades, hábitos e valores, assim como na apropriação dos métodos da ciência por parte dos escolares.
> 5) O anterior deve guiar o desenvolvimento integral da personalidade do aluno, por meio da apropriação da experiência humana, sob a direção do professor.
> 6) Selecionar o método de ensino mais adequado para aqueles objetivos e conteúdos.
> 7) Selecionar os meios ou recursos didáticos mais adequados aos objetivos, conteúdo e métodos.
> 8) Elaborar o sistema de tarefas ou problemas de estudo que serão apresentados aos alunos, para sua solução, sob a direção do professor. O sistema de tarefas inclui a apropriação progressiva do sistema conceitual da disciplina.
> 9) As tarefas ou problemas de estudo devem ser previstas, segundo a ordem de dificuldades e níveis de ajuda que serão necessários para que os alunos as possam executar no menor tempo e com o menor número de erros possível. (AQUINO, 2013, p.18)

Esses nove pontos funcionam como uma abertura da amplitude de acerto na preparação do experimento didático formativo, bem como abordam pontos importantes da teoria de Davidov(2013) (ensino desenvolvimental) de forma a compatibilizar a teoria com a atividade prática do diaadia da sala de aula.

Ao levantar esses nove pontos Aquino (2013, p. 19) apresenta o entendimento de que "o método de ensino terá a maior centralidade". Esse autor está retomando uma importante tese de Davidov (2013), de que o método de ensino seja totalmente compatível com o conteúdo disciplinar, e também queele ocorra conforme o princípio da ascensão do pensamento abstrato ao concreto (do pensamento do geral ao particular).

Do ponto de vista instrumental, Aquino (2013) alerta para se considerar as três etapas das ações propostas por Galperin (ANO apud AQUINO, 2013) no trabalho com os alunos: orientação, execução e controle, e ainda as seis etapas das ações mentais no processode conhecimento por parte dos alunos, propostas por Talízina (ANO apudAQUINO, 2013, p. 19): "motivação; elaboração da base orientadora da ação; realização da ação na forma material ou materializada; ações verbais externas; linguagem interna para si; ações mentais". Esse mesmo autor defende que o sistema didático deve ser construído por unidades. Em cada unidade deve existir "tarefas ou problemas de aprendizagem" para o aluno apropriar-se dos conhecimentos científicos, bem como criar novas capacidades.

Em paralelo, o pesquisador deve preparar os professores que aplicarão o experimento didático. Vamos aqui resumir as recomendações de Aquino (2013, p. 19-20) relativas a presente etapa de preparação do experimento didático formativo: a) preparar o sistema didático experimental com um novo programa da disciplina, com as respectivas tarefas e ou problemas de aprendizagem, juntamente com um eficiente método de ensino e os respectivos recursos para operacionalizar o experimento; b) preparação dos professores que aplicaram de forma direta o experimento e ou de alguma forma atuarãode forma complementar no experimento.

2.5.2.3 Etapa da elaboração do desenvolvimento do experimento didático-formativo

A presente etapa consiste na aplicação do sistema experimental desenvolvido nas etapas anteriores. O tempo de aplicação depende do tempo necessário para "testar" os resultados dessa nova metodologia no ensino, bem como, do "impacto" ocorrido no desenvolvimento dos alunos. Ao se desenvolver o experimento, ele deve ocorrer no horário habitual da disciplina ou disciplinas em questão. Dessa forma, não se cria grandes mudanças no diaadia dos alunos e das atividades normais da escola.

Como principal técnica de coleta de dados, Aquino (2013) elege a observação. O autor sugere, inclusive, que ela ocorra de duas formas: gravação de áudio e vídeo, bem como a observação direta do observador pesquisador. Na observação a ser realizada pelo pesquisador, ele sugere atenção na conduta do professor aplicador e nos alunos, bem como o "contexto sócio educativo subjacente, e nas demais ocorrências que de alguma forma interfira nas aulas" (AQUINO, 2013, p.).

Aquino (2013), ao propor a observação em duas partes, pretende ampliar os espectros da observação, para que aquilo que não foi devidamente captado pelo observador, possa ser registrado no áudio e ou vídeo e entrar como dado captado para o processo de análise dos dados.No final do experimento, o autorpropõe a realização de "entrevistas semiestruturadas" com os professores participantes e com alunos aleatoriamente escolhidos. Ele recomenda, ainda, que essas entrevistas aconteçam emforma de áudio. Fazendo a entrevista com professores e alunos, é possível perceber como os primeiros se "apropriaram do método de ensinar" e os segundos do "método de aprender". Por último, se recomenda a avaliação escrita final por parte dos alunos, de forma que seja possível comprovar, via comparação com a avaliação diagnóstica, quanto foi a melhoria da aprendizagem dos alunos.

Como fase de preparação dos dados coletados, Aquino (2013) propõe a transcrição de todas as observações feitas via áudio ao longo do experimento. Na sequência natural da pesquisa, vem o processo de "seleção das categorias de análise". Ele ainda ensina como montar a seleção das categorias de análise: "[...] são criadas comparando o quadro conceitual da pesquisa com os aspectos relevantes que foram observados de forma sistemática.

Recomenda-se que esse trabalho seja feito em duplas de pesquisadores, segundo o consenso de ambos para garantir a confiabilidade das categorias de análise” (AQUINO, 2013, p.).

O autor termina essa etapa fazendo um resumo, enumerado das tarefas dessa etapa: 1-desenvolvimento do experimento; 2-coletas monitoradas dos dados via observação; 3-realização de entrevistas em forma de áudio com professores e alunos; 4-preparação dos dados para a fase de análise. Achamos interessante ressaltar que Aquino (2013) não incluiu a realização da prova final aplicada aos alunos, no final do experimento, no resumo das atividades principais da terceira etapa.

2.5.2.4Etapa de análise dos dados e elaboração do relatório do experimento

Essa, possivelmente, é a parte maisdelicada e complexa da pesquisa. A análise é feita baseada num conjunto de categorias, que foi previamente montado e devidamente ancorado nas "evidências" de aprendizagem e no desenvolvimento dos alunos, por ocasião da realização do experimento didático formativo.

As "evidências" surgem nas falas dos alunos e dos professores, obtidas através das observações e nasentrevistas feitas pelo pesquisador. Essas "evidências" nem sempre são tão identificadas facilmente. São muitas vezes "indícios", "sintomas", nada obtido de uma maneira direta. Vygotsky chamava essa maneira não direta de trabalhar de método indireto. O autortinha o entendimento de que na observação científica era basilar "sair dos limites do imposto pelo visível" e buscar o seu significado, o qual não é possível ser observado. O caminho apontado por Vygotsky (ANO, p.) com o método indireto é composto pelo "método da experimentação e a análise dos fatos observados".

A análise dos fenômenos e processos que se queira estudar ocorre de forma predominantemente explicativa, mas isso se dá de uma forma predominantemente compreensiva. Para obter sucesso ao analisar determinado fato,é necessário: "descrever, explicar, abstrair e generalizar" ao mesmo tempo. Esse movimento simultâneo de: "descrever, explicar, abstrair e generalizar" é chamado por Vygotsky de "análise objetiva". O método da análise objetiva é de fundamental importância para a psicologia social e Aquino (2013, p. 22) manifesta entendimento que o mesmo é igualmente importante para a "pesquisa em Didática".

Aquino (2013, p. 22) baseado em Vygotsky, afirma que "a análise baseia-se na indução e ao mesmo tempo a guia". Dessa forma, a análise tem como base a indução, mas o próprio processo de análise dirige a forma como ocorre essa indução. Sobre a forte interação entre a análise e o método experimental,Vygotskyafirma que:

> É a análise que coloca as questões; que constitui a base de todo experimento: todo experimento é uma análise em ação, assim como toda análise é um experimento que se leva a cabo na mente. Por isso, o correto seria denominar a análise de método experimental. [...] A análise é o que oferece o volume de propagação das conclusões, isto é, o fato de destacar em A, B, C, os traços comuns ao grupo em questão. Mas ainda mais: *no experimento observo sempre um sintoma do fenômeno e isto é mais uma vez trabalho da análise.* (VYGOTSKY, 1996, p.369)

Assim, fica clara a interação entre análise e o método experimental, bem como é explicitado o papel desempenhado pelo processo de análise nas conclusões. Do ponto de vista prático, ao analisar os fatos no experimento, é possível "descobrir as relações essenciais", as quais nem sempre se mostram explícitas nos fenômenos que estudamos. Conforme nos explica Aquino (2013, p. 23): "Em outras palavras, o movimento combinado entre a observação e a análise ajuda a descobrir os limites e as formas de aplicação de determinados princípios".

Um elemento que também contribui para a análise é a abstração. Ao agregar a abstração ao processo de análise, nós conseguimos atingir as "relações essenciais, os princípios organizativos" de um fenômeno estudado. Nesse sentido, Aquino (2013, p. 23) afirma que: "Só a análise do processo permitirá abstrair a lógica de sua configuração interna e permitirá a avaliação do significado dos fatos obtidos". Dessa forma,temos que,por meio da abstração conseguiremos perceber no processo de análise a lógica interna, o que permite entender os significados dos fatos.Como feito, nas três etapas anteriores do experimento, Aquino (2013) faz o resumo da etapa:

> Resumindo, o dito anteriormente nos permite abstrair várias ideias condutoras para a realização da análise dos fatos coletados durante o experimento didático-formativo: a análise dos dados precisa estar orientada não para as possibilidades ideais, senão para os fatos realmente observados; a análise não é apodítica ou preditiva, ela precisa ser verdadeira, real; a análise se realiza com posterioridade a realização da experiência, ele aposteriorístico; a análise surge da indução e a guia, não da intuição; e o mais importante: a análise conduz a generalizações que tem limites y grãos, mas que se elaboram a partir das essências. O movimento que fazemos, com auxílio da análise, que parte da observação dos fatos, passa pela abstração do essencial e, logo elabora a generalização que é o que permite a elaboração das conclusões do experimento didático-formativo. (AQUINO, 2013, p. 23-24)

Esse resumo aborda as seguintes ideias condutoras da análise: não é evidente, não é demonstrada sem provas e nem tampouco anuncia o que vai acontecer; não é evidente; a análise tem que ser dirigida para aquilo que foi realmente observado; só existe análise posterior à realização do experimento; a análise surge da indução e guia a indução; a análise tem base real, não surge da intuição; a análise parte da observação, passa pela abstração daquilo que é essencial, permite elaborar a generalização e isso nos permite fazer a conclusão do experimento.

A última recomendação de Aquino para essa etapa se refere à forma e ao estilo da linguagem usada no relatório da pesquisa. A linguagem tem que ser consistente, e quanto ao estilo, temos que ter um cuidado especial, uma vez que a "maneira" como nós expressamos nossas conclusões contribui sobre a comunicação dos resultados do experimento. Nesse sentido, Aquino (2013) observa que:

> [...] a linguagem é uma amostra evidente das mudanças, da saúde ou da doença da ciência. A linguagem reflete os processos internos, a capacidade de análise e de pensamento, as tendências do desenvolvimento, o grão de formalização e de crescimento da ciência. (AQUINO, 2013, p. 24)

Desse modo, o autor explica o poder da linguagem, a importância do estilo dessa linguagem na comunicação científica. É relevante destacar que o autorrealizou a escolha de algumas importantes citações de Vygotsky sobre o uso da linguagem na comunicação científica que servem para auxiliar nossa reflexão por sua riqueza e profundidade. Como, por exemplo, podemos citar:

> [...]quando a palavra nomeia o fato, proporciona também a filosofia desse fato, sua teoria e seu sistema. [...]A palavra é a filosofia do fato, por ser sua mitologia e sua teoria científica. [...]Dizer "Penso" e "Acho" implica colocar duas teorias opostas do pensamento (YGOTSKY, 1996, apud, AQUINO, 2013, p. 24).

Em relação ao fato, a palavra não só o transmite, mas fala da sua filosofia, da sua teoria e do seu sistema.Para o senso comum "Pensar" pode até ter alguma proximidade com o "Achar", mas para o pensamento e para a linguagem científica, essas duas afirmações são diametralmente opostas.

2.5.3 As cinco condições para a realização de um experimento didático formativo segundo Libâneo

Libâneo (2009) apresenta as condições para a realização de um experimento didático formativoinspiradasnas "sugestões de Davidov, ampliadas". São elas:

> a) Elaboração de um diagnóstico em relação a uma necessidade pedagógica (das escolas, de professores, etc.).
>
> b) Formulação de hipóteses ou questões de pesquisa.

> c) Escolha dos procedimentos de formação de processos mentais na aprendizagem de algo (um procedimento de construção de uma prática pedagógica).
>
> d) Formulação do plano de ensino, em que devem constar ações e operações de aprendizagem e ensino, relacionados com os objetivos da pesquisa.
>
> e) Definição de itens de observação e acompanhamento passo a passo das aulas ao longo do período de pesquisa na sala de aula (por meio de registros escritos, feitos pelo pesquisador). (LIBÂNEO, 2009, p. 8)

A proposição de um experimento serve para atender uma determinada demanda pedagógica. A realização do diagnóstico é para melhor: entender, dimensionar e perceber essa demanda. Tendo como base o diagnóstico, são formuladas hipóteses e questões de pesquisa (nossa pesquisa em questão é o experimento didático formativo). Na sequência são escolhidos os procedimentos pedagógicos necessários para formar as ações mentais pretendidas.

A elaboração do plano de ensino é um detalhamento dessas ações e operações necessárias para a efetivação do atendimento das demandas encontradas no diagnóstico. Para Libâneo e Freitas (2009), o plano de ensino:

> [...] possibilita antecipar mentalmente as ações a serem realizadas em uma matéria, ao organizar conteúdos, objetivos, formas de organização e gestão das aulas. [...] Tem-se, assim, como principal referência teórica na elaboração de planos de ensino a ideia de que o ensino é a atividade mediadora do desenvolvimento mental dos alunos. Nesse sentido, o ensino lida, basicamente, com o conhecimento, mas não como conhecimento estático, mas como processo mental do conhecimento. Em outras palavras, o que importa é a internalização de lógicas de pensamento embutidas nos conteúdos a serem ensinados.(LIBÂNEO; FREITAS, 2009,p.1)

Da referida citação resulta que o plano de ensino é um projeto destinado a realizar as ações mentais que são importantes de uma dada disciplina, na organização de seus:“conteúdos”, "objetivos", na preparação e direção da implementaçãodas aulas. Oprincipal foco a ser seguido, na elaboração teórica do plano de ensino, é relativo ao fato de que o ensino é a atividade mediadora por excelência da parte preponderante do desenvolvimento mental dos alunos com os quais trabalhamos. Como o ensino tem como matéria prima o "conhecimento", esse ensino tem que abarcar a lógica do conhecimento de forma que o aluno consiga, por meio da mediação do professor, "internalizar" o conhecimento presente nos conteúdos.

No plano de ensino temos: os conteúdos, os objetivos, o número de aulas, a descrição das ações mentais pretendidas e a forma de avaliação.Os conteúdos são listados conforme a base lógica para a formação dos conceitos científicos. Conforme entendimento de Libâneo e Freitas (2009, p. 7), é importante salientar que os conteúdos não devem ser vistos somente na categoria de "informação", mas, sim, como fomentadores e "indutores" das respectivas ações mentais.

Nos objetivos específicos, é realizado o "desdobramento" do objetivo geral, de forma que esse resulte nas "ações mentais" que se pretende desenvolver no aluno. Nos objetivos específicos fica estabelecido de forma descritiva as "ações mentais desejáveis em si", as quais queremos que os alunos se apropriem como conceitos e que serão usados pelo aluno como ferramentas mentais.

Quanto ao desenvolvimento metodológico,Libâneo e Freitas (2009, p. 7)pontuam: "os ‘momentos’ da tarefa de aprendizagem de Davidov: análise do conteúdo, dedução, construção do "modo geral". Problemas que põem em relevo(em evidência, em destaque) as contradições nas relações básicas do objeto de estudo".

No processo de desenvolvimento metodológico,o foco é na análise dos conteúdos, no processo de dedução do aluno, na construção do "modo geral", pois é assim que o aluno conseguirá operar por conceitos. Uma forma pedagógica para o aluno avançar, na direção da conquista dessa capacidade operatória, é o professor colocá-lo para resolver problemas que remetem ao "modo geral" e, posteriormente, a aplicações específicas desse princípio geral em situações particulares, na solução de tarefas cotidianas. Dessa forma,ele estará se exercitando do geral para o particular e também fazendo vínculos mentais do particular com o princípio geral.

No tocante às ações mentais feitas no plano de ensino,deve-se proceder à descrição das ações mentais que se pretenda que o aluno aproprie e desenvolva.Na avaliação do plano de ensino não entra somente a sua componente "somativa", mas também o seu caráter "formativo". Não devemos priorizar no processo avaliativo as informações memorizadas pelo aluno, devemos ter um foco especial em como o aluno está usando o conteúdo como forma de pensar os "objetos e fenômenos".

Dessa forma, no último item das cinco condições de um experimento, segundo Libâneo, é importante destacar a questão da observação, do acompanhamento passo a passo de todas as etapas do experimento, em especial,das aulas que compõem esse experimento. O pesquisador tem que fazer observações através de registros escritos, mas também é muito útil lançar mão de recursos de gravação de áudio e vídeo. Isso porque o acompanhamento passo a passo do experimento feito pelo pesquisador vai permitir fazer correção de rota e ajustes necessários ao sucesso.

Na realização do nosso experimento didático formativo sobre o teorema de tales com aplicação do *software*Geogebra, tomamos todos esses cuidados. Nesse sentido, procuramos compatibilizar, em nossa ação experimental formativa, toda a base teórica aqui relatada, ao longo do presente texto.

2.6A RELAÇÃO DAS TECNOLOGIAS DA INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO (TICS) COM O PROCESSO EDUCACIONAL

Como vamos trabalhar com o *software*Geogebraemnosso experimento didático formativo sobre o teorema de Tales e ele é uma modalidade de TIC, relacionado com o processo educacional,é necessárioestudar essa relação. Para tanto, usaremos como referência teórica as reflexões apresentadas por Peixoto (2012) e Borba e Penteado (2012). Estamos inicialmente contextualizando as TICs (principalmente o computador) em sua relação com a educação, a partir dos três mitos de Peixoto (2012). A reflexão sobre o uso do computador na sala de aula de matemática se apoia nos estudos sobre essa ferramenta realizados por Borba e Penteado (2012). Desse modo, poderemos avançar e refletir sobre o uso do *software*Geogebra.

2.6.1 Reflexões acerca dos mitos sobre a tecnologia e a inovação pedagógica

Em nosso cotidiano de trabalho na escola, temos visto que as ferramentas tecnológicas estão sendo usadas, cada vez mais, para auxiliar o processo de ensino e aprendizagem. A esse respeito, Peixoto (2012) coloca uma interessante reflexão acerca do discurso dominante em defesa das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) no processo educacional. Ela afirmaque:

> Os discursos sobre a integração das tecnologias baseiam-se, preponderantemente, na visão da tecnologia como meio para atingir finalidades pedagógicas. Tais discursos destacam o papel da tecnologia como instrumento de transformação do processo de aprendizagem e das relações pedagógicas. [...] Predomina, portanto a concepção das TIC como mobilizadoras de competências cognitivas e sociais no sentido de que elas podem estabelecer relações pedagógicas mais interativas e cooperativas. Considera-se que a presença das tecnologias no ambiente escolar favoreça o estabelecimento de relações menos verticais, como se delas emergisse um novo universo educativo dirigido pelos paradigmas das TIC. Em decorrência disso, os professores são colocados diante da tarefa de mudar o espaço educativo, tanto em sua organização como em sua pedagogia, pela introdução dessas tecnologias. (PEIXOTO, 2012, p. 135-136)

O discurso apresentado é um discurso predominanteno meio acadêmico, que tem nas TIC a ponta de lança para mudar a educação. Peixotopontua, de forma crítica, três mitos da relação TIC e Educação:

> [...]este artigo pretende lançar a discussão acerca de três mitos presentes em nosso ideário sobre as relações entre as TIC e a educação: a) a inovação tecnológica está ligada apenas ao desenvolvimento das máquinas e à existência de uma relação mecânica e casual entre inovação e as mudanças no mundo social e do trabalho (mito 1); b) as TIC representam um novo paradigma pedagógico (mito 2); c) a tecnologia é tida como um meio ou instrumento neutro (mito3). (PEIXOTO, 2012, p. 136)

A abordagem desses três mitos é importante para o nosso trabalho. Na discussão do primeiro mito “a inovação tecnológica está ligada apenas ao desenvolvimento das máquinas e à existência de uma relação mecânica e casual entre inovação e as mudanças no mundo social e do trabalho”,Peixoto (2012) mostra que, juntamente com a mudança organizacional, ocorre a intensificação da produção com a introdução da alta tecnologia, principalmente da robótica. Muitas das funções que os homens executavam passaram a ser realizadas por máquinas autônomas, mas que são programáveis. Essa tecnologia inclui robôs que ainda têm alto grau de dependência de programação humana, mas eles representam, sem sombra de dúvidas, um grande divisor de águas no parque industrial e produtivo. De acordo com a autora, o grande desenvolvimento das forças produtivas, principalmente, nas últimas três décadas do século XX, estáligado ao desenvolvimento do maquinário, mas também tem grandes ligações com as questões econômicas e também culturais.

Na discussão do segundo mito “as TIC representam um novo paradigma pedagógico”,Peixoto (2012) apresenta o entendimento de que não é verdade que as TICs sejam um novo paradigma pedagógico, mas a grande verdade é a imensa capacidade que temelas têm de se adaptaremàs várias teorias de aprendizagem que conhecemos. A maioria dos professores e também dos pesquisadores tendem a usar as TIC conforme aquilo que eles acreditam poder contribuir para a aprendizagem.

Então, no lugar das TIC serem um novo paradigma pedagógico, o que temos é um binômio: a grande capacidade de adaptação por parte das TIC e também a grande capacidade que possui os professores em adaptar as TIC de acordo com o que esse professor acredita que pode contribuir para o seu aluno melhor aprender.O entender de Peixoto é de que não é por ter um grande potencial didático-pedagógico que temos em relação às TIC de abrir mão de investigar os aspectos sociais e culturais que as envolvem. Do contrário, estaremos correndo o risco de dar a entender que o potencial didático-pedagógico das TIC é transferido para as relações pedagógicas de forma automática e ou direta.

Na discussão do terceiro mito: “a tecnologia é tida como um meio ou instrumento neutro”,Peixoto (2012) apresenta o entendimento que, além da perspectiva determinista (aquela que diz que a tecnologia determina a vida social e cultural), a tecnologia é também vista numa ingênua visão meramente instrumental (como se ela não representasse e emitisse valores). A tecnologia também é um meio, mas no sentido da modernidade, meios e finalidades são expressões independentes. Como a tecnologia é composta de uma rede complexa e densa, essa não pode ser vista (compreendida) de uma forma tão dicotômica. Então, a saída é discutir a relação de interações entre os homens e as máquinas, tentando principalmente entender o que é acrescentado nessa relação por parte dos objetos técnicos.

Na esfera (no contexto) educativa temos que ter claro os riscos que originam do poder atribuído à tecnologia nesse processo. Peixoto (2012) conclui sua abordagem com o seguinte alerta:

> O computador é integrado a uma cadeia simbólica que pode ser responsável pelo seu reconhecimento como objeto suporte ou como um potente objeto didático dotado de poderes pedagógicos. Esta cadeia pode esconder outros aspectos, atribuindo valor unicamente à rapidez e à eficácia das tecnologias digitais. (PEIXOTO, 2012, p.144-145)

Desse modo, a questão não é ignorar o papel que as TIC podem desempenharno processo educacional, mas, sim, não atribuir a elas um papel idealizado e superdimensionado do que possam representar no complexo mundo educacional.

Nesta pesquisa, ao utilizar tecnologias no ensino-aprendizagem da matemática, investigaremos o papel da mediação pedagógica do *software*Geogebra num experimento didático formativo com base teórica do ensino desenvolvimental. Pretendemos não adotar a visão instrumental e nem determinista das tecnologias na educação, mas adotá-la de forma crítica e investigativa.

2.7 O COMPUTADOR NA SALA DE AULA

Borba e Penteado (2012, p. 11) levantam um antigo, mas persistente, temor relacionado à utilização do que a informática poderia trazer para a educação: "o aluno iria só apertar teclas e obedecer à orientação dada pela máquina. Isso contribuiria ainda mais para torná-lo um mero repetidor de tarefas".Segundo o entendimento desses autores, tal temor ocorre na educação em geral, mas tem uma força ainda maior junto a uma parte da comunidade da educação matemática.

De acordo com os autores, os setores de parte da educação matemática que se apresentam mais temerosos em relação ao uso da informática são aqueles que têm a concepção da matemática como a origem do pensamento lógico. A ideia que justificaria tal posicionamento, segundo Borba e Penteado (2012, p. 11), éa seguinte: se o raciocínio matemático é a origem do pensamento lógico e se esse raciocínio passa a ser realizado por uma máquina, no caso o computador, o aluno não precisará raciocinar, e assim o aluno não desenvolverá a sua inteligência.

Outraideia um pouco mais recente,de quea introdução da informática na educação poderia prejudicar os alunos, segundo os autores Borba e Penteado (2012, p. 11) é:

> Argumentos que apontam o computador como a solução para os problemas educacionais. [...] nem sempre aparecem de forma explícita para qual problema o computador é a solução. Nem sempre é feita a pergunta: "qual é o problema? ou " qual é o problema para o qual o computador é a solução?

Essa questão de apontar para qual problema educacional o computador é a solução levanta a lógica para essa discussão. Se algo é solução de um problema, o mínimo que se espera é que se diga a solução de qual problema.Ao mesmo tempo, esse é um bom exemplo de que a lógica, no sentido de um encadeamento racional, não é um atributo somente da matemática. Um jogador de futebol, por exemplo, que resolve bater um pênalti com o lado de dentro do peito do pé não está fazendo nenhum raciocínio matemático para tal ato.

Na verdade, a capacidade de raciocinar usando uma lógica, não é um atributo único de nós professores de matemática.Borba e Penteado (2012, p. 12), inteligentemente,não defendem nenhuma ideia e nem outra, eles dizem: "[...] pretendemos sugerir que a relação entre a informática e a educação não deve ser pensada de forma dicotômica [...]". Ou seja, para os autores, a discussão não passa necessariamente pela polaridade do computador atrapalhar o raciocínio ou de solucionar quase tudo.

A possível saída, apontada por Borba e Penteado (2012), é assim esboçada:

> Parece-nos mais relevante analisar o novo cenário educacional que se constitui a partir da entrada desse "novo ator", a tecnologia informática. Aqui, interessam-nos as possibilidades e dificuldades que se apresentam, sem comparar se são melhores ou piores do que aquelas nas quais essa tecnologia não é utilizada. (BORBA;PENTEADO, 2012, p. 12)

Embora o caminho apontado refira-se às possibilidades e/ou dificuldades da entrada do computador na educação, nem por isso os autores deixam de trabalhar um pouco na discussão do primeiro temor, daquele do uso do computador atrapalhar o raciocínio. Entretanto, com o objetivo de serem mais práticos nessa discussão, os autores colocam duas perguntas representativas do temor da introdução da tecnologia na escola. São elas: "Se meu aluno utilizar calculadora, como ele aprenderá a fazer contas?"; "Seo estudante de ensino médio aperta uma tecla no computador e o gráfico da função já aparece, como ele conseguirá 'de fato', aprender a traçá-lo?" (BORBA; PENTEADO;2012, p. 12).

Os autores, em questão, apresentam uma forma de reflexão sobre essas duas perguntas, fazendo a reformulação substituindo o computador, que simboliza o uso da tecnologia, pelo uso do papel e do lápis. Eles afirmam que, nas suas andanças pelo Brasil ministrando cursos,as pessoas que levantaram a questão da calculadora e ou do computador, perguntam: "Como assim?"Isso se deve ao fato dessas pessoas não perceberem que o papel e o lápis são tecnologias, da mesma forma que o computador. Só que é uma mídia com a qual já se sabe que não causa dependência. Ou dito de outra forma, nós já incorporamos a naturalidade do uso do papel e do lápis.

Nós achamos natural e genuínoo uso do papel e do lápis, e conseguimos, baseados emnossa experiência com esses materiais, perceber que eles contribuem e muito para a melhoria do raciocínio do aluno.Para quem acredita que o papel e o lápis não causam dependência peça aos alunos, ou mesmo os professores, que consideram papel e lápis como natural, para fazerem a conta ou o gráfico de uma função sem esses dois instrumentos, naturais por excelência. Com certeza, surgirão outros "Como assim?" Mas pode também aparecer quem vá usar um palito de bambu (tipo espetinho) escrevendo no chão para fazer a conta ou o gráfico.

Na verdade, conforme bem colocam Borba e Penteado (2012, p. 13):"Para nós, entretanto, sempre há uma dada mídia envolvida na produção de conhecimento". E os autores apresentam o entendimento de que sempre existirá essa dependência de uma dada mídia, bem como, esta determinada mídia está ligada a um lugar e a um contexto histórico e social, em geral, e também em relação a um dado contexto educacional em particular.

Nesse sentido, os autores apontam para uma nova perspectiva via informática no processo de obtenção de conhecimento:

> Entendemos que uma nova mídia, como a informática, abre possibilidades de mudanças dentro do próprio conhecimento e que é possível haver ressonância entre uma dada pedagogia, uma mídia e uma visão de conhecimento. Não se trata de dizer que existe uma relação biunívoca entre conhecimento e pedagogia ou entre mídia e pedagogia. [...] uma determinada mídia não determina a prática pedagógica. [...] os exemplos aqui apresentados são resultados da harmonia existente entreo enfoque pedagógico e as mídias utilizadas. [...] Assim, o enfoque experimental explora ao máximo as possibilidades de rápido feedback das mídias informáticas e a facilidade de geração de inúmeros gráficos, tabelas e expressões algébricas.[...]essa prática pedagógica estimula a utilização de problemas abertos, de formulação de conjecturas [...]. (BORBA;PENTEADO, 2012, p. 45-46)

Assim, podemos relacionar o que afirmam os autores ao capítulo anterior, de seu trabalho, no qual elesnos mostram,do ponto de vista prático, alguns trabalhos que realizaram com seus alunos. Ao longo desses trabalhos, eles procuraram buscar uma harmonia entre o enfoque pedagógico e a mídia que usaram. Assim, eles conseguem aliar o enfoque pedagógico utilizadoao experimental, no qual se explora, ao máximo, a capacidade fornecida por essas mídias para experimentar, estabelecer conjecturas e testá-las.

O nosso interesse nesse processo exploratório refere-se à abordagem proposta pelos autores, aqual é assim exposta: "Tal prática está também em harmonia com uma visão de construção do conhecimento que privilegia o processo e não o produto-resultado em sala de aula, e com uma postura epistemológica que entende o conhecimento como tendo sempre um componente que depende do sujeito" (BORBA; PENTEADO, 2012, p. 45-46).

Assim, Borba e Penteado colocam em relevo o papel do sujeito na busca pelo conhecimento. Nessa abordagem, o processo é igualmente importante e não só o resultado. Ao realizar determinada atividade, se o aluno acertou,como elechegou ao resultado correto? Se ele errou, qual foi o erro? Como este erro pode ser evitado? Como corrigir para dar certo?

Os autores, baseados em Levy(1993), mostram a "noção de tecnologia da inteligência" de forma a caracterizar três técnicas as quais deram um grande salto à memória e ao conhecimento. São elas:"a oralidade, a escrita e a informática"(BORBA; PENTEADO, 2012, p. 47-48). A oralidadeera usadano sentido de ampliar a capacidade de memória. Já a escrita com o uso do livro, num formato mais próximo do que temos hoje, fez uma considerável ampliação da capacidade da memória, tomada como referência à memória oral. Esses avanços foram obtidos de forma mais eficiente por meioda escrita que, materializada na forma do livro impresso, permitiuum grande avanço do raciocínio e em paralelo a ampliação da capacidade de memória existente até então.

Conforme mostram esses autores, a informática seria um curso de ampliação dessa base tecnológica que igualmente permite, entre outras coisas, a continuidade da ampliação da nossa capacidade de memória (escrita, falada em forma de áudio e ou vídeo, fotografias etc.), bem como o grande crescimento da capacidade de raciocínio, via formas múltiplas. Desse momo, Borba e Penteado (2012) afirmam que:

> Da mesma forma, devemos entender a informática. Ela é uma nova extensão de memória, com diferenças qualitativasem relação às outras tecnologiasda inteligência e permite que a linearidade de raciocínio seja desafiada por modos de pensar, baseados na simulação, na experimentação e em uma "nova linguagem" que envolve escrita, oralidade, imagens e comunicação instantânea. [...] A perspectiva histórica, a qual abraçamos, sugere que os seres humanos são constituídos por técnicas que estendem e modificam seu raciocínio e, ao mesmo tempo, esses mesmos seres humanos são transformados por essas técnicas. [...] entendemos que conhecimento só éproduzido com uma determinada mídia, ou com uma tecnologia da inteligência. É por isso que adotamos uma perspectiva teórica que se apoia na noção de que conhecimento é produzido por um coletivo formado por seres humanos-com-mídias, ou seres-humanos-com-tecnologias e não, como sugerem outras teorias, por seres humanos solitários ou coletivos formados apenas por seres humanos. (BORBA;PENTEADO, 2012, p. 48)

Assim, com o uso da tecnologia podemos ampliar o raciocínio entre outras formas,por meio da experimentação e da simulação ampliadas pela base tecnológica decorrente da informática. Ocorre a relaçãodialética emque o homem muda a técnica e a técnica muda o homem. Um bom exemplo disso é o uso do WhatsApp com a massificação do uso dos celulares e da internet. Há dez anos, não era comum fazer o uso de fotografia de documentos, por exemplo, como se faz hoje. Se nós necessitássemos de comprovar um dado pagamento, teríamos que pegar um fax e comprovar o pagamento via esse instrumento. Com o uso do WhatsAppvocê fotografa o comprovante e rapidamente ocorre a comprovação do pagamento. Sem contar, por exemplo, que hoje é comum fazer pagamentos por leitura de código de barras, já no aplicativo instalado no próprio celular. Então, os usos e costumes da humanidade mudam com a tecnologia, bem como a tecnologia muda em função de novas necessidades humanas. Basta verificar as mudanças de capacidade de fotografia e de processamento de dados que ocorreram, por exemplo, nos celulares, para facilitar e ampliar seu uso nesses aparelhos pelas pessoas.

Os autores defendem o ponto de vista de que o conhecimento é formado por coletivos de seres humanos com mídias e/ou tecnologias. O conhecimento não ocorre somente por obra de um ser solitário, totalmente independente dos demais, ou mesmo por um coletivo humano sem nenhum vínculo com mídia e ou técnica. Dessa forma, Borba e Penteado (2012) pontuam que:

> Em nossa perspectiva, os computadores não substituem ou apenas complementam os seres humanos. Os computadores, como enfatiza Tikhomirov(1981), reorganizam opensamento. A visão de pensamento aqui adotada inclui a formulação e resolução de problemas e o julgamento de valor de como se usa um dado conhecimento. Entendemos que não há apenas uma justaposição de técnica e seres humanos, como a primeira apenas se juntasse aos últimos. Há uma interação entre humanos e não humanos de forma que aquilo que é um problema com uma determinada tecnologia passa a ser uma mera questão na presença de outra. [...] O nosso trabalho, como educadores matemáticos, deve ser o de ver como a matemática se constitui quando novos atores se fazem presentes em sua investigação. [...] fica evidente que uma mídia não extermina a outra. De maneira geral, o cinema não acabou com o teatro, o vídeo não eliminou o cinema; da mesma forma, a oralidade não foi suprimida pela escrita: pelo contrário, foi criada uma nova oralidade a partir da leitura escrita. Não acreditamos que a informática irá terminar com a escrita ou a oralidade, nem que a simulação acabará com a demonstração em Matemática. É provável que haverá transformações ou reorganizações. (BORBA;PENTEADO, 2012, p. 49)

Os autores entendem que os computadores realmente reorganizam o pensamento, pois amplia a capacidade de fazer testes, trabalhar dados e, usando a lógica de programação de forma engenhosa, permitem resolver muitos problemas. De forma ampla, uma dada gama de dados permite fazer o julgamento de valor de um dado conhecimento. Mesmo porque, nessa perspectiva, o computadorpossibilita acessar muito do conhecimento humano guardado em forma de memória de dados das mais diversas mídias: texto, imagens, áudios, vídeos etc. Assim, não há justaposição de técnica sobre os humanos, pois a técnica é uma criação social desses últimos.

As tecnologias têm um movimento dinâmico de forma que podemajudarna solução de problemas para melhorá-la. Mas também pode acontecer o movimento inverso, ou seja, tenho um problema que com essa tecnologia é impossível de ser resolvido. Então, a saída é criar ou desenvolver outra.

Como exemplo, podemos citar o processo de desenvolvimento de energia elétrica nos países que tem baixo potencial hidroelétrico.Nesse caso, uma das primeiras saídas tecnológicas encontradas foi o uso da energia atômica. Os problemas decorrentes do uso dessa energia exigiram um grande desenvolvimento na área de segurança e eficiência dessa energia. Mesmo assim, há a possibilidade de acidentes, mesmo não tão esperados, como no caso do reator japonês em Fukujyma. Como não está sendo possível contornar esse problema, em médio prazo, então a saída é investir no desenvolvimento de outras fontes de energia: energia geotérmica, eólicas e das marés, por exemplo. O desenvolvimento da sociedade humana está cheio desse tipo de saídas. Dessa forma, realmente, o problema de uma dada tecnologia hoje passa a ser uma questão do passado ou de pequena relevância, ou mesmo inexistentena presença de outra tecnologia.

Evidentemente quando os autores falam do trabalho "enquantoeducadores matemáticos" eles estão se reportando à questão da entrada dos "novos autores", ou seja, da informática na escola. Borba e Penteado(2012) estão dizendo isso dentro do contexto da discussão da entrada da informática na escola. Evidentemente, eles não estão dizendo que, de um modo geral, o trabalho dos educadores matemáticos abarca somente essa dimensão.

É bom salientar que,do ponto de vista mercadológico, uma mídia podeexterminar a outra. Por exemplo, com o uso do DVD, o vídeo cassete foi exterminado do mercado. Porém, continua existindo uma quantidade gigantesca de filmes gravados no formato de fita de videocassete, isto quer dizer somente que hoje em dia, o grosso do mercado de fitas de videocassete foi direcionado para o mercado de DVD.Um interessante exemplo aconteceu com o disco de vinil (o disco preto, o "bolachão"), que foi substituído no grosso do mercado mundial pelo CD, mas continua sendo produzido em pequena escala em várias partes do mundo, para um público de grande poder aquisitivo e muito fiel.

2.8 DAVIDOV E A POSSIBILIDADE DO USO DOS COMPUTADORES NO ENSINO E APRENDIZAGEM

Como o foco deste trabalho é a teoria do ensino desenvolvimental, é oportuno citar que já na década de 1980, no início do uso dos computadores chamados à época de pessoais, Davidov(1988) já pontuava:

> O uso de computadores pode facilitar significativamente a resolução de tarefas de intensificação do processo de ensino e aprendizagem e de aumento do nível deste processo. Neste caso, tem grande importância assegurar psicopedagogicamente a informatização da instrução nas escolas. Na atualidade, há já bastante experiência em prover suporte deste tipo, incorporando computadores na estrutura integral da atividade educacional dos alunos. (DAVIDOV, 1988,p.9)

Conforme Davidov aponta, ele não via nenhuma contraposição em usar de forma significativa o computador na intensificação do processo de ensino e aprendizagem dos escolares. O autor retorna ao tema da utilização da informática nas escolas, dessa vez de uma forma bem característica, quando faz a crítica daquilo que não concorda e aponta um caminho de utilização. A esse respeito ele afirma:

> As novas oportunidades para a aplicação da informática no processo da aprendizagem surgiram nas décadas de sessenta, setenta e oitenta. Temos acumulado bastante experiência na utilização da informática em escolas, que é basicamente associada à ideia da instrução programada. A utilização de computadores na instrução programada limitou a formação a capacidades e conhecimentos de caráter executivo e não favoreceu a transferência dos mesmos a novas situações ou ao desenvolvimento do pensamento teórico. Desta maneira, tornou-se essencial retirar o que esta experiência de instrução programada tinha de valioso e elaborar os fundamentos psicológicos e pedagógicos do processo da informatização da instrução programada, com referência nas teorias contemporâneas do ensino desenvolvimental, uma das quais é a teoria atividade de aprendizagem. O computador, quando incorporado à estrutura integral da atividade de aprendizagem tem provado ser um instrumento eficaz na organização e manejo desta atividade, além de ser um instrumento que possibilita o monitoramento dos resultados da aprendizagem. Ele propicia um modelo dinâmico das ações de aprendizagem. Ao dominar os modos de trabalho com os computadores, os alunos executam as ações de aprendizagem apropriadas e assimilam a quantidade finita de conteúdo conceitual que conseguem descobrir. Os alunos que trabalham com o computador transformam e assimilam o conteúdo de determinada esfera objetal, que é modelado no design destes sistemas. E ao planejar os sistemas de computação educacional, é essencial que se entenda a estrutura das ações e operações de aprendizagem que o sujeito realiza ao assimilar determinado conteúdo conceitual. Graças a isto, o computador está começando a entrar harmonicamente no sistema de solução, pelos escolares, de diferentes tarefas de aprendizagem. A utilização de computadores favorece o desenvolvimento do pensamento teórico, o que, em certo sentido, pode chamar-se programador ou "programador" ou "operatório"; este pensamento permite aos escolares utilizar os meios lógico-matemáticos para a programação e o planejamento de suas próprias ações cognitivas. (DAVIDOV, 1988,p. 140-141)

Desse modo, Davidov critica a forma como a instrução programada estava sendo utilizada, sob o argumento que ela limitou o processo de formação, na capacidade e no conhecimento necessário para a tomada de decisões. O autor entende que ela não propiciou a transferência desses conhecimentos e capacidades para as novas situaçõesproblemas, bem como não contribuiu, de forma efetiva, para a elevação do pensamento teórico.

A saída apontada pelo autor foi fazer a utilização da instrução programada tendo como referência teórica o ensino desenvolvimental, principalmente fazendo uso da teoria da atividade.Davidov(1988) apresenta o entendimento de que o computador, ao ser usado de forma integrada na estrutura da atividade, mostra ser bastante eficaz tanto na organização quanto na execução da atividade de aprendizagem. O autor ainda destaca que o computador permite fazer o acompanhamento dos resultados pretendidos com a aprendizagem. Ele ainda reconhece que o aluno que domina o modo de trabalhar com o computador realiza as açõesnecessárias para a aprendizagem, bem como assimila os conteúdos conceituais que consegue descobrir ao executar essa atividade.

Davidov (1988) ainda alerta para a maneira de planejar os sistemas de computação destinadosà área escolar. Ele realça ser fundamental que se entenda de que forma são as ações e operações que o alunorealiza ao "assimilar" um dado conteúdo relacionado a certo conceito. O autor reconhece que os computadores contribuem para o aumento do pensamento teórico, pensamento esse que, num dado sentido, pode ser chamado pensamento operatório. Segundo ele, o pensamento operatório (teórico) permite aos alunos utilizar os meios lógicos-matemáticos para programar e planejar suas próprias ações cognitivas.

Assim, fica evidente que não existe nenhuma contradição entre fazer o uso da teoria do ensino desenvolvimental e,ao mesmo tempo,utilizar de forma concreta o computador como uma ferramenta pedagógica em benefício da aprendizagem do aluno. Fazer o uso dessa mídia constitui também uma das formas de levar o aluno a se apropriar do pensamento científico construído de forma sócio-histórica pela humanidade.Usar tecnologia na escola, em especial o computador nas aulas de matemática, pode favorecer muito as atividades de ensino, no sentido de romper com a metodologia expositiva centrada basicamente no uso do quadro, giz e do livro didático (Davidov, 1988).

O uso do computador por si só na sala de aula não traz benefício ao ensino. Não adianta ensinar com o computador dando aulas com abordagens tradicionais e com muito improviso. Como bem colocam Laudares e Lachini (2000, p.12):"[...] tal perspectiva só pode ser concretizada por meio do planejamento cuidadoso de atividades de laboratório que estimulem a formação de uma postura investigativa por parte dos alunos e da preparação e motivação dos professores para conduzi-las”.

No nosso caso, estamos procurando seguir essas recomendações. Estamos utilizando uma base teórica para impulsionar a formação integral e científica do aluno por meio do Ensino Desenvolvimental. A abordagem investigativa é também reforçada pela metodologia da investigação matemática em sala de aula. O processo de planejamento e motivação está garantido na elaboração do nosso experimento didático formativo. Dessa forma, vamos trabalhar ao longo do experimento com o *software*de Geometria Dinâmico Geogebra, do qual apresentaremosas características a seguir.

2.9INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA EM SALA DE AULA

Nossa pesquisa, por se tratar de ensino e aprendizagem de matemática, buscará subsídios teóricos também nos estudos de Ponte et al(2013).Embora esta proposta possa ser aplicada a todos os níveis de ensino, neste trabalho, focaremos sua aplicação no ensino fundamental e médio.

Neste tópico, também trataremos da articulação existente entre o ensino e aprendizagem de matemática e sua articulação com o ensino desenvolvimental. Isso porque nos interessa também analisar como ocorre o processo de investigação na aula de matemática, como fomentar o interesse dos alunos para participar da aula e se engajarno estudo desta matéria.

2.9.1 Introdução à investigação matemática em sala de aula

No tocante especificamente à investigação matemática em sala de aula, Ponte et. al. (2013) ressaltam o lado positivo do uso dessa ferramenta de ensino. Porém, eles não a veem como a chave de solução de todas as demandas do ensino de matemática. Nesse sentido, os autores explicam que:

> Em contexto de ensino e aprendizagem, investigar não significa necessariamente lidar com problemas muito sofisticados na fronteira do conhecimento. [...]Significa, pelo contrário, trabalhar com questões que nos interpelam e que se apresentam no início de modo confuso, mas que procuramos clarificar e estudar de modo organizado. (PONTE et. al., 2013, p. 9)

Desse modo, conforme foi exposto neste trabalho, os pilares da nossa pesquisas são o ensino desenvolvimental, a investigação matemática em sala de aula e o uso de *software*para ensino, no caso oGeogebra. Porém, entendemos que nenhum deles, isoladamente, é capaz de resolver os problemas de ensino da matemática, do mesmo modo como observam Ponte et al., ao afirmarem que:

> Em numerosas experiências já empreendidas com o trabalho investigativo, os alunos têm mostrado realizar aprendizagens e desenvolver entusiasmo pela matemática. Apesar disso, não encaramos as investigações matemáticas como a chave que permite por si só resolver todos os problemas do ensino da matemática. Há muitas outras atividades a realizar na sala de aula. (PONTEet al, 2013, p.10)

É desse mesmo modo que entendemos a presente pesquisa. Para dar continuidade aonosso estudo,é necessário retomar a ideia do termo investigar. A esse respeito, Ponte et al. (2013, p.10) afirmam que: "Investigar é procurar conhecer o que não se sabe. Com um significado muito semelhante”. Assim, por meio dos termos “pesquisar” e“inquirir”conclui-se que investigar é estabelecer uma busca de entendimento de algo, no sentido de encontrar seu significado e de realizar uma descoberta.

Na mesma página Ponteet al. (2013) abordam a investigação vista pelos matemáticos profissionais, que a veem como sendo um ato de: “descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades” (PONTE et. al. 2013, p. 13).E, realmente, é esse o trabalho investigativo do profissional da matemática. Isso nos passa uma ideia da matemática como uma ciência com um viés acentuadamente rigoroso, criada numa base predominantemente dedutiva, a qual se apresenta como um modelo de rigor e de certeza.

Ponte et. al. (2013, p.15) chamam a atenção para: "O processo de criação matemática surge aqui fértil em acontecimentos inesperados, de movimentos para frente e para trás." Desse modo, os autores alertam para o fato de que o processo investigativo matemático não é retilíneo e portador de um único sentido de movimento e nem é eminentemente dedutivo. Muito pelo contrário, esse processo investigativo pode se apresentar também com um caráter experimental e indutivo.Para exemplificar tal situação, os autores citam dois matemáticos:

- George Pólya: “a matemática tem duas faces; é a ciência rigorosa de Euclides, mas é também algo mais... A matemática em construção aparece como uma ciência experimental, indutiva. Ambos os aspectos são tão antigos quanto a própria matemática" (PÓLYA, 1975, p. VIII apud PONTE et al. 2013, p.15-16).

- Bento de Jesus Caraça: “A ciência pode ser encarada sob dois aspectos diferentes. Ou se olha para ela tal como vem exposta nos livros de ensino, como coisa criada, e o aspecto é o de um todo harmonioso, onde os capítulos se encadeiam em ordem, sem contradições.Ou se procura acompanhá-la no seu desenvolvimento progressivo, assistir à maneira como foi sendo elaborada, e o aspecto é totalmente diferente- descobrem-se hesitações, dúvidas, contradições, que só um longo trabalho de reflexão e apuramento consegue eliminar, para que logo surjam outras hesitações, outras dúvidas, outras contradições" (CARAÇA, 1958, apud, PONTE et al 2013, p. 16).

No processo investigativo da matemática, bem como nas pesquisasna área de ciências, o passo inicial é o entendimento de qual é o problema a ser resolvido, ou melhor, qual é o problema a ser investigado? No entendimento de Ponteet al (2013), existe um vínculo direto entre "problema e investigação":

> Quando trabalhamos num problema, o nosso objetivo é, naturalmente, resolvê-lo. No entanto, para além de resolver o problema proposto, podemos fazer outras descobertas que, em alguns casos, se revelam tão ou mais importantes que a solução do problema original. Outras vezes, não se conseguindo resolver o problema, o trabalho não deixa de valer pelas descobertas imprevistas que proporciona. (PONTE et. al. 2013, p. 17)

Com o objetivo de finalizar, destacamos a importância e o poder, da investigação matemáticapara os alunos, que funciona como uma poderosa ferramenta didático-pedagógica de ensino, reproduzimos aqui as palavras de Braumann:

> Aprender Matemática não é simplesmente compreender a Matemática já feita, mas ser capaz de fazer investigação de natureza matemática (ao nível adequado a cada grau de ensino). Só assim se pode verdadeiramente perceber o que é a Matemática e a sua utilidade na compreensão do mundo e na intervenção sobre o mundo. Só assim se pode realmente dominar os conhecimentos adquiridos. Só assim se pode ser inundado pela paixão "detetivesca" indispensável à verdadeira fruição da Matemática. Aprender Matemática sem forte intervenção da sua faceta investigativa é como tentar aprender a andar de bicicletavendo os outros andar e recebendo informações sobre como o conseguem. Isso não chega. Para verdadeiramente aprender é preciso montar a bicicleta e andar, fazendo erros e aprendendo com eles. (BRAUMANN, 2002,p. 5 apud PONTE et al 2013, p. 19)

Para Ponte et al (2013, p. 21), a investigação matemática apresenta quatro momentos ou movimentos: "exploração e formulação, conjecturas, teses e reformulação, por último, a justificação e avaliação". Os autores, em seu livro, desenvolveram a seguinte tabela, a qual expõe deforma bastante sintética as quatro fases da investigação:

Quadro 3 – Fases da investigação matemática

Exploração e formulação de questões.	Reconhecer uma situação problema Explorar a situação problemática Formular questões
Conjecturas	Organizar dados Formular conjecturas (e fazer afirmações sobre conjecturas)
Testes e reformulação	Realizar testes Refinar uma conjectura
Justificação e avaliação	Justificar uma conjectura Avaliar o raciocínio ou resultado do raciocínio

Fonte: PONTE et al (2013, p. 21)

Na exploração e formulação são feitas a operação de conhecimento da situação a ser investigada, bem como a formulação dessa situação em forma de questão.Na conjectura os dados são devidamente organizados, se levanta hipóteses ou possíveis soluções para a questão problema.No momento dos testes e reformulação, como o próprio nome indica, são testadas as possíveis soluções. Ou, dependendo do caso, é feita uma reformulação dessa possível solução e a submete a novos testes.Por último, na fase da justificação e avaliação, é feita a argumentação e ou demonstração e avaliação de tudo quefoi realizado para resolver a situação problema.

Nessa altura da exposição nos cabe diferenciar: um simples exercício de um problema. No entendimento de Ponte et. al. (2013), no problema o aluno não tem "um método" já devidamente pronto para a sua solução de forma rápida, enquanto que nos exercícios já existe um caminho construído para a sua solução, bastando aplicar um determinado algoritmo, por exemplo. Merece destaque o fato de que existem problemas ou exercícios mais difíceis, em ambos os casos, exige-se um pouco mais de trabalho. Entretanto, existe um ponto comum entre os exercícios e os problemas, que é o fato de ambos terem de forma clara no seu enunciado aquilo que é dado, bem como o que solicitado para que se encontre.

Na investigação, como afirmamPonteetal (2013, p. 23):"Trata-se de situações mais abertas - a questão não está bem definida no início, cabendo a quem investiga um papel fundamental na sua definição". Desse modo, no processo investigativo podemhaver pontos de partida variados, bem como pontos de chegadas. Existe uma aproximação entre a visão de aprendizagem no ensino desenvolvimental e a proferida pelos autores, pois, segundo eles:

> Na disciplina de matemática, como em qualquer outra disciplina escolar, o envolvimento ativo do aluno é uma condição fundamental da aprendizagem. O aluno aprende quando mobiliza os seus recursos cognitivos e afetivos com vista a atingir um objetivo. Esse é, precisamente, um dos aspectos forte das investigações. Ao requerer a participação do aluno na formulação das questões a estudar, essa atividade tende a favorecer o seu envolvimento na aprendizagem. (PONTE et al, 2013, p. 23)

Assim, para haver aprendizagem, o aluno tem que estar envolvido de forma ativa nesse processo e, para isso, ele coloca em ação toda a sua base cognitiva e afetiva nesse objetivo de aprender. Já no ensino desenvolvimental, esse mesmo processo é entendido quando se afirma que para aprender o aluno mobiliza suas faculdades psicológicas superiores, visto que ele tem que ter um motivo, bem como tem que se colocar em atividade.

O aluno na investigação em matemática, em sala de aula,desempenha em forma de tarefa de estudo o trabalho realizado pelo matemático ao fazer pesquisa, no que se referem aqueles quatro movimentos: "exploração e formulação, conjecturas, teses e reformulação, por último, a justificação e avaliação" (PONTE et al, 2013, p. 23).

2.9.2A aula de investigação

No entendimento de Ponteet al (2013), a investigação matemática em sala de aula tem três momentos, o qual pode ocorrer numa aula ou se estender ao longo de várias aulas:

> Momento1- o professor faz a introdução da tarefa investigativa, podendo essa ser oral ou escrita;
> momento 2- a realização da investigação propriamente dita, podendo essa ocorrer de forma individual ou em pequenos grupos;
> momento 3- processo de discussão dos resultados, para que os colegas ou grupos comunicam e socializam os resultados do trabalho investigativo, nas suas partes mais importantes ou façam um breve apanhado geral. (PONTE et. al. 2013, p.25)

Ao longo do processo investigativo, o professor assume de maneiras estratégicas vários papéis: fazer com que os alunosentendam o significado do que seja investigar, evidenciar para o aluno o quedele é esperado na pesquisa, bem como ser o grande incentivador (motivador).O inicio da pesquisa é denominado "O arranque da aula".Na investigação, esse arranque (início, o "chute" inicial) é pequeno, mas igualmente importante, a ponto de desse momento depender "o resto da pesquisa".

O professor fornece a tarefa investigativa aos alunos, podendo ser na forma escrita ou mesmo de forma oral. Para os alunos mais novos e ou sem experiência, é bom ler a tarefa com eles e explicar alguma expressão não entendida, fazendo que eles deem a largada inicial no processo investigativo. Nesse sentido, Ponteet al (2013) têm o entendimento de que o professor deve tomar o cuidado nessa etapa do arranque, de modo a não condicionar o trabalho investigativo do aluno. Esse cuidado se justifica de forma a garantir que o educando desenvolva a tarefa investigativa de forma autônoma.

Espera-se habilidade por parte do professor: ao mesmo tempo em que eledistribui, explica a tarefa, que ele motive o aluno a fazer a interpretação dela. Temos que lembrar que, na aula investigativa, a própria interpretação é uma importante parte integrante do processo investigativo. Por esse motivo, é que o professor tem que ser habilidoso.

Também se faz necessário explicarpara o aluno que o seu trabalho vai ser mostrado para o restante do grupo e que se espera de todos os alunos uma boa discussão, mas, ao mesmo tempo, um clima cordial entre os colegas, de forma que cada aluno expositor se sinta estimulado e valorizado com o relato do seu trabalho investigativo. Assim, como em qualquer atividade de aprendizagem, para que professor e aluno tenham sucesso, se espera quea atividade aconteça num clima propício de respeito mútuo e de forma prazerosa e instigante.

Após iniciado o trabalho investigativo com a turma, o professor ficará e atuará como mediador, observando o trabalho desenvolvido pelos alunos. Pode ser que os alunos com menos experiência no trabalho investigativo ou mesmo o aluno que apresente mais dificuldade de entendimento conceitual e operatória em matemática, necessite de mais atenção por parte do professor.O trabalho do professor tem como meta levar o aluno a trilhar aqueles quatro passos característicos da investigação matemática em sala de aula: exploração e formulação, conjecturas, reformulação e finalmente a justificação e avaliação.

Apos a etapa do "arranque", inicia-se a investigação de uma maneira prática:inicia-se oprocesso de formulação das questões com as conjecturas. Pode ser que o aluno gaste um tempo a mais nessa etapa, mas para Ponte et al: "É nessa fase que vão embrenhando na situação, familiarizando-se com os dados e apropriando-se mais plenamente do sentido da tarefa" (PONTE et al, 2013, p. 30).

Pode ser que o alunotenha a necessidade de criar ainda mais dados, para definir as questões, bem como pode surgir quase que de imediatas conjecturas, as quais demandam ainda mais dados referentes aos testes decorrentes.O processo investigativo leva o aluno a usar todos os conhecimentos matemáticos adquiridos ao longo da sua formação. E isso ocorre de forma natural, ao longo da pesquisa, uma vez que o aluno está motivado em responder os desafios que vão surgindo.

As conjecturas decorrentes do processo investigativo, no entendimento de Ponteet al (2013) podem ocorrer de várias maneiras: seja da observação da concretude dos dados, ou da manipulação dos mesmos, bem como decorrentes de analogias provenientes de outras conjecturas que surgiram ao longo do processo investigativo.No momento que o aluno passa a fazer o registro de uma dada conjectura é que ele sente a necessidade de clarear suas ideias no sentido melhor de descrevê-las.

Ponteetal (2013, p. 33)explicam que o processo de teste das conjecturas por parte dos alunos é facilmente entendido. Ao mesmo tempo, os autores alertam para o fato de que muitos alunos têm certa tendência em aceitar conjecturas que foram testadas num número reduzidos de casos, o que pode levar a alguns erros. No sentido de corrigir essa "tendência", os autores recomendam atenção por parte do professor no apoio dado ao grupo, de modo a puxá-lo para uma discussão mais atenta sobre o teste de conjectura realizado, bem como motivando a produção de "contraexemplos" por parte dos membros do grupo.

A escrita, ou como prefere Ponteet al (2013) "o registro" de uma dada conjectura é ao mesmo tempo um momento do aluno organizar as ideias, mas também é a forma de facilitar o trabalho do professor por possibilitar o acompanhamento do trabalho do aluno e, ao mesmo tempo, é um treinamento para o aluno e uma maneira deste apresentar o seu trabalho de uma forma mais sintética e organizada nas discussões com os colegas de turma.

A expressão usada por mim anteriormente “treinamento” se justifica por ser uma importante oportunidade de o aluno irse acostumando e ampliando a sua capacidade de expressar de forma escrita a utilização da matemática. Esse é um processo que deve ser bastante incentivado pelo professor nas aulas investigativas.

Ponteet al (2013) demonstram a preocupação com o fato de que o aluno apresenta,na maioria dos casos, certa tendência de confundir as conjecturas existentes no decorrer da investigação com a conclusão da pesquisa em si. Os autores ainda chamam a atenção para o fato de que, muitas vezes, o próprio professor contribui para que os alunos acentuem essa tendência, com frases direcionadas aos grupos do tipo: "Então o que é que já concluíram?" ou "Quais são as suas conclusões?" (PONTE et al, 2013, p. 37). Os autores também alertam para o fato de que o simples teste da conjectura não significa a sua prova do ponto de vista formal. Por mais que essa tenha resistido a sucessivos testes. Nesse sentido, eles afirmam que:

> A introdução da ideia de prova matemática pode ser feita gradualmente, restringindo-se, numa fase inicial e com os alunos mais novos, à procura de uma justificação aceitável, que se baseie num raciocínio plausível e nos conhecimentos que os alunos possuem. À medida que os alunos vão introduzindo a necessidade de justificarem as suas afirmações e que as suas ferramentas matemáticas vão sendo mais sofisticadas,vai se tornando mais fácil realizarem pequenas provas matemáticas.(PONTE et al 2013,p.38)

Os autores demonstram uma visão de adequar a introdução do instrumento da prova matemática àluz da capacidade de entendimento e da idade do aluno, bem como com uma visão processual dessa demonstração. A ideia básica é fazer a introdução dessa prova balizada pela capacidade cognitiva do aluno, primando pela didática e de forma gradual, onde quem dita o ritmo é a maturidade matemática do aluno.

Outra etapa importante do processo investigativo em matemática é a da discussão da investigação realizada. Nela é ocorre a discussão acerca do trabalho realizado por todos os alunos ou grupos que conseguiram alcançar somente algumas etapas, até os que conseguiram realizar todo o trabalho. Essa discussão se destina a socializar o trabalho de uma forma geral, bem como mostrar como cada grupo abordou as diferentes etapas do trabalho investigativo.

Como é muito comum nessa etapa haver muita discussão e polêmica sobre a maneira que cada grupo aborda a investigaçãoe sobrea estratégica usada, cabe ao professor fazer as eventuais correções, mas principalmente exercer o seu "papel moderador". O que se pretende é garantir e incentivar a participação de todos, de forma que a discussão seja proveitosa também para todos os grupos envolvidos.Como afirmamPonteetal (2013):

> A fase de discussão é, pois, fundamental para que os alunos, por um lado, ganhem um entendimento mais rico do que significa investigar e, por outro, desenvolvam a capacidade de comunicarmatematicamente e de refletir sobre o seu trabalho e o seu poder de argumentação. Podemos mesmo afirmar que, sem a discussão final, se corre o risco de perder o sentido da investigação. (PONTE etal, 2013, p. 41)

Dentre as várias vantagens produzidas pelo processo da discussão da investigação realizada pelos vários grupos, merecem destaque de uma maneira mais acentuada: a ampliação da capacidade de comunicação matemática, um entendimento mais apurado e amplo do real significado do ato de investigar e, por último, a ampliação da capacidade argumentativa por parte dos alunos.

Se no ensino de um modo em geral a atuação do professor no sucesso do aluno é determinante, na aula investigativa isso ainda é mais verdadeiro. Para tanto, o professor necessita identificar o foco a ser atingido com sua atuaçãona aula investigativa. Ponteet al (2013) apresentam e orientam sobre o trabalho a ser seguido pelo professor na aula investigativa:

> No acompanhamento que o professor faz do trabalho dos alunos, ele deve procurar atingir um equilíbrio entre dois polos. Por um lado, dar-lhes a autonomia que é necessária para não comprometer a sua autoria da investigação e, por outro lado, garantir que o trabalho dos alunos vá fluindo e seja significativo. (...) o professor é chamado a desempenhar um conjunto de papéis bem diversos no decorrer de uma investigação: desafiar os alunos, avaliar o seu progresso, raciocinar matematicamente e apoiar o trabalho deles.(PONTE et al, 2013, p. 47)

No desafio dirigido aos alunos, o professor deve motivar devidamente, principalmente, na fase do "arranque". Ao mesmo tempo, ele tem que procurar escolher tarefas e ou questões que sejam adequadamente motivadoras e desafiadoras. Nesse sentido, os autores alertam para que: "as questões abertas aumentam a possibilidade de que esses se envolvam na atividade" (PONTE et al, 2013, p. 48). Isso tem uma razão natural de ser, pois as questões abertas têm um escopo de indagação mais amplo.

Os autores, também, afirmam que o professor deve combater certa tendência dos alunos em dar às questões abertas, colocadas pelos professores, um caráter meramente afirmativo. O professor deve trabalhar junto aos alunos para se opor a essa "tendência", de forma que, ao invés de responder afirmativamente, as transforme em questões de caráter interrogativo. Lembremos que existe uma grande simbiose entre pesquisa e interrogações.

Na avaliação do progresso dos alunos, a primeira coisa a observar é se eles "compreenderam" corretamente a tarefa. É importante perceber se a tarefa proposta está realmente desafiadora. É necessário verificar se os alunos estão realmente tratando a questão desafiadora como uma atividade investigativa, ou seja, como uma pesquisa matemática em sala de aula e não como um mero exercício existente no diaadia.

Durante todo o processo investigativo, o professor deve procurar compreender o raciocínio do aluno e não apresentar ou induzi-lo com o seu raciocínio. Para atingir tal objetivo, o professor pode usar uma série de táticas, como fazer perguntas e pedir explicações. Ao usar essas táticas, o professor deve tomar cuidado para não assustar, não apressar o aluno, e ter sempre em mente que é necessário "pescar", perceber o real pensamento do aluno: "evitando ajuizar apressadamente sobre o seu trabalho [...]tendo paciência para escutar e fazendo um esforço sério para compreendê-los, evitando corrigir cada afirmação ou conceito matematicamente pouco correto" (PONTE et al 2013, p. 49).

Na aula investigativa, o "raciocinar matematicamente" pode ser uma atitude previamente pensada pelo professor, mas também pode ocorrer que da própria indagação do aluno surjam questões ou situações ainda não pensadas pelo próprio professor. Ele tem que estar preparado para lidar em tais ocasiões de forma aberta diante de uma situação inesperada, não pensada.

Conforme o entendimento de Ponteet al (2013), as etapas de formulação e teste de conjecturas geralmente não apresentam problemas ao professor, e, sim, a etapa de justificação de conjecturas. O grau de dificuldade apresentadonesta etapa pode ser elevado para o nível de entendimento matemático do aluno. Cabe ao professor fazer a dosagem se a justificação será feita nessa investigação ou se ela será feita em outro momento no qual o aluno apresenta um nível matemático mais maduro. O grande referencial nessa dosagem é o que é melhor para o aluno naquele momento.

Oapoio prestado pelo professor ao aluno geralmente converge para duas áreas: uma relativa ao processo investigativo da matemática em si e outra relativa à abordagem didático-pedagógica da gestão da aula propriamente dita. PONTE et al (2013) privilegiam a primeira área, visto que as saídas apontadas por eles sempre são abordadas de uma maneira despretensiosa na segunda área.

Emnossa pesquisa, como contribuição para a área didático-pedagógica, apresentamos o ensino desenvolvimental e a utilização do *software*Geogebra. Na aplicação do experimento didático-formativo, teremos a oportunidade de nos reportar mais profundamente sobre essa segunda área.

Retornando a investigação em si, o professor pode efetivar o seu apoio ao aluno usando questões abertas, se necessário em uma forma um pouco mais direta. Ele pode também recordar conceitos envolvidos na pesquisa se for motivo de dúvida para o aluno, bem como contribuir para o seu processo reflexivo, promovendo sugestões orientadoras das atividades.

O professor deve procurar certo equilíbrio, no sentido de contribuir para o aluno encontrar uma saída, uma resposta. A postura do professor não deve ser a de validador de afirmações do aluno e, sim, de motivador e apoiador rumo ao processo investigativo à medida que o aluno compreenda melhor o papel dele na pesquisa, bem como o papel de apoio do professor ao longo do processo investigativo.A esse respeito, os autores afirmam: "Portanto, às habituais perguntas dos alunos, ‘está bem?’‘É isto que o professor quer?’devemouvir-se cada vez menos qual é o seu papel e o do professor nessas aulas"(PONTE et al 2013, p. 52-53).

2.10INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA COM O GEOGEBRA

Vaz (2012) adapta as ideias da Investigação matemática em sala de aula de Ponte et al(2013) para propor o que passou a chamar de Investigação matemática com o Geogebra. Em suas pesquisas, realizadas com diferentes grupos de alunos e de diversos níveis, percebeu que as atividades mediadas pedagogicamente com o *software*poderiam ser úteis na compreensão das essências dos objetos estudados. Assim, assinala a importância do *software*na reprodução do objeto matemático abstrato em uma situação concreta que reproduza sua essência de modo que o aluno possa compreendê-lo e reconstruí-lo abstratamente. O autor ressalta a importância da possibilidade do aluno enxergar o objeto, quando possível, representado de forma algébrica e também geométrica, representados na mesma tela do *software* , possibilitando a articulação entre essas representações e tornando possível que o aluno compreenda o objeto em todas as suas dimensões.

Vaz (2012) enfatiza o dinamismo dos objetos matemáticos proporcionado pelo *software*no sentido de vê-los em movimento compreendendo que isso é de fato uma situação importante para a matemática. O autor relata que uma propriedade de algum objeto ou um teorema matemático não representa um único objeto estático, pelo contrário, representa situações gerais válidas sob determinadas hipóteses. Por exemplo, o teorema de Pitágoras é uma relação válida para todos os triângulos retângulos e assim, portanto, é conveniente vê-lo em diversas situações e aplicados em outras frentes científicas.

Embora essas situações descritas sejam importantes, Vaz (2015) esclarece que toda essa dinâmica não é suficiente para o ensino-aprendizagem da matemática, sendo necessário que os alunos pensemsob o ponto de vista dessa ciência. Isso é muito importante e significa que devemos buscar validar as conjecturas segundo a lógica da matemática. Assim, ele destaca a importância de buscar argumentos matemáticos definitivos e, respeitando o nível de conhecimento cognitivo do aluno, conduzi-lo a outro, como está previsto na teoria histórico-cultural.

A proposta de Vaz (2012) pode ser realizada em quatro etapas elencadas abaixo. Ressalta-se que a primeira e a segunda são etapas não têm ordem de prioridade e dependem de uma situação, uma vez que a conjectura pode ser concebida, em muitos casos, antes da experimentação. Mas as etapas de formalização e generalização têm ordem de prioridade, primeiro a formalização e depois a generalização, pois a história da matemática mostra ser esse o caminho viável.

A etapa da experimentação é a possibilidade dos alunos e professor, em um laboratório de informática, usar o *software*para trabalhar atividades matemáticas que permitem ao aluno, movimentando os objetos matemáticos, comparar representações algébricas e geométricas, perceber propriedades, definições e construir conceitos através da interação. A etapa conjecturar significa que, depois de perceber as relações oriundas da experimentação, é possível vislumbrar propriedades, relações e resultados gerais importantes para o bom desenvolvimento do ensino da matemática. Uma vez feita a conjectura, o aluno pode enunciá-la como um resultado a ser investigado.

A etapa da formalização seria a demonstração matemática do fato propriamente dito ou uma contra proposição da conjectura levantada, nos dois casos com um argumento pedagógico compatível à série que se está trabalhando. Tal atitude é importante, pois não podemos, por meioda experimentação, generalizar os resultados sob o risco de não estarmos praticando os ideais da matemática. Os resultados dessa ciência devem ser argumentados, respeitando os níveis de entendimento do aluno.Depois de experimentar, conjecturar e formalizar o saber matemático é importante tentar fazer a generalização do resultado, isto é, investigar outras situações, enfim, explorar o alcance do resultado obtido.

Uma última palavra deve ser:a Investigação matemática com o Geogebra é uma sugestão metodológica para trabalhar com determinados conteúdos da matemática. Como está proposto em Davydov (1988), o método deriva do conteúdo e é isso que estamos concordando aqui. É interessante notar que essa ideia é muito bem adaptada em estudos sobre funções, geometria analítica e euclidiana, números complexos, para citar alguns.

No experimento didático formativo proposto nesta pesquisa, sobre o Teorema de Tales, tivemos a preocupação de planejar situações em que o teorema fosse reproduzido para que o aluno percebesse o seu significado a partir de suas experiências com o *software* . Para este fim, contamos com a participação do professor que aderiu a nossa proposta e já tinha certa intimidade com o *software* , mas que aceitou participar de uma capacitação para compreender melhor o sentido de nossa proposta. Ressalta-se também que os alunos envolvidos nesta pesquisa também foram capacitados para compreender e se apropriar das principais ferramentas do *software* .

Na sequência,apresentamos as etapas do experimento didático formativo que foi aplicado. Começamos com a gênese do teorema de Tales: o seu movimento lógico histórico com a finalidade de mostrar para o aluno sua importância para a ciência e os motivos de sua permanência nos livros didáticos e nas aulas de matemática.

2.11A GÊNESE E O MOVIMENTO LÓGICO-HISTÓRICO DO TEOREMA DE TALES

Em busca da gênese e da essência e do movimento lógico-histórico do Teorema de Tales, buscamos como única alternativa possível a pesquisa bibliográfica.Segundo Vaz (2007), o Teorema de Tales é um fato aceito pelos estudiosos da área que a matemática, como nós a entendemos hoje, que nasceu na Grécia, onde assistimos a transformação de uma Matemática empírica, herdada dos egípcios e dos babilônicos, em uma matemática dedutiva, formal, tal como a encontrada em *Os Elementos* (III a. C) de Euclides. Essa transformação, certamente um grande momento da história da Matemática, aconteceu, segundo a opinião de muitos historiadores, por meio da intervenção de Platão (427-348/7 a.C.).

Com os gregos, conforme nos explica Vaz (2007), a Filosofia e a matemática mergulham num período áureo. A Filosofia, com o advento de Aristóteles que escreveu sobre quase tudo, nos seus Analíticos, trata da teoria da Ciência e a matemática, principalmente com Euclides, que fundamenta a Geometria tendo por base três princípios, a saber: definições, postulados, noções comuns ou axiomas.

Entretanto, certamente essa história não começa e nem termina neste ponto. De fato, a matemática prossegue se desenvolvendo até os dias de hoje. E, se retrocedermos um pouco no tempo antes de Euclides, chegaremos a Tales de Mileto e Pitágoras de Samos, considerados os primeiros filósofos e os primeiros matemáticos que produziram as primeiras demonstrações na matemática e que são considerados os precursores do método dedutivo. Com o raciocínio dedutivo, a matemática passa a ficar demonstrativa e menos fatual e experimental, aumentando, assim,seu poder abstrativo.

Várias mudanças ocorreram nos últimos séculos do segundo milênio a.C., principalmente nas esferas econômicas e políticas. O poder do Egito e da Babilônia diminuíram acentuadamente, e, por sua vez, entraram em ascensão os hebreus, os assírios, os fenícios e os gregos. Todo esse processo de mudança entrou em choque com "a visão estática do Oriente antigo sobre as coisas" em relação a uma visão de uma forma mais racional, na qual o ser humano passou a indagar mais: "como e porque" (EVES, 2004, p.94).

No tocante à matemática, esses “como” e principalmente “porque" passaram a ser muito mais usados e praticados nas indagações. A visão experimental predominante no pensamento do antigo Oriente, a visão do "como", não era suficientemente ampla para o novo tipo de questionamento: "por que". Essa expressão "é uma característica de um tipo de pensamento mais elaborado, denominado pensamento científico" (EVES, 2004, p. 94).

O autorEves (2004) assim se refere ao caráter demonstrativo dado à matemática por tales: "Segundo a tradição, a geometria demonstrativa começou com Tales de Mileto, um dos "sete sábios" da Antiguidade, durante a primeira metade do século VI a.C."(EVES, 2004, p.94). Devido ao fato de Pitágoras ter vivido próximoà cidade de Mileto, e ser possivelmente 50 anos mais novo que Tales, pode até ter ocorrido que Pitágoras tenha sido um dos discípulos de Tales.

Segundo Eves (2004), sobre a Vida de Tales, é bem provável que o mesmo tenha feito fortuna como mercador, fato que o deixaria com tempo para se dedicar posteriormente "ao estudo e algumas viagens". Tales teria viajado ao Egito e lá calculado a altura de uma pirâmide, utilizando a projeção da sua sombra. A reputação agraciada por Tales, bem como suas descobertas matemáticas, são descritas por Eves (2004):

> De volta a Mileto ganhou reputação, graças ao seu gênio versátil, de estadista, conselheiro, engenheiro, homem de negócios, filósofo, matemático e astrônomo. Tales é o primeiro personagem conhecido a quem se associam descobertas matemáticas. Em geometria é, credita-se a ele os seguintes resultados elementares: 1. Qualquer diâmetro efetua a bissecção do círculo em que é traçado. 2. Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais. 3. Ângulos opostos pelo vértice são iguais. 4. Se dois triângulos têm dois ângulos e um lado em cada um deles respectivamente iguais, então esses triângulos são iguais. Um ângulo inscrito num semicírculo é reto. (este resultado era do conhecimento dos babilônios cerca de 1400 anos antes.) O valor desses resultados não deve ser aquilatado por eles mesmos, masantes pela crença de que Tales obteve-os mediante algum raciocínio lógico e não pela intuição ou experimentalmente. (EVES, 2004, p.94)

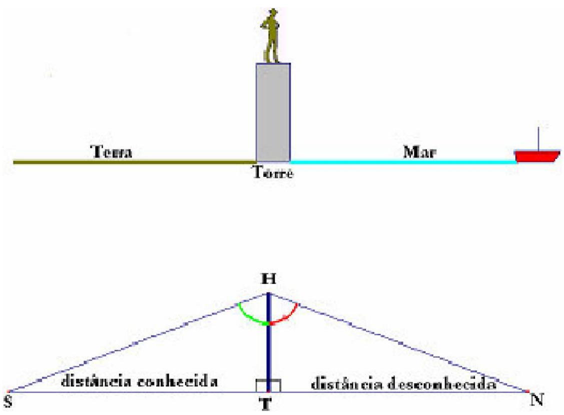
Conforme o autor, tais resultados devem ser devidamente medidos no contexto de um novo tipo de raciocínio, o raciocínio lógico, o qual caracteriza a matemática de hoje, do qual Tales é o grande precursor.Convém ressaltar que tudo que sabemos de Tales está escrito no Sumário de Eudemo de Proclos, cerca de 100 anos depois de Tales.A publicação da obra *Os Elementos*, de Euclides, que ocorreu aproximadamente 300 anos a.C.e obscureceu o trabalho dos matemáticos gregos anteriores a ele. "Seria como se esses trabalhos sofressem um processo de descarte, a ponto de não ser acessivo a nós" (EVES, 2004, p.96).

O uso dos postulados na matemática recebe o nome de raciocínio postulacional. No entendimento de Eves, tal raciocínio surgiu num período que vai de Tales, 600 a.C., à Euclides, 300 a.C. A característica desse "discurso lógico" (a maneira de se expressar matematicamente usando o raciocínio postulacional) é partindo de "suposições iniciais", que são os postulados, construir toda "uma sequência de deduções rigorosas". Eves se refere ao método postulacional como "a verdadeira essência da matemática moderna" (EVES, 2004, p.

115). Ele considera que o uso do método postulacional, seja como uma grande contribuição do pensamento grego para a matemática.

É atribuído a Tales o caso de semelhança ALA (Ângulo Lado Ângulo) e, segundo Bongiovanni, (2007, p.2), no livro História da Geometria de Eudemo (320 a.C.) a motivação de tal descoberta teria sido que Tales queria determinar a distância de um barco em relação à costa.

Figura 1- Distância entre barco e terra.

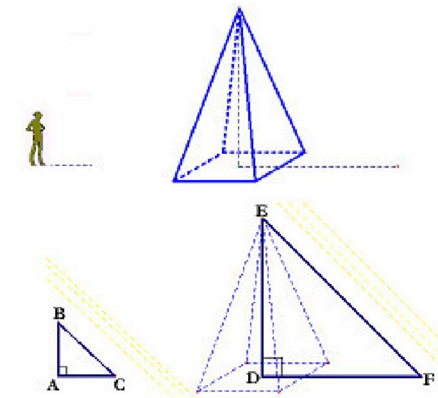


Fonte:Bongiovanni (2007, p.3)

Tales teria colocado um homem numa torre de pé, devidamente na vertical em relação ao solo, medido o ângulo THN (vertical, homem, Barco), em seguida teria pedido o homem para girar 180 graus (dando meia volta) e marcado o ângulo de mesma medida no solo, a abertura do ângulo THS. Com os ângulos STH= NTH= 90^o, então pelo caso ALA, os triângulos STH e NTH são semelhantes. Chamando o seguimento ST de distância conhecida, na terra e TN de distancia terra barco, temos que as duas distâncias são iguais devido à semelhança dos dois triângulos, ficando assim conhecida a distância terra barco, segmento TN.

Como Tales teria medido a altura de uma pirâmide no Egito, Bonggiovanni(2007, p.3) apresenta o entendimento de que Tales teria desenvolvido o conceito de escala.

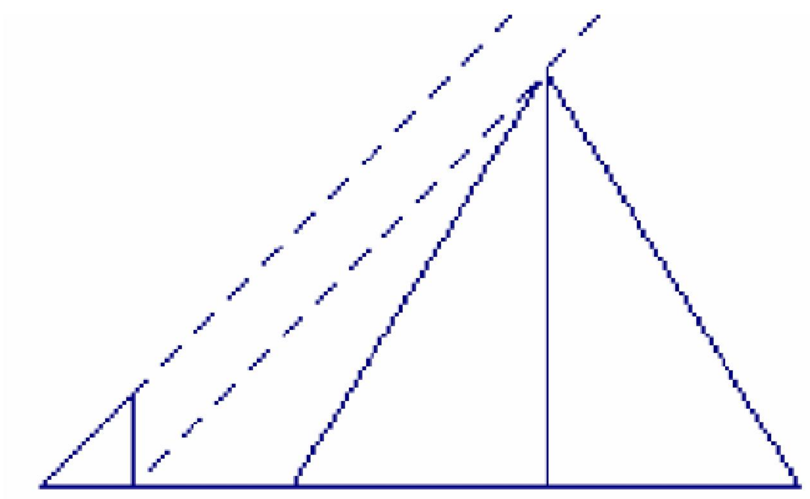
Figura 2 - Cálculo da altura da pirâmide.



Fonte:Bongiovanni (2007, p.3)

Para fazer a medida da pirâmide, Tales teria usado o fato de que as sombras projetadas pela pirâmide e por uma estaca na vertical, em um mesmo instante, apresentam um mesmo ângulo, estabelecendo assim uma proporção.

Figura 3 - Projeção da altura da pirâmide na terra em relação a uma estaca.



Fonte: Bongiovanni (2007, p. 3)

Bongiovanni (2007, p. 3) chega a especular se o caso da medida da pirâmide era aspecto mais geral do que o do barco, se: "A pergunta que paira no ar é se esses textos que tratam da sombra da pirâmide descrevem apenas uma aplicação do teorema de Tales ou, pelo contrário, a sua origem?"

Uma questão marcante para a matemática na época de Tales era atingir o inacessível, ou seja, medir onde não se podia por algum motivo chegar para efetuar a medida em loco. Bonggiovanni (2007, p.3) faz duas citações que bem exemplificam essa preocupação, são elas: "Diz Serres 'medir o inacessível consiste em reproduzi-lo no acessível'"(SERRES, 1997, apud BONGGIOVANNI, 2007, p. 3), a outra é atribuída a Auguste Comte, na qual não é citada a fonte, razão pela qual, faremos a citação indireta. Bonggiovanni (2007, p.3) apresenta o entendimento de que se em muitos casos não é possível fazer a medição de forma direta de uma dada grandeza deve-se procurar fazer a medida de forma indireta. Esse fato teria levado à criação e ao desenvolvimento da matemática.

2.11.1Quando o teorema de segmentos proporcionais passa a se chamar teorema de Tales

Por causa da importância da proporcionalidade para os gregos, principalmente em aplicações na arquitetura e agrimensura, o teorema de Tales era chamado de teorema dos segmentos proporcionais. Segundo Bongiovanni:

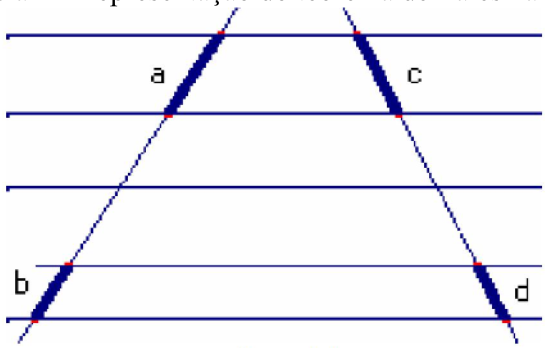
> No final do século XIX, na França, alguns autores denominaram esse resultado de teorema de Tales, denominação que persiste até hoje. [...] A primeira publicação de que se tem notícia e que substitui o nome de "teorema dos segmentos proporcionais" pelo "teorema de Talles" é o livro francês Élements de géometrie, de RoucheComberousse (reedição de 1883). (BONGIOVANNI, 2007, p.4)

Assim, vemos que o Termo Teorema de Tales é uma expressão matemática relativamente recente, do término do século dezenove, bem como, de alguma forma, podemos concluir que há aideia da influência francesa emnossa nomenclatura matemática.

2.11.2Enunciados curiosos do teorema de Tales em alguns países

Na Itália o teorema de Tales é assim enunciado: os segmentos determinados por um feixe de retas paralelas sobre duas transversais são diretamente proporcionais (Informações e desenhos retirados de Bongiovanni(2007, p.4).

Figura 4 - Representação do teorema de Tales na Itália



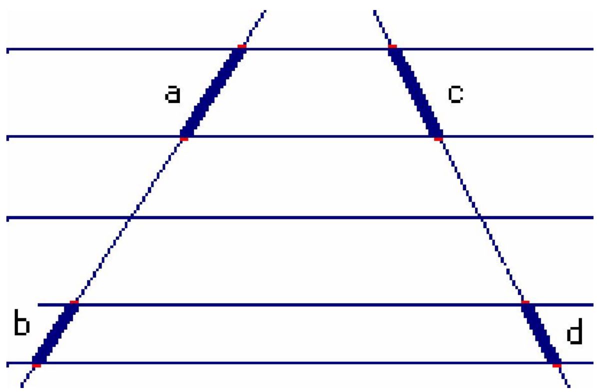
a/b=c/d

Fonte: Bongiovanni (2007, p. 3).

Nesse enunciado, o destaque matemático é a razão entre dois segmentos na mesma reta transversal.

O teorema de Tales na Espanha é assim enunciado: se cortarmos duas retas quaisquer por várias retas paralelas, os segmentos correspondentes determinados em ambas sãoproporcionais conforme figura abaixo:

Figura 5 - Representação do teorema de Tales na Espanha.



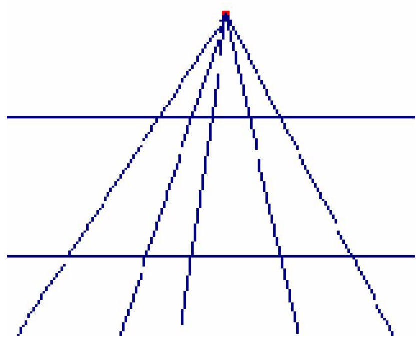
a/c=b/d

Fonte:Bongiovanni (2007, p.4).

Nesse enunciado o destaque recai na razão de dois segmentos correspondentes sobre as retas transversais.

Já na Alemanha o teorema de Tales recebe o nome de "teorema de feixe de retas concorrentes", sendo assim enunciado: "se um feixe de retas concorrentes é cortado por duas retas paralelas, então a razão entre as medidas dos segmentos determinados por uma reta do feixe é igual à razão entre as medidas dos segmentos correspondentes determinados sobre qualquer outra reta do feixe" Exemplificado na figura seguinte:

Figura 6 - Representação do teorema de Tales na Alemanha.

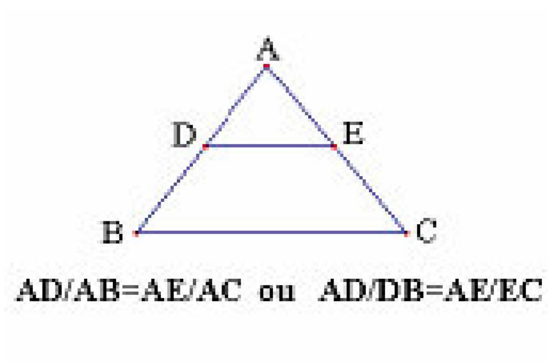


Fonte: Bongiovanni (2007, p. 5).

Veja que o destaque recai sobre a razão entre dois segmentos e a mesma transversal.

Conforme ensina Bongiovanni (2007), os franceses já apresentam o teorema de Tales sobre um triângulo enfocando três abordagens:

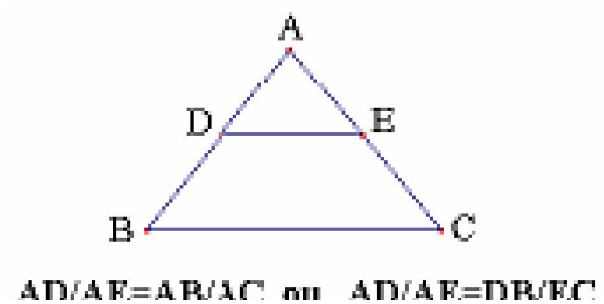
Figura 7 - Representação do teorema de Tales na França, abordagem 1.



Fonte: Bongiovanni (2007, p. 5).

O foco dessa abordagem consiste em que a razão se dá entre segmentos na mesma reta transversal.

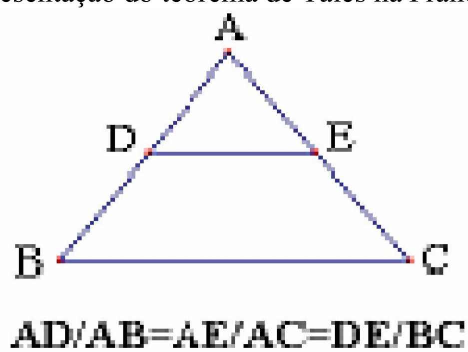
Figura 8 - Representação do teorema de Tales na França, abordagem 2.



Fonte: Bongiovanni (2007, p. 5).

O foco dessa abordagem é que a razão se dá entre um segmento numa transversal com sua projeção na outra transversal.

Figura 9 - Representação do teorema de Tales na França, abordagem 3.



Fonte: Bongiovanni (2007, p. 5).

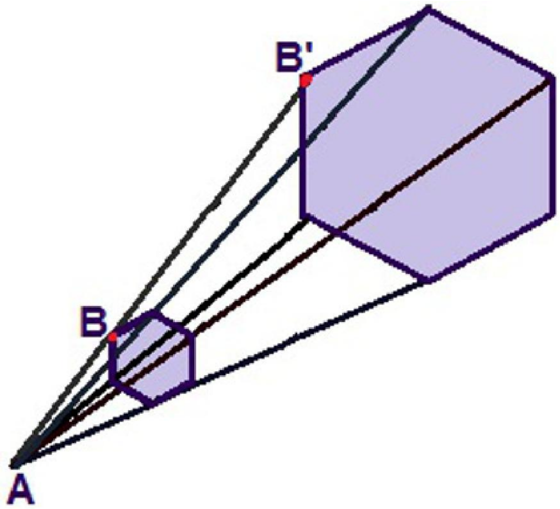
O foco dessa abordagem recai sobre a chamada razão de homotetia.

Objetivando um pouco mais de clareza conceitual, vamos discorrer um pouco sobre a homotetia. A palavra homotetia, vem do grego *homós*, que significa igual, e de *thetós*que significa colocado, ou seja, é uma transformação geométrica, na qual a figura transformada fica a igual distância em relação a alguma coisa.

A homotetia é muito usada para ampliar e reduzir figuras no plano, ou mesmo no espaço. Ao aplicar homotetia sobre uma figura plana, por exemplo, as suas características forma e ângulo são devidamente preservadas, podendo suas dimensões (tamanho) sofrer alteração.

Como, por exemplo, na figura 10, a seguir, a homotetia de um hexágono, que ampliou o seu tamanho em três vezes.

Figura 10 - Representação da homotetiade um hexágono.

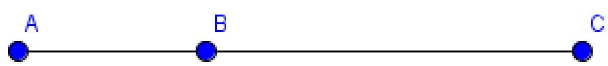


Desenho retirado de: RIBEIRO, Amanda Gonçalves. "Homotetia"; *Brasil Escola*. Disponível em <http://www.brasilescola.com/matematica/homotetia.htm>. Acesso em 30 de setembro de 2015.

Já vimos um pouco sobre a homotetia, agora, vamos apresentar a definição de homotetia. Chamamos de homotetia de centro O e razão k (no caso k é real e diferente de zero) a transformação do plano nele mesmo, a qual faz a associação de cada ponto P do plano num ponto P' do plano de forma que: $\overrightarrow{OP'}$= k.$\overrightarrow{OP}$

Veja o desenho:

Figura 11 - Representação da homotetia de um ponto.



Lembrando que: $\overrightarrow{AB}$ = k.$\overrightarrow{AC}$ significa dizer que os pontos A, B e C' estão alinhados.

2.11.3 A essência do teorema de Tales

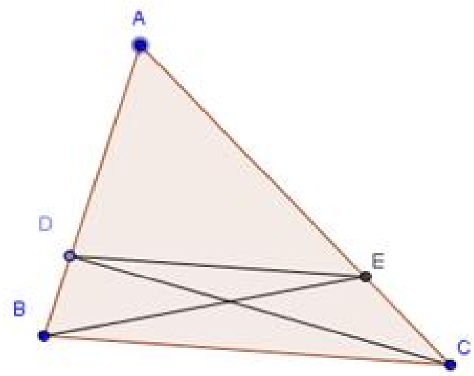
Após a exposição detudo isso, convém ressaltar que para pesquisadores da área de história da matemática, mesmo que tenhamos variações em diversos países e que nossos livros didáticos apresentem o teorema de Tales utilizando três ou mais retas paralelas cortadas por transversais determinando segmentos proporcionais, a essência do teorema de Tales é apontada como a proposição II do livro VI de *Os Elementos* de Euclides, a saber:

> Caso alguma reta seja traçada paralela a um dos lados de um triângulo, corta os lados do triângulo em proporção; e, caso os lados do triângulo sejam cortados em

proporção, a reta, sendo ligada dos pontos de secção, será paralela ao lado restante do triângulo. (EUCLIDES, 2009, p. 233)

Euclides apresenta a seguinte figura ilustrativa, neste caso adaptada e que serve de apoio a sua demonstração.

Figura 12 - Figura de apoio para demonstração do teorema de Tales conforme o livro *Elementos de Euclides.*



Num triângulo ABC, DE//AC se e somente se BD/DA=BE/EC

Fonte: Euclides(2009, p. 233).

Euclides nos dá a seguinte demonstração:

> Fique, pois, traçada a DE paralela a um dos lados, o BC, do triângulo ABC; digo que, como a BD está para DA, assim a CE para EA. Fiquem, pois, ligadas as EB, CD. Portanto, o triângulo BDE é igual ao triângulo CDE; pois estão sobre a mesma base DE e nas mesmas paralelas a DE, BC; mas o triângulo ADE é algum outro. E as iguais têm para a mesma a mesma razão; portanto, como o triângulo BDE está para o [o triângulo] ADE, assim o triângulo CDE para ADE. Mas, por outro lado, como o triângulo BDE para o ADE, assim a BD para DA; pois, estando sob a mesma altura, a perpendicular traçada do E até AB, estão entre si como as bases. Pelas mesmas coisas, então, como o triângulo CDE para o ADE, assim a CE para EA; portanto, também como BD para DA, assim a CE para EA. Mas, então, fiquem cortados os dois lados AB, AC do triângulo ABC, em proporção, como BD para DA, assim a CE para EA, e fique ligada a DE; digo que DE é paralela à BC.. Tendo, pois, sido construídas as mesmas coisas, como BD está para DA, assim a CE para EA, mas, por outro lado, como a BD está para a DA, assim a CE para EA, mas, por outro lado, como a BD para a DA, assim o triângulo BDE para o triângulo ADE, e, por outro lado, como a CE para EA, assim o triângulo CDE para o triângulo ADE, assim o triângulo CDE para o triângulo ADE. Portanto, cada um dos triângulos BDE, CDE tem para o ADE a mesma razão. Portanto, o triângulo BDE é igual ao triângulo CDE; e estão sobre a mesma base. DE. Mas os triângulos iguais e que estão sobre a mesma base, também estão nas mesmas paralelas. Portanto, a DE é paralela à BC. (EUCLIDES, 2009, p. 233)

É importante ressaltar que todas as versões apresentadas aqui derivam da proposição II do Livro VI de Euclides e são consideradas proposições equivalentes do ponto de vista matemático. O que se deseja trabalhar no experimento didático formativo é essa essência e suas implicações, suas equivalências, suas aplicações, realizandoarticulações com o propósito de que o aluno faça o movimento do abstrato para o concreto e do concreto para o abstrato, como propõe Davydov, para compreender o teorema de Tales.

Neste sentido, o experimento didático formativo, apresentado aqui, contempla essa proposta e, além disso, trabalhamos com a investigação matemática e com o Geogebra,com a finalidade de reproduzir a essência do teorema de Tales bem como suas articulações. Convém ressaltar que teoremas matemáticos representam padrões sobre determinados objetos, mas descrevem padrões que se repetem em todos os casos que possuem as mesmas hipóteses. Neste sentido, é melhor representá-los de forma que o aluno perceba essa dimensão, assim, o *software*desempenha papel importante, pois é um *software* de geometria dinâmica, permitindo explorar essa característica.

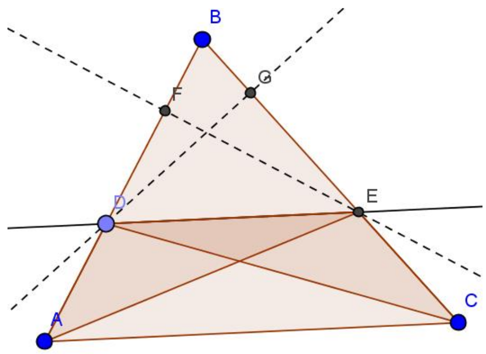
Vaz (2012) relata que esse tipo de trabalho permite testar conjecturas obtidas a partir das hipóteses e experimentações permitidas, o que pode conduzir o aluno a perceber conjecturas e iniciar uma investigação matemática, compreender melhor as formalizações, além de visualizar generalizações sobre o objeto investigado. Fato este que é relevante para o ensino-aprendizagem da matemática.

2.11.4Uma demonstração do teorema de Tales mais fácil de ser assimilada pelo aluno do ensino médio

Apresentamos, a seguir, outra demonstração para o Teorema de Tales. O motivo de tal demonstração reside em sua facilidade de compreensão, visto que essa é uma demonstração usando área de triângulos. O desenho aqui foi feito utilizando o Geogebra seguindo da cópia da tela ("copiando a tela") e posteriormente fazendo as devidas reduções e copiando o desenho para o Word.

Por construção, no Geogebra, o segmento EF é perpendicular ao lado BD e DA, sendo alturas do triângulos BDE e ADC. Da mesma forma, por construção no Geogebra, o segmento DG é altura dos triângulos BDE e AEC.

Figura 13 - Demonstração do teorema de Tales por triangulação.



Fonte: relatório da pesquisa.

Podemos calcular a área do triângulo DEB de duas maneiras:

$\frac{DB*EF}{2} = \frac{BE*DG}{2}$ *DB *EF = BE* DG (I)*

Os triângulos ADE e CED têm áreas iguais, pois a base DE é comum e a altura é a mesma, pois o segmento DE é paralelo ao segmento AC, por construção do geogebra. Utilizando a altura EF, relativa ao lado AD e DE relativa ao lado CE, temos: “Os triângulos ADE e CED têm áreas iguais”

$\frac{AD*EF}{2} = \frac{EC*DG}{2}$ *AD*EF= EC*DG (II)*

Dividindo (I) por (II), temos:

$\frac{\mathrm{DB*EF}}{\mathrm{AD*EF}} = \frac{\mathrm{BE*DG}}{\mathrm{EC*DG}}$ $\frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{AD}} = \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}$ Ficando assim demonstrado o teorema de Tales.

CAPÍTULO3

SOFTWARE GOEGEBRA E DESCRIÇÃO ANÁLISE DO EXPERIMENTO DIDÁTICO FORMATIVO SOBRE O TEOREMA DE TALES

No presente capítulo, abordamos a metodologia utilizada na nossa pesquisa, a caracterização da Escola onde ocorreu o experimento da pesquisa, suas características e também as características do *software*Geogebra. Tratamos daa realização e análise do experimento didático formativo e destacamos que para um melhor entendimento do experimento didático formativo sobre o teorema de Tales. Antes, porém, fazemos a descrição da aplicação e análise do experimento, com uma introdução específica para esse tópico. Por último, trazemos o resumo da narrativa e a análise das entrevistas dos alunos.

Como a entrevista com os alunos aborda todasfases do experimento, a partir da percepção de todos alunos que dele participaram, achamos melhor colocar a análise dessa entrevista como um último momento de extensão do experimento.

3.1 METODOLOGIA

A escola na qual ocorreu a pesquisa foi escolhida pela fato do professor de matemática da turma de segundo ano do ensino médio ter respondido de maneira positiva ao nosso convite, uma vez que para a escola ser escolhida, o professor de matemática teria que discutir conosco os três textos sobre experimento didático formativo, relatados no segundo capítulo.Alguns colegas professores de matemática se dispunham a aplicar o experimento didático formativo, mas não se mostravam interessados em estudar a teoria relativa a ele. Nós não estávamos interessados em ter um mero professor aplicador do experimento, na verdade precisávamos de um professor que contribuísse para além da realização do que estávamos propondo.

Outro fato que contribuiu para essa escola ser escolhida e não outra foi que essa é uma escolaque sempre recebe alunos do PIB, que lá desempenham algumas atividades em forma de parceria.A pesquisa de campo ocorreu no laboratório de informática, da própria escola, local onde aplicamos o experimento e fizemos as respectivas observações.

Para realizar esta pesquisa, usamos o método qualitativo, com o intuito de proceder a análise das práticas desenvolvidas pelos alunos e pelo professor. Entendemos que esse método qualitativo foi o mais apropriado para a nossa pesquisa. Conforme entendimento de Bogdan e Biklen(1994), ainvestigação qualitativa possui cinco características:

> 1- na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal; 2 A investigação qualitativa é descritiva . Os dados recolhidos são em forma de palavras ou imagens e não em números (p. 48); 3- Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do simplesmentepelos resultados ou produtos (p.49); 4-investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva. Não recolhem dados ou provas com o objetivo de confirmar ou afirmar hipóteses construídas previamente; ao invés disso, as abstrações são construídas à medida que os dados particulares que foram recolhidos se vão agrupando (p.50); 5- O significado é de importância vital na abordagem qualitativa. Os investigadores que fazem uso desse tipo de abordagem estão interessados no modo como diferentes pessoas dão sentidos às suas vidas. [...] Centram-se em questões tais como: Quais conjecturas que as pessoas fazem sobre suas vidas? (BOGDAN;BIKLEM, 1994, p. 47-50)

Com base na abrangência dessas cinco características, reafirmamos que a nossa pesquisa éde caráter qualitativo.

Para conhecer o perfil desses alunos, foi aplicado um questionário para eles e seus responsáveis. O conjunto das informações coletadas por meio deste instrumento foi importante na elaboração das atividades, para conhecer as vivências culturais dos alunos e devidamente pautadas pela teoria do ensino desenvolvimental de Davidov (questionários em Apêndices A e B).

O teorema de Tales tradicionalmente é ensinadona oitava série, atual nono ano do ensino fundamental. A rede estadual, no programa de matemática do segundo ano do ensino médio, resolveu retomar o estudo desse conteúdo no programa do segundo ano do ensino médio.

O motivo para fazer o experimento didático formativo sobre o teorema de Tales foi proveniente de três fatores. Ao fazer nossas observações das aulas de matemática nessa turma percebemos as dificuldades apresentadas pelos alunos no uso desse teorema. O professor de matemática da turma, ao trabalhar com conteúdos de geometria espacial, também constatou a necessidade dos alunos em dominar o teorema e os conceitos de razão e proporção. Por último, o professor de Física, da mesma turma, pediu ao professor de matemática que retomasse com seus alunos os conceitos de razão e proporção, bem como o teorema de Tales em si, pois esses lhes seriam úteis na parte de óptica geométrica que os alunos estudavam naquele momento. Houve uma convergência de motivos que nos levaram a optar por trabalhar com o teorema de Tales.

3.2 CARACTERIZAÇÃO DA ESCOLA

Os dados referentes a caracterização da escola foram obtidos em forma de entrevista, junto a várias fontes da escola: coordenação, secretaria, de uma professora que acompanhou todo processo de transformação da escola de três turnos numa escola de tempo integral e junto ao professor de matemática da turma.A escola onde se desenvolveu a pesquisa é uma escola de tempo integral, conforme levantamos até o ano de 2012, elafuncionava nos três turnos.

No turno matutino,funcionava o ensino médio, com:6 salas de 1º ano, 4 salas de 2 º ano e 3 salas de 3º ano. No turno vespertino, o atendimento era destinado as quatro últimas turmas do ensino fundamental, assim distribuídas:4 turmas de 6º ano, 4 turmas de 7º ano, 3 turmas de 8º ano e 2 turmas de 9º ano. No turno noturno, o atendimento era exclusivamente para o ensino médio regular e para a educação de jovens e adultos (EJA). Na modalidade regular, havia: 2 turmas de 1º ano, 2 turmas de 2º ano, 2 turmas de 3º ano, totalizando 6 turmas; na modalidade de EJA havia: 3 turmas de 1º ano, 3 turmas de 2 ano e 2 turmas de 3º ano. No ano de 2012, a escola possuía no total entre 1200 e 1300 alunos. O índice do IDEB no ensino fundamental desse ano era 3,8.

Em outubro de 2012, veio da Secretaria Estadual de Educação a determinação para a escola se converternuma escola de tempo integral. Segundo Silva e Rocha (2014, p.134):

> Considerando a necessidade de reforma na educação e no modelo de ensino, a Secretaria de Estado da Educação de Goiás (SEDUC/GO), implanta diversas ações, com a intenção de reestruturar a rede pública estadual de ensino, tendo como precursor o Pacto pela Educação. Este pacto deu subsidio ao programa Novo Futuro, que tem como finalidade a implementação das escolas de tempo integral. Implantação que fora determinada por meio da lei 17.920/12, que cria os Centros de Ensino Médio em Tempo Integral (CEPI’s) em Goiás.

Conforme a citação anterior, a implantação das escolas de tempo integral no Estado de Goiás seinsere na política do governo estadual no sentido de fazer a restruturação das escolas estaduais conforme preconizado pelo Pacto pela Educação.

Indagamos para a professora que já estava há alguns anos nessa escola, antes de 2012, se o processo de torná-la em regime de tempo integral não seria uma represália pela possível força política que a mesma detinha naquela região no movimento dos professores. Ela disse que não.O critério para implantar esse regime naquela escola foi as dependências físicas que ela possuía, possibilitando a instalação de uma escola de tempo integral sem a necessidade de fazer grandes adaptações físicas.

A Secretaria de Educação determinou que seria uma escola de tempo integral de ensino médio, e já no processo de matrícula para o ano seguinte, fez as transferências dos alunos da segunda fase do ensino fundamental para várias outras escolas da região.Todo o descontentamento que tal atitude poderia gerar aos alunos que não fariam parte do projeto, bem como dos professores e funcionários que não poderiam permanecer por não caber todos no novo módulo, ou por não ter a disposição de trabalhar dois turnos seguidos na escola, foi ignorado pela Secretaria Estadual de Educação.

Ao iniciar o ano de 2013 já funcionando como escola de tempo integral, lá permaneceramsomente as seguintes turmas e séries do ensino diurno: 4 turmas de 1º ano, 4 turmas de 2º ano e 4 turmas de 3º ano, totalizando 12 turmas, que totalizavam somente 230 alunos.No ano de 2014, a escola teve uma turma de 3º ano a menos, trabalhando com: 4 turmas de 1º ano, 4 turmas de 2º ano e 3 turmas de 3º ano, totalizando 11 turmas, e aproximadamente 259 alunos.

No ano de 2015 a escola teve as seguintes turmas: 4 turmas de 1º ano, 4 turmas de 2º ano e 4 turmas de 3º ano, totalizando 12 turmas, que totalizavam 349 alunos.Atualmente, a escola possui o seguinte quadro de professores lotados por disciplina: 3 professores de português, 3 professores de matemática, 3 professores de física, 2 professores de química, 1 professor de história, 2 professores de geografia, 1 professor de inglês, 1 professor de espanhol, 1 professor de artes, 3 professores de biologia, 1 professor de educação física, sociologia e filosofia tem 1 professor que trabalha ambas disciplinas.

A escola tem suas salas separadas por professor, ou seja, o professor fica na sala e os alunos é que mudam de sala. Possui um laboratório de informática com 15 computadores, com acesso àinternet. Dentre as dependências, ela possui biblioteca, refeitório e demais dependências administrativas.

A escola é aberta ao processo de pesquisa, lá vimos vários alunos do PIBID - Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência, desenvolvendo seus projetos.

A turma a qual nós observamos e em que realizamos o experimento didático formativo sobre o teorema de Tales foi o 2ºano C. Essa turma foi escolhida em comum acordo entre o pesquisador e os professores de matemática e física. Entre as turmas de segundo ano, foi a que se mostrou também mais interessada em participar do experimento didático formativo.

3.3 O SOFTWARE GEOGEBRA

No sentido de apresentar as principais características do *software*Geogebra,começamos pela propriedade de por os objetos matemáticos em movimento, para explicar o termo Geometria Dinâmica, que possibilitao movimento dos objetos matemáticos, mas, ao mesmo tempo, movimenta também as partes algébricas do objeto, permitindo a articulação entre essas duas linguagens, incomum nas aulas tradicionais de matemática.

A introdução do termo Geometria Dinâmica se deve a Nick Jackiw e Steve Rasmussem, os quais pretendiamcom esse termo diferenciar os *software*de características dinâmicas do restante dos *software s* de Geometria com características não dinâmicas.Tanto o aluno como o professor trabalhando com um *software*dinâmico, não terão de perder tempo com construções sucessivas, o que permite, assim, que eles fiquem focados no essencial,ou seja, nas relações existentes entre os vários objetos do desenho.

A palavra Geogebra tem origem nas palavras geometria e álgebra, formando assim: geo +gebra = Geogebra. O Geogebra foi criado em 2001 como tese de doutorado do Dr. MarkusHohenwarter. Seus códigos fontes são desenvolvidos na linguagem Java e é um *software*multiplataforma, ou seja, ele roda em: Windows, Linux e Macintosh.

Como salientado anteriormente, diversos enfoques podem ser dados quando um professor utiliza o *software*Geogebra, mas aqui pretendemos utilizá-lo num enfoque desenvolvimental. Há, no Brasil, diversos Institutos Geogebra, destacamos aqui o Instituto Geogebra de Goiás, fundado em 2016/1 pelos professores Dr.Duelci aparecido de Freitas Vaz e por Me. Uender Barbosa de Souza. O objetivo é desenvolver trabalhos, estudos e pesquisas no sentido de articular as tecnologias na educação matemática. Assim, o Instituto de estudos desenvolverá pesquisas buscando formas de integrar o conhecimento matemático, a investigação matemática com o Geogebra e a teoria histórico-cultural de Vygotsky e seus desdobramentos.

Além disso, são também desenvolvidos estudos científicos em forma de dissertação de mestrado e teses de doutorado seguindo esta orientação, em dois programas de pós graduação: um no IFG e outro na PUC Goiás. A meta é continuar investindo nestes estudos, pois acreditamos que o *software*Geogebra é um forte aliado para o ensino da matemática e acreditamos que o IFG e a PUC Goiás são lugares apropriados para realizar nossas investigações, ainda mais porque temos o curso de Licenciatura em matemática que tem a finalidade de formar professores com capacidade para o ensino tecnológico.

3.4REALIZAÇÃO E ANÁLISE DO EXPERIMENTO DIDÁTICO FORMATIVO

Após fazer as observações das aulas de matemática do 2º. ano C, do ensino médio, e de conversar como professor sobre o assunto que poderia ajudar em matemática com a turma, ele disse que, embora estivesse trabalhando geometria espacial, sempre que dependia de proporção e da aplicação do Teorema de Tales a turma tinha dificuldades. Diante disso, o próprio professor achou melhor que o experimento didático formativo tivesse como foco o Teorema de Tales. Isso confirmava as observações preliminares feitas em sala de aula por este pesquisador.

Após a realização da pesquisa teórica de caráter bibliográfica sobre: o experimento didático formativo, o quadro conceitual envolvendo Teorema de Tales, a contextualização histórica de Tales e seu teorema foram produzidos dois textos. Um texto envolvendo o aporte teórico necessário para preparar um experimento didático formativo e outro texto que aborda Tales, sua matemática e seu tempo. Esses dois textos são partes integrantes da presente dissertação.

Para desenvolver as atividades do experimento didático formativo com os alunos,dividimos a realização das atividades práticas da pesquisa em vários momentos, que são descritos a seguir.

- ✓ Momento 0 - discussão com os alunos sobre a realização e participação no experimento; aplicação de questionário com os alunos e aplicação do questionário sócio econômico com os responsáveis pelos alunos.
- ✓ Momento 1 –Realização da avaliação diagnóstica;Na avaliação diagnóstica, aplicamos uma prova individual com quatro problemas, cujas soluções necessitariam que o aluno tivesseconhecimento sobre a rede conceitual relativa ao teorema de Tales. Nessa avaliação, procuramos observar tanto do aspecto algébrico, como o geométrico, buscando identificar qual o conhecimento que o aluno tinha sobre: razão, proporção e noções de geometria elementar necessária ao Teorema de Tales. Ao mesmo tempo, procuramos perceber, nessa avaliação,qual a habilidade operacional (em realizar cálculos), bem como a habilidade do aluno em resolver problemas: interpretar, encontrar a solução e

escrever o resultado de forma matematicamente correta.O diagnóstico se deu através da correção da avaliação. Na correção não se tratava de se a questão estava certa ou errada, mas também do aluno errar e procurarperceber o porquê do erro. Essa avaliação diagnóstica serviu como um momento importante para que pudéssemos planejar o experimento, bem como calibrar o mesmo. No término de cada momento, todo trabalho era discutido, e avaliado, para planejar o momento seguinte.

- ✓ Momento 2- Comandos básicos do Geogebra;
- ✓ Momento 3- Pesquisa sobre rudimentos de álgebra, destinada a construir a rede conceitual sobre o Teorema de Tales; pesquisa sobre rudimentos de geometria, destinada a construir a rede conceitual sobre o Teorema de Tales.
- ✓ Momento 4ª - Histórico do Teorema de Tales.Sabemos que numa perspectiva Davydoviana são os alunos que investigam e procuram fazer as descobertas, devidamente orientados pelo professor.Inicialmente, pedimos aos alunos que pesquisassem na internet sobre: Tales, seu teorema, a época que viveu e suas contribuições para a matemática. Foi estabelecido um tempo de 15 min e em seguida cada grupo fez uma pequena apresentação oral sobre o que havia encontrado. Em seguida, fizemos uma apresentação para os alunos sobre o histórico de Tales e seu teorema; investigação matemática em sala de aula.
- ✓ Momento 4b-Usando papel sem pautas, régua, calculadora, realizamos uma experiência sobre o teorema de Tales utilizando desenhos que o representa: paralelas cortadas por duas transversais. Ao calcular as razões entre os segmentos em cada transversal, o aluno, ao comparar os resultados, poderia perceber a relação concretamente, comparando os resultados;
- ✓ Momento 4c-Usando papel pautado, régua, calculadora, realizamos o esquema do teorema de Tales com feixe de retas paralelas e cortadas por duas transversais. Ao comparar as razões entre os segmentos em cada transversal o aluno deveria perceber que os resultados são proporcionais;
- ✓ Momento 4d-Comparando as atividades 1 e 2, o aluno deveria escrever uma conclusão.
- ✓ Momento 5a- Resolver o problema motivador: cálculo da altura da pirâmide do Egito ou o cálculo da distância do barco até a Terra. São dois problemas históricos sobre o Teorema de Tales.Na perspectiva de Davidov a solução concreta de um problema vem em primeiro lugar, para ser resolvida com uma

solução teórica. Para tanto o aluno deve adquirir conhecimento teórico, é justamente o que é chamado de trabalho como objeto do conhecimento.

Observe que desde o Momento 3, estamos de forma processual trabalhando dessemodo. Lá no Momento 3 arede conceitual relativa ao teorema de Tales começou a ser construída. E seu início se deu com o aluno pesquisando, buscando esse quadro conceitual. Nenhum conceito foi por nós dadode início e/ou passado para o aluno. Ao mesmo tempo, o aluno estavacom o professor ao seu lado mediando esse conceito. O aluno foi pesquisando, discutindo com o professor e com os colegas e, dessa forma,foise apropriando do conceito teórico.

Nos momentos:4a ,4b e 4c continuamos a construção dessa rede de conceitos, com o aluno em atividade pesquisando, e resolvendo pequenos problemas (observando se o feixe de retas é ou não paralelo, se os segmentos nas retas transversais formam ou não uma proporção).

O aluno, ao resolver o problema motivador, que na verdade são dois problemas, já tem certa qualidade de conceitos, o qual está elaborando a passagem de uma forma processual, esta fazendodo ponto de vista cognitivo uma operação externa, para uma operação interna. O seja, é o que Vygotsky (2007, p. 56) chama de "internalização a reconstrução interna de uma operação externa" ou oque Davidov (1988, p. 30) denomina de internalização ou interiorização, ao processo de "transformação do interpsíquico em intrapsíquico". Acreditamos que o aluno concretize esse processo da operação conceitual externa para a operação conceitual interna após a conclusão do momento5d.

- ✓ Momento 5b-Uso do *software*Geogebra no estudo do teorema de Tales.Construção geométrica do teorema:construir um feixe de 3 retas paralelas, cortadas por duas retas transversais. Calcular as razões formadas pelos segmentos sobre as transversais, calcular as razões e comparar os resultados. Investigar se os segmentos são proporcionais.
- ✓ Momento 5c- Usar o comando de arrasto e mostrar para os alunos que ao arrastar as paralelase/ou as transversais, o teorema continua valendo.
- ✓ Momento 5d- Construir uma quarta reta não paralela ao feixe de paralelas,calcularas razões entre cada par desegmentos numa mesma transversal e perceber que não forma uma proporção.
- ✓ Momento 5e- Usar o comando de arrasto na quarta reta não paralela edeslocá-la até uma posição que ela fique paralela as demais retas do feixe. Observar o

valor de mudança nas razões, até que eles fiquem iguais, formando novamente uma proporção.

- ✓ Momento 6- Aplicações. Solução pelos alunos de uma lista de exercícios sobre o teorema de Tales, com duração de 50 min.Após os 50 min. o professor corrige a lista no quadro, objetivando tirar todas as dúvidas apresentadas pelos alunos. Ao longo da correção o aluno é motivadoa expor suas dúvidas, bem como discutir suas soluções e ou tentativas de solução.
- ✓ Momento 7-Aplicação da avaliação de término do experimento. Aplicamos uma avaliação escrita objetivando perceber o nível de entendimento e desenvolvimento conseguido pelos alunos com a aplicação do experimento didático formativo. Para Davidov a avaliação deve ocorrer em todas ações relativas ao experimento. E foi isso que fizemos, mas priorizando fazer uma avaliação mais detalhada ao término de cada momento do experimento. Ao longo de uma determinada ação do experimento, o pesquisador estava não só observando, mas se necessário, pronto para fazer alguma intervenção de correção pontual.
- ✓ Momento 8- Descrição e análise da entrevista com todos alunos que participaram do experimento.

Após término do experimento, realizamos entrevista semiestruturadas com todos os alunos que dele participaram e com o professor. As entrevistas foram gravadas em áudio e devidamente transcritas.

As entrevistas foram do tipo semiestruturadas. Como referência para elaborarasentrevistas, nos apoiamos nos estudos de Fiorentini e Lorenzato, que define esse procedimento do seguinte modo:

> A entrevista, além de permitir uma observação mais diretae imediata dos dados, serve para aprofundar o estudo, completando outras técnicas de coletas de dados [...]a entrevista semiestruturada. Essa modalidade é muito usada nas pesquisas educacionais, pois o pesquisador, pretende aprofundar-se sobre um fenômeno ou questão específica, organiza um roteiro de pontos a serem contemplados durante a entrevista, podendo, de acordo com o desenvolvimento da entrevista, alterar a ordem delese, até mesmo, formular questões não previstas inicialmente[12](FIORENTINI; LORENZATO, 2012, p. 120-121).

Osoito momentos de realização das tarefas do experimento didático formativo sobre o teorema de Tales foramdesenvolvidos com os alunos, duranteos meses de outubro, novembro e alguns dias do mês de dezembro/2015. Posteriormente, passamos quatro meses realizando

---

[12]O roteiro da entrevista consta no apêndice I.

as seguintes tarefas:a) trabalhar no sentido de melhorar a qualidade dos áudios de cada momento; b) organizar os arquivos de vídeos e de áudios referentes a cada momento; c) fotografar todas as atividades realizadas pelos alunos em folha impressas e organizar em pastas digitais; d) corrigir todas as atividades impressas realizadas pelos alunos;e) tabular as notas obtidas por cada aluno em cada atividade: prova diagnóstica, solução da lista de exercícios, prova final; f) tabular, relatar e analisar dados do questionáriorespondidos pelos alunos; g) tabular, relatar e analisar dados do questionáriorespondidos pelos responsáveis, e; h) transcrever, relatar e analisar cada momento do experimento.

A seguir,apresentamos um resumo de relatos e a análise de cada momento e partes importantes do experimento.Antes de iniciar o texto único, gostaria de salientar que ao longo da transcrição, relato e análise procuramos sempre realçara fala, as dúvidas e comentários dos alunos e do professor.

Como atividade inicial para conhecer o aluno do ponto de vista social, econômico, aplicamos um questionário com pais e responsáveis e um questionário com os alunos. Depois, com as observações em sala de aula, aplicamos uma prova diagnóstica. Em nosso trabalho, estamos fazendo o relato do experimento juntamente com a análise, para tanto, escolhemos conforme Moysés (2012):

> [...] dois grandes eixos: o da aquisição do conhecimento e o do desenvolvimento mental dos alunos. [...] ligados ao primeiro, as questões relacionadas à mediação, à formação de conceito de conceitos , ao significado.[...] ao segundo estão a questão da zona de desenvolvimento proximal , a da organização do trabalho pedagógico, a da relação entre atividade e consciência, a da criatividades e dos aspectos afetivos. (MOYSÉS, 2012, p.97)

Conforme falamos no primeiro capítulo da presente dissertação, a base teórica da nossa pesquisa é o Ensino Desenvolvimental, de Davidov. Os autores referências principais que usaremos para a análise são: Vygotsky e Davidov. A investigação matemática com o Geogebra entra na pesquisa como um aporte didático colaborativo.

No segundo capítulo, abordamos a base teórica relativa ao experimento didático formativo. Lá vimos às etapas de um experimento, elaboração de um experimento didático formativo segundo a visão de dois autores: Libâneo (2007) e Aquino (2013). Os momentos nos quais dividimos a realização do nosso experimento foram baseados nas orientações do nosso orientador e no que nos pareceu mais propício para o entendimento do aluno.

Resolvemos fazer a descrição e análise do experimento dentro de cada um desses momentos, por acreditar que assim fica mais produtivo o processo simultâneo de descrição e análise. Entendemos que, embora as entrevistas não façam parte diretamente do experimento da aplicação, elas estão intimamente ligadasa ele. Nessas entrevistas, os alunos, participantes do experimento didático formativo,falam sobre: a sua experiência e suas percepções em relação a sua participação no experimento, fora da sala de aula ou do laboratório de informática, locais onde ocorreu o experimento.

3.4.1 Momento 0 – Apresentação do experimento aos alunos e pais

Como dissemos, no Momento 0 realizamos a discussão com os alunos sobre a realização e participação no experimento; além de realizar a aplicação de questionário com os alunos ea aplicação do questionário sócio econômico com os responsáveis pelos alunos. Essas ações tiveram o objetivo de conhecer um pouco mais nossos alunos participantes no experimento didático formativo do Teorema de Tales. O questionário semiestruturado foi composto por treze questões, e foi respondido por quinze alunos. Da tabulação das respostas do referido questionário fizemos este texto resumo. O referido questionário aparece na íntegra no Apêndice A.

Percebemos que 14 alunos possuíam computador (*notebook, tablet*etc.) em casa e com acesso àinternet. Um aluno não tinha computador em casa e utiliza o computador de amigos ou os da escola.

Sobre a finalidade do uso do computador, podendo o aluno apontar mais de uma finalidade, as respostas ficaram assim distribuídas: oito alunos usam para jogar, 14 paraestudo, oitousam para ter acesso às redes sociais e umaluno disse que usava o computador também no trabalho. Sobre o número de horas diárias que os alunos usavam o computador, as respostas ficaram assim distribuídas: quatroalunos usavam por até uma hora, sete alunos usavam por mais de uma hora até três horas, quatro alunos usavam entre três horas ecinco horas.

Indagados se já haviam usado o computador para estudar matemática, as respostas obtidas foram: seisalunos não usarame dezalunos usaram. Entre os que usaram, quatroalunos utilizaram sites de pesquisa, quatro já usavam esporadicamente o Geogebra, umacessava o Infoescola, umaluno usava o Youtubee um não respondeu qual programa utilizava para estudar matemática.

Dos 15 alunos pesquisados, 11 afirmamque não recebem ajuda em casa para realizar as tarefas de matemática e somente quatroalunos admitiram eventualmente receber ajuda.

Na pergunta sobre qual a importância da utilização do computador para estudar matemática, as repostas foram diversificadas, mas nenhuma delas coloca o computador ou a tecnologia como algo fundamental e especial no ensino da matemática. As respostas na integra foram: a alternativa tornar a aula mais fácil de ser entendida e facilitar o aprendizado foi marcadapor setealunos; umaluno disse que o computador é importante para fazer pesquisa; quatroalunos usam o computador para assistir vídeos de aulas; um aluno disse que a importância do computador reside no fato de mostrar novas áreas da matemática;setealunos disseram que usam o computador para aprofundar os conhecimentos e um disse que faz uso do computador para tirar dúvidas sobre matemática.

Os 15 alunos que responderam aos questionários disseram que já usaram o laboratório de informática na aula de matemática.Na pergunta se o aluno já utilizou algum material concreto para aprender matemática, quatroalunos disseram que não utilizaram, dezalunos disseram que sim e umaluno não quis responder àpergunta.

Entre os dezalunos que já utilizaram material concreto nas aulas de matemática, ao seremquestionadossobre qual material usaram, as respostas mostraram que alguns alunos não entenderam a pergunta (dois alunos), ou melhor, existe aluno que não sabe o que é um material concreto.

Indagados sobre quantas horas por dia estudavam fora do horário escolar, onze alunos responderam que estudam até umahora diária, três alunos estudam entre uma horaaté três horas e um aluno estuda mais de 3 horas diárias.Por se tratar de uma turma de escola estadual de tempo integral, na qual os alunos permanecem na escola por oito horas diárias,a maioria, durante esse tempo escolar,realizasuas tarefas.

Dos alunos que participaram do experimento didático formativo, percebemos que, embora a maioria apresente as tradicionais dificuldades com matemática, há um importante ponto em comum, 14 alunos disseram gostar da disciplina matemática. Desses, ao serem solicitados que justificassem sua resposta, surgiu uma série de justificativas, as quaisabordam afirmativas do tipo:*"acho muito interessante e boa; gosta dos cálculos e raciocínio; por ser muito utilizada no dia-a-dia; amplia os conhecimentos; acha importante e usará na futura profissão"*.

Ao serem perguntados sobre se pensavam que a matemática é importante para o seu diaadia, a resposta que todos assinalaram foi o sim. Algumas respostas trouxeram como justificativa:*"praticamente tudo envolve matemática"; "pois com ela adquirimos conhecimento que nos serve de várias maneiras"; "pois pretendo entrar numa universidade e usarei a matemática a meu favor"*.

Sobre a pergunta: o que é a matemática para você? Algumas respostas foram: "*uma ferramenta útil e misteriosa/interessante"; "é uma porta para o mundo, pois hoje tudo se* *resume a número","é um excelente (meio) para melhorar e avançar a tecnologia e outros meios que beneficiam a humanidade"; "é uma porta para o mundo"; "é uma forma de conhecer a vida através dos números";"mais para mim matemática é o poder de conhecimento do mundo e do cotidiano é a arma fundamental do diaadia".*

Quando no processo de tabulação de um questionário, no início do processo de análise do nosso experimento didático formativo, nós temos a felicidade de colher respostas dos alunos com o grau de interesse pelo saber matemático dessa magnitude e espontaneidade não tem como não se emocionar.

Na sequência passamos para o processo de tabulação e análise do questionário respondido pelos pais.Distribuímos 15questionários, constantes no Apêndice B, destinados aos pais ou responsáveis pelos alunos, versando sobre questões socioeconômicas das famílias e sobre a relação e visão dos participantessobre: a escola, a educação e formação escolardos filhos.Do total de questionáriosdistribuídos para os responsáveis pelos alunos, somente 13 responderam o questionário, sendo esse total composto por: cincopais, setemães e uma avó.

A quantidade de pessoas que moram na casa dos alunos predomina o total de 4 pessoas, totalizando setefamílias com essa quantidade de pessoas. Famílias compostas somente por três pessoas são quatroe famílias compostas por cincopessoas são duas.

Possui moradia própria e quitada nove alunos, três pagavam aluguel e um mora em casa financiada.A profissão desempenhada pelo responsávelfoi dividida em pais e mães. Os pais dos alunos relataram as seguintes profissões:*micro empresário, dentista, motorista, cobrador, marceneiro, corretor de imóveis, segurança, aposentado (autônomo), pintor, analista sênior e músico.*

As mães dos alunos relataram as seguintes profissões: *auxiliar administrativo, cabeleireira,massoterapeuta,feirante, enfermeira, costureira, manicure, aposentada, doméstica, merendeira, dona de casa.*

Foi perguntado o grau de instrução das mães dos alunos participantes do experimento e a respostas foram: três têm o fundamental incompleto, duastêm o fundamental completo, cincotêm o ensino médio completo, três têm o superior completo e umtem pós-graduação incompleta.

Já o grau de instrução dos pais apresentaram as seguintes respostas: umnão é alfabetizado, quatropossuem fundamental incompleto, umtem fundamental completo, doistêm o ensino médio incompleto, doispossuem ensino médio completo e umpai tem pós-graduação incompleta.

Ao ser perguntado se quando estudava gostava de matemática, as respostas foram: três responderam que gostavam de matemática. Desses que gostavam de matemática, assim justificaram:*"a matéria'ajudava muito'; por ter mais entendimento; sempre tive facilidades; gostava da matéria; por necessidades do diaadia; pois havia muita facilidade com números e o meu trabalho atual envolve número"*.

Seis pais responderam que não gostavam de matemática quando eram estudantes. As justificativas sobre o motivo de não gostar de matemática foram:*"tinha dificuldades para aprender; não identificava; porque nunca gostei de exatas; era de difícil compreensão"*. Uma das justificativas dada para não gostar de matemática me chamou a atenção: "acreditava que a matéria não faria influência na minha vida, estava errado".

É interessante observar que, embora a maioria dos pais dissesse que quando estudava não gostava de matemática, isso não foi passado ao filho, uma vez que amaioria dos alunos que participoudo experimento respondeu gostar de matemática.

Perguntados se o responsável acompanha seu filho(a) nas atividades para casa, as resposta foram: oitoverificavam e cinconão verificavam.As justificativas apresentadas pelos oito responsáveis que verificavam as atividades de casa apontavam para a importânciado desenvolvimento e na melhoria do desempenho nas avaliações.Já os cinco responsáveis que não olhavam se o filho fazia a tarefa de casa, suas respostas convergiam para: ser uma responsabilidade e obrigação do aluno; por achar que o filho é responsável e acreditar que faça. Um responsável que disse que não olha a tarefa de casa do filho, motivado pelo fatode "não dar conta mais" é algo que chama a atenção pela resposta. Ele, na verdade, estárelatando que não tem conhecimento suficiente para isso. Essa afirmação, embora seja condizente com o nível de formação dos responsáveisdadas anteriormente, é também denunciante. A falta de formação dos pais de alguma forma limita a sua possibilidade de acompanhar a vida escolar dos filhos.

Quanto ao quantitativo de pessoas que trabalham e que contribuem financeiramente com a renda familiar, predomina a média de duas pessoas trabalhando. Quando foi perguntado em qual intervalo ficava a renda total da família, percebemos que 10 famílias (a maioria dos participantes do experimento) recebem até doissalários mínimos. Ou seja, a maioria das famílias que tinham duas pessoas para formar a renda familiar, ganhava dois salários mínimos.

Quantoaquais atividades a família realiza nos momentos de lazer, as repostas colhidas nos questionários convergiram para: festas familiares, passeios em *shoppings* ou parques públicos e assistir tv.Percebe-se que as respostas são compatíveis com as rendasfamiliares anteriormente apresentadas. Observe que é dito assistir filme e não ir ao cinema, pois isso demanda custo. Mesmo quando afirma que vai ao *shopping*, o modo como o diz, permite entender que está indo passear, não está indo para comprar ou lanchar, pois issodemanda custo, o qual não é compatível com o que predomina com a renda declarada pelas famílias. Lembremos que dessas 15 famílias, 10 famílias têm renda de até dois salários mínimos.

Quando foi perguntadose na sua casa possui computador (*notebook*, *tablet*etc.) e com acesso à internet, as respostas foram afirmativas e somente uma casa não possui computador com acesso à internet. Para a pergunta sobre se frequenta as reuniões da escola, foram obtidas as seguintes respostas: 11 dizemfrequentar as reuniões; uma pessoa disse que vai "às vezes"; dois responsáveis disseram que não comparecemàs reuniões por motivos de trabalho.

Ao ser questionado se acompanha as atividadesdo filho na escola as repostas foram: que 10 acompanham as atividades e que doisresponsáveis não acompanham as atividades.A justificativa dada pelo responsável por acompanhar as atividades dos filhos na escola convergem para: gostar de saber o que o filho faz, acompanhar o desenvolvimentoe achar que isso influência na aprendizagem e nas notas.Das justificativas apresentadas pelos 10 responsáveis que acompanham as atividades escolaresforam: *interesse, influência positiva, prazer, força*do exemplo e da parceria, tudo isso incidindo sobre a perspectiva de sucesso do filho.

Ao ser pedida a opinião sobre a importância que os estudos têm para seu filho, as respostas dadas na íntegra em cada questionário foram: *"fundamental para o crescimento profissional e para a vida inteira; melhor futuro, aprendizado, mais estrutura; o estudo é a coisa mais importante que existe por issoacho muito importante minha filha estudar, eu quero que ela seja alguém na vida; - garantir um futuro melhorpara a sua vida ; ajuda em muito na vida, é o primeiro passo para se alcançar um mercado de trabalho muito concorrido em que só quem estuda se sai bem ; para que ela tenha uma boa profissão, que lhe dê uma situação financeira estável e porque sem estudo hoje você não faz nada; através dos estudos meu filho poderá ingressar em uma universidade e assim ter um futuro melhor"*.

Lendo essas respostas, percebe-se a grande importância que os pais atribuem ao estudo dos filhos. Constata-se claramente que existe da parte dos pais uma forte associação entre filho estudando com: futuro melhor, empregabilidade, mais perspectiva de sucesso financeiro para o filho, uma vida melhor, com mais oportunidadee qualidade de vida.

A última questão do questionário pedia a opinião dos pais sobre a escola que o filho estudava. As respostas abrangeram: boa escola, ensino avançado, professores qualificados,ótima;escola que ajuda no desenvolvimento dos alunos; acho que todas as escolas poderiam ser assim; é uma escola muito boa, porque tem disciplina.

Os dados aqui obtidos serão usados na elaboração e na calibragemdo experimento didático formativo sobre o teorema de Tales.A importância de se conhecer a realidade socioeconômica dessas famílias e dosalunosé de vital importância para a realização da pesquisa.Conhecer a realidade vivenciada pelo aluno éhumana e pedagogicamente importante, mas é igualmente importante também em relação aos aspectos da nossa teoria. ConformeLibâneoe Freitas(2007, p. 43) “[...]para Vigotsky a constituição histórico-social do desenvolvimentopsicológico humano ocorre no processo da atividade humana, por meio da comunicação com outras pessoas”. Ou seja, são através das relações sociais que as pessoas se constituem num serhistórico-social. Sabemos que essas relações são sociais, mas são também do ponto de vista econômico, relações sociais de produção. Por mais modesto que seja o perfil econômico dessas famílias, é dele que sai o sustento delas. É nessa realidade socioeconômica que esses alunosestão imersos e é nele que eles se desenvolvem.

Os questionários respondidos pelos alunos e seus paisse constituem num instrumento que contribui para revelar essa realidadesocioeconômica.Como já conhecemos um pouco da realidade socioeconômica dos nossos alunos,é necessário saber o conhecimento matemático que eles já possuem referente à rede conceitual do teorema de Tales.

Parte desse conhecimento foi adquirida por nós por meio de observações durante as aulas de matemática nesta turma. Tais as observações foram gravadas em vídeos e áudios. Testamos a capacidade de interpretar um problema, tirar seus dados, fazer esboços dosdesenhos geométricos dos mesmos, a capacidade de equacionar e resolver, bem como escrever a resposta. Isso foi feito via aplicação de avaliação diagnóstica.

3.4.2 Momento 1 – Avaliação diagnóstica

Fizeram a avaliação diagnóstica (constante no Apêndice C) 17 alunos. Inicialmente apresentamos o quadro resumo da correção da prova diagnóstica.

Quadro 4 - Pontuação na prova diagnóstica

Código	Nota	Q1	Q2	Q3	Q4
A	3,5	1,0	2,5	Nf	0,0
B	0,5	0,0	0,0	0,0	Nf
C	2,5	0,0	0,0	0,0	0,0
D	0,5	Nf	0,0	Nf	Nf
E	5,0	Nf	0,0	2,5	2,5
F	2,5	0,0	0,0	2,5	Nf
G	5,0	0,0	2,5	2,5	0,0
H	4,5	0,0	2,5	2,0	0,0
I	4,5	2,5	0,0	2,0	Nf
J	0,5	0,0	0,0	0,0	0,0
L	6,0	1,0	2,5	0,0	2,5
M	0,5	0,0	2,5	Nf	Nf
N	1,25	1,25	0,0	0,0	Nf
O	2,5	0,0	2,5	Nf	Nf
P	2,5	Nf	2,5	0,0	Nf
Q	4,5	0,0	0,0	2,0	2,5
R	3,5	0,0	2,5	0,0	0,9

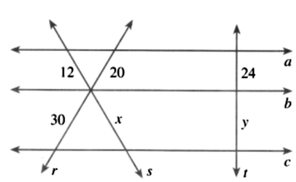
Fonte: elaborado pelo autor.

A nota 0,0 significa que o aluno tentou fazer e não conseguiu fazer nada corretamente.NF significa que essa questão o aluno nem mesmo tentou resolver. Indagado após a correção da prova diagnóstica o motivo que levou a não tentar resolver a questão, a maioria disse não perceber uma maneira de como encaminhar uma solução, mesmo parcial para a questão.

Para a sequência deste texto, vamos apresentar entre *"aspase em itálico apresentaremos cada questão da prova diagnóstica"* e em seguida faremos comentários a respeito. Objetivamos com isso respaldar algumas afirmações que faremos logo àfrente.

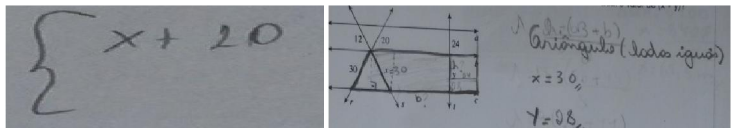
"QUESTÃO 01. Na figura abaixo, temos a // b // c e as retas r, s e t são transversais. Qual o valor de (x + y)"

"



Na sequência, temos as propostas de soluções apresentadas por alguns alunos:

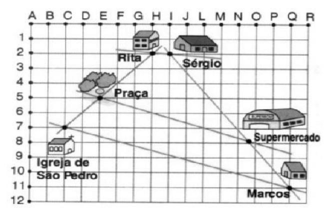
Figura 14: Proposta de solução da aluna X e Proposta de solução da aluna XX.



Fonte: avaliação diagnóstica.

Nenhuma das “propostas de solução” é solução real para a questão, a qual passa pela aplicação do Teorema de Tales, ou a ideia de proporção.

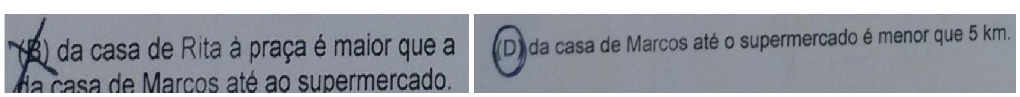
*"QUESTÃO 2O esquema a seguir representa uma página do guia da cidade onde Rita mora. Ela, Sérgio e Marcos estão no 9º ano e estudam na mesma classe. Quando aprenderam o Teorema de Tales, eles resolveram aplicá-lo no guia. Rita informou aos amigos que a distância da praça até a igreja de São Pedro é de **4 km**. Sérgio acrescentou que a distância entre sua casa e a de Marcos é de **15 km** e até ao supermercado, de9 km.*



Eles calcularam todas as distâncias corretamente e chegaram a várias conclusões. Uma dessas conclusões poderia ser a de que a distância
(A) da casa de Rita até a igreja de São Pedro é maior que 9 km.
(B) da casa de Rita à praça é maior que ada casa de Marcos até ao supermercado.
(C) da casa de Sérgio à casa de Marcos é menor que da casa de Rita até a igreja.
(D) da casa de Marcos até o supermercado é menor que 5 km."

Veja as soluções equivocadas assinaladaspor duas alunas:

Figura 15 - Solução equivocada assinalada por duas alunas.


(B) da casa de Rita à praça é maior que a da casa de Marcos até ao supermercado.

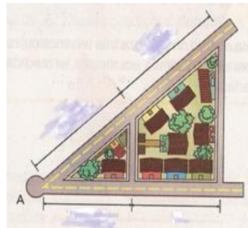
(D) da casa de Marcos até o supermercado é menor que 5 km.

Fonte: avaliação diagnóstica.

Na realidade, a solução era a letra A. Para tanto, bastava montar uma proporção de forma correta e calcular a distância da praça até a igreja, posteriormente interpretar as respostas colocadas á disposição do aluno.

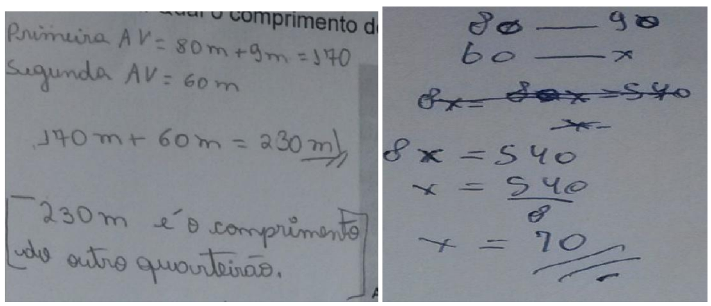
“QUESTÃO 3.A figura abaixo nos mostra duas avenidas que partem de um mesmo ponto A e cortam duas ruas paralelas. Na primeira avenida, os quarteirões determinados pelas ruas paralelas têm80 m e 90 m de

comprimento, respectivamente. Na segunda avenida, um dos quarteirões determinados mede 60 m. Qual o comprimento do outro quarteirão?"



Para a solução dessa questão apresentaremos duas tentativas realizadas por duas alunas.

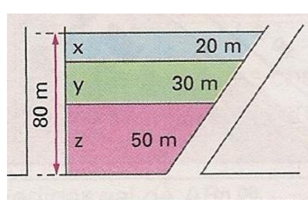
Figura 16 -Tentativa de solução aluna Y etentativa de solução aluna K.



Fonte: avaliação diagnóstica.

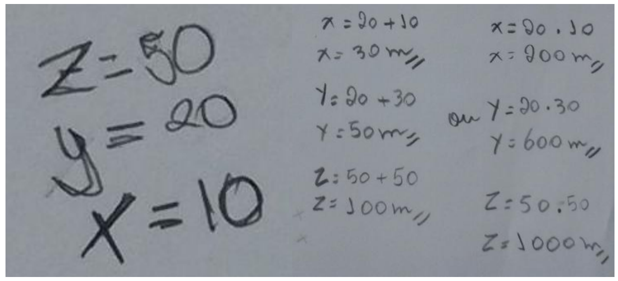
Essa questão admite duas soluções que dependem de como colocar a média de 60 m no primeiro quarteirão ou no segundo. Em ambas é a aplicação do Teorema de Tales de forma bastante direta, ou sem lembrar do teorema, montar a proporção que se encontra a solução. A ideia de colocar o desenho na questão foi para facilitar a sua solução por parte do aluno. As soluções são: 67,5 m ou 53,33 m, quem chegasse numa solução já ganhava nota máxima na questão.

"QUESTÃO 4.A planta abaixo no mostra três terrenos cujas laterais são paralelas. Calcule, em metros, as medidas x, y e z indicadas."



Novamente observaremos duas tentativas de solução não exitosas de alunos:

Figura 17- Solução do aluno W e solução do aluno Z.



Fonte: avaliação diagnóstica.

A solução usual, passa pela aplicação do teorema de Tales;outra saída seria usar a ideia de percentagem, a qual será apresentada mais a frente. Conforme se percebe da prova diagnóstica, a maioriados alunos não domina a base conceitual referente ao teorema de Tales. Eles têm pouco entendimento sobre alguns conceitos de geometria: retas,retas paralelas e transversais, não reconhecem um feixe de retas paralelas. Com relação aos conceitos de álgebra: razão, proporção esuas propriedades, a maioria dos alunos não apresenta domínio conceitual.

Nas observações de sala, bem como nas correções da prova diagnóstica, percebe-se que o aluno não dispõe de uma visão geométrica e plástica desse teorema de forma a poder usá-lo para resolver questões simples. O aluno parece que vê a aplicação do teorema de uma forma “engessada”, não entendendo a dinâmica e a riqueza do seu potencial de aplicação.Isso nos leva a concluir que ele tem recebido um ensino o qual é mais fruto de uma visão mecânica de abordar a matemática, em detrimento de uma abordagem que trabalha de uma forma mais reflexiva.

Do ponto de vista da história da matemática, relativa ao Tales e seu teorema, conforme as observações feitas durante as aulas, percebemos que o aluno quando aborda essas questõeshistóricas, leva as mesmas para uma visão meramente figurativa, e não histórica enquanto um processo de aquisição de uma quadro conceitual que enseja o teorema. Percebemos que arede conceitual que envolve o teorema de Tales ainda se encontra numa forma muito empírica. A atuação da pesquisa buscou contribuir para que o aluno adquirisse uma visão conceitual científica.

Objetivando dar respostas para esse quadro de dificuldades dos alunos percebidos com a prova diagnóstica, bem como com as observações em sala de aula,preparamos um experimento didático formativo sobre o teorema de Tales, tendo como base teórica o ensino desenvolvimental. Ao longo do desenvolvimento do experimento, utilizamos de forma colaborativa a metodologia pedagógica da investigação matemática em sala de aula, combinada com o uso do *software*Geogebra como recurso didático para melhorar a mediação cognitiva do aluno.

O objetivo do experimento eraproduzir uma análise sobre de que modo pode ser ensinado teorema de Tales usando princípios da teoria do ensino desenvolvimental combinado com a investigação matemática com o Geogebra que foi usado no sentido de facilitar a mediação cognitiva do aluno. Para tanto, se fez necessário que os alunos aprendessem a usar os comandosbásicos necessários ao entendimento do teorema de Tales. A seguir, passamos para a descrição de como foram as orientações relativas aos comandos básicos do Geogebra.

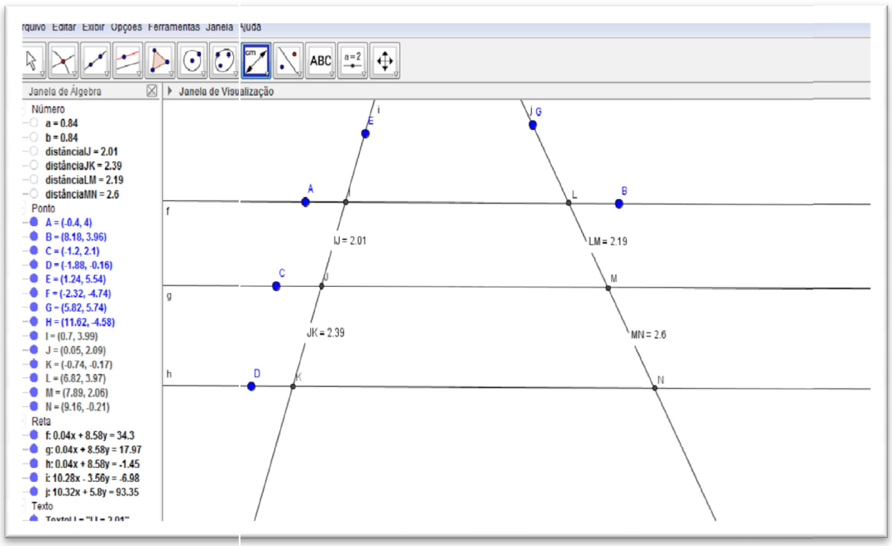
3.4.3 Momento 2 – Comandos básicos do Geogebra

Ao organizar a atividade, procuramos trabalhar somente aqueles comandos que estariam diretamente relacionados às construções geométricas propriamente ditas e necessárias ao entendimento do Teorema de Tales.Ao fazer esse trabalho do ponto de vista prático, o professor procurou mostrar o comando, levar o aluno a experimentar como esse funciona de forma imediata. Seu intuito foipriorizar para que o aluno não fizesse uma cópia mecânica e exata da construção do professor e, sim, conforme o desejo do aluno naquele momento.

Ao realizar a tarefa, quando o aluno fazia algo diferente, ele apresentava a sua dificuldade imediata, o professor já fazia a correção e tirava a dúvida naquele momento. A nossa ideia era que o professor, ao exercer o seu papel diretor junto ao trabalho com o aluno, o fizesse de modo a que o aluno utilizasse, ao máximo, o Geogebra.

Para trabalhar como teorema de Tales, no Geogebra, conforme a atividade que projetamos, o aluno tem que construir: ponto, segmento de reta, medida de segmento de reta, reta, reta paralela, reta transversal, feixe de retas, ângulo, medida de ângulo, ponto de intersecção, deslocar ponto e reta, bem como saber executar nos comando de entrada as operações de adição, subtração, multiplicação e principalmente divisão.A primeira coisa que o aluno aprendeu foi construir um ponto usando a segunda ferramenta. Ao construir o ponto, o professor mostrou que no Geogebra existe uma perfeita sincronia entre álgebra e geometria, por meio,respectivamente, da janela de álgebra e janela de visualização.

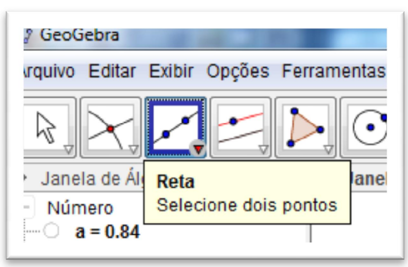
Figura 18 - Construção de um feixe de retas paralelas cortadas por duas transversais.



Fonte: Captura de tela da atividade com o Geogebra.

Após construir um ponto a primeira coisa que o aluno aprendeu foi construir uma reta. Para tanto, ele usou o comando **Reta.**

Figura 19 - Ativação do comando Reta.

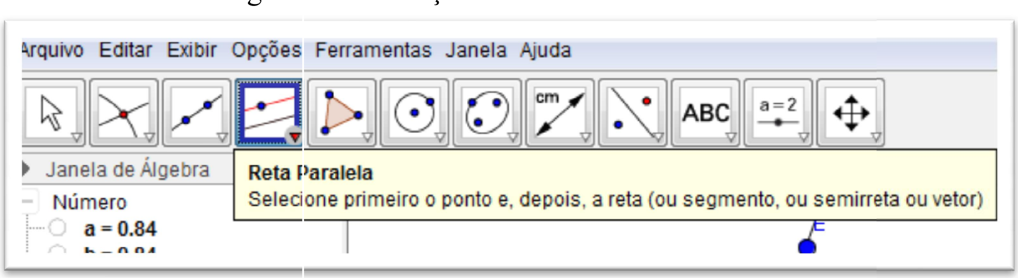


Fonte: Captura de tela da atividade com o Geogebra.

No nosso caso, construímos o ponto **A** e dele construímos a reta **f.**

Como o teorema de Tales fala de um feixe de retas paralela, o passo seguinte foi construir a reta **g** paralela de **f.** Para tanto ensinamos o aluno a usar o comando ***Reta Paralela.***

Figura 20 - Ativação do comando Reta Paralela.



Fonte: Captura de tela da atividade com o Geogebra.

Com o ponto C, construímos a paralela **g.** Do ponto **D,** construímos a reta paralela **h**.

O passo seguinte foi a construção das retas transversais **i** e **j.** Com o comando **Reta**e construindo os ponto **E** e **F,** construímos a transversal **i** . Com o comando **Reta**e construindo os ponto **G** e **H,**construímos a transversal **j**.

Figura 21 - Ativação do comando Interseção de dois objetos.

Fonte: Captura de tela da atividade com o Geogebra.

Com o comando ***Interseção de Dois Objetos,*** clicando na reta paralela correspondente e na transversal **i**, obtivemos os pontos de interseção: **I**, **J**, e **K**. Clicando na reta paralela correspondente e na transversal **j** obtivemos os pontos de interseção: **L** , **M** e **N** .

Para medir o comprimento dos segmentos formado pelo encontro do feixe com cada reta transversal, usamos o comando ***Distância, Comprimento ou Perímetro.***

Figura 22 - Ativação do comando Distância, Comprimento ou Perímetro.

Fonte: Captura de tela da atividade com o Geogebra.

A fazer as medidas, obtivemos: IJ=2,01 cm, JK= 2,39 cm, LM= 2,19 cm e MN=2,6 cm. Agora erasó calcular a razão (a divisão) entre os segmentos. Isso foifeito na ***Entrada***, a última linha da tela do Geogebra:

Figura 23 - Ativação do comando Entrada.

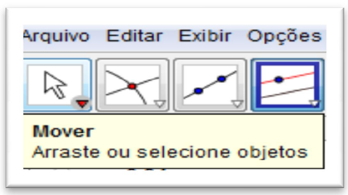
Fonte: Captura de tela da atividade com o Geogebra.

Na Entrada erasó digitar (maiúsculo): IJ/JK e dar *enter,* e posteriormente LM/MN, dessa forma,na janela de álgebra vão aparecer**a=** 0,84 **e b**=0,84.

Essa igualdade **a=b**=0,84 significa que os segmentos de extremos IJ, JK, LM, MN, nessa ordem, formam uma proporção.

Para observar diversas posições da figura construída e por os objetos em movimento noGeogebra, ensinamos o aluno usar o comando ***Mover.***

Figura 24 - Ativação do comando Mover.



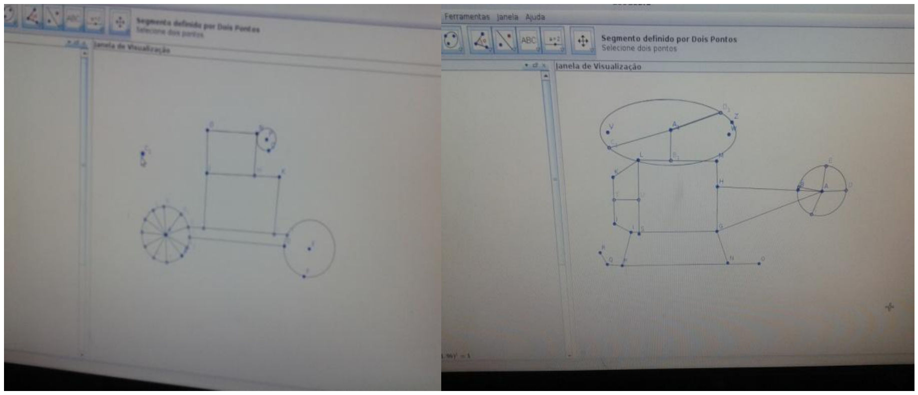
Fonte: Captura de tela da atividade com o Geogebra.

A utilização desse comando foi de fundamental importância, pois permitiu mover uma por uma das retas paralelas e ou reta transversal e mostrar para o aluno que o teorema continuava valendo.

Os alunos não tiveram nenhuma dificuldade em utilizar os comandos. Gostaram da interatividade doGeogebra e acharam muito interessante o efeito geométrico produzido na construção do teorema de Tales ao usar o comando ***Mover.***

Ao terminar essa aula, observando as telas dos computadores, constatamos duas figuras interessantes construídas por dois alunos dessa turma. Seria oportuno dizer queos dois que produziram esses desenhos não dominavam e nem eram usuários do Geogebra. Os alunos, para fazer os desenhos, usaram comandos básicos que haviam aprendido naquela atividade do experimento. Elesnão tiveram nenhuma ajuda do professor e nem os desenhos faziam parte das atividades do experimento. Foi um ato espontâneo e de muita criatividade.

Figura 25 - Criatividade de dois alunos usando o Geogebra.



Fonte: Captura de tela da atividade com o Geogebra.

Conforme percebemos na avaliação diagnóstica, os alunos têm um entendimento limitado em geometria e em álgebra no que se refere ao teorema de Tales. No momento seguinte, trabalhamos justamente no sentido de melhorar esse entendimento.

3.4.4 Momento 3 – Noções de álgebra e geometria

A terceira Atividade, desenvolvida no experimento didático formativo, foi trabalhar noções de álgebra e geometria destinadasa compor o quadro conceitual necessário para a internalização do teorema de Tales.Essa atividade foi desenvolvida no laboratório de informática da escola. Os alunos foram distribuídos junto aos computadores existentes.

Por noções de geometria, no tocante ao teorema de Tales, estamos nos referindo a: aos conceitos intuitivos de ponto, reta e plano; a ideia do que seja um segmento de reta e sua medida; ao conceito de retas paralelas, transversais; a conceito do que seja um feixe de retas paralelas. Por noções de álgebra, no tocante ao teorema de Tales estamos nos referindo a:operações elementares de adição, subtração, multiplicação e divisão; capacidade de resolver uma equação do primeiro ou segundo grau.

O professor inicioua aula dizendo que naquele dia não usaria o Geogebra, porque precisavam,inicialmente, realizar uma rápida pesquisa na internet, em5 minutos, para cada tema, procurando conceitos derazão e proporção, bem como dois exemplos de cada.Uma aluna disse: "não precisa pesquisar na internet, razão é divisão".

O professor falouque inicialmente concorda com ela, mas queele gostaria queela procurasse na internet mais coisas a respeito.Ao longo do experimento, procuramos orientar o professorna diversificação da mediação e empenhamos ao máximo na mediação através da linguagemoral e também escrita. Cultivamos um ambiente no qual o aluno era motivado a falar e escrever o seu pensamento. Se, em algum momento, o aluno seexpressava com termos não próprios da linguagem matemática, de forma paciente fomos introduzindo o vocabulário matemático apropriado. Na razão (fração) 2/3, por exemplo, o aluno dizia que “a parte de cimaé 2”;o professor fazia a correção verbalizando que o numerador é 2. Para reforçar a linguagem correta, já dava outro exemplo: “na fração 4/7, quatro sétimos, o numerador é quatro e o denominador é 7”. Enquanto isso foramsurgindoindagações entre algumas duplas: "olha você viu isso? "esse conceito aqui está mais claro do que esse que você achou"; "cara, escala e velocidade é razão"

O professor retomou, perguntando se já erapossível colher as respostas e exemplos da turma, ao que a turma respondeu que sim.

A aluna iniciou a sua fala:- "realmente razão é divisão. Uma dupla de meninas passa a ler o conceito de razão que elas encontraram: "razão é divisão”. Outra dupla de alunas pediua palavra e leuum conceito de razão tirado de internet: “Chama-se de razão entre dois números racionais a e b, com b diferente de 0, ao quociente entre eles. Indica-se a razão de a para b por a/b ou a : b. Como exemplo elas citam 20/25 = 4/5 e 25/20= 5/4.”

O professor usou para dar um exemploa quantidade de rapazes, moças e do conjunto de alunos participantes do experimento. Qual é a razão entre rapazes e alunos. A turma respondeu que: 4 homens para 13 alunos (homens mais mulheres) e disseque é: 4/13.

Na sequência o professor perguntou: Qual é a razão entre o número de meninos pelo número de meninas? A resposta da turma é imediata: a razão é4 homens/9 mulheres, 4/9 = aproximadamente 0,44.

Continuando, o professor disse que a razão não é nada mais que a divisão de dois números, no qual o segundo, o denominador tem que ser diferente de 0. Aproveitando a ocasião, ele mostrou o motivo da impossibilidade da divisão por zero.

Uma dupla de alunas começoua ler o conceito de proporção: "proporção é a igualdade de duas razões e explica que, para ser proporção, o resultado das duas razões tem que ser o mesmo". Como exemplo de proporção a dupla apresentou: 3/4 =6/8.

Ao usar a expressão conceito, temos como base os estudos de Libâneo (2011), que o define como:

> **Conceito** – conceito é uma representação mental de um objeto real no nosso pensamento que se forma por meio de abstrações, a partir de características, atributos, propriedades, comuns a uma classe de objetos e fenômenos em suas relações, num sistema de conceitos. Os conceitos gerais ultrapassam o âmbito da percepção imediata. (LIBÂNEO, 2011, não paginado)

Nesse sentido, razão e proporção são conceitos matemáticos históricos, que constituem entre outros a rede conceitual do teorema de Tales.

Na sequência uma dupla de alunos disse: "professor a gente pode multiplicar cruzado."

O professor chama a atenção para essefato, e informouque essa é justamente a propriedade fundamental das proporções, e aproveitouo exemplo de proporção que estava escrito no quadro:3/5 = 9/15e mostra que ao multiplicar os "meios" 5 por 9 =45, apresenta o mesmo resultado de multiplicar os "extremos" 3 por 15 =45.

Como estava planejado no experimento, o professor passoupara fazer uma exposiçãosobre razão e proporção e a propriedade fundamental das proporções, usando uma linguagem matemática.Nossa ideia foi usar a internet para iniciar o processo de pesquisa sobre razão e proporção, aproveitando a diversidade, interatividadee plasticidade que se pode usufruir pelo seu uso, mas levando a discussão para o campo do conceito científico e com uma linguagem matemática construída para fazer uma passagem gradual da linguagem inicial do aluno para uma linguagem matemática. Nossopropósitofoi levar o aluno a se apropriar dessa linguagem, para que pudesse entender e se expressar matematicamente usando, também, essa linguagem. Estávamos (e estamos) empenhados em fazer valer a ideia do ensino desenvolvimental de que o papel da escola é levar o aluno a se apropriar do conhecimento científico.

Durante essa exposição, o professor chamou a atenção para algumas modalidades de razões usadas pela Física: velocidade e aceleração médias e na matemática: o conceito de escala.Após constatar que os alunos não tinham mais dúvidas sobre razão e proporção, o professor solicitou que eles pesquisassem na internet sobre os seguintes tópicos de geometria: ponto, reta, plano, retas, retas paralelas, retas concorrentes, retas transversais, feixe de retas paralelas e segmentos de reta.

Enquanto o professor concediatempo para os alunos pesquisar, ele saiu andando pelo laboratório na tentativa de tirar as dúvidas que os alunos iamlevantando. Um aluno disseque ponto, reta, plano, retassão chamados de conceitos intuitivos da Geometria Euclidiana.

Uma aluna perguntouqual é a diferença entre reta transversal e perpendicular. O professor explicouque duas retas são perpendiculares quando formam um ângulo de 90 gruas entre si. Já duas retas para ser transversal em relação a uma outra ou a um feixe de retas, basta simplesmente cortar essa reta ou esse feixe não importando com a medida de um ângulo formado.

A uma dupla foiperguntado o que acharam sobre retas. A resposta foi: que uma reta é constituída de infinitos pontos alinhados. Outra dupla fala: “a reta é formada por infinitos pontos que estão alinhados, os quais são ilimitados nos dois sentidos. Quando construímos uma reta devemos representá-la com letra minúscula do nosso alfabeto".Aproveitando o momento, o professor disse para os alunos que ponto, reta e plano são para a matemática “conceitos primitivos” da geometria euclidiana.A dupla seguinte já começa falando sobre retas paralelas: "retas paralelas são retas que nunca vão se encontrar, ou seja,elas não têm nenhum ponto em comum.”

Dando sequência, o professor solicitouque uma determinada aluna falassesobre feixe de retas paralelas. A aluna disse: “um feixe de paralelasé formado por 3 ou mais paralelas”.

Para terminar, o professor provocou: Está faltando as retas coincidentes. Um aluno disse que: retas coincidentes são retas que estão uma sobre a outra, seria comose estivesse uma reta em cima da outra;elas são chamadas de coincidentes pelo fato de todos os seus pontos serem comuns, coincidentes.

Ao terminar a descrição e análise desse momento lembremos que o nosso propósito inicial eraconduzir de uma forma processual para que o aluno amplie o seu entendimento sobre a rede conceitual relativa ao teorema de Tales. A rede conceitual em questão abarcava tanto álgebra como geometria.

No momento seguinte do experimento, continuamos no trabalho no sentido de alargar essa base conceitual, O aluno,por meio das atividades I e II, vai partir de um problema concreto, no caso cada uma dessas atividades, para concluir os conceitos de razão e proporção. Ou seja, o aluno sairá de um problema concreto e decorrente dessa atividade e concluirá os conceitos científicos de razão e proporção.

3.4.5 Momento 4 – Contexto histórico do teorema de Tales

A quarta atividade desenvolvida no experimento didático formativo foi trabalhar o histórico de Tales, seu teorema, passos da investigação matemática em sala de aula, abrindo, assim, um caminhodidático para abordar o teorema.Sabemos que numa perspectiva Davydoviana são os alunos que investigam e procuram fazer as descobertas, devidamente orientados pelo professor. É justamente isso que foi buscadonas atividades I[13] e II[14].

Inicialmente, pedimos aos alunos que pesquisassem na internet sobre: Tales, seu teorema, a época que viveu e suas contribuições para a matemática. Foi estabelecido um

[13] APÊNDICE G- Atividade I
[14] APÊNDICE H- Atividade II

tempo de 15 min para o aluno pesquisar e em seguida cada grupo fez uma pequena apresentação oral sobre o que havia encontrado.

Em seguida, fizemos uma apresentação para os alunos sobre o histórico de Tales e seu teorema; investigação matemática em sala de aula.Posteriormente, o professor fez uma apresentação em PowerPoint falando sobre a maneira como pretendemos trabalhar a Investigação Matemática em Sala de Aula. Explicamos que, embora a Matemática seja uma ciência consolidada, por questões didáticas, atrabalharíamoscomo uma ciência a ser construída ao longo do processo de ensino-aprendizagem com o aluno. Em termos davydovianos,estávamos trabalhando com o aluno para que ele fizesse a ascensão do abstrato ao concreto.

Foiexplicado para o aluno o que entendíamos por investigação matemática em sala de aula, mostrando e trabalhando com eleso quadro dos 4 passos fundamentais de uma investigação matemática, segundo a metodologia proposta por Ponte et al (2013, p.21).

Quadro 5 - Fases da investigação Matemática no momento 4

Exploração e formulação de questões.	Reconhecer uma situação problema Explorar a situação problemática Formular questões
Conjecturas	Organizar dados Formular conjecturas (e fazer afirmações sobre conjecturas)
Testes e reformulação	Realizar testes Refinar uma conjectura
Justificação e avaliação	Justificar uma conjectura Avaliar o raciocínio ou resultado do raciocínio

Fonte: <PONTE et. al. 2013, p. 21>

Dando sequênciaàs atividades planejadas para os alunos, o professor iniciou a leiturada história de Tales e do seu teorema. Essa atividade constava de um PowerPointo qual foitrabalhado da seguinte maneira: foi pedido para que alguns alunos das duplas lessem um pequeno trecho e em seguida eram feitas as devidas explicações e discussões. Inicialmente, é mostrada a influência de Tales na criação de uma visão da geometria postulacional.

Éoportunorelembrarque para o Ensino Desenvolvimental em particular e para a Teoria Histórico Cultural em geral, é muito importante fazer a reconstrução histórica do processo de criação e desenvolvimento um dado conceito científico. A esse respeito, Freitas (2009) assim se expressa:

> Em outras palavras, na atividade de aprendizagem os alunos se apropriam das ações mentais que permitiram às gerações anteriores produzirem os conceitos que ele, aluno, está aprendendo agora como conteúdo escolar. Os alunos se apropriam e reproduzem em sua atividade pensante, os objetos histórica e culturalmente produzidos por gerações e gerações de cientistas e que foram sendo acumulados e

> tornados um conhecimento coletivo. Aprendendo desse modo os alunos convertem, ativamente, o conhecimento coletivo em um conhecimento individual. Convertem em suas, as ações mentais humanas outrora criadas e utilizadas por pesquisadores de todas as áreas, por artistas, poetas, linguistas etc. (FREITAS, 2009, p. 4)

Ao longo do nosso experimento didático formativo,buscou-se contemplara questão histórica na qual está imerso um conceito, no caso os conceitos relativos ao Teorema de Tales. E escolhemos como atividade didática para esse momento dois problemas clássicos com o Teorema de Tales. A solução desses problemas é atribuída a ele. Os problemas são: da distância de um barco à Terra e o do cálculo da altura de uma pirâmide no Egito.

Nesse trecho da apresentação realizada para os alunos foi ressaltada a atribuição a Tales do caso de semelhança de triângulos: ALA bem como questionado se a solução do problema do barco, não seria o próprio Teorema de Tales.Durante a abordagem histórica, tomamos o cuidado de passar uma visão histórica breve, mas processual de: Tales, do seu tempoda sua região geográfica.

Os alunos, no início desse momento, já haviam realizado uma atividade depesquisa sobre: Tales e seu teorema. Com a leitura da exposição descrita no PowerPoint, realizada de forma coletiva e discutida com os alunos, buscando convergir as informações obtidas pelo aluno via pesquisa, para os pontos históricos essenciais que julgamos necessários, conforme a história da matemática relativa ao Teorema de Tales.

O problema da distância do barco à Terra foi apresentado aos alunos e lhes foi indagando como eles resolveriam aquele problema.O importante nesse momento não é a solução, mas a motivação e o nível de inquietação que tais questionamentospodem trazer ao aluno. Foi realizadauma discussão com os alunos no sentido de propor um desenho querepresentasse o problema, bem como discutido o que o problema poderia estar causando e o que estava sendo pedido ao aluno.

O interessante foi discutir um esboço, uma possível solução. A ideia era deixar essa indagação para ser respondida nas próximas etapas de desenvolvimento do experimento.O mesmo procedimento foi feito no sentido de realçar o que poderia ser considerado dado no problema da pirâmide, o que estava sendo pedido, que no caso era a altura da pirâmide. Novamente surgiramalgumas possíveis soluções, algumas provocações matemáticas com os alunos desafiando os mesmos a resolver o problema.

A discussão com a turma avançoue num dado momento o professor indagou: “e para vocês de onde surge, ou onde está a essência do teorema, na pirâmide ou no barquinho”?Uma aluna disseque para elaa essência estavano problema do barquinho. Outradisse: "para eu responder isso eu precisaria saber qual problema veio primeiro o do barquinho ou o da pirâmide?”

O professor gostoudas inquietações e informou que essas eram perguntas que iríamostrabalhar no decorrer do experimento. Mas o professor alertouaos alunos: “*do ponto vista da história da matemática, estamos falando do período de aproximadamente 600 anos A.C., então, não temos como precisar qual problema veio primeiro”*.

O professor pediu a uma aluna para continuar a leitura, no trecho que falava que se referia à importância das aplicações das proporções e do próprio teorema de Tales na engenharia e arquitetura. O teorema de Tales tinha o nome de teorema dos segmentos proporcionais. Ao longo da leitura, os alunos ficaram sabendo que somente em 1883, com o publicação de um livro francês é que o teorema dos segmentos proporcionais passoua ser chamado de teorema de Tales. Eles ficaram surpresos com isso e igualmente admirados com asvárias maneiras e enfoques diferentes que o teorema de Tales tem em alguns países: França, Alemanha, Itália e Brasil. Ou seja, temos um teorema único, mas que dependendo dessas localidades ele recebe um: enunciado, desenho e enfoque diferenciado, embora sejam matematicamente equivalentes.

Quando o trabalho sobre o histórico de Tales e seu teorema terminou, foi sugerida algumas fontes adicionais, principalmente na internet sobre esse assunto aos alunos.A partir desse ponto, o experimento seguiu a seguinte dinâmica: o aluno recebeu uma atividade denominada atividade 1 numa folha de papel e uma régua. Para um melhor entendimento, vamos reproduzir trechos dessa atividade 1 e fazer os respectivos comentários:

> "*(1) No espaço abaixo você usando uma régua faça:*
> *a) Desenhe aqui o feixe de3 retas <u>não paralelas</u>cortado por duas transversais.*Dê nome às retas (letra minúscula) e aossegmentosnas transversais (letra maiúscula)."*

Na análise desse item, percebe-se que somente quatroalunos fizeram os feixes e deram nome corretamente para as retas e para os segmentos de reta. Alguns alunos usaram letra minúscula para referenciar as extremidades dos segmentos, outros nem mesmo referenciaram os segmentos.

> *"b) Use uma régua e meça o comprimento dos dois segmentos consecutivos formados em cada transversal. Use centímetros (cm) e milímetros (mm).*
> *medidas dos segmentos numa transversal, medidas dos segmentos na outra transversal*

--"

Embora o professor tenha orientado os alunos na maneira de realizarem a atividade proposta nesse item, percebeu-se que somente 1 aluno seguiu a recomendação. A recomendação era de escrever o nome do segmento e a sua respectiva medida. Percebe-se que são segmentos correspondentes pelos desenhos, ficando a correta escrita do aluno a desejar.

" c) Calcule a razão entre os segmentos ao longo de cada reta transversal (com duas casas decimais).razão dos segmentos numa transversal. razão dos segmentos na outra transversal
**Escreva a razão conforme exemplo dado pelo professor:*

-- "

Nesse item, novamente o professor orientou e tirou as dúvidas apresentadas pelos alunos. Logo uma aluna perguntou: “eu posso usar a calculadora do celular?" A outra: “é para medir em cm ou em mm”?

Três alunos cometeram erro no resultado da divisão. Em alguns casos o erro foi da conta propriamente dita, em dois outros, o erro foi de unidade. Por exemplo, o aluno mediuum primeiro segmento de 5 mm e escreve 0,05m, já o outro segmento que mede 2 cm,ao fazer a divisão,ele não converte numerador e denominador (ou tudo para cm ou tudo para milímetro), obtendo assim um resultado numericamente errado.

d) O resultado dessas razões foi igual ou diferente? -------------------------------------
Essas razões formam ou não uma proporção? ---
Conclusão:---
--"

A resposta dada por todos os alunos foi correta, pois afirmaramque os resultados das razões foram diferentes e por isso não forma uma proporção.Todos os alunos concluíram de forma coerente, dizendo de uma forma ou de outra que, pelo fato das razões serem diferentes,os segmentos não formam uma proporção. Dois outros alunos foram além: disseram que realmente os segmentos não eram proporcionais, mas são ainda mais completos, dizendo que a proporcionalidade não ocorreu em virtude do feixe de retas não ser de retas paralelas.

E esses dois alunos já conseguiram completar o processo que vai do conceito abstrato para o concreto. Tanto é que conseguem perceber a correspondência entre a condição de paralelismo do feixe de retas, com a proporcionalidade e vice-versa. Mas para nós eraimportante levar os demais alunos a perseguir esse movimento.Durante a solução desse item, alguns alunos perguntaram: "para que escrever conclusão?”

O professor rapidamente explicou que fazia parte do experimento que o aluno praticasse um pouco de escrita matemática. Para os que não entenderam o significado do termo escrita matemática, o professor explicou de outra forma: “é importante você saber, ou melhor, desenvolver ahabilidade de escrever seus pensamentos, seus raciocínios para resolver um problema etc.”

A propósito da importância da escrita matemática,éimportante lembrar as palavras de Parateliet al (2006, p. 52): “A escrita, como registro de pensamento, constitui para o aluno, momentos importantes de metacognição e organização de ideias, oferecendo oportunidades raras de aprendizagem também na área da matemática”. Além de refletir sobre as palavras de Powel(2001) sobre a abrangência da escrita matemática:

> Qualquer que seja a atividade escrita, desde que ela obrigue os alunos a sondar suas ideias e compreensão sobre alguma matemática em que estejam envolvidos, pode capturar evidência importante de seu pensamento matemático. Diferente danatureza efêmera da fala, a escrita é um meio estável, que permite a ambos, aluno e professor, examinar reagir e responder ao pensamento matemático do aluno. (POWEL, 2001, p. 78)

Durante todo experimento didático formativo, procuramos trabalhar com atividades escritas, tanto nas tarefas como nas provas. Até mesmo durante a aplicação dos questionários aos alunos e aos responsáveis, foram feitas muitas perguntasque possibilitavam respostas totalmente abertas, mesmo que no momento da análise fosse mais trabalhoso, mas que enriquece o trabalho final.

O professor percebendo que a turma já havia terminado a atividade 1, chamou os alunos no sentido de discutir e socializar as conclusões encontradas. Ele perguntou se já haviam terminado e em função da resposta positiva, passoua distribuir a atividade 2, que é muito parecida com a atividade 1, o feixe de retas agora será formado por três retas paralelas.

“Atividade 2 do Experimento Didático Formativo Sobre o Teorema de Tales.

.

*Nome: ____ *Data: -----/11/2015*
1) No espaço abaixo você usando uma régua faça:
*a) Desenhe aqui o feixe de3 retasparalelas cortado por duas transversais . *Dê nome às retas (letra minúscula) e aossegmentosnas transversais (letra maiúscula). Para facilitar a construção das paralelas vamos fazer linhas (como num caderno).*
--- "

Na solução desse item, somente um único aluno nomeou as retas com letras minúsculas e os pontos de encontro das transversais com o feixe de paralelas;ele nomeou as extremidades dos segmentos com letras maiúsculas.

"b) Use uma régua e meça o comprimento dos dois segmentos consecutivos formados em cada transversal. Use centímetros (cm) e milímetros (mm).

medidas dos segmentos numa transversal.medidas dos segmentos na outra transversal
-- -------------------------------------"

Na resposta desse item,todos os alunos fizeramas medidas de forma correta, mas novamentesomente um único aluno colocou a medida do segmento nomeando-o seguido de igual, colocando a medida com a sua respectiva unidade, exemplo: AB = 2 cm.

"*c) Calcule a razão entre os segmentos ao longo de cada reta transversal (com duas casas decimais).*
razão dos segmentos numa transversal . razão dos segmentos na outra transversal
**Escreva a razãoconforme exemplo dado pelo professor:*
---"

Neste item, os alunos foram orientados pelo professor a pegar os segmentos para fazer a razão cada uma na sua respectiva transversal. Essa orientação foi eficaz, todos os alunos encontraram razões iguais, calculadas cada uma numa transversal correspondente.

"*d) O resultados dessas razões foi igual ou diferente? -----------------------------------*
Essas razões formam ou não uma proporção (justifique)? ------------------------------
Conclusão:-- "

De um modo geral, todos perceberam que essas tarefas são preparativas para usar o Geogebra, objetivando melhor entender o Teorema de Tales; igualmente todos os alunos perceberam o significado de razão e proporção. Quanto aos rudimentos de geometria necessários ao entendimento do teorema de Tales, os alunos conseguiram entender bem. De conclusivo, esse momento do experimento atingiu todos os objetivos esperados.

Neste momento 4, também fizemos o uso da mediação através de objetos reais, combinados com a mediação por meio de desenhos, uma vez que cada aluno desenhou, mediu e calculou as razões ente os segmentos numa mesma transversal. Todo esse conjunto de mediações possibilitou ao aluno reconstruir o conceito de proporção o qual ainda se encontrava numa forma externa, mas que era reconstruído como processo de internalização na consciência do aluno. De uma forma processual, estávamos, na verdade, ampliando a ZDP desses alunos relativa a essa rede conceitual do Teorema de Tales.

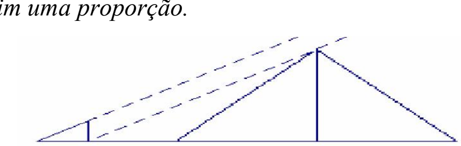
3.4.6 Momento 5 Aula sobre o problema motivador e uso do Geogebrano teorema

1) Construção geométrica do teorema: construir um feixe de 3 retas paralelas, cortado por duas retas transversais. Calcular as razões formadas pelos segmentos sobre as transversais e comparar os resultados. Formou ou não uma proporção?

2) Usar o comando de arrasto e mostrar para os alunos que ao arrastar as paralelas e ou as transversais, o teorema continua valendo.
3) Construir uma quarta reta não paralela ao feixe de paralelas,calcularas razões entre cada par de segmentos numa mesma transversal e perceber que não forma uma transversal.
4) Usando o comando de arrasto na quarta reta não paralela e ir deslocando um ponto dessa reta até que ela fique paralela às demais retas do feixe. Observar o valor de mudança nas razões, até que eles fiquem iguais, formando novamente uma proporção.

Como preâmbulo para a análise do momento a seguir, lembramos que, ao longo do presente experimento, ocorreu com intensidade à atribuição de sentido e de significado aonosso trabalho. Percebemos e conseguiremos identificar sentido em cada momento: no momento 2, os conceitos básicos do Geogebra, por exemplo, o aluno sabia claramente que os comandos ensinados eram primordiais para o perfeito entendimento do teorema de Tales; no momento 3, o aluno percebia nitidamente que o sentido primordial do momento era a sua apropriação do quadro conceitual do Teorema de Tales, ampliando, assim, o significado para os conceitos de razão e proporção.

Antes de usar o Geogebra,fizemos uma atividade impressa introdutória ao teorema de Tales. É um problema histórico, cuja solução é atribuída a Tales, o qual funcionará como agente motivador: o problema do cálculo da altura da pirâmide no Egito. Estão reproduzidas entre aspas e com formato itálico cada parte dessa tarefa e faremos os comentários correspondentes no formato normal.

> *"Problema Motivador.1) TENTATIVA 1- Para fazer a medida da altura da pirâmide, Tales teria usado o fato de que a sombra projetada pela pirâmide e por uma estaca na vertical, num mesmo instante, apresentam um mesmo ângulo, estabelecendo assim uma proporção.*
>
> 
>
> *Sabendo que no triângulo pequeno são conhecidas sua alturae a sombra que esse faz com o chão. Na pirâmide queremos a sua altura e sabemos a sombra que essa projeta no piso.*
> *Solução: -(*tempo 5 minutos) --*
> *---."*

Esse "problema motivador"de forma simplificadaatendeaos quatropassos da metodologia da investigação em matemática em sala de aula conforme entendimento de Ponte et al (2013, p.21). Nele aparece a exploração e a formulação da questão,que já está feita pelo próprio problema, atende o levantamento de conjectura, que são necessárias para esboçar a solução; igualmente atende ao teste de refino de uma conjectura; atende também a justificação e à avaliação, uma vez que a solução encontrada tem de ser avaliada para ver se pode ou não ser aceita no contexto do problema.

Essa atividade foi respondida por 12 alunos presentes ao experimento naquelemomento.Ao entregar a folha com o problema, oprofessor disse que era para o aluno colocar e organizar o seu pensamento. Uma aluna já indagou: "He! Que pensamento?"O professor respondeu que era o pensamento matemático. Ele já aproveitou a ocasião para lembrar atabelinha dos quatropassos importantes da investigação matemática em sala de aula, e que naqueles passos fica evidenciada a importância de escrever o pensamento matemático.

Observe-se quea própria "organização do pensamento" recai muito no último "passo" da pesquisa de investigação matemática, proposta por Ponte et al (2012, p.21), que é:: "justificar uma conjectura, avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio".Esse problema da maneira que colocamos, por mais que na tentativa 1 dizemos que era conhecida a altura e a sombra do triângulo pequeno, e que também era conhecida a sombra projetada no chão pela pirâmide, ficando para ser calculada a altura do triângulo grande, que simbolizava a altura da pirâmide, a maioria dos alunos fez comentários próximos de uma solução, mas poucos conseguiram fazê-la nessa tentativa.

Após algum tempo, a maioria dos alunosconseguiu entender que é possível fazeruma proporção como, por exemplo: entre altura do triângulo pequeno está para a altura da pirâmide, assim como a sombra do triângulo pequeno está para a sombra da pirâmide.Ocorre que alguns alunos montaram a proporção de forma torcida: uma hora coloca o triângulo pequeno no numerador e do outro lado da igualdade coloca a pirâmide no denominador.

Após o processo de correção dessa atividade, comentamos esse erro comum com os alunos. A reação de um deles foi: "que mancada cara, eu sabia que tinha que ter certa ordem e mesmo sabendo eu fiz errado".Ao apresentar a lista e começar a projeção do PowerPoint, já na tentativa 1, um aluno gritou: "professor é só montar uma regrinha de três." Na verdade, o aluno matematicamente está dizendo, que a solução passa por montar uma proporção, a qual é essencial.

E essa ideia do aluno não me agradou, no momento, pois eu queria que ele visse naquela atividade proposta o Teorema de Talles, mas ele estava no caminho de resolver o problema. Uma aluna achou estranho que se pode montar a proporção de quatromaneiras e que todas são corretas e evidentemente darão o mesmo resultado.Três alunos usaram na solução essa expressão regra de três. A maioria dos demais trabalhou no sentido de montar uma proporção e uma única aluna resolveu via teorema de Tales.

Para motivar e contribuir para clarear mais os dados e possibilitar mais uma tentativa de solução, foi criada uma Tentativa 2 a qual é a Tentativa 1 com um pouco mais de informação e motivação.O professor explicou um pouco mais o problema, trabalhando com o aluno no sentido de que ele percebesse quais eram os dados que, numa linguagem mais apropriada ao aluno, o professor perguntou: "*O que o problema está dando? Ou seja, oque eu sei de dados, números, medidas sobre o problema? E oque o problema está pedindo? Oque eu tenho que calcular? Descobrir?"*

A motivação teve como objetivo leva-los apensar em uma maneira de descobrir a medida da: altura da pirâmide, ou a distância do barco a Terra, fazendo cálculos e não usando um instrumento de medida do ponto de vista prático. Outro aspecto da motivação foi no sentido literal, dizendo que o aluno era capaz, embora alguns tivessemdificuldades, mas que eles tinham potencial para encontrar a solução.

Quando já haviatranscorrido vinte e três minutos, o pesquisador pediua atenção dos alunos e provocouperguntando: "para vocês o que tem a ver essa figura aicom o Teorema de Tales?" Sendo ainda mais enfático, perguntou: "vocêsconseguem ver nessa figura o Teorema de Tales?"

Percebendo que os alunos ficaram meio perdidos com a pergunta, o pesquisador tentoumelhorar a pergunta: "no Teorema de Talles, vocês têm um feixe de retas paralelas e duas transversais, certo? Imagine se você prolongar aretae/ou construir uma reta paralela se você consegue visualizar esses elementos na figura".Dois alunos não quiseram responder a essa tentativa 2 em virtude de terem descrito uma solução na tentativa 1. Ao verificar a solução proposta por eles, percebe-se que eles estão corretos. Todos os alunos descreveram uma solução de uma forma mais clara e resumida do que fizeram na tentativa 1.

Uma importante dificuldade do aluno residia no fato de que ele estava acostumado a ter um problema com os dadosexpostos, e ou fornecidos no problema. No caso do problema motivador, ele era desafiador, pois se apresentava aberto e isso requeria do aluno um nível maior de abstração para se chegar à solução.

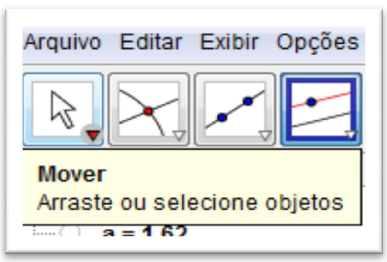
Ao finalizar a atividade do problema motivador, percebemos que: só pelo fato da maioria dos alunos serem desafiados a solucionar o problema motivador, o nível de prontidão já cresceu muito. O sentido, o propósito em procurar uma solução para o problema já despertouuma vontade, um desejo de superar aquela situação problema que os desafiava. Quando se conseguiu perceber o significado do conceito de proporção como uma via de solução para o problema, está ai estabelecido no seu raciocínio a superação para a situação problema. Faltava somente o aluno se colocar em operação para superar tal tarefa. E isso foi feito pela maioria.O desdobramento seguinte dessa aula foi trabalhar o Teorema de Tales usando o Geogebra.

3.4.7 O Uso do *software*Geogebra no teorema de Tales

De maneira sucinta,otrabalho desenvolvido com os alunos utilizando o Geogebra pode assim ser condensado.

1- Fizemos com os alunos as construções necessárias ao teorema de Tales utilizando aqueles comandos descritos no *Momento 2.* A diferença aqui é que éoutra construção com pontos, equações diferentes, mas que segue a mesma lógicana maneira defazer.

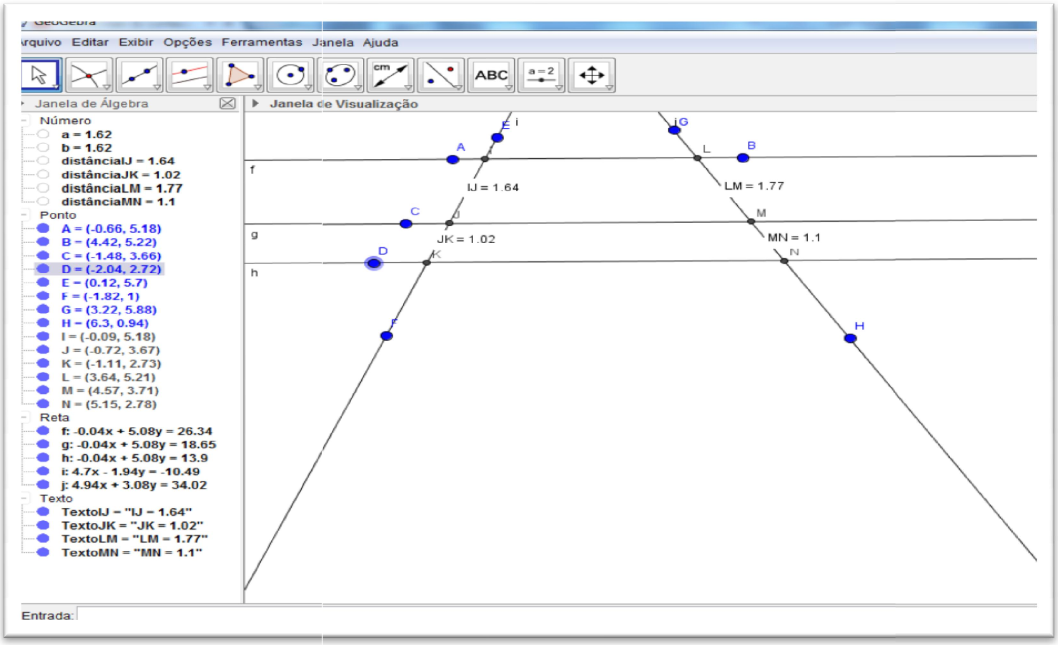
Figura 26 - Demonstração da construção de dois pontos através do comando Mover.



Fonte: captura de tela do Geogebra.

2- Usando o Comando ***Mover***, mostramos para os alunos que ao arrastar reta paralela **g,** por exemplo, os comprimentos dos segmentosàs distâncias de extremos: **IJ**, **JK**, **LM** e **MN**, vão mudar, mas, ao calcular os novos valores das razões, os resultados ainda apresentarão valores iguais, ou seja, os segmentos continuam proporcionais, valendo o teorema de Tales.Para ilustrar, reproduziremos a cópia da tela:

Figura 27 - Aplicação do comando mover na construção do teorema de Tales.



Fonte: captura de tela do Geogebra.

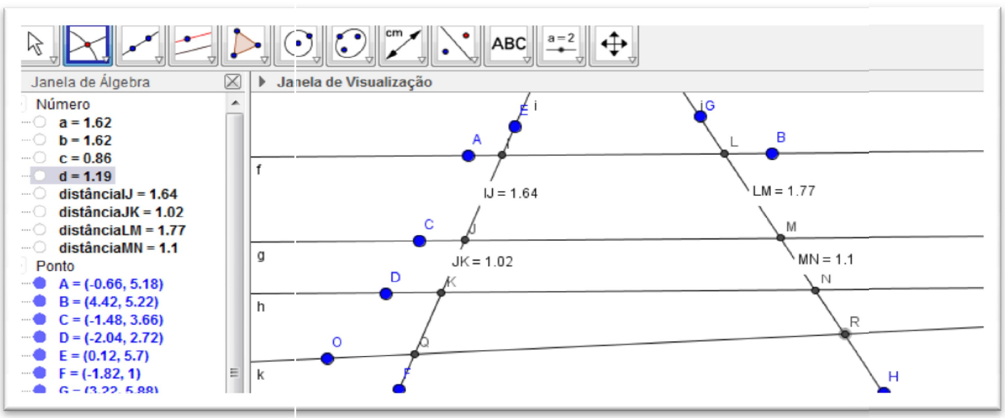
O mesmo ocorre ao arrastar as transversais **i** ou **j**. Ou seja, podemos arrastar as transversais e o teorema de Tales continua valendo. Isso é perfeitamente perceptível devido ao caráter dinâmico do Geogebra.Os comentários dos alunos sobre essa parte do arrasto (mover) de retas foram: "*eu não sabia disso e agora percebo que independente de mover ou não as paralelas ou transversais o teorema ainda vale*"; "*isso é muito massa, esse comando mover me fez aprender uma coisa que eu não sabia sobre o teorema de Tales"*.Esses comentários demonstram o tanto que como uso do Geogebra o professor pode potencializar as explicações sobre o teorema de Tales.

Em Vygosky (2000, p. 237) temos que:"a formação de conceitos surge sempre no processo de solução de algum problema que se coloca para o pensamento do adolescente. Só com o resultado da solução desse problema surgem os conceitos".Quando o aluno se põe em atividade fazendo com seus desenhos no Geogebra: retas paralelas, transversais e segmento; calculando as razões entre os segmentos correspondentes e percebendo que formarão proporção pelo fato das razões terem valores iguais,ele está construindo àluz dos dados fornecidos pelo aluno o conceito de proporção.

Quando, usando o Comando ***Mover***, o aluno percebe na tela do seu computador que mesmo movendo as paralelas ou as transversais, a proporção se mantem, ou seja, os segmentos continuam proporcionais, isto permite que o aluno, do ponto de vista psicológico,conheça os conceitos de razão, de proporção, de segmentos proporcionais. Assim, fica evidenciado matematicamente o teorema de Tales.

O próximo passo no sentido de aprofundar o entendimento dos alunos foi construir uma quarta reta **k,** não paralela ao feixe de paralelas, calcular razões **c** e **d** entre cada par de segmentos numa mesma transversal e perceber que não forma uma transversal, por apresentar valores diferentes (c = 0,86e d = 1,19), conforme se pode ver na figura 28:

Figura 28 - Construção da reta **h**, não paralela ao feixe de Reta



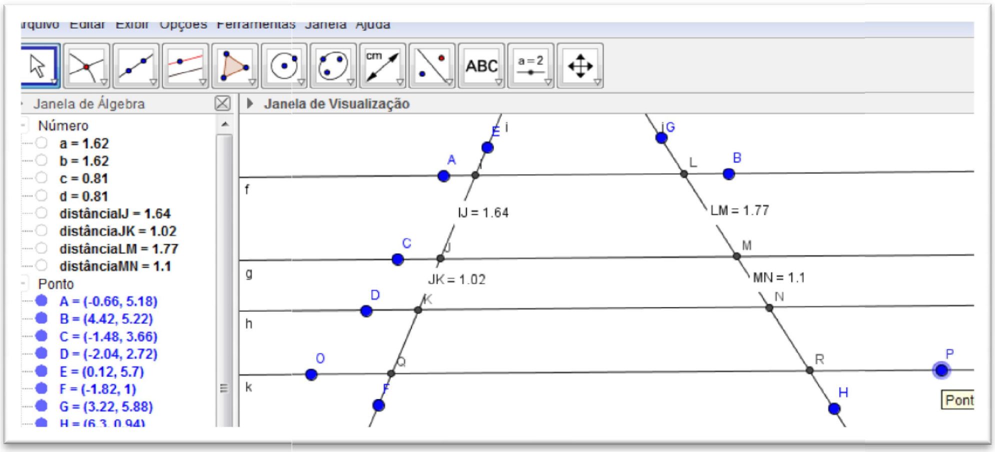
Fonte: captura de tela do Geogebra.

Um aluno meio impaciente já foi logo dizendo: "*pô, se a reta não era paralela às outras, é claro que não formaria proporção".*Ao que oprofessor rapidamente respondeu: "*então vamos fazer essa reta não paralela virar paralela".*

Lembrandoque para fazer a reta **k** nós criamos os pontos **O** e **P**, a figura cortou o ponto P, que ficaria a direita do ponto **R**.Usando o comando ***Mover***, no ponto P da reta **k**, os valores de **c** e **d** vão mudando até ficarem iguais. O valor d=MN/NR. No exato momento emque ocorreuc=d= 0,81, a reta k ficou paralela às demais retas do feixe, valendo também para ela o teorema de Tales.

O alunomeio surpreso disse: "*olha a esperteza do professor, ele foi com o Comando* ***Mover****no ponto P, foi na maciota arrastando o ponto P, até as razões c e d ficarem iguais e dessa forma a reta k se transformou numa paralela, valendo então o teorema de Tales para a reta k também".* Como pode ser visto na figura final:

Figura 29 -Ativação do comando Mover no ponto P da reta **k**.



Fonte: captura de tela do Geogebra.

Mediante entendimento demonstrado pelos alunos, o professor encerrou esse momento do experimento.

Para encerrar a análise desse importante momento do experimento, acreditamos oportuno retomar as palavras de Vygotsky (2007)relativasàZDP:

> A zona de desenvolvimento proximal define aquelas funções que ainda não amadureceram, mas que estão em processo de maturação, funções que amadurecerão, mas que estão presentemente em estado embrionário. Essas funções poderiam ser chamadas de "brotos" ou "flores" do desenvolvimento, ao invés de "frutos" do desenvolvimento. O nível de desenvolvimento real caracteriza o desenvolvimento mental retrospectivamente, enquanto a zona de desenvolvimento proximal caracteriza o desenvolvimento mental prospectivamente.(VYGOTSKY, 2007, p.98)

Durante todo o decorrer do experimento, a preocupação nossa era contribuir para o desenvolvimento ZDP dos nossos alunos. Fizemos isso de várias formas: criando atividades com dificuldades crescentes, ampliando de forma dinâmica o processo de perguntas e respostas com os alunos, objetivando que eles refletissem; a cada dúvida levantada pelo aluno, procuramos fornecer uma resposta de forma rápida e direta; assistência individualizada para o aluno quando solicitada, andando o tempo todo no laboratório ou na sala de aula, procurando aumentar a interação com os alunos; o pesquisador, em alguns momentos, também prestava atendimento individualizado para os alunos; até a maneira de organizar a turma em duplas, ou em trio favorecia a interação entre os alunos e entre alunos e professor. Essa maneira de organizar a turma se mostrou bastante interativa, possibilitando a troca de experiências, de teste de conjecturas e mesmo da socialização dos ensinamentos entre os alunos.

Com a introdução do *software*Geogebra em algumas atividades, ampliamos a capacidade de mediação colocada àdisposição do crescimento cognitivo do aluno. Se nos demais momentos do experimento didático formativo o aluno foi colocado em atividade, nos momentos de uso do *software*Geogebra não foi diferente. Ele desenvolveu atividades utilizando o *software* : desenhou, testou conjecturas, viu a representação algébrica e geométrica dos elementos por ele criados, reproduziu o Teorema de Tales em detalhes com o *software* .

Explorando o efeito de arrasto (mudança), propiciado pelo *software* , o aluno percebeu que o teorema de Tales continua valendo mesmo que desloque as retas paralelas ou as retas transversais. Com o mesmo efeito,ele conseguiu fazer o movimento do abstrato para o concreto e também sair do concreto, bem como conseguiu fazer o movimento de volta, partindo de uma situação de uma reta não paralela ao feixe e arrastando até que ela ficasse paralela, formando,assim, umaproporção. Entendemos que o aluno, dessa forma, conseguiu realizar o movimento do pensamento do abstrato ao concreto, que, como dissemos, encerra um momento no qual o aluno descobre “a relação geral principal” e percebe essa relação geral se manifestar em relações particulares, fazendo o movimento do Geral para o particular; e igualmente importante, há o momento em que ele descobre e reproduz as condições de origem.

No nosso caso,realizamos esse segundo momento, quando utilizando o comando de arrasto do Geogebra, lentamente o aluno foi deslocando uma reta inicialmente não paralela, fazendo com que ela se tornasse paralela, e retomando, assim, a proporcionalidade e, desse modo, ele pode fazer o movimento de volta, do particular para o geral.Ao mesmo tempo,realizamos, no experimento, o caminho da reconstrução histórica do teorema de Tales.

Concluindo, procuramos contribuir para a criação e ampliação das “flores” ou “brotos do desenvolvimento” cognitivo dos nossos alunos com esse experimento. Agora, o efetivo transformar dessas “flores e brotos do desenvolvimento cognitivo em frutos” é um processo interno do aluno.

Na sequência, apresentamos o momento 6, o qual consiste numa atividade de solução de problemas sobre o Teorema de Tales. Com elaqueremos colaborar para ampliar nos alunos a capacidade de interpretar e resolver problemas relativos ao teorema de Tales.

3.4.8 Momento 6 Aula de aplicação e solução de problemas sobre o Teorema de Tales

Participaram dessa aula 16 alunos. Foi solicitado que eles trabalhassem em dupla, que discutissem conjuntamente todas as fases de solução do problema: interpretação, a separação entre o que é dado e o que é pedido. Do ponto de vista dos conceitos científicos aprendidos até aquele momento, foi recomentado que se discutisseentre as duplas os conceitos que envolviam a solução do problema.

Ocorre que mesmo com essas recomendações do professor, na hora de escrever a solução da tarefa,alguns alunos, após a discussão com o colega de dupla preferiram registrar a solução de forma individual. Dessa maneira, alunos da mesma dupla tiveram níveis de acertos diferentes, reproduzindo a nota de tarefa com valores diferentes.

Antes de iniciar a solução dos exercícios, o professor, juntamente com os alunos, fez uma breve retrospectiva sobre os seguintes assuntos: razão, proporção e o Teorema de Tales. Assim, foi retomado o conceito de razão e o conceito de proporção, bem como apropriedade fundamental desta última.

Ao iniciar a correção dosexercícios resolvidos pelos alunos, percebemos que para que eles tivessem uma melhor capacidade de apresentar a solução e a respectiva capacidade operatória, que resultaria na resolução de um exercício, faltou explanar mais com eles duas importantes propriedades das proporções:

Propriedade 1. Se $a/b=c/d$ então vale no caso da soma: $(a+b)/a=(c+d)/c$ ou $(a+b)/b=(c+d)/d$. Se $a/b=c/d$ então vale no caso da soma:$(a-b)/a=(c-d)/c$ ou $(a-b)/b=(c-d)/d$.

Propriedade 2: Se $a/b=c/d$ então vale a soma: $(a+c)/(b+d)=a/b=c/d$. Se $a/b=c/d$ então vale a diferença: $(a-c)/(b-d)=a/b=c/d$.

Foi explicado que o tempo destinado à solução seria em média de 3 até 5 minutos por questão, e não poderia haver consulta pela internet, mas que poderiam usar, se necessário, a calculadora do celular eque cada membro da dupla poderia discutir como seu colega todo o processo de solução de cada questão e que cada aluno escrevesse a solução dos problemas em sua folha.

Ao longo da correção dos exercícios resolvidos pelos alunos, fiquei surpreso com a capacidade que eles demonstraramem superar a necessidade das propriedades anteriormente citadas. Arrumaram uma saída simples e resolveram os exercícios sem muitas dificuldades. Tal fato demonstra que eles atingiram a essência dos conceitos de razão e proporção, aprenderam a interpretar os problemas, a ponto de contornar a falta dessas propriedades. Isso ficará mais claro nos comentários das soluções das questões.

Como a lista de exercícios era composta somente porquatro exercícios, vamos transcrever cada um, entre aspas e em itálico e, na sequência, fazer os devidos comentários. Todos os alunos tiveram no mínimo 1,0 ponto nessa questão. Cada questão da lista de exercícios valia 2,5 pontos. O desempenho dos alunos na solução dos exercícios estáexposto no presente quadro:

Quadro 6 - Desempenho dos alunos na aula de exercício sobre o teorema de Tales

Código	Nota	Q1	Q2	Q3	Q4
A	8,0	2,5	0,5	2,5	2,5
C	7,5	1,5	1,0	2,5	2,5
D	8,0	1,5	2,0	2,0	2,5
E	9,5	2,5	2,5	2,0	2,5
F	3,5	0,0	0,0	1,0	2,5
G	7,0	2,5	2,5	2,0	0,0
H	4,5	1,5	2,5	0,5	0,0
I	7,0	2,0	2,5	2,5	0,0
J	8,5	2,5	1,0	2,0	2,5
L	10,0	2,5	2,5	2,5	2,5
M	8,5	1,0	2,5	2,5	2,5
N	10,0	2,5	2,5	2,5	2,5
O	10,0	2,5	2,5	2,5	2,5
P	7,0	2,5	2,5	2,0	0,0
Q	7,5	1,5	2,5	1,0	2,5
R	9,5	2,0	2,5	2,5	2,5

Fonte: elaborado pelo autor.

Percebe-se que somente uma aluna atingiu 35% de acertos e um aluno atingiu 45% de acertos, a média de acertos foi de: 78,5%, 15 alunos acertaram70,0% ou mais da prova.

Passemos ao exame e comentário das questões:

> *"1) Um segmento AB de 60 cm deve ser demarcado por um ponto M de tal modo que AM seja proporcional a 3 e MB, proporcional a 7.*
>
> *a) Faça o desenho com todas as informações descritas;*
>
> b) *Qual o valor de (MB – AM)?"*

O nosso objetivo ao pedir ao aluno para desenhar e colocar todas as informações dadas pelo exercíciofoi de organizar e contribuir para o entendimento da questão de levar o aluno a interpretar graficamente a informação dada na forma textual. Umaúnica aluna não fez essa questão. Ela não conseguiu nem fazer o desenho, nem mesmo fez um esboço incompleto.

Todos os alunos que resolveram essa questão usaram a estratégia de chamar a distância AM de x, logo a distância MB = 60-x. Na sequência, monta-se a proporção e encaminha a solução, não necessitando, desse modo, das propriedades referidas anteriormente e, sim, da definição de proporção e da propriedade fundamental (o produto dos meios é igual ao produto dos extremos).

O (item b)*"Qual o valor de (MB – AM)?"*Alguns alunos esqueceram-se de fazer.

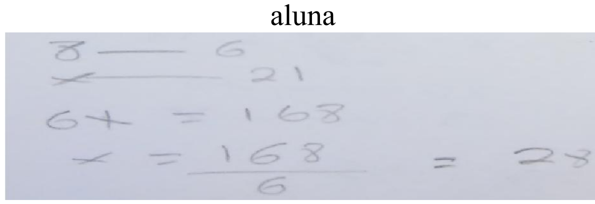
Metade dos 16 alunos que participaram dessa parte do experimento acertou completamente a questão.

Observemos a questão 2:

> *"2)Três retas paralelas **a**, **b** e **c** são cortadas por 2 transversais **x** e **y**, de tal modo que os pontos de interseção das paralelas e transversais são **A**, **B** e **C** na transversal **x** e **P**, **Q** e **R** na transversal **y**.*
> *Sabe-se que AB = 8 cm; PQ = 6 cm e PR = 21 cm.*
> *a) Desenhe a situação descrita com todas as informações apresentadas;*
> *b) Calcule o valor do segmento BC."*

Novamente pedimos para interpretar o texto da questão, fazer um desenho correspondente a essa interpretação e colocar os dados. Uma única aluna não teve nenhum aproveitamento nessa questão. Ela não fez o desenho. Ao montar uma proporção, cometeu o equívoco de no primeiro membro montar uma razão de 6/x,ou seja, um pedaço dividido por um pedaço; já no segundo membro, pegou um pedaço dividido pelo todo. Possivelmente, se ela tivesse feito o desenho e com os dados do problema, ela teria a chance de perceber o seu erro.

Figura 30 - Solução da questão 2, exercícios sobre teorema de Tales apresentada por uma aluna

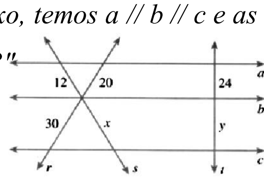


Fonte: relatório da pesquisa.

Os 11 alunos conseguiram pontuação máxima na questão.

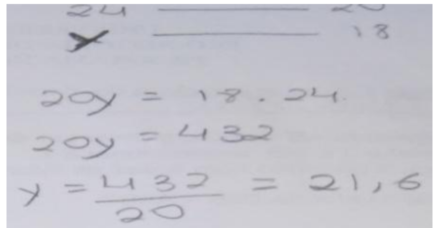
Passamos agora para a questão 3:

> *"3)Na figura abaixo, temos a // b // c e as retas r, s e t são transversais.Qual o valor de (x + y)?"*



Nessa questão, alguns alunos se perderam ao seguir na mesma transversal para montar o numerador e o denominador das proporções.

Figura 31 -Solução da questão 3,exercícios sobre teorema de Tales, feita por um aluno

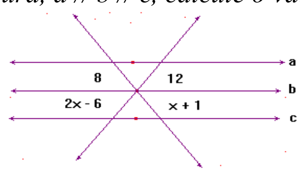


Fonte: arquivo da pesquisa.

O aluno já havia calculado o valor de x=18, ele monta corretamente 24/y, mas na hora de montar o valor 20, que é uma medida na transversal r, ele pega 18 para (troca 18 no lugar de 20) denominador, valor esse que não é dar, mas sim da transversal s. Esse tem sido um erro ainda comum. O aluno deve estar ciente se ele ao pegar o numerador numa transversal, o denominador tem que ser dessa mesma transversal e vice versa.

No quesito quantidade de pontos, oitoalunos conseguiram 2,5 pontos nessa questão e cinco obtiveram 2,0 pontos. Novamente a maioria dos alunos que obtiveram 2,0 pontos foi por não ter feito e ter feito errado *"o valor de x + u."*

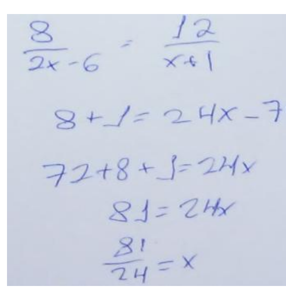
4) Na figura, a // b // c, calcule o valor de x.



Essa questão foi acertada com a pontuação máxima por 12 alunos e quatroalunos não marcaram nenhum ponto nela.

Novamente estamos diante daquele caso clássico de que o aluno deve montar o numerador e o denominador seguindo a mesma transversal e novamente teve aluno que não observou isso com a devida atenção. Como,por exemplo, a tentativa de solução em destaque na figura 32, a seguir:

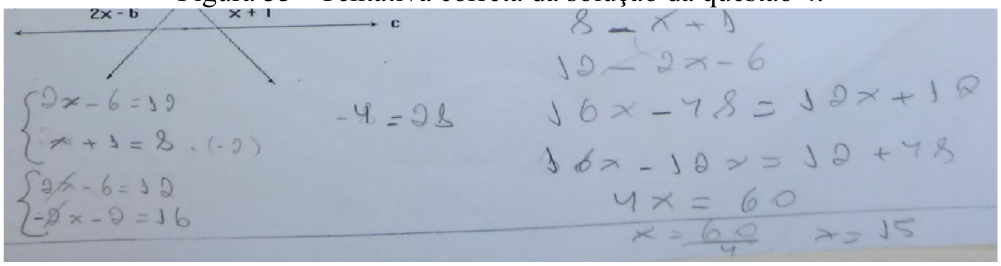
Figura 32 - Tentativa errada da solução da questão 4.



Fonte: arquivo da pesquisa.

O correto seria que o aluno montasse a proporção assim: 8/(x+1) = 12/(2x-6). Teve outro caso curioso.

Figura 33 - Tentativa correta da solução da questão 4.



Fonte: arquivo da pesquisa.

A solução tentada por essa dupla foi montar um sistema, o qual não faz sentido, pois a saída passa por montar uma proporção.

Conforme foi prometido, tão logo todos os alunos terminaram a solução da lista de exercícios o professor resolveu todas as questões no quadro, tirando, assim,todas as dúvidas.Durante a solução dos exercícios, os alunos iam completando e narrando a solução, tal era o grau de interesse deles em perceber se saíram bem e quando não, perceber o seu erro e aprender a maneira correta de fazer.

Antes de fechar esse momento da análise da aula de exercícios sobre o Teorema de Tales, um ponto que nos chamou a atenção em relação à prática pedagógica adotada na realização do experimento foi a grande influência sobre oaluno do caráter afetivo que se dá no processo do conhecimento. Num dado momento,dissemos que o aluno precisaria falar alto dizendo o seu nome, e que eles com suas falas, questionamentos, duas dúvidas,dificuldades, e seus escritos, pudessem ser devidamente identificados, bem escutados, lidos e percebidos na pesquisa, pois eles eram os sujeitos dessa pesquisa. Que depois da realização do experimento, nós, como uma parte importante da pesquisa,iríamos ler, analisar e considerar tudo que eles falaram, escreveram e questionaram. Que uma parte importante do relatório da pesquisa seria como um livro do qual eles são importantes personagens.

Dizer isso, somado ao ótimo relacionamento existente entre os alunos eo professor, fez com que alguns alunos que tinham mais dificuldades e que participavam um pouco menos se colocassem mais nas atividades, criando, assim, melhores condições para a sua aprendizagem.

Desde o Momentozero do experimento (quando discutimos e convidamos os alunos a participar), trabalhamos muito dois tipos de interação: pedir o aluno para ler, dizer oque ele havia entendido,mostrando aquilo que havia pesquisado, socializando com os colegas; outro tipo de interação que usamos foi instigar literalmente o raciocínio do aluno, fazendo perguntas ou dando pistas, e até mesmo mostrando e apontando algumas contradições.

A esse respeito,conforme entendimento de Moysés(2012, p. 135-136) sobre algumas lições que havia tirado com seu trabalho de pesquisa com os alunos: "[...]da organização do material: o aluno precisa ter os enunciados das tarefas à vista enquanto as realiza; [...]a importância da compreensão do significado [...]o valor de se chamar a atenção do aluno para o que é essencial".No nosso experimento, o aluno tinha a tarefa geralmente impressa e em alguns momentos, projetada viaPowerPoint durante todo o tempo da sua aplicação. No Momento atual da análise, este referente à "aula de exercícios sobre o teorema de Tales", por exemplo, o aluno recebeu a tarefa devidamente impressa.

O alunodeve ter clareza sobre a importância do significado da tarefa que está realizando a cada momento. Na etapa atual do experimento o aluno precisava da compreensão dos conceitos científicos eentenderque essa tarefa se destinava a desenvolver sua capacidade de resolver problemas correspondentesàquele conceito científico e/ou àquela rede conceitual. No nosso caso, correspondia a desenvolver a habilidade deresolver problemas relativos ao Teorema de Tales, dentro da rede conceitual na qual esse teorema está imerso.

3.4.9 Momento 7 - Descrição e análise da avaliação final sobre o Teorema de Tales

Participaram da avaliação 16 alunos. Nenhum obteve teve nota máxima. Um aluno obteve 88% de acertos, oitoalunos obtiveram índice de acertos entre 70% e 75%. Observando o quadro de notas, constatamos que os alunos apresentaram mais dificuldades na última questão.

Antes de dar sequênciaàanálise, queremos deixar evidenciado que a nota do alunonão é por si só determinante para evidenciar se ele se apropriou ou não do conceito. Se o aluno se apropriou do conceito, necessariamente, não se espera que ele obtenha nota máxima na avaliação. Tivemos, por exemplo, uma aluna que participou durante todo o experimento de forma atuante e se destacava pela sua participação, mas que não conseguiu sair com uma nota alta na avaliação final. Possivelmente esse instrumento de avaliação para ela não tenha sido o mais indicado. Entretanto, pelo conjunto das observações feitas, temos a certeza de que ela apropriou-se do conceito e que muito contribuiu com suas indagações para o melhor entendimento conceitual do assunto tratado, não só dela como dos seus colegas.

Esclarecedoras são as palavras de Libâneo(2004), sobre o método de ascensão do abstrato ao concreto:

> Para Davydov, o pensamento teórico se caracteriza como o método da ascensão do abstrato para o concreto. Não se trata de pensar apenas abstratamente com um conjunto de proposiçõesfixas, mas de uma forma *instumentalidade* mediante a qual se desenvolve uma relação principal geral que caracteriza o assunto e se descobre como essa relação aparece em muitos problemas específicos. Isto é, de uma relação geral subjacente ao assunto ou problema se deduzem mais relações particulares [...]. (LIBÂNEO, 2004, p. 17)

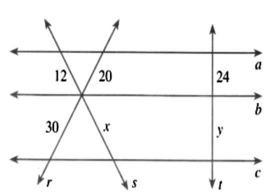
Quadro 7 – Comparativo Prova Final X Prova Diagnóstico

Código	PROVA FINAL					**	PROVA DIAGNÓSTICO				
	Nota Pf	Qf1	Qf2	Qf3	Qf4		Nota Pd	Qd1	Qd2	Qd3	Qd4
A	4,8	1,5	2,5	Nf	0,8		3,5	1,0	2,5	Nf	0,0
C	*3,0	0,5	2,5	NF	NF		2,5	0,0	0,0	0,0	0,0
D	7,0	2,0	2,5	2,5	NF		0,5	nf	0,0	Nf	Nf
E	7,5	2,5	2,5	2,5	0,0		5,0	nf	0,0	2,5	2,5
F	6,0	1,0	2,5	2,5	Nf		2,5	0,0	0,0	2,5	Nf
G	2,5	0,0	0,0	2,5	0,0		5,0	0,0	2,5	2,5	0,0
H	7,5	2,5	2,5	2,5	0,0		4,5	0,0	2,5	2,0	0,0
I	4,5	0,0	2,5	2,0	Nf		4,5	2,5	0,0	2,0	Nf
J	7,5	2,5	2,5	2,5	NF		0,5	0,0	0,0	0,0	0,0
L	8,8	2,5	2,5	2,5	1,3		6,0	1,0	2,5	0,0	2,5
M	7,0	2,0	2,5	2,5	NF		0,5	0,0	2,5	Nf	Nf
N	7,5	2,5	2,5	2,5	0,0		1,25	1,25	0,0	0,0	Nf
O	7,5	2,5	2,5	2,5	0,0		2,5	0,0	2,5	Nf	Nf
P	7,5	2,5	2,5	2,5	0,0		2,5	nf	2,5	0,0	Nf
Q	3,0	1,0	0,0	2,0	0,0		4,5	0,0	0,0	2,0	2,5
R	5,8	2,5	2,5	0,0	0,8		3,5	0,0	2,5	0,0	0,9

NF não feito, o aluno nem tentou fazer a questão.
Fonte: elaborado pelo pesquisador.

A partir desse ponto,usaremos a dinâmica de transcrever cada questão da prova final "*entre aspas e itálico*" e em seguida fazer os devidos comentários e observações no formato normal.

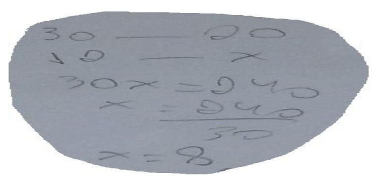
"QUESTÃO 01.Na figura abaixo, temos a // b // c e as retas r, s e t são transversais. Qual o valor de (x + y)?



Essa questão pode parecer confusa para o aluno, por ter trêsretas transversais, sendo que as transversais r e s se cruzam, como o ponto de encontro sobre a retaparalela b.Desde que o aluno, ao formar as proporções,tomeo cuidado de em cada razão pegar o numerador e o denominador pertencentes a mesma reta transversal, o desenvolvimento da solução ocorre de maneira fácil e correta.

Esse tipo de questão pode aparecer confuso, mas ele é representativo nesse tipo de problema. Para nós professores de matemática é oque chamamos de “questão clássica” queaparece na maioria dos livros didáticos de matemática. Entre os alunos que erraram a questão, mesmo de forma parcial, contamos alunos quecometeram o erro relatado no parágrafo anterior. Veja a figura 34, a seguir:

Figura 34 -Tentativa errada da questão 1por montagem invertida.

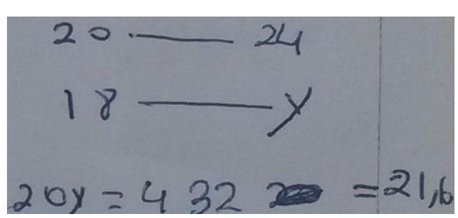


Fonte: arquivo da pesquisa.

Essa aluna, por exemplo, cometeu o erro ao montar a proporção para calcular o valor de x. Cometeu também o erro de "torcer" o numerador e o denominador na hora de montar os membros da proporção. O correto poderia ser:12/x= 20/30.

Outra alunacometeu o erro relatado anteriormente de não conservar o numerador e o denominador na mesma reta transversal ao montar a proporção para calcular o valor de y. Conforme pode ser visto nafigura 35 a seguir:

Figura 35 - Segunda tentativa errada da questão 1por montagem invertida.



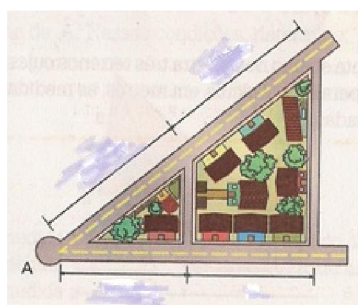
Fonte: arquivo da pesquisa.

No total, 10 alunos obtiveram pontuação igual ou acima de 2,0 pontos, sendo o valor máximo de cada questão 2,5 pontos. Uma única aluna não obteve pontos nessa questão e todos os alunos pelo menos tentaram respondê-la.Não é demais salientar que o propósito de relatar tais erros é no sentido de perceber uma maneira interessante do aluno apreender a fazer correto.

O professor, ao analisar o tipo de erro cometido pelo aluno, pode ampliar o enfoque dado durante o processo de ensino, no sentido dealertarao aluno para não cair no erro. Outro fato relevante para o professor é, uma vez percebido uma determinada tendência de erro, preparar algumas atividades pedagógicas específicas só para trabalharesse tipo de erro. A atividade poderia ser uma pequena lista de exercícios que permitisse trabalhar essa questão. Outra sugestão de atividade seria, usando o Geogebra, montar situações que levam o aluno a esse tipo de erro e usar o próprio *software*para mostrar o significado numérico e geométrico que esse tipo de erro ocasiona e isso foi feito por nós no laboratório de informática.

A questão número 2 foi considerada fácil pelos alunos. Dos 16 alunos que fizeram 14 obtiveram nota máxima na questão. Duas alunas não obtiveram pontos nessa questão.

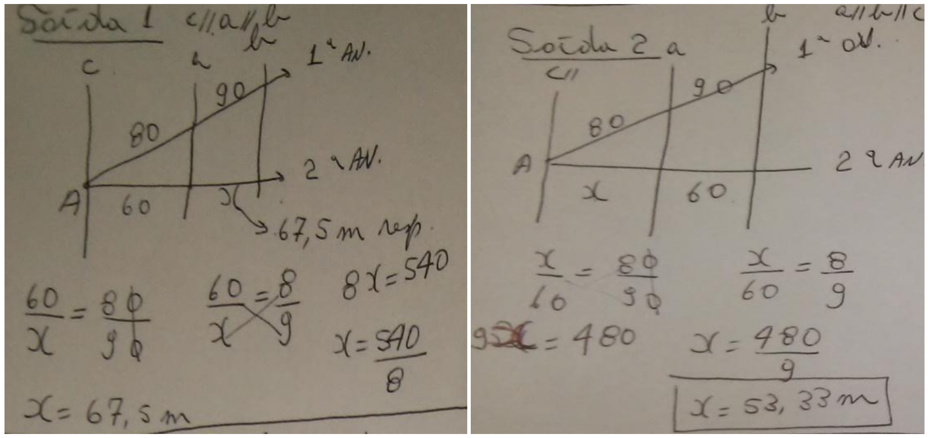
> *" QUESTÃO 3*
> *A figura abaixo nos mostra duas avenidas que partem de um mesmo ponto A e cortam duas ruas paralelas. Na primeira avenida, os quarteirões determinados pelas ruas paralelas têm 80 m e 90 m de comprimento, respectivamente. Na segunda avenida, um dos quarteirões determinados mede 60 m. Qual o comprimento do outro quarteirão"*



Nessa questão, 11 alunos obtiveram nota máxima, 2,5 pontos; dois alunos obtiveram 2,0 pontos;um aluno tentou resolver e não obteve nenhum ponto. Doisalunos nem mesmo tentaram fazer a questão, fato que para nós foi uma surpresa.

A presente questão é, na verdade, o Teorema de Tales na sua versão mais conhecida. A única dificuldade é que ela, embora traga um desenho, ele não contém os dados colocados na figura. A redação da questão permite a retirada desses dados de forma direta, podendo somente ter duas interpretações, que são as seguintes, expostas na figura 36:

Figura 36 - Saída 1 e 2 para solução da questão 3, da avaliação final

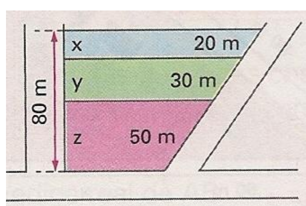


Fonte: arquivo da pesquisa.

Conforme pode ser facilmente observado, a diferença entre as Saída 1 e Saída 2 reside na interpretação de colocar a medida de 60 m no início ou no final , ou melhor, no primeiro ou no segundo quarteirões. Se60 m estiver no primeiroquarteirão, o segundo quarteirão medirá 67,5 m. Se os 60 m estiverem no segundo quarteirão, o primeiro quarteirão medirá 53,33 m.

No processo de correção, evidentemente, foram contempladas as duas possibilidades.

A quarta questão apareceu na prova assim:



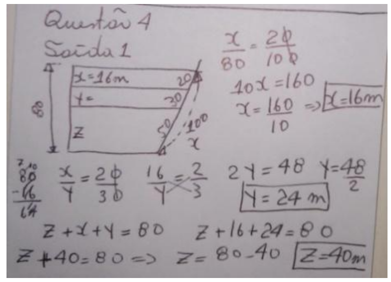
Nessa questão, não teve nenhum aluno que conseguiu acerto total, poucos conseguiram acertos parciais. Do total de 16 alunos que fizeram a prova, oitonem tentaram responder a essa questão, enquanto sete alunos, embora se esforçassem tentando resolver a questão, infelizmente não conseguiram pontuar nem mesmo de forma parcial.

Inicialmente mostraremos duas saídas de solução com os respectivos comentários.

A saída 1 foi conseguida via Teorema de Tales, montando as proporções de forma conveniente. Ao montar a proporção: x/80 = 20/100, encontramos x= 16m.

Montando a proporção: x/y=20/30 e substituindo o valor de x = 18, ficamos com: 16/y=20/30, encontramos y= 24m. Como z+y+x=80, substituindo x e y, ficamos com z= 40m. A foto da solução:

Figura 37- Saída 1, para a solução da questão 4.

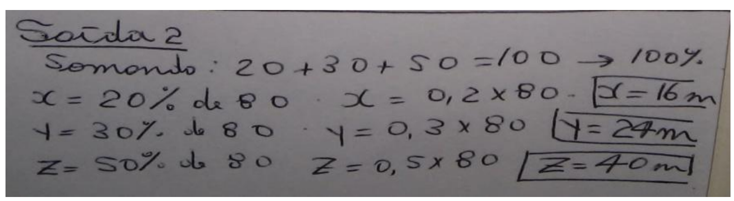


Fonte: arquivo da pesquisa.

A saída 2 foi encontrada ao fazer a correção da prova de um aluno. Foi um raciocínio simples e direto usado pelo aluno, que me deixou surpreso. A surpresa veiodo fato de que opesquisador, ao pegar a prova para corrigir, já vir condicionado a analisar uma solução via Teorema de Tales. Mas o aluno viu outra possibilidade de solução, via porcentagem.

Embora o aluno tenha encontrado um caminho de solução rápida e simples, infelizmente, ele errou no cálculo das porcentagens. Caso contrário, certamente, ele chegaria a uma solução completa desse tipo:

Figura 38 - Saída2, para a solução da questão 4.



Fonte: arquivo da pesquisa.

Essa saída encontrada pelo aluno nos mostra mais uma vez a importância do professor de matemática não somente corrigir uma atividade guiado pela máxima: "se acertou ganha ponto, se errou não ganha nada". Pois, ao agir assim, o professor não consegue contribuir para que o aluno supere asua dificuldade.

Ao terminar a análise da avaliação final do experimento didático formativo foi que percebi o quanto fomos felizes em fazer de forma firme coincidir consciência com atividade. Nesse sentido, Moyses(2012, p. 143)fala de duas inferências às quais um professor não deve se desligar, ao longo do seu trabalho com o aluno: “Primeiro: aquilo que não é percebido, em geral, não é possível de ser reproduzido voluntariamente. Segundo: o objeto da consciência do sujeitodepende do tipo de atividade mental que ele está desempenhando”.

Com as variadas mediações,com o uso do *software*Geogebra, nos empenhamos ao máximo para que o aluno percebesse o essencial da base conceitual, combinado com as atividades operatórias necessárias em conseguir reproduzir voluntariamente o processo de resolução do Teorema. Quando estamos aqui usando o termo reproduzir evidentemente não estamos abordando a reprodução mecânica e, sim, a reprodução de uma base cognitiva já interiorizada pelo aluno.

Procuramosestabelecer uma sincronia entreo objeto da consciência do aluno com a atividade mental que estava desempenhando. Por exemplo, construímos praticamente um modelo de feixe de retas paralelas cortadas por duas transversais. Fizemos isso com régua, papel, lápis e calculadora. Posteriormente, medimos e calculamos as razões objetivando constar as proporções. Depois, fizemos isso novamente com o Geogebra numa escala de detalhes muito maior. Dessa forma, mostramos a essência do Teorema de Tales.

Na sequência, trabalhamos a aplicação desse teorema via exercícios para, no final do experimento, cobrar a solução de problemas relativos ao teorema. Dessa forma, fizemos coincidir consciência com atividade.Esse processo se mostrou devidamente acertado do ponto de vista prático, ao comparar o desempenho dos alunos na avaliação final do experimento em relação à avaliação diagnóstica.

Em relação à comparação da atividade realizada ao final do experimento com a atividade da prova diagnóstica, constatamos que dos 16 alunos que fizeram a prova final em relação a prova diagnóstica, 13 melhoram substancialmente o seu desempenho, duas alunas diminuíram o desempenho e uma manteve o desempenho. Quando a comparação ocorre entre a questão 1 da prova diagnóstica ea questão 1 da prova final, percebemos que: 13 alunos tiveram crescimento, uma aluna diminuiu e uma outra manteve o nível de acerto.

Ao fazer a comparação entre a segunda questão da prova diagnóstica com a segunda questãoda prova final, percebemos que: setealunos tiveram desempenho crescente, seisalunos mantiveram o desempenho,mas com nota máxima, o que significa que foram ótimos e continuaram ótimos; e uma aluna diminuiu o desempenho.

Na comparação entre a terceira questão da prova diagnóstica com a final, percebemos que: oitoalunos tiveram crescimento, cincomantiveram o desempenho, sendo que quatroobtiveram notas elevadas na questão, umaluno não fez a terceira questão em ambas e umaluno não teve aproveitamento na diagnóstica e não fez a questão 3 na prova final.

Já o comparativo entre aquarta questão da prova diagnóstica com a prova final ficou assim: um aluno teve crescimento, quatroalunos tiveram decrescimento e 10 alunos ou não fizeram a questão ou não tiveram nenhum aproveitamento.

O objetivo, ao fazer esses comparativos, foi de perceber pontos de destaque. Inicialmente não defendemos que o simples fato de ter acertado a questão ou mesmo a prova seja sinônimo de avanço de aprendizagem. Como instrumento avaliativo, temos: a observação do professor e do pesquisador, bem com a análise das demais atividades realizadas, por exemplo: atividade 1, atividade2, problema motivador, solução dos exercícios e finalmente análise das entrevistas finais.

O comparativo através das avaliaçõesfoi apenasum dos quesitos avaliativos que usamos. Vários outros quesitos foram utilizados: a capacidade de interpretar os dados do problema, a capacidade de visualizar geometricamente as figuras, a capacidade de fazer aplicações dos conceitos nucleares de razão e proporção em problemas concretos pelo aluno, seu grau de satisfação a cada descoberta etc. Tivemos uma aluna que, embora tivesse decrescimento de nota na prova final, durante a realização de todas as etapas do experimento (excetuando a prova final) foi uma aluna de um destaque significativo.

De um modo geral, houve crescimento: do histórico, da base conceitual, da ideia essencial do teorema, da capacidade interpretativa, da capacidade operatória, da capacidade de se expressar matematicamente. Nesse sentido, consideramos que a realização do experimento foi bastante exitosa e que cumpriu com seus objetivos perante o aluno.

3.4.10 Momento 8 – Resumo da narrativa e análise das entrevistas dos alunos

Na aula seguinte à aplicação da avaliação final do experimento didático formativo, realizamos entrevistas gravadas em áudio com 16 alunos. Procuramos proceder àentrevista dentro da dinâmica de desenvolvimento das aulas do experimento. As entrevistas não se destinam a somente avaliar o experimento, mas a percebera visão geral do aluno sobre o conjunto do experimento e os avanços obtidos do ponto de vista cognitivo.

Foi perguntado aos alunos se eles não acharam aquele ato de levar o documento para os responsáveis assinar algo muito formal, a resposta de uma aluna foi bastante representativa: *“Não, tranquilo. Eu acho que isso tem que ser feito".* Foi perguntado se ele sabia o motivo da aplicação daquela prova.A resposta foi bastante positiva, mostrando que eles compreendiam a necessidade daquela prova. Para exemplificar vamos reproduzir,aqui,a resposta de uma aluna: *"Era só para a gente ver por onde ia começar.Era só para ver se agente tinha conhecimento dos assuntos para iniciar o trabalho”. Outra aluna: “Foi só pra fazer uma avaliaçãozinha pra saber como a gente tava."*

O aluno foi indagado se aquela aula de uso dos comandos do Geogebra foi o suficiente ou se havia faltado algo. A maioria dos alunos respondeu que para atender a compreensão do Teorema de Tales, a aula dada havia sido suficiente. Reportaremos aqui duas falas as quais julgaram ser suficiente: *"Foi suficiente pra eu entender."; "com os comandos que aprendi eu consegui fazer todas as construções que eu precisava".*

Quando estava conhecendo a janela de álgebra do Geogebra, o professor falou sobre a equação reduzida e geral da reta, e disse que isso seria conteúdo do 3º ano em geometria analítica, GA. Diante disso, perguntamos: você acha que quando você ver geometria analítica, ano que vem, essa experiência tida com o Geogebra vai te ajudar?As respostas foram afirmativas e, como exemplo, temos: "e*u acho que vai, por que eu aprendi agora, então vai ficar mais fácil".*

Durante a entrevista, os alunos mostraram de forma clara a importância e facilidade em melhor aprender o teorema utilizando o Geogebra. Essefato pode ser evidenciado nas respostas dos alunos à pergunta: *Da aula com o Geogebra, você acha que o uso do Geogebra no teorema acrescenta alguma coisa, facilita a aprendizagem?*As respostas dadas para essa pergunta foram do tipo:*"facilita bastante"; "eu acho que sim, por que cada vez que você vai aprendendo você acha interessante e contribui para aprender mais"; "facilita muito".*

Em alguns momentos para quebrar a rotina, fizemos uma pergunta bem próxima da anterior: "Baseada na sua experiência com Geogebra, você acha que o Geogebra é importante, contribui para ensinar a matemática melhor?"A resposta bastante representativa dessa indagação foi: *"contribui, por que o quadro é bem diversificado pra um monte de coisas que envolvem matemática; contribui*". Constatamos com essas respostas que o Geogebra, baseado no que foi expresso pelos alunos, colabora para a melhoria da mediação, evidencia os aspectos algébricos e geométricos do teorema de Tales, contribuindo para a apropriação com mais facilidade dos conceitos envolvidos no teorema.

Ao serem indagados sobre se gostaram de ter usado o Geogebra como mais um instrumento para contribuir no ensino de partes da matemática tivemos respostas representativas do conjunto de alunos do tipo: *"oGeogebra facilita na maneira da gente ver a geometria e a álgebra juntas, e dessaforma a gente aprende de uma maneira mais divertida".* De forma conclusiva a maioria dos alunos achou que o Geogebra facilita a aprendizagem da matemática, bem como proporciona para o aluno um uso mais prazeroso e interativo da geometria em particular e da geometria com a álgebra para uma gama de aplicações.

Fizemos a seguinte pergunta aos alunos: "Aqueles pré-requisitos, aquelas coisas,que precisavam para o teorema, a ideia de razão, proporção, fechos de retas paralelas, retas transversais e segmentos de retas,você acha que tudo isso foi bem trabalhado com você, ficou faltando alguma coisa?"Como trabalhamos essas questões colocando o foco na pequena pesquisa feita em sala de aula para o aluno fazer, ou seja, colocando-os em atividade, a resposta foi afirmativa.Para exemplificar, bem como aquilatar a qualidade pedagógica das respostas dadas, passemos a narrar algumas: "*Não! Não tinha. Eu não sabia o que era razão, proporção. Eu não lembrava nada. Quando você explicou, eu entendi." "Eu entendi tudo direitinho".*Uma aluna,em sua resposta sobre o entendimento do quadro teórico, já relacionou o conceito de proporção com a aplicação da regra de três. A resposta dada por ela foi: "*É, proporção assim, eu meio que tipo, tive mais facilidade por que envolve regra de três."*

Observe que essa aluna já está conseguindo fazer generalizações de uma forma mais substantiva, utilizando a base conceitual do teorema de Tales, ou seja, ela demonstra que já consegue fazer o movimento de ascensão do abstrato ao concreto. Ela consegue,com uma visão conceitual abstrata, estender para uma aplicação, um pouco particular da base conceitualdo teorema de Tales, que no caso é proporção.

Outra variante da mesma pergunta foi: “O que você achou do quadro conceitual. Você acha que aquela parte a gente trabalhou direito, foi suficiente pra entender o teorema?” Para a qual temos uma resposta bem representativa: *"Sim, foi suficiente, principalmente a questão da razão, proporção, entendi direito, deu pra melhorar bastante meu conhecimento com aquela aula".*

Os alunos, após a abordagem destinada ao domínio do quadro conceitual,passaram a fazer extensões dos conceitos de razão e proporção relacionados principalmente a física: *“nós estamos usando razão para calcular a altura de um prédio, também na parte da óptica, lá na câmara escura”.* Esses comentários evidenciam a visão que alguns alunos passaram a ter sobreuma situação geral ir para uma particular e vice-versa no tocante ao quadro conceitual estudado.

Lembrando que no ensino desenvolvimental o histórico de um conceito é valorizado,fizemos a pergunta: "Sobre a história do teorema de Tales, o que você achou?" Como respostas, pegando algumas mais representativas, temos: *"Eu não sabia que o nome tinha mudado*”. “Eu aprendi muitas coisas.”

Durante a entrevista perguntamos: “Você percebeu que quando nós bolamos o teorema, nós colocamos naquela aula anterior, com aquelas folhas, com a régua para medir e calcular as razões. Você percebeu que, ao fazer no Geogebra, nós fizemos do mesmo jeito? Que nós repetimos no Geogebra o que fora feito no papel?"As respostas foram unânimes: *“Bem mais prático, mais rápido". "A ideia foi a mesma coisa". "Eu quando estava no Geogebralembrei-me disso na hora!"*

Após atingir no Geogebra o que fora feito na atividade 2, com os recursos que esse *software* dispõe, nós fomos muito mais além, no sentido de ampliar e facilitar o entendimento do teorema peloo aluno.Na entrevista perguntamos aos alunos numa linguagem bem direta:"Não sei se você percebeu, nós focamos o problema para vocês no sentido de desafiar vocês, mas naquele momento não estávamos tão preocupados com detalhes de como resolviam a atividade. Você acha que aquele problema da pirâmide serviu realmente para dar uma motivada?"As respostas dos alunos vieram também numa linguagem deles, mas também direta: *"Serviu, tanto que todo mundo pesquisou bastante." "Serviu. Por que a gente tinha curiosidade de ver como é que ficava no computador, como que coloca".*

De uma forma bem simples e direta o problema motivador desafiou mesmo, contribuindo para abrir caminho para o trabalho como Geogebra que ocorreu a seguir.Sabemos que do ponto de vista da Teoria de Davidov, não cabia naquele momento ensinar o aluno a resolver aquele problema de forma completa. A ideiaera usar o problema para realmente motivar, forçar a usar os conhecimentos que já tinham no sentido de encaminhar àspossíveis soluções.

Fazer teorema de Tales no Geogebra foi fácil, em virtude dos alunos já dominarem os comandos básicos, o quadro teórico, e terem feito a atividade 2 no papel e já com um aluno motivado e desafiado pelo problema motivador. Todo esse conjunto contribuiu muito para que o teorema fossemontado no Geogebra e interpretado, modificado e melhor avaliado pelos alunos, mediante os recursos que o *software*carrega consigo.

Na entrevista, perguntamos aos alunos: "O que você achou da história do *software*do Geogebra na hora que ele permite deslocar (arrastar) asretas paralelas, para baixo e para cima, e você vê que o teorema continua valendo, e ao mesmo tempo ele pega as transversais desloca uma para lá, outra para cá, e você percebe que o teorema continua valendo. Você acha isso importante para você entender?" A resposta foi bastante positiva. Como as respostas representativas podem mostrar: "*Para entender sim, por que eu vejo ele de vários ângulos diferentes".*

Fizemos uma pequena mudança na pergunta, mas no essencial era a mesma coisa:"O Geogebra quando você desloca as retas paralelas ou as transversais e mostra pra você que o teorema continua valendo, aquilo pra você, você acha que foi importante?"As repostas continuaram afirmativas da importância doGeogebra em contribuir para um melhor entendimento da geometriae da álgebraque estão presentes no teorema em questão. Isso pode ser evidenciado nas respostas dos alunos: *"Foi, foi importante";" Antes a gente achava que se movesse ia alterar o formato, mais não alterou."*

Nessa entrevista final dos alunos, outraquestão que levantamos foi: "No Teorema de Tales, o que você acha que é mais importante, o que seria o essencial?"Explicamos à medida que chegávamos nessa pergunta, que o conceito mais importante é chamado, na teoria do nosso experimento formativo, de conceito nuclear, ou de essência do conceito. Para não ficar fazendo a mesma pergunta mudamos para uma pergunta mais compacta: "Qual seria a ideiamais importanteno Teorema de Tales?"

A resposta dada sobre a essência do teorema gravitou em torno de dois fortes itens do nosso quadro conceitual: retas paralelas e proporção. Para os alunos que acham que o núcleo é proporção é o fato de, ao dividir os segmentos correspondentes ao longo das transversais, o resultado teria que ser igual, ou seja, forma uma proporção. Já o aluno que defende que a essência é o feixe de retas paralelas, se deve ao fato de que se o feixe de retas não for de paralelas, ao fazer a razão dos segmentos ao longo das retas transversais não dará o mesmo valor, não formando assim uma proporção.

Expliquei que no meu trabalho de observador, eu não podia estar dando palpites durante a aplicação do experimento didático formativo. Assim, afirmei e questionei: “vocês perceberam que, em alguns momentos, eu acabei intervindo. Você acha que isso atrapalhou ou ajudou no experimento”? Como respostas, tivemos: *"Eu achei bom, e achei até bom você intervir. Às vezes, por que tem coisas que a gente não percebe e não nota, então até o Neto deixa passar despercebido e você da uma revisada."*.

O nosso próximo tópico abordado na entrevista é justamente a rica relação do professor com seus alunos. Ao longo da entrevista fizemos a pergunta:“O que você achou do trabalho do seu professor na aplicação do experimento?"*" Foi legal, quando ele veio com a ideia pra gente, a sala inteira, vamos, vamos, vamos. Ai quando você veio falar que tinha prova, ai o povo vixi, não sei, não. Ai o Neto, não gente, vamos, ele incentivou a gente a fazer. Ai eu disse que ia fazer esse projeto e fiz."*

As respostas dos alunos praticamente dispensam comentários. É um professor trabalhador. Que tem um ótimo conteúdo e domínio de sala e o mais importante, ele é querido pelos alunos. É uma referência muito positiva e atua de modo positivo no sentido de contribuir na formação integral do seu aluno.

Durante a entrevista eu disse aos alunos “Eu tenho vários colegas que são professores de matemática echamei vários para fazer o experimento,nenhum se dispôs a participar.Foi quando o meu orientador me apresentouo professor de vocês, uma pessoa que eu não conhecia, fizemos o convite para ele fazer um experimento conosco e ele se mostrou interessado de imediato”. Ele se dispôs a estudar sobre o experimento didático formativo, trabalhamos com ele três textos sobre o assunto: um do Prof. Libâneo, um da Profa. Raquel e um longo texto do Prof. Orlando. Ao analisar o crescimento do professor Neto ao longo dos estudos teóricos e da prática realizada por ele, de seu desenvolvimento nos fez lembrar as palavras de Moyses (2012):

> A segurança advinda do conhecimento teórico permite ao professor se soltar das amarras que o liga a um ensino mecânico e estéril, criando ele próprio o seu caminho. Este, no entanto, não se faz sem o farol da prática a iluminá-lo. Em outras palavras, é preciso que também ele- e não só o aluno- seja sujeito desse novo processo de aprendizagem. (MOYSES, 2012, p. 101)

O professor não se limitou a aplicar o experimento, ele ajudou a preparar as atividades, opinou bastante em tudo. Fez tudo com empenho e boa vontade.

Outro questionamento que fizemos aos alunos foi: Ao ser chamado para participar do experimento, o que você imaginava? Conforme constatamos nas respostas, os alunos ligaram o experimento à matemática, a algo novo, a teoria, alguma forma de reforço no ensino entre outras. A visão inicial dos alunos foi muito boa. E quando falamos que ia envolver também o uso de computador, do laboratório de informática e que usaríamos o *software*Geogebra o interesse deles aumentou ainda mais.

Outra questão que propusemos foi: Você gostou de terparticipadodo experimento?As respostas que colhemos, sem nenhuma exceção, foram todas positivas, transcrevemos algumas: *"Gostei".Ichi! Gostei bastante. Eu aprendi várias coisas"; "Achei muito interessante podia ter várias vezes essa experiência foi muito boa".* Diante das respostas dadas pelos alunos, ficou devidamente provado que eles gostaram de ter participado do experimento e acharam que ele foi igualmente proveitoso para a aprendizagem deles.

Para a pergunta: Se no futuro alguém te chamar para participar de um novo experimento e você tiver condições, baseado nessa experiência, você aceitaria? Tivemos a espontaneidade das respostas dadas:*"Eu participaria de novo";"Toparia";" Sim, toparia".*

Já no final lembrei-me de acrescentar uma pergunta, que me pareceu importante: " Você acha que esseexperimento didático formativo, produz conhecimento?"Como respostas representativas,escolhemos duas: "*Sim produz."; "Sim, com certeza", "nessa ultima prova que consegui desenvolver as questões".* Em função da resposta, questionamos: "Você conseguiu perceber melhoria?"A resposta foi um enfático: *"Sim."*

Conforme percebemos, baseados em algumas repostas representativas que foram transcritas, vimos que todos os alunos entrevistados disseram que sim. Que aceitariam participar de um novo experimento. Isso mostra que o trabalho realizado, na forma de experimento didático formativo foi bastante construtivo e proveitoso.

Um comentário de uma aluna chamou a atenção durante a entrevista: "*Eu pensei que não ia ter prova. Eu pensei que ia ser só filmagem e tal. Mas foi tranquilo. No começo, na* *primeira prova eu não consegui fazer nada, mas na última eu consegui fazer."* Por meio desse comentário, a aluna está justamente comentando o seu crescimento ao longo do experimento, no qual ela compara o seu desenvolvimento no início, no momento da prova diagnóstica, com o seu desenvolvimento conseguido após a realização da maioria das atividadesdo experimento didático formativo.

Um último comentário que julguei importante para fechar essa parte relativa às entrevistas foi: "*eu achei que seria mais teoria, que ia falar coisas na frente, escrever no quadro, explicar, mais foi legal porque a gente trabalhou mais com computador, foi uma coisa mais solta, interagindo".*

Eu aproveitei a afirmação do aluno e falei: "Você percebeu que nós tentamos ao máximo inverter a lógica de trabalho que até então vocês estavam acostumados, que era colocar vocês para trabalhar?"A resposta do aluno foi: "*Eu vi que a gente tava interagindo, a gente tinha que tirar conclusões".* Na ocasião, achamos oportuno manifestar a respeito que diante dos alunos dizemos: *"Isso é oque agente chama de colocar o aluno em atividade, colocar vocês para aprender estudando, fazendo conforme um objetivo, conforme um motivo".*

Ao findar a análise da presente entrevista,podemos concluir que o experimento didático formativo, combinado com o *software*Geogebra e a investigação matemática em sala de aula foi uma atividade percebida pelos alunos epor nóscomo um instrumento eficiente no processo de ensino e aprendizagem.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente pesquisa objetivou identificar e analisar quais são as contribuições que a teoria do ensino desenvolvimental, combinada à investigação matemática e com apoio do *software*Geogebra, aportaao ensino e aprendizagem do Teorema de Tales. Tínhamos, também, de forma secundária, o objetivo de compreender e analisar as contribuições oferecidas pelareprodução do movimento do abstrato ao concreto ao ensino do Teorema de Tales, desempenhada pela teoria do ensino desenvolvimental, auxiliada igualmente pela investigação matemática com o Geogebra.

Para tanto, construímos um experimento didático formativo que foi descrito no terceiro capítulo deste trabalho. Desse modo, os objetivosque elegemos foram perseguidosem de todos os momentos do experimento didático formativo. Quando comparamos os resultados obtidos pelos alunos na avaliação diagnóstica com a avaliação escrita final do experimento, percebemos o quanto a teoria do ensino desenvolvimental contribuiu para a melhoria do ensino e aprendizagem do Teorema de Tales.

O experimento didático formativo, além de contribuir para que o aluno percebesse a relação geral principal do Teorema de Tales,possibilitouaplicar essa relação em casos particulares, via solução de problemas. Tal afirmação pode ser comprovada quando se verifica que, ao longo do experimento, os alunos conseguiram usar a relação geral conceitual aprendida na solução dos problemas, bem como, no desenrolar das atividades, eles manifestaram sua compreensão por meio da qualidade das indagações e das soluções novas e diferentes que encontraram ao resolver alguns exercícios.

Em relação ao movimento de ascensão do abstrato ao concreto,durante o experimento contribuímos,por meio das atividades, para que o aluno de forma ativa experimentasse esses dois momentos. Momentos que, na verdade, não são estanques. Formam uma unidade dialética em benefício do avanço cognitivo do aluno.

Quanto ao objetivo de identificar as contribuições da teoria do ensino desenvolvimental na aprendizagem do teorema de Tales, percebemos que foram várias: obteve-se a melhoria da visão conceitual dos alunos, tendo como núcleo os conceitos científicos de razão, proporção e paralelismo entre retas do fecho cortadas pelas transversais; houve a ampliação da Zona de desenvolvimento proximal do aluno, de forma a avançar e realizar muito do que antes ele não conseguia fazer e resolver sem a ajuda do professor, após o entendimento da relação nuclear, progressivamente a grande maioria dos alunos passou a fazer e resolver sozinhos;percebemos também a ampliação na capacidade de entendimento geométrico do teorema, fato que permitiu aumentar no aluno a sua capacidade de interpretar e resolver problemas.

Em relação às contribuições aportadas pelo ensino desenvolvimentalpara o ensino do teorema de Tales, temos que a ideia de trabalhar com o que é nuclear, o que é de fundamental importância, o que é a relação geral principal do conceito é valiosa para o ensino da matemática e se demonstrou ao longo da realização do nosso experimento didático formativo sobre o teorema de Tales. Isso porque quando aplicamos a avaliação diagnóstica, ou durante as observações das aulas de matemática da turma pesquisada ou mesmo ao longo das observações e do processo de análise do experimento, percebemos que o domínio da rede de conceitos referentes ao teorema de Tales por parte dos alunos era limitada.

Os alunos tinham uma relação conceitual com o teorema um tanto quanto empírica, fragmentada e confusa. Eles não entendiam bem os conceitos de razão e proporção. Não percebiam a relação existente entre ambos os conceitos. A noção geométrica de retas:paralelas e transversais era pouco entendida.Ao montar uma proporção, vimos que em várias ocasiões ao longo do experimento que as mesmas eram montadas de *forma torcidas(o numerador e denominador era montado em direções contrárias em relação a transversal).*

Em relação à história do teorema, da época de Tales e a importância dele para a matemática da sua época, e para o desenvolvimento da mesma enquanto ciência, pouco se sabia.Durante o experimento o aluno foi se apropriando da essência conceitual do teorema, foi apropriando dos conceitos de: paralelismo, de razão e proporção. O processo de apropriação conceitual ocorreu tendo como referência a relação geral principal, a essência do conceito. De posse dessa relação geral principal, o aluno através do movimento de ascensão do abstrato para ao concreto, percebeu uma série de possibilidades de aplicações para problemas concretos.

Sobre o objetivo de identificar qual o potencial do *software*Geogebra para trabalhar de forma integrada as visões algébricas e geométricas no teorema de Tales, conforme apresentamos no segundo capítulo, o *software* Geogebra é um *software* de Geometria dinâmica ecomo tal possui uma grande capacidade interativa com o usuário final, o aluno. Nele, o aluno pode fazer seus desenhos geométricos, mudar rapidamente e mais importante, para resposta dessa questão, existe uma perfeita integração entre as janelas geométrica e algébrica.

Para o objeto desenhado na janela geométrica existe o correspondente na janela algébrica. Essa sincronia entre essas janelas permite o aluno acompanhar e perceber claramente essa integração entre álgebra e geometria. Nos vários momentos do experimento, o aluno teve a oportunidade de perceber esse potencial de integração de geometria e álgebra várias vezes.

Em relação ao objetivo de identificar que a investigação matemática com o Geogebra pode agregar nas aulas e ampliar a base conceitual dos alunos, desenvolver a visão geométrica no plano, bem como ampliar a capacidade de fazer conjecturas, interpretar e resolver problemas relativos ao teorema de Tales,percebemos que a investigação matemática em sala de aula é uma metodologia de ensino da matemática, com foco na pesquisa matemática enquanto processo, mas devidamente dosada para o trabalho em sala de aula.É uma metodologia de ensino que prima pelo desenvolvimento nos alunos das variadas faixas etárias o gosto pela pesquisa, pela descoberta. É ao mesmo tempo uma maneira de mostrar que é possível fazer pesquisa em matemática independente da série que o aluno esteja estudando. Ela mostra que pesquisar necessariamente não requer fazer pesquisa matemáticas complicadas e complexas.

Vimos, no segundo capítulo, do ponto de vista teórico e para os alunos no Momento 4 do experimento didático formativo sobre o teorema de Tales, que a investigação matemática em sala de aula tem fases principais: exploração e formulação de questões, conjecturas, testes e reformulação, e por último, a fase de justificação e avaliação. Percebemos que o *software*Geogebra pode agregar àsaulas de matemática no sentido de ampliar a base conceitual dos alunos, desenvolver a visão geométrica no plano, bem como ampliar a capacidade de fazer conjecturas, interpretar e resolver problemas relativos ao teorema de Tales. A ampliação do desenvolvimento conceitual do aluno contribuiu para um melhor entendimento dos conceitos de: razão, proporção e paralelismo.

A capacidade do aluno em fazer conjecturas relativas ao teorema de Tales foi ampliada com a sua participação no experimento e isso foi percebido em vários momentos do experimento, mas principalmente na construção geométrica para mostrar, evidenciar e abordar o teorema de Tales. O momento mais importante foi aquele da construção da reta não paralela que lentamente foi se transformando em paralela, via comando Arrasto do *software* Geogebra.

Constatamos na nossa pesquisa um grande potencial colaborativo do ensino desenvolvimental para o ensino da matemática. Isso se dá das mais variadas formas, a começar pelo papel atribuído aos conceitos científicos, passandopela valorização do histórico do conceito, na preocupação demonstrada na elaboração das atividades de estudo entre várias outras.

Levar o aluno a se apropriar da essência, do núcleo do conceito foi um princípio do ensino desenvolvimental bastante valioso no experimento. No nosso caso, a rede conceitual básica do teorema de Tales gravita em torno dos conceitos de razão e proporção, à medida que os alunos dominaram esses dois conceitos, a compreensão do teorema melhorou, pois a sua rede conceitual algébrica estava dominada pelo aluno. Faltava cobrir a base conceitual relativa à geometria, a qual foi abordada no experimento com pesquisa feita pelos alunos via internet, juntamente com a exposição teórica do professor e somada ao processo de discussão travado pelos alunos e mediado pelo professor.

O uso do Geogebra no experimento mostrou a sua força enquanto ferramenta colaborativa no experimento de várias formas. Levando em consideração que no ensino de matemática nos níveis fundamental e médio existe uma forte dosagem tanto de geometria como álgebra, o *software*Geogebra de imediato já melhora essa questão, à medida que o aluno percebe a existência de uma janela geométrica em perfeita integração com a janela algébrica.

Cada ponto e reta, por exemplo, desenhado geometricamente, aparecia a sua representação algébrica. Os alunos perceberam isso repetidas vezes e de forma e em situações variadas. Não só perceberam, como questionaram e discutiram entre si e com o professor o significado das representações algébricas e geométricas.

Em vários momentos no experimento, usando o Geogebra, os alunos visualizaram e testaram suas conjecturas. O Geogebra, por ser um *software*de geometria dinâmica, propicia e facilita muito a visualização e o teste das conjecturas. Ao mesmo tempo, o Geogebra se mostrou como um bom veículo que permite ao professor mediar e ao aluno acessar o núcleo do conceito. Vimos isso em várias situações ao longo do experimento, desde o momento de verificar se determinados segmentos eram ou não proporcionais, com o uso do comando de Arrasto perceber que independente de mover ou não as retas paralelas no feixe ou mesmo as transversais, o teorema de Tales continuava valendo.

A capacidadeque o *software*Geogebra tem de agregar nas aulas de matemática no sentido de ampliar a base conceitual dos alunos, desenvolver a visão geométrica no plano e no espaço, bem como ampliar a capacidade de fazer conjecturas, é grande e só depende da criatividade tanto dos alunos quanto do professor em tirar proveito das facilidades criadas pelo *software*.À medida que o aluno percebe de forma clara os conceitos, consegue conjecturar com mais facilidades, consegue visualizar geometricamente, e isso, sem sombra de dúvidas, contribui para o aluno na ampliação da sua capacidade de resolver problemas. Nós constatamos a ampliação da capacidade dos alunos em resolver problemas durante o experimento, mas não somente o Geogebra, a contribuição teórica proveniente do Ensino Desenvolvimental se constituiu numabase teórica importante para o aumento dessa capacidade de solução de problemas. Esse fato é motivado pelo ensino desenvolvimental trabalhar no sentido de municiar o aluno e o professor sobre o ponto de vista de desenvolver capacidades cognitivas queanteriormente o aluno não tinha.

Ao longo das nossas conversas com várias pessoas durante a realização da pesquisa, ocorreram indagações no sentido de pelo simples fato de usar o computador, o *software*Geogebra em alguns contextos no ensino de matemática, se isso significava que estávamos fazendo uma abordagem Behaviorista? Ou outra questão correlata, de que se o computador tem uma grande capacidade de armazenar dados e de fazer cálculos, se isso não iria atrapalhar o desenvolvimento do raciocínio do aluno?

Ao longo do relato da nossa base teórica, bem como durante a aplicação do experimento didático formativo, procuramos trabalhar o desenvolvimento do aluno das mais diversas formas. Em momento algum, por estar usando um computador para ajudar no processo de ensino da matemática, nós nos propusemos trabalhar na base do estímulo e resposta. De forma que não utilizamoscom o aluno uma abordagem behaviorista.

O computador é uma mídia, a qual tem evidentemente uma capacidade de armazenar dados e de fazer cálculos, mas isso não atrapalha o desenvolvimento do raciocínio do aluno, muito pelo contrário, ele permite liberar aluno e professor para melhor interpretar os dados. O aluno, uma vez entendendo a maneira de fazer a operação e principalmente o porquê daquela operação e não de outra, deve ser liberado de exercer a mecânica do cálculo em si e dedicar toda a sua criatividade e inteligência ao raciocínio que leva a solução do problema. O computador é só mais uma mídia relacionada ao ensino, tal qual o lápis, o papel, a calculadora e nenhuma dessas comprometeu a capacidade do aluno de exercer e ampliar o seu raciocínio.

Em relação à investigação matemática em sala de aula, percebemos que ela é uma metodologia que quando bem aplicada pelo professor em sala de aula permite levar o aluno de uma forma mais direta e científica ao mundo da investigação matemática. A investigação matemática que estamos falando é algo junto ao conteúdo normal do aluno, não se trata somente de questões necessariamentemuito sofisticadas, é antes de tudo o uso dos passos da pesquisa matemática como ferramenta didática.

No caso do nosso experimento didático formativo sobre o teorema de Tales, trabalhamos as fases: exploração e formulação, conjecturas, teses e reformulação. O nosso experimento abrangeu o equivalente a carga horaria de 12 aulas, por motivos decorrentes da própria escola.

Nem por isso, deixamos de mostrar a justificação do teorema, apresentamos e explicamos a prova do mesmo para o aluno ao longo de uma aula, previamente preparada para esse fim. Como o momento da justificação, que para nós é aprova do teorema em si, não tivemos o tempo necessário para colocar o aluno de forma ativa nessa atividade. Essa limitação de tempo foi adificuldade que, para superá-la indiscutivelmente, precisaríamos de mais tempo disponível, o qual não tivemos.

Ao longo da nossa exposição teórica acerca da investigação matemática em sala de aula, abordamos uma série de cuidados que o professor deve ter para que a investigação ocorra de forma frutífera. Em nosso experimento, procuramos explorar e ampliar o entendimento sobre o teorema de Talles testando algumas conjecturas com o uso do próprio *software*Geogebra.

Em relação àquestão central da nossa pesquisa:identificar e analisar quais as contribuições da teoria do ensino desenvolvimental ao ensino e aprendizagem do teorema de Tales quando combinada à investigação matemática e com apoio no *software*Geogebra, percebemos um crescimento progressivo da aprendizagem dos alunos logo nas primeiras atividades do experimento, após a avaliação diagnóstica. Esse crescimento da aprendizagem, da capacidade cognitiva do aluno foi ficando perceptível na sua maneira de expressar os conceitos, de interpretar o problema, de aplicar uma ideia geral numa solução particular de um problema; na qualidade crescente das intervenções, nos questionamento e nos testes de conjecturasrealizados pelos alunos. Finalmente, percebemos crescimento da aprendizagem do aluno na solução da tarefa de concretização de conceitos.

A tarefa de concretização de conceitos[15] realizada pelos alunos foi totalmente corrigida pelo professor no quadro via a participação dos alunos. Em muitos casos o aluno era convidado a resolver e explicar a sua solução para o professor e para os colegas, no quadro.

Os indícios de crescimentos progressivo dos alunos passam pelo entendimento do núcleo conceitual do teorema: razão, proporção e paralelismo. Inicialmente o aluno compreendeu o conceito de razão, em seguida passou a entender o conceito de proporção, na sequência passou a saber montar a proporção de forma correta, conforme a representação geométrica apresentada nos problemas a serem resolvidos via teorema de Tales.

Esse domínio nuclear conceitual foi construído via as várias atividades que compõem o experimento didático formativo. Como indícios, podemos apontar: as perguntas feitas pelos alunos, as discussões desenvolvidas e motivadas durante a realização do experimento,nos testes de conjecturas que, com a utilização do software Geogebra, foram bastante potencializados, permitindo ao aluno tirar conclusões visuais via geometria (desenho) e numéricas, via janela algébricas.

[15] Tarefa de concretização de conceitos é o mesmo que lista de exercícios.

Usar o Geogebra, um *software* ,gratuito, desenvolvido exclusivamente para o ensino e a pesquisa em matemática representou agregar ao ensino todo um potencial representado por *software* de geometria dinâmica.A junção da teoria do ensino desenvolvimental, com a investigação matemática eo Geogebra, potencializou a realização do nosso experimento didático formativo sobre o teorema de Tales. Ao mesmo tempo, essa junção é uma tarefa complexa, que requer mais pesquisa e estudo.

A teoria do ensino desenvolvimental é rica e ao mesmo tempo complexa. Ela demanda um estudo constante para que possamos progressivamente dela nos apropriar, possibilitando, assim, explorar todo o seu potencial para o ensino.

A investigação matemática em sala de aula, embora não tenha a amplitude de uma teoria, carrega consigo todo um cuidado, no preparo e na sua execução para que o professor possa extrair o potencial que ela requer. O mesmo ocorre com o uso do *software*Geogebra.

Mas entendemose defendemos que essa junção é perfeitamente aplicável no contexto do ensino da matemática de uma sala. As entrevistas gravadas em áudio com cada aluno que participou do experimento também atestam essa viabilidade da utilização do experimento didático do modo como foi realizado nesta pesquisa.

Nas entrevistas, os alunos deixam claro que: aprenderam mais matemática, gostaram de ter participado do experimento, conheceram aspectos históricos relativos ao teorema de Tales que não sabiam. Gostaram tanto de ter participado do experimento que afirmaram a intenção de participarem de um novo experimento didático formativo com o Geogebra, caso fossem convidados.

Para finalizar, gostaria de dizer que após mais de 31 anos trabalhando como professor de matemática e vivendo exclusivamente desse trabalho, o momento de transcrever e analisar as entrevistas realizadas com os alunos, ao término do experimento, foi um dos momentos inesquecíveis da pesquisa. Foi uma grata satisfação fazer essa pesquisa e ela é o começo nossa inserção no universo da pesquisa.

REFERÊNCIAS

ACADEMIA DE CIENCIAS DE LA URSS - ACURSS. **Manual de marxismo-leninismo**, 1960.

AFANASIEV V. **Manual de Filosofía**-completo, Editorial Cartago(Argentina), Editorial Letras S/A (Mexico) , 3 ed, 1985. Disponível em <https://esfops.files.wordpress.com/2013/09/manual_de_filosofia_AFANASIEV_completo.pdf> Acesso: 16/02/2016

ALVES A. M. O método histórico dialético : alguns apontamentos sobre a subjetividade. **Revista de Psicologia da Unesp**, Assis, v. 9, n.1. 2010. Disponível em:<http://www2new.assis.unesp.br/index.php/revista/issue/view/13>Acesso em: 20 ago. 2014.

AQUINO, O. F. **O experimento didático formativo**: contribuições de L.S. Vygotsky, L. V. Zankov e V.V.Davidov.Uberaba:GEPIDE, 2013. 25 p.

BARROS, K. M. **Formação de conceitos matemáticos**: um estudo baseado no Ensino Desenvolvimental. 2015. Dissertação (Mestrado em Educação para Ciências e Matemática). Programa de Pós-graduação, IFG, Jataí/GO, 2015.

BICUDO, Irineu. **Prefácio e introdução**. EUCLIDES. Os Elementos. Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: UNESP, 2009.

BOGDAN R. C.; BIKLEN S. K. **Investigação qualitativa em educação-** uma introdução a teoria e aos métodos. Porto Condex- Portugual: Editora Porto, 1994.

BONGIOVANNI V. **O Teorema de Tales**: uma ligação entre o geométrico e o numérico. REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática.v.2.5, p.94-106, UFSC: 2007. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/download/12993/12094.> Acesso: 10 out. 2015.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e educação matemática**. 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2012.

BOTTOMORE, T. **Dicionário do Pensamento Marxista**. Rio de Janeiro, Jorge Zahar Editor, 1997.

CNTE- Não ao Pisa. **Por uma avaliação a serviço de uma educação emancipadora**. Grupo de trabalho de CLACSO "Política Educacional e Direito à Educação na América Latina e no Caribe", Salvador, Bahia, 2014. Disponível em: <http://www.cnte.org.br/index.php/comunicacao/noticias/13902-nao-ao-pisa-por-uma-avaliacao-a-servico-de-uma-educacao-emancipadora.html >. Acesso: 02 abr. 2016.

CORREIO BRASILIENSE.**MEC e Inep apresentam resultados do Enem 2014** , edição 13/01/2015. Disponível em:<http://www.correiobraziliense.com.br/app/noticia/eu-

estudante/especial_enem/2015/01/13/especial-enem-interna,466090/mec-e-inep-apresentam-resultados-do-enem-2014.shtml>Acesso: 10 fev. 2015
DAVIDOV, V.V. **La ensenanza escolar y el desarrollo psíquico**. Moscu: Progresso, 1988.

DAVIDOV, V.V. **O que é atividade de Estudo**. Texto traduzido por Ermelinda Prestes, da Revista "escola inicial", n. 7, 1999, traduzido para o Programa de Pós-Graduação da PUC GO, em Abril de 2013.

DAVYDOV, V. V. **O problema da generalização e do conceito na teoria de Vygotsky**. Palestra proferida por Davidov em 1992, na Faculdade de Medicina de Amisterdã. Tradução do italiano feita por José Carlos Libâneo em 1997. Disponível em <https://www.google.com.br/webhp?sourceid=chrome-instant&ion=1&espv=2&ie=UTF-8#q=DAVYDOV%2C+V.+V.+O+problema+da+generaliza%C3%A7%C3%A3o+e+do+conceito+na+teoria+de+Vygotsky.+Palestra+proferida+por+Davidov+em+1992%2C+na+Faculdade+de+Medicina+de+Amisterd%C3%A3.+Tradu%C3%A7%C3%A3o+do+italiano+feita+por+Jos%C3%A9+Carlos+Lib%C3%A2neo+em+1997 > Acesso em: 25 fev. 2016. Disponível em: < http://www.scielo.br/pdf/rbedu/n27/n27a01>. Acesso: 06 jul. 2016.

EVES, H. **Introdução à história da matemática** / Howard Eves; tradução Hygino H. Domingues. 4a ed. – Campinas, sp: Editora da Unicamp, 2004.

FIORENTINI D.; CRISTOVÃO E. M.(Orgs.). **História e investigação de/em aulas de matemática**. Campinas, SP: Editora Alínea, 2006.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos . 3 ed. Ver. Campinas, SP, Autores associados, 2012.

FREITAS, R. A. M. M. **Formação de conceitos na teoria de VasiliDavydov**, 2009.

FREITAS, R.A.M.M. **Teoria histórico-cultural e didática**: o experimento didático como procedimento investigativo. Curso de didática avançada, agosto-dezembro de 2014. 12 p. Notas de Aula. Digitalizado. Disponível em: <http://professor.ucg.br/SiteDocente/home/disciplina.asp?key=5146&id=3552>. Acesso :09 set. 2014.

FREITAS, R.A.M.M.**Teoria histórico-cultural e didática**: o experimento didático como procedimento investigativo. Notas de Aula. Digitalizado - 2009.

FREITAS, R.A.M.M; PERES, T. C. Ensino desenvolvimental: uma alternativa para a educação matemática. **Poiésis –revista do programa de pós-graduação em educação-**mestrado-Unisul, Tubarão, v. especial, jan./jun:. 2014. Disponível em: <http://www.portaldeperiodicos.unisul.br/index.php/Poiesis/article/view/1741> Acesso em: 20 ago. 2014.

INEP.**Dados sobre oPISA**. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/pisas/sobre-o-pis>. Acesso: 12 abr. 2015.

JORNAL CORREIO BRASILIENSE, título da matéria: Mec revela média de notas dos alunos no Enem 2014. Endereço: < http://www.correio braziliense.com.br/euestudante/>, acesso: 12 abr. 2015.

KUZUYABU, M. **Pisa é alvo de críticas. Revista Educação**, ed 2017, julho , 2014. Disponível em: <http://revistaeducacao.uol.com.br/textos/207/pisa-e-alvo-de-criticas-319381-1.asp> .Acesso: 10 abr. 2016.

LEONTIEV, Levy. **Compédio de economia política.**Moscú:Edición Progreso, 1975. Disponível em:<https://doc-0g-a0-apps-viewer.googleusercontent.com/viewer/secure/pdf/3nb9bdfcv3e2h2k1cmql0ee9cvc5lole/8mjp6bnl6nnreso3su6dni4iv9bvde6d/1454001750000/drive/*/ACFrOgCkbwaGOdOtCmo_IlG55qRe-C95iWBqJzV6i4JpaPe2kmdIY5UaPhnk_T8ByGqY-dYGPdIuCqOCGkxU6LfWa6-xbAAc_nR5fc2lhZKy90aNlwCCkR8mxGWRrsM=?print=true> Acesso: 29 jan. 2016.

LIBÂNEO, J. C. **Método dialético ou o método da ascensão do abstrato ao concreto.** Apontamentos de sala de aula. 2006.Da disciplina Didática Desenvolvimental, ministrado em 2015/1, no mestrado da Puc GO. Disponível em:<professor.pucgoias.edu.br/.../Método%20dialético%20-%20Noções%20basicas.doc>. Acesso: 01 ago. 2016.

LIBÂNEO, J. C. **Experimento didático como procedimento de investigação em sala de aula**.Notas de aula. 8p.[Digitado], 2007.

LIBÂNEO, J.C. **A aprendizagem escolar e a formação de professores na perspectiva da psicologia histórico-cultural e da teoria da atividade**. Educar; Curitiba, n 24, p. 113-147. Editora UFPR. 2004.

LIBÂNEO, J.C. A didática e a aprendizagem do e do aprender: a Teoria Histórico-cultural da Atividade e a contribuição de VasiliDavydov**. Revista Brasileira de Educação**, n. 27, 2004.

LIBÂNEO, J.C. **A didática desenvolvimental e o currículo de formação profissional de professores:** a articulação entre o conhecimento pedagógico-didático e o conhecimento disciplinar. Texto submetido para publicação, 2013.

LIBÂNEO, J.C.; FREITAS, R. A. M. M. Vygotsky, Leontiev, Davidov – Contribuições da teoria histórico-cultural para a didática. In: SILVA, C. C.; SUANNO, M. V. R. (Org.). **Didática e interfaces**. Rio de Janeiro-Goiânia: Deescubra, 2007.

LIBÂNEO, J.C.; FREITAS, R.A.M.M. **A elaboração de planos de ensino** (ou unidades didáticas) conforme a teoria do ensino desenvolvimental. (texto de aula da disciplina ensino desenvolvimental, PUC-GO, 2014/2).

LIBÂNEO, J.C.; FREITAS, R.A.M.M. VasilyVasilyevichDavydov: a escola e a formação do pensamento teórico-científico. In: LONGAREZI, AndreáMaturano; PUENTES, Roberto Valdés (Org.). **Ensino desenvolvimental:** vida, pensamento e obras dos principais representantes russos. Uberlândia, Edufu, 2013.

LIBÂNEO, JC; LIMONTA, S.V. **Motivos e aprendizagem escolar**. Texto utilizado na aula da disciplina Didática Avançada no segundo semestre de 2016do Programa de Pós-graduação em Educação da PUC Goiás. Parte 1, intitulada A aprendizagem escolar como atividade, texto extraído de: LIBÂNEO, J.C. A aprendizagem escolar e a formação de professores na perspectiva da psicologia histórico-cultural e da teoria da atividade. Educar; Curitiba, n. 24, p. 113-147. Editora UFPR. Parte 2, Uma contribuição á teoria do desenvolvimento da psique infantil(Ca. 4 do livro: VYGOTSKY, LURIA, LEONTIEV. Linguagem, Desenvolvimento e aprendiagem, Ed. Icone, 2006.

LIBÂNEO, José. C. extraído de texto de aula da disciplina ensino desenvolvimental, (PUC-GO, 2011).**Conforme a teoria do ensino desenvolvimental**. Texto de uso didático, no programa de Pós-Graduação em Educação - Linha Teorias da Educação e Processos Pedagógico, da PUC(go).[20??]. Disponível em:<professor.pucgoias.edu.br/.../PLANO%20DE%20ENSINO%20Texto%20final.doc> Acesso: 10/12/2015.

LIBÂNEO, José. C.; FREITAS, Raquel . A. M. da M. Vygotsky, Leontiev, Davidov: contribuições da teoria histórico-cultural para a didática. In: SILVA, C.C,; SUANNO, M.V.R. (Orgs.) **Didática e interfaces**. Rio de Janeiro/Goiânia: Descubra, 2007.

LIBÂNEO, José. C.; FREITAS, Raquel . A. M. da M. Vygotsky, Leontiev, Davydov – três aportes teóricos para a teoria histórico-culturale suascontribuições para a didática. Goiânia. 2006. Disponível em: <http://www.sbhe.org.br/novo/congressos/cbhe4/individuais-coautorais/eixo03/Jose%20Carlos%20Libaneo%20e%20Raquel%20A.%20M.%20da%20M.%20Freitas%20-%20Texto.pdf>. Acesso: 01set. 2016.

LORENZATO, S. Porque não ensinar Geometria? **Educação Matemática em Revista**. SBEM, n. 4, 1 semestre 1995. Disponível em:<http://professoresdematematica.com.br/wa_files/0_20POR_20QUE_20NAO_20ENSINAR_20GEOMETRIA.pdf> Acesso: 07 set. 2016.

MARX K. **O Capital**, Volume 1 - Parte III, Capítulo VII, secção 1- O Processo de Trabalho ou o Processo de Produção de Valores de Uso. Disponível em: <https://www.marxists.org/portugues/marx/1867/ocapital-v1/vol1cap07.htm>. Acesso: 10 fev. 2016.

MELLO, S.A. A escola de Vygotsky. In: CARRARA, Kester (Org.). **Introdução à psicologia da educação:** seis abordagens. São Paulo: Avercamp, 2004.

MELO, T.F. O. **O software Geogebra como elemento mediador na formação do conceito de xdzeec+polígonos semelhantes:** um estudo na perspectiva do ensino desenvolvimental [manuscrito] / Tattiana Fernandes de Oliveira Melo. - 2014. 158 f.

MIGUEL, A.; FIORENTINI, D. MIORIM, M. A. In: Álgebra ou geometria: para onde pende o pêndulo?.**Pro-posições**. v. 3 n. 1[7] mar. 1992. Disponível em:<http://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/proposic/article/view/8644424>. Acesso: 08 set. 2016.

MOYSÉS, L. **Aplicações de Vygotsky à educação matemática**. 11ª ed. Campinas: Papirus, 2012.

OLIVEIRA, Claudimary Moreira Silva. **A Investigação Matemática com o Geogebra no estágio com pesquisa do curso de licenciatura em Matemática da UEG/Iporá**. 2015. Dissertação(Mestrado em Educação para Ciências e Matemática). Programa de Pós-graduação, IFG, Jataí/GO, 2015.

PARATELI, etal. A escrita no processo de aprender matemática, cap. 1, In: FIORENTINI, D.; CRISTOVÃO, E. M.(Orgs.). **História e investigação de/em aulas de matemática**. Campinas, SP: Editora Alínea, 2006.

PEIXOTO, J. Alguns mitos sobrea tecnologia e a inovação pedagógica. In:MAGALHÃES,Fabiany Cássia Tavares Silva e Mônica de Carvalho (org**), Escrita da pesquisa em educação no Centro-Oeste**. Campo Grande, MS: Ed. Oeste, 2012.

PONTE J.P; BROCARDO J.; OLIVEIRA H. **Investigação matemática em sala de aula**.3. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2013.

POWEL, A. B. Captando, examinando e reagindo ao pensamento matemático. **Boletim GEPEM**.n. 39, set. 2001, p. 73-84.

REY, B. Em busca da medida certa. **Revista Educação**, n. 23, set. 2011. Disponível em: <http://revistaeducacao.uol.com.br/formacao-docente/168/em-busca-da-medida-certa-234921-1.asp>.Acesso: 10 abr. 2016.

RIBEIRO, Valter. **Como fazer citações da internet**, 2014. Disponível em:<http://www.estudoadministracao.com.br/ler/16-11-2014-como-fazer-citacoes-internet />. Acesso em: 16 de nov. 2014.

ROSA, E. Z;ANDRIANI, A.G.P. **Psicologia sócio-histórica**: uma tentativa de sistematização e epistemologia e metodológica.2002. Disponível em: <http://xa.yimg.com/kq/groups/73642191/855155035/name/PSICOLOGIA+SOCIO+HISTO4RICA+(OK).doc+>Acesso: 28 dez. 2015.

SANCHO, J.M. Lição para usar a tecnologia. In:**Entrevista no Jornal do Brasil.** Disponível em: <http://homes.dcc.ufba.br/~frieda/mat061/liopara.htm>. Acesso em: 8 dez. 2014.

SILVA D.G; ROCHA, L. B. D A.**Escola de tempo integral em Goiás**: o pacto pela educação, o programa Novo Futuro e a criação do centro de ensino em período integral (CEPI).Observatório em Debates,n. 1, set. 2014. Disponível em:<observatorio.ifg.edu.br/index.php/obsdebate/article/download/60/5> .Acesso: 10 set. 2016.

VAZ, D.A.F.A influência da matemática nas regras para a direção do espirito em discurso do método. 2007. Tese (Doutorado). Unesp, Rio Claro, 2007.

VAZ, D.A.F. Experimentando, conjecturando, formalizando e generalizando: articulando investigação matemática com o Geogebra. **Revista Educativa**. Goiânia, v. 15, n. 1, p. 39-51, jan./jun. 2012.

VIGOTSKI, L. S. **A Formação social da mente**. 6ª ed. São Paulo: Martins Fontes, 1998.

VIGOTSKI, L. S.**A formação social da mente:** o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. In: COLE, Michael... [et al.] (Orgs.). Trad. José Cipolla Neto, Luís Silveira Menna Barreto, Solange Castro Afeche. - 7ª ed. - São Paulo: Martins Fontes, 2007.

VIGOTSKY, L. E. **A construção do pensamento e da linguagem -** São Paulo: Martins Fontes, 2000.
VYGOTSKY, L. S. O significado Histórico da Crise da Psicologia. Uma investigação metodológica. In: **Teoria e método em psicologia**. São Paulo, Martins Fontes, 1996, p. 203-477.

VYGOTSKY, L. S. **Pensamento e linguagem**. 3 e d. São Paulo: Martins Fontes, 2005.

VYGOTSKY, L. S. **Investigaciones psicológicas escogidas**. Moscú: Editorial de la ACP de la RSFSR, 1956.

APÊNDICES

APÊNDICEA – Questionáriorespondido pelos alunos

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE GOIÁS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
CURSO DE MESTRADO EM EDUCAÇÃO

Pesquisa: ENSINO DESENVOLVIMENTAL E INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA COM O GEOGEBRA: UMA INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA SOBRE O TEOREMA DE TALES

Pesquisador: Sérgio Ricardo Abreu Rezende

QUESTIONÁRIO PARA O ALUNO

1 - Possui computador (*notebook*, *tablet*, etc.) em sua residência?
( ) Sim, com acesso à internet
( ) Sim, sem acesso à internet
( ) Não

2 - Onde você utiliza computador (*notebook*, *tablet*, etc.)?
( ) Em casa
( ) *Lan House*
( ) Casa de amigos
( ) Na escola
( ) Não utilizo

3 - Com que finalidade você utiliza o computador (*notebook*, *tablet*, etc.)?(pode marcar mais de uma alternativa)( ) Jogos
( ) Estudos
( ) *Facebook* (outras redes sociais)
( ) Outro ____________________

4 - Quantas horas por dia você usa o computador (*notebook*, *tablet*, etc.)?
( ) Até 1 hora
( ) Mais de 1 hora até 3 horas
( ) Mais de 3 horas até 5 horas
( ) Mais de 5 horas

5 - Já utilizou o computador (*notebook*, *tablet*, etc.) para estudar matemática?
( ) Não
( ) Sim, qual programa utilizou?

____

6 – Alguém na sua casa eventualmente lhe ajuda a fazer /responder alguma tarefa de matemática?

____

7 - Para você, qual a grande importância da utilização do computador (*notebook*, *tablet*, etc.) para estudar matemática?

____
____
____

8 – Já utilizou o Laboratório de Informática da Escola na aula de matemática?
( ) Não
( ) Sim

9 – Já utilizou algum material concretopara aprender matemática?
( ) Não
( ) Sim, quais?
____

10 – Quantas horas por dia você estuda, fora do horário escolar?
( ) até 1 hora
( ) mais de 1 hora até 2 horas
( ) mais de 2 horas até 3 horas
( ) mais de 3 horas

11 – Você gosta da disciplina de Matemática?

( ) Sim, justifique sua resposta: ____
____
____

( ) Não, justifique sua resposta: ____
____
____

12 – Você acha que a matemática é importante para o seu dia-a-dia?

( ) Sim, justifique sua resposta:

____
____

( ) Não, justifique sua resposta:
____

____
____

13 – O que é a matemática para você? Escreva nas linha abaixo:
____
____
____

APÊNDICEB –Questionáriorespondido pelospais dos alunos

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE GOIÁS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
CURSO DE MESTRADO EM EDUCAÇÃO

Pesquisa: ENSINO DESENVOLVIMENTAL E INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA COM O GEOGEBRA: UMA INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA SOBRE O TEOREMA DE TALES

Pesquisador : Sérgio Ricardo Abreu Rezende

QUESTIONÁRIO PARA OS RESPONSÁVEIS

<u>Diagnóstico Socioeconômico dos responsáveis pelos alunos</u>.

1 - Qual seu grau de parentesco com o aluno? ________________________________

2 - Quantas pessoas moram em sua casa?____________________________________

3 - Qual seu tipo de moradia?

( ) Própria
( ) Alugada
( ) Cedida
( ) Financiada

4 – Profissão dos responsáveis

Pai:_____________________________________

Mãe: ____________________________________

Outro: ___________________________________

5 – Estado civil dos pais:
( ) casados
( ) solteiros
( ) divorciados
( ) juntados

6 - Qual é o grau de Instrução?
Da mãe ( ) ou outro responsável ( )**:**
( ) Não alfabetizado
( ) Lê e escreve, mas nunca esteve na escola
( ) Fundamental incompleto
( ) Fundamental completo
( ) Médio incompleto

( ) Médio completo
( ) Superior incompleto
( ) Superior completo
( ) Pós-graduação incompleta
( ) Pós graduação completa

Do pai ( ) ou outro responsável ( ):
( ) Não alfabetizado
( ) Lê e escreve, mas nunca esteve na escola
( ) Fundamental incompleto
( ) Fundamental completo
( ) Médio incompleto
( ) Médio completo
( ) Superior incompleto
( ) Superior completo
( ) Pós-graduação incompleta
( ) Pós graduação completa

7 – Quando estudava, gostava da disciplina de matemática?

( ) Sim, porquê?

____

____

( ) Não, porquê?

____

____

8 – Você verifica seu filho(a) faz as atividades para casa.

( ) Sim, porquê?

____

____

( ) Não, porquê?

____

____

9-Em sua casa, quantas pessoas trabalham?

____

10 - Qual a renda total da família?
( ) Até um salário
( ) Mais de um salário até 2 salários
( ) Mais de 2 salários até 3 salários
( ) Mais de 3 salários até 6 salários
( ) Mais de 6 salários
11 - Existem pessoas em sua casa que são aposentadas?
( ) Sim, quantas? _________
( ) Não
12 - Quais atividades a família realiza nos momentos de lazer?

____
____

13 - Em sua casa possui:

Computador (*notebook*, *tablet*, etc.)? ( ) Sim ( ) Não

Acesso à Internet? ( ) Sim ( ) Não

14 – Frequenta as reuniões da escola?

( ) Sim

( ) Não. Porquê?

____
____

15 – Acompanha as atividades de seu filho na escola?

( ) Sim, porquê?

____

( ) Não, porquê?

____

____
____

16 – Dê sua opinião sobre a importância que os estudos têm para seu filho:

____
____
____
____
____

17 - Dê sua opinião sobre a escola que seu filho estuda.

____
____
____
____

APÊNDICE C – Avaliaçãodiagnóstica

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE GOIÁS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
CURSO DE MESTRADO EM EDUCAÇÃO

Pesquisa: ENSINO DESENVOLVIMENTAL E INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA COM O GEOGEBRA: UMA INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA SOBRE O TEOREMA DE TALES

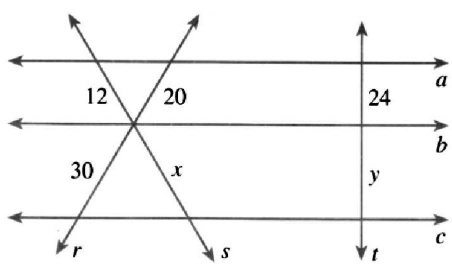
Pesquisador: Sérgio Ricardo Abreu Rezende

Avaliação Diagnóstica. *Data: -----/11/2015

Nome: ____

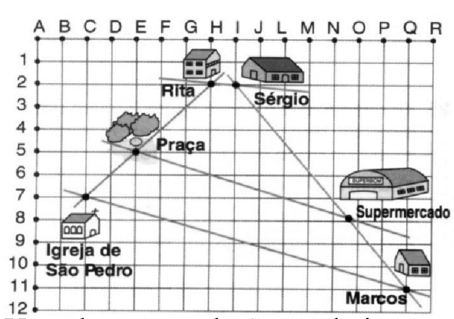
QUESTÃO 01

Na figura abaixo, temos a // b // c e as retas r, s e t são transversais. Qual o valor de (x + y)?



QUESTÃO 2

O esquema a seguir representa uma página do guia da cidade onde Rita mora. Ela, Sérgio e Marcos estão no 9º ano e estudam na mesma classe. Quando aprenderam o Teorema de Tales, eles resolveram aplicá-lo no guia. Rita informou aos amigos que a distância da praça até a igreja de São Pedro é de **4 km**.Sérgio acrescentou que a distância entre sua casa e a de Marcos é de **15 km** e até ao supermercado, de **9 km**. Eles calcularam todas as distâncias corretamente e chegaram a várias conclusões.



Uma dessas conclusões poderia ser a de que a distância

(A) da casa de Rita até a igreja de São Pedro é maior que 9 km.

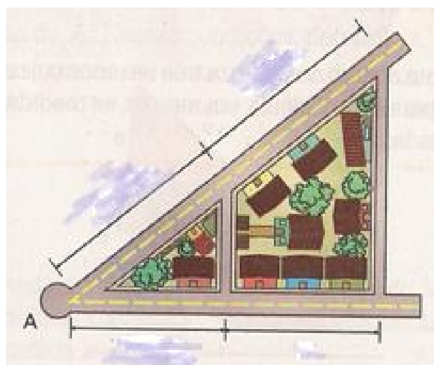
(B) da casa de Rita à praça é maior que a da casa de Marcos até ao supermercado.

(C) da casa de Sérgio à casa de Marcos é menor que da casa de Rita até a igreja.

(D) da casa de Marcos até o supermercado é menor que 5 km.

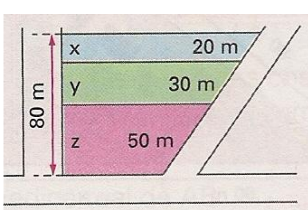
QUESTÃO 3

A figura abaixo nos mostra duas avenidas que partem de um mesmo ponto A e cortam duas ruas paralelas. Na primeira avenida, os quarteirões determinados pelas ruas paralelas tem80 m e 90 m de comprimento, respectivamente. Na segunda avenida, um dos quarteirões determinados mede 60 m. Qual o comprimento do outro quarteirão?



QUESTÃO 4

A planta abaixo no mostra três terrenos cujas laterais são paralelas. Calcule, em metros, as medidas x, y e z indicadas.



APÊNDICE D –Atividade I

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE GOIÁS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
CURSO DE MESTRADO EM EDUCAÇÃO

Pesquisa: ENSINO DESENVOLVIMENTAL E INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA COM O GEOGEBRA: UMA INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA SOBRE O TEOREMA DE TALES

Pesquisador: Sérgio Ricardo Abreu Rezende

Atividade 1do Experimento Didático Formativo Sobre o Teorema de Tales.*Data:---/11/2015
Nome: ____

1) No espaço a baixo você usando uma régua faça:

a) Desenhe aqui o feixe de3 retas não paralelas cortado por duas transversais . *De nome as retas (letra minúscula) e aossegmentos nas transversais (letra maiúscula).

b)Use uma régua e meça o comprimento dos dois segmentos consecutivos formados em cada transversal. Use centímetros (cm) e milímetros (mm).

medidas dos segmentos numa transversal . medidas dos segmentos na outra transversal

-- --

-- --

c)Calcule a razão entre os segmentos ao longo de cada reta transversal (com duas casas decimais).

razão dos segmentos numa transversal . razão dos segmentos na outra transversal

*Escreva a razãoconforme exemplo dado pelo professor:

--- --

--- --

d) O resultados dessas razões foi igual ou diferente? ---

Essas razões formam ou não uma proporção? ---

Conclusão:--

APÊNDICE E – Atividade II

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE GOIÁS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
CURSO DE MESTRADO EM EDUCAÇÃO

Pesquisa: ENSINO DESENVOLVIMENTAL E INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA COM O GEOGEBRA: UMA INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA SOBRE O TEOREMA DE TALES

Pesquisador: Sérgio Ricardo Abreu Rezende
Atividade2- Experimento Didático Formativo Sobre o Teorema de Tales. Data: ---/11/2015
Nome: ____

1) No espaço a baixo você usando uma régua faça:

a) Desenhe aqui o feixe de3 retas _paralelas_ cortado por duas transversais . *De nome as retas (letra minúscula) e aossegmentos nas transversais (letra maiúscula). Para facilitar a construção das paralelas vamos fazer linhas (como num caderno).

----

b)Use uma régua e meça o comprimento dos dois segmentos consecutivos formados em cada transversal. Use centímetros (cm) e milímetros (mm).

medidas dos segmentos numa transversal . medidas dos segmentos na outra transversal

-- --

-- --

c)Calcule a razão entre os segmentos ao longo de cada reta transversal (com duas casas decimais).

razão dos segmentos numa transversal . razão dos segmentos na outra transversal

*Escreva a razãoconforme exemplo dado pelo professor:

-- --

d) O resultados dessas razões foi igual ou diferente? --

Essas razões formam ou não uma proporção (justifique)? ----------------------------------

Conclusão:--

APÊNDICE F – Roteirodaentrevista semiestruturada com os alunos

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE GOIÁS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
CURSO DE MESTRADO EM EDUCAÇÃO

Pesquisa: ENSINO DESENVOLVIMENTAL E INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA COM O GEOGEBRA: UMA INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA SOBRE O TEOREMA DE TALES
Pesquisador: Sérgio Ricardo Abreu Rezende

ROTEIRO.

1) A importância histórica do teorema
2) Construção da rede conceitual do teorema.
3) Aplicação do quadro conceitual do teorema em outras matérias.
4) Geogebra : importância e facilidades.
5) Você gostou de usar o Geogebra?
6) Comandosbásicos do Geogebra.
7) Sobre a junção da álgebra e a geometria no Geogebra.
8) OGeogebracontribui para você apreender o teorema de Tales?
9) Sobre a prova diagnóstica
10) Para você qual é a essência do teorema de Tales?
11) Sobre o problema motivador
12) Sobre as atividades 1 e 2 feitas no papel para se chegar ao Teorema de Tales usando o Geogebra
13) Sobre a plasticidade do geogebra(indagar também sobre o efeito do comando de arrasto (deslocar retas, pontos etc.).
14) Sobre eventuais interferênciasdo pesquisador durante a realização deuma atividade.
15) Sobre a atuação do professor da turma durante o experimento.
16) Sobre a formalidade dos pais em ter que assinar autorização para o aluno participar da pesquisa.
17) Ao ser chamado para participar do experimento, como você imaginava que seria um experimento?
18) Se for chamado para um novo experimento você participaria?

19) Você gostou de ter participado do experimento?
20) Você acha que o experimento didático formativo, possibilitou produzir conhecimento para você?

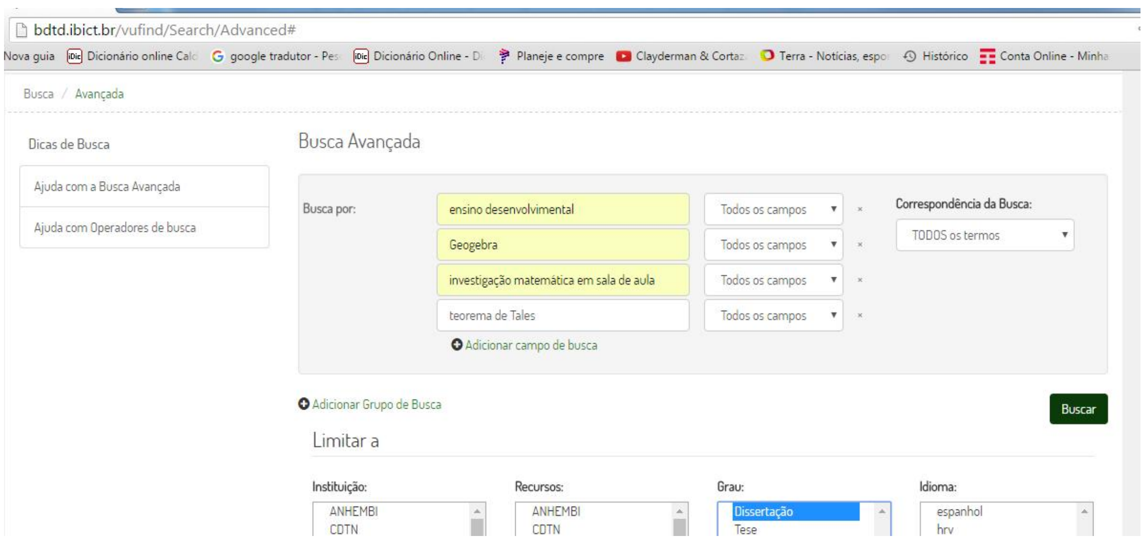
ANEXOS

ANEXO A –Buscaavançada no BDTD usando os quatro descritores ao mesmo tempo

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE GOIÁS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
CURSO DE MESTRADO EM EDUCAÇÃO

Pesquisa**:** ENSINO DESENVOLVIMENTAL E INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA COM O GEOGEBRA: UMA INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA SOBRE O TEOREMA DE TALES

Pesquisador : Sérgio Ricardo Abreu Rezende



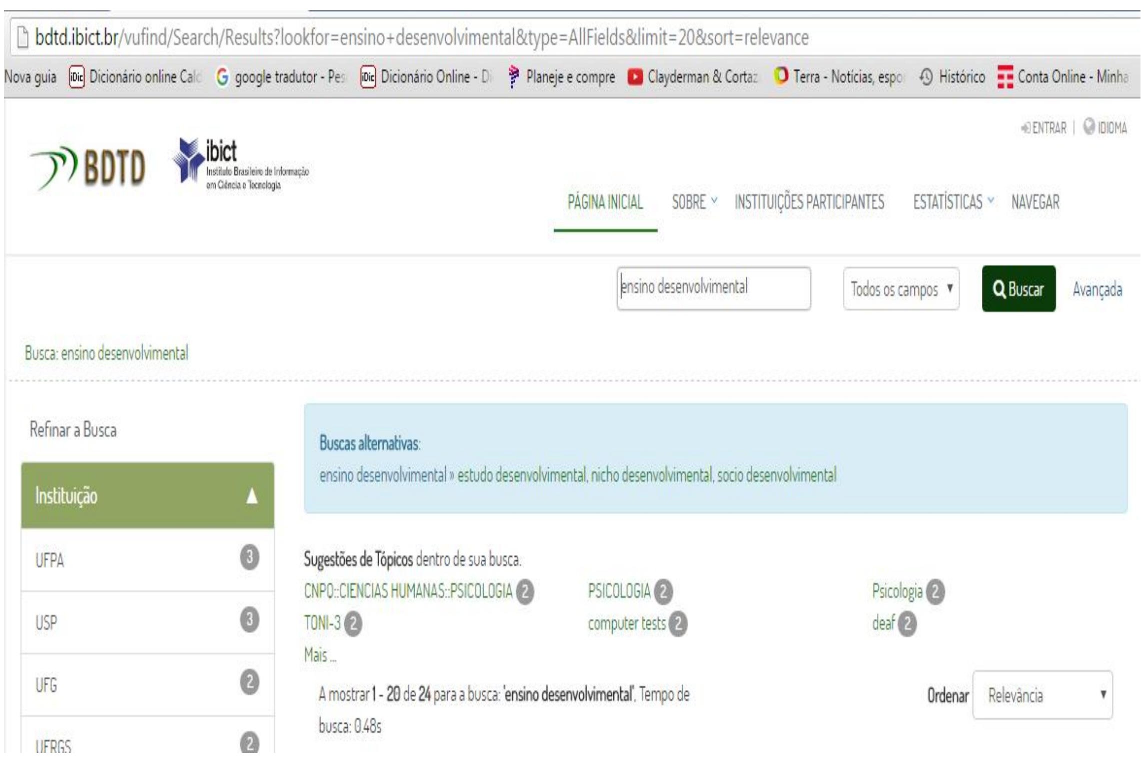
ANEXOB – Buscaavançada no BDTD usando o descritor "ensino desenvolvimental"

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE GOIÁS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
CURSO DE MESTRADO EM EDUCAÇÃO

Pesquisa**:** ENSINO DESENVOLVIMENTAL E INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA COM O GEOGEBRA: UMA INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA SOBRE O TEOREMA DE TALES

Pesquisador : Sérgio Ricardo Abreu Rezende

Percebemos que com o descritor: Ensino Desenvolvimental existe um total de 24 trabalhos.



ANEXO C – Buscaavançada no BDTD usando o descritor“teorema de Tales”

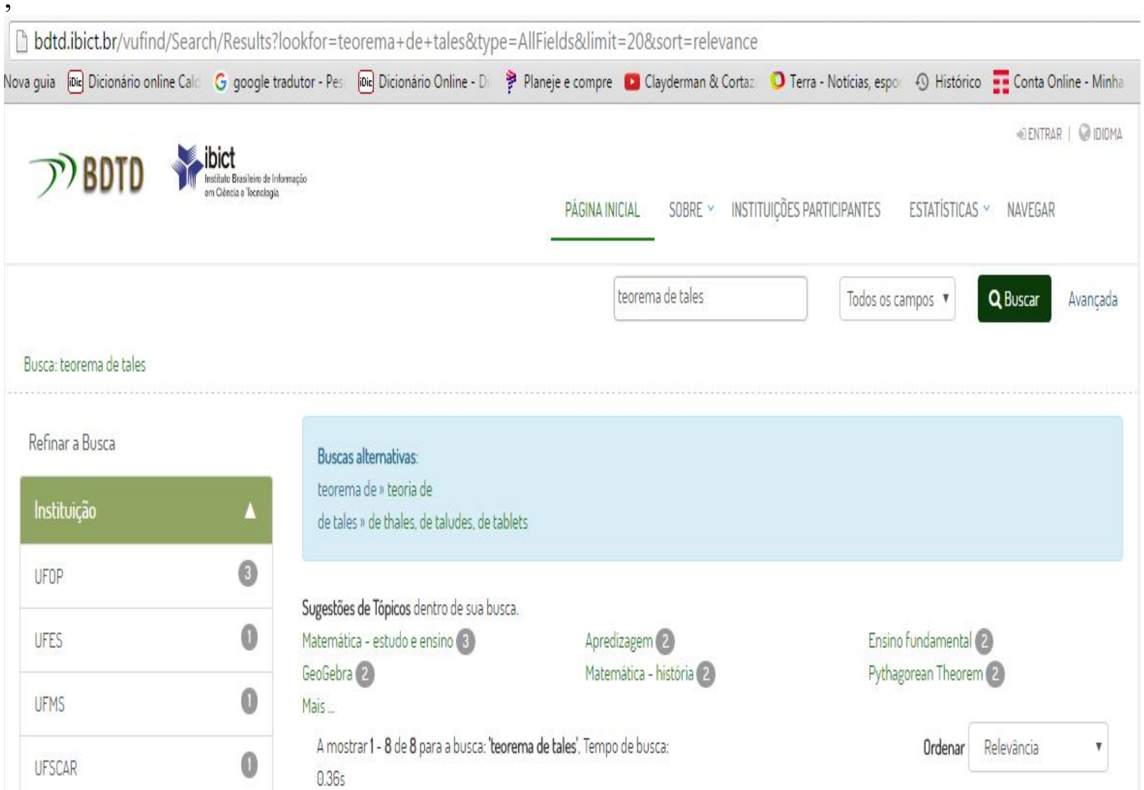
PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE GOIÁS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
CURSO DE MESTRADO EM EDUCAÇÃO

Pesquisa**:** ENSINO DESENVOLVIMENTAL E INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA COM O GEOGEBRA: UMA INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA SOBRE O TEOREMA DE TALES

Pesquisador : Sérgio Ricardo Abreu Rezende

Percebemos que com o descritor: Teorema de Tales existe um total de 8 trabalhos, sendo que nenhum tem como base teórica o ensino desenvolvimental..

,



ANEXO D – Quadrode pontuações da Prova Brasilem 2011

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE GOIÁS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
CURSO DE MESTRADO EM EDUCAÇÃO

Pesquisa: ENSINO DESENVOLVIMENTAL E INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA COM O GEOGEBRA: UMA INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA SOBRE O TEOREMA DE TALES

Pesquisador : Sérgio Ricardo Abreu Rezende

O desempenho médio em matemática no Brasil na Prova Brasil 2011.

Dependência Administrativa	5º ano do ensino Fundamental	9º ano do ensino Fundamental	3ª série ensino Médio
Municipal	202,7	240,2	*
Estadual	209,8	244,7	264,1
Federal	257,7	323,4	359,0
Pública	204,6	243,2	264,6
Privada	242,8	298,3	332,8
Total Brasil	209,6	250,6	273,9

*Não houve cálculo para este estrato, conforme portarias normativas SAEB.
Fonte: INEP.Disponível em:<http://sistemasprovabrasil2.inep.gov.br/resultados/ > Acesso: 12/04/2015.

O desempenho médio em matemática na Região Centro Oeste naProva Brasil 2011.

Dependência Administrativa	5º ano do ensino Fundamental	9º ano do ensino fundamental	3ª série ensino Médio
Municipal	207,7	246,8	*
Estadual	214,7	245,2	268,2
Federal	240,4	328,7	360,5
Pública	210,7	245,9	268,8
Privada	247,2	293,9	328,1
Total	215,9	253,3	278,6

*Não houve cálculo para este estrato, conforme portarias normativas SAEB.
Fonte: inepDisponível em:<http://sistemasprovabrasil2.inep.gov.br/resultados/ > Acesso: 12/04/2015

Desempenho médio em matemática de escola do estado de Goiás Prova Brasil 2011.

Dependência Administrativa	5º ano do ensino fundamental	9º ano do ensino fundamental	3ª série ensino Médio
Estadual	214,2	244,0	267,0
Pública*	210,1	243,4	267,0
Privada	247,8	251,5	276,2

Fonte: inepDisponível em:<http://sistemasprovabrasil2.inep.gov.br/resultados/ > Acesso: 12/04/2015

Desempenho médio em matemática de escolas do município de Goiânia na Prova Brasil 2011.

Dependência Administrativa	5º ano do ensino Fundamental	9º ano do ensino Fundamental
Municipal	206,6	234,9

Fonte: inepDisponível em:<http://sistemasprovabrasil2.inep.gov.br/resultados/ > Acesso: 12/04/2015