PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE GOIÁS
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
ESCOLA DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES E HUMANIDADES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO *STRICTO SENSU* EM EDUCAÇÃO

CONTRIBUIÇÕES DA TEORIA DO ENSINO DESENVOLVIMENTAL DE DAVYDOV: PROPOSTA DE CONSTRUÇÃO DE PLANO DE ENSINO PARA A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE NÚMEROS REAIS

LEONARDO ANTÔNIO SOUTO

GOIÂNIA - GO
2021

LEONARDO ANTÔNIO SOUTO

CONTRIBUIÇÕES DA TEORIA DO ENSINO DESENVOLVIMENTAL DE DAVYDOV: PROPOSTA DE CONSTRUÇÃO DE PLANO DE ENSINO PARA A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE NÚMEROS REAIS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Pontifícia Universidade Católica de Goiás (PUC Goiás), como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Educação, sob a orientação do Professor Dr. Duelci Aparecido de Freitas Vaz.

Goiânia - Goiás
2021

S728c Souto, Leonardo Antonio
Contribuições da teoria do ensino desenvolvimental de Davydov : proposta de construção de plano de ensino para a formação do conceito de números reais / Leonardo Antonio Souto.-- 2021.
210 f.: il.

Texto em português, com resumo em inglês.
Tese (doutorado) -- Pontifícia Universidade Católica de Goiás, Escola de Formação de Professores e Humanidades, Goiânia, 2021.
Inclui referências: f. 201-209.

1. Davidov, Vassily, 1930-1998. 2. Matemática - Estudo e ensino. 3. Números reais - Estudo e ensino (Ensino fundamental). I.Vaz, Duelci A. de F - (Duelci Aparecido de Freitas). II.Pontifícia Universidade Católica de Goiás - Programa de Pós-Graduação em Educação - 2021. III. Título.
CDU: Ed. 2007 -- 37.016:51(043)

CONTRIBUIÇÕES DA TEORIA DO ENSINO DESENVOLVIMENTAL DE DAVYDOV: PROPOSTA DE CONSTRUÇÃO DE PLANO DE ENSINO PARA A FORMAÇÃO DO CONCEITO DE NUMEROS REAIS

Tese de Doutorado do Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Educação da Pontifícia Universidade Católica de Goiás, aprovada em 20 de agosto de 2021.

BANCA EXAMINADORA

Duelci Aparecido de Freitas Vaz

Prof. Dr. Duelci Aparecido de Freitas Vaz / PUC Goiás

Profa. Dra. Ana Paula de Almeida Saraiva Magalhães / UEG

Aline Mota de Mesquita Assis

Profa. Dra. Aline Mota de Mesquita Assis / IFG

Profa. Dra. Raquel Aparecida Marra da Madeira Freitas / PUC Goiás

Prof. Dr. Made Júnior Miranda / PUC Goiás

Profa. Dra. Beatriz Aparecida Zanatta / PUC Goiás

Prof. Dr. Glen Cezar Lemos / IFG

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus por ter me amparado neste período de estudo e por ter protegido a minha família neste momento tão difícil e conturbado pelo qual o mundo passou.

Agradeço a minha esposa Valmira de Andrade Santos Souto pelo apoio em todos os momentos que passamos juntos, especialmente, neste período do doutorado, com seu amor e paciência.

As minhas filhas Alicia e Isabela pelo amor e carinho e que nunca questionaram a minha ausência nos momentos de dedicação aos estudos.

À chegada do meu filho Leonardo Filho, que chegou para alegrar os nossos corações no período da Pós-Graduação e que tem sido, junto da minha família, minha alegria e força motivadora para continuar os estudos, mesmo em um período tão conturbado no qual vivenciamos.

Aos meus pais, que contribuíram para os meus estudos, principalmente minha mãe, que, nos momentos mais difíceis, sempre me deu condições de continuar estudando.

Sou muito grato a todos os meus professores que me ajudaram direta ou indiretamente na minha formação.

Aos colegas de trabalho da UEG que sempre me apoiaram e acreditaram em mim.

Aos meus ex-alunos Donizeth Henrique e Hugo Rosa pelo companheirismo e por terem aceito serem orientados por mim na pesquisa acerca da teoria do ensino desenvolvimental, contribuindo para o meu crescimento pessoal e profissional.

Em especial, agradeço a meu orientador Professor Doutor Duelci Aparecido de Freitas Vaz, pela disponibilidade, apoio, conselho e dedicação em todo o período do doutorado e que sempre me incentivou a continuar estudando, sendo ele um exemplo de dedicação e sabedoria.

E, com um carinho muito especial, agradeço às professoras Raquel, Ana Paula e Aline pelas contribuições que sugeriram para o crescimento da minha tese, durante a minha qualificação.

Agradeço aos professores Raquel, Made, Ana Paula e Aline pela disponibilidade de estarem presentes na defesa da minha tese.

RESUMO

No ensino fundamental das escolas brasileiras, a orientação dos documentos oficiais para o ensino do conceito de número se dá na seguinte sequência: naturais, inteiros, racionais, culminando nos irracionais, geralmente no nono ano do ensino fundamental. Esses números reunidos são denominados de números reais. Nessa realidade, seu ensino contempla os nexos externos, em que o aluno é estimulado a identificá-los e classificá-los, conforme a sua representação decimal, em detrimento dos nexos internos e conceituais, a sua essência. A partir de uma metodologia que investigou aspectos teóricos e documentos legais, envolvendo a leitura e análise de teses, dissertações e artigos científicos com foco no ensino dos números reais, em todas as modalidades de ensino, no período de 2010 a 2018, documentos oficiais do Ministério da Educação (MEC), tais como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), o Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e aportes teóricos relacionados a teoria histórico-cultural, verificamos uma contradição, a saber, uma argumentação insuficiente para abordar os números irracionais profundamente. Algumas produções relacionadas enfatizam o conceito de número, a partir da proposta davydoviana, na relação entre grandezas mensuráveis. De fato, entende-se isso como plausível para os números racionais, utilizando as grandezas mensuráveis, mas não realizável para os irracionais, antes de esclarecer outro tipo de grandeza, a incomensurável. Isso remete ao primeiro obstáculo epistemológico da ciência matemática, concebida na escola pitagórica e superada por Eudoxo de Cnido. Sem o entendimento desse evento e de outros que foram aparecendo, ao longo da história da matemática, à medida que os contextos sociais exigiam novas formulações científicas para explicar as contradições emergentes, não é possível realizar um ensino com foco na essência do objeto em questão. A rigor, entendemos que a elaboração de uma proposta de ensino de números reais requer um movimento do abstrato ao concreto longevo, gradativo, finalizada pela apropriação do conceito de número irracional no nono ano do ensino fundamental. Desta maneira, apresentamos o problema de pesquisa: Quais as contribuições do ensino desenvolvimental de Davydov para o planejamento de uma atividade de estudo para o desenvolvimento do conceito de número real no último ano do ensino fundamental? Em busca de uma resposta, a partir de uma metodologia histórica-bibliográfica e documental, fundamentada numa perspectiva dialética, realizamos um estudo lógico-histórico dos números reais de uma forma contextualizada, com a finalidade de obter as contradições e superações da comunidade de matemáticos para uma sintetização do conceito geral de número; aprofundamos na leitura de premissas da teoria histórico-cultural para estudar o objeto, a partir de sua perspectiva histórica e dialética, concebendo o conceito por meio de suas sínteses, com ênfase na compreensão dos números irracionais e a partir da premissa desenvolvimental de que isso é possível pelo movimento do abstrato ao concreto, do aspecto mais geral do conceito. O resultado obtido, a partir desta incursão investigativa, foi a elaboração de um plano de ensino davydoviano para o conceito de números reais, destinado ao nono ano do ensino fundamental, no qual enfatizou-se a necessidade de compreensão das grandezas incomensuráveis, que deve emergir das tarefas de estudo. A argumentação enfatiza que a formação do conceito de número, em toda sua generalidade, só é possível a partir da abstração substantiva pelo aluno das grandezas incomensuráveis. De todo modo, destaca-se a necessidade de estudos experimentais para avaliar a presente proposta.

Palavras-chave: Ensino. Números reais. Teoria histórico-cultural. Movimento Lógico-Histórico. Educação Matemática.

ABSTRACT

In elementary education in Brazilian schools, the orientation of official documents for teaching the concept of number occurs in the following sequence: natural, whole, rational, culminating in the irrational ones, usually in the ninth year of elementary school. These numbers put together are called real numbers. In this reality, its teaching contemplates external nexuses, in which the student is encouraged to identify and classify them, according to their decimal representation, to the detriment of internal and conceptual nexuses, their essence. From a methodology that investigated theoretical aspects and legal documents, involving the reading and analysis of theses, dissertations and scientific articles focusing on the teaching of real numbers, in all teaching modalities, from 2010 to 2018, official documents of the Ministry of Education (MEC), such as the National Curriculum Parameters (PCNs), the National Textbook Plan (PNLD) and the Common National Curriculum Base (BNCC) and theoretical contributions related to cultural-historical theory, we find a contradiction, the namely, an insufficient argument to address the irrational numbers in depth. Some related productions emphasize the concept of number, based on davydovian's proposal, in the relationship between measurable quantities. In fact, this is understood as plausible for rational numbers, using measurable quantities, but not feasible for irrational numbers, before clarifying another type of quantity, the incommensurable. This refers to the first epistemological obstacle of mathematical science, conceived in the Pythagorean school and overcome by Eudoxo de Cnido. Without understanding this event and others that have appeared throughout the history of mathematics, as social contexts demanded new scientific formulations to explain the emerging contradictions, it is not possible to carry out a teaching focused on the essence of the object in question. Strictly speaking, we understand that the elaboration of a proposal for teaching real numbers requires a movement from the abstract to the long-lived, gradual concrete, finalized by the appropriation of the concept of irrational number in the ninth grade of elementary school. Thus, we present the research problem: What are the contributions of Davydov's developmental teaching to the planning of a study activity for the development of the concept of real number in the last year of elementary school? In search of an answer, based on a historical-bibliographic and documental methodology, based on a dialectical perspective, we carried out a logical-historical study of real numbers in a contextualized way, in order to obtain the contradictions and overcoming's of the community of mathematicians to a synthesis of the general concept of number; we deepened the reading of premises of the cultural-historical theory to study the object, from its historical and dialectical perspective, conceiving the concept through its syntheses, with emphasis on the understanding of irrational numbers and from the developmental premise that this is possible by the movement from the abstract to the concrete, from the most general aspect of the concept. The result obtained from this investigative incursion was the elaboration of a Davydovian teaching plan for the concept of real numbers, for the ninth year of elementary school, in which the need to understand the incommensurable quantities that should emerge was emphasized of study tasks. The argument emphasizes that the formation of the concept of number, in all its generality, is only possible from the student's substantive abstraction of incommensurable quantities. In any case, the need for experimental studies to evaluate this proposal is highlighted.

Keywords: Teaching. Real numbers. Historical-cultural theory. Logical-Historical Movement. Mathematics Education.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE SIGLAS

BNCC	Base Nacional Curricular Comum
Capes	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
IMPA	Instituto de Matemática Pura e Aplicada
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
PCNs	Parâmetros Curriculares Nacionais
PISA	*Programme for International Student Assessment*
PNLD	Plano Nacional do Livro Didático
SBM	Sociedade Brasileira de Matemática
TFA	Teorema Fundamental da Aritmética
ZDP	Zona de Desenvolvimento Proximal
ZDR	Zona de Desenvolvimento Real

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Um dos maiores desafios da escola contemporânea é o desenvolvimento do pensamento científico dos alunos, de modo que possam abstraí-los e relacioná-los nos contextos sociais. Pensar em uma educação de qualidade, com essa finalidade, por ser o verdadeiro papel da escola. Principalmente, em uma época em que existe excesso de informação em uma sociedade com um ritmo de vida alucinante, não é uma tarefa nada fácil, sobretudo, diante das péssimas condições dadas aos professores de nosso país. Considerando as complexidades do contexto escolar, o professor ocupa uma função primordial, a de transformar o aluno num gestor crítico dessas informações. Nesse contexto, a crise da educação se acentua, uma vez que a escola privilegia a informação, mas num ritmo lento e estático, o que faz com que seja facilmente superada pelas informações divulgadas nas redes digitais, de forma dinâmica. Para transformar os alunos em gestores críticos da informação é necessário se atentar para os processos que lhes permitem se apropriar dos conceitos científicos, estabelecendo as ações mentais para compreenderem a realidade.

O baixo rendimento escolar em Matemática, em todos os níveis de ensino, é confirmado em nossa experiência profissional, como educador matemático. Podemos citar os resultados recentes em testes nacionais e internacionais, como o *Programme for International Student Assessment* (PISA)[1], que coloca o Brasil numa situação desconfortante com relação a diversos países.

De acordo com o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), os estudantes brasileiros da escola básica apresentaram melhor desempenho em matemática quando seu ensino a relaciona com situações da sua vida cotidiana, ou seja, o ensino de matemática descontextualizado de práticas sociais se torna um obstáculo à aprendizagem dos estudantes. Isso se dá pelo fato de o ensino de Matemática estar ainda fundamentado tradicionalmente numa metodologia embasada pelas correntes filosóficas positivistas e empiristas. De um lado, o professor, com certa ansiedade em ministrar novos conteúdos, entende como método ideal a descrição dos objetos para os alunos e, de outro, o aluno,

---

[1] Disponível em: Relatório Brasil no PISA 2018-2 versão.indd (inep.gov.br).

concebido por essa pedagogia como receptor, o que expõe visivelmente a dicotomia entre o sujeito e o objeto do conhecimento. Distanciado das relações sociais, o ensino da Matemática se desprovê de sentidos para o aluno, provocando um mal-estar e uma antipatia a essa ciência.

Nossa experiência na docência do ensino superior na área de matemática, nos períodos iniciais dos cursos de Engenharias, Matemática, Administração, Economia e Ciências Contábeis, permite-nos perceber que os estudantes, que ingressam nesses cursos, possuem muitas dificuldades de aprendizagem nas disciplinas Pré-cálculo e Cálculo I (Engenharias) e Matemática I (Administração, Contábeis e Economia), que são consideradas matérias propedêuticas para os alunos prosseguirem nos seus estudos nos respectivos cursos, culminando num alto índice de reprovação e evasão. Notamos nesses alunos a decepção de possuírem uma defasagem de conhecimentos matemáticos básicos, necessários para a continuidade de seu curso, acabando com o sonho de possuir uma formação superior que os levaria a uma qualidade de vida melhor. Essas situações mostram a necessidade de pesquisar sobre o ensino-aprendizagem dos conceitos matemáticos na educação básica, com forte impacto negativo no desempenho dos alunos em cursos subsequentes e na vida.

É evidente que existem muitas variáveis a serem consideradas, que influenciam o baixo rendimento escolar brasileiro, como políticas públicas vinculadas aos organismos multilaterais com forte interesse em formar mão de obra barata, formação inicial e continuada inadequadas, sem uma política de reconhecimento social de professores, infraestrutura familiar precária, problemas sociais, entre outros. Nesse sentido, esperamos contribuir propondo este estudo, com intuito de levar para o chão da escola aspectos relevantes relacionados à metodologia de ensino em Matemática.

Com relação ao ensino-aprendizagem da Matemática propriamente dito, uma análise de sua história mostra as influências metodológicas que se tornaram hegemônicas, principalmente aquelas que se fundamentam no ato de informar ao aluno o saber historicamente produzido. Essa tradição, no Brasil, iniciou-se na década de 50, por meio do movimento da matemática moderna elaborada pelo grupo francês Bourbaki (ROQUE, 2012). Tal movimento tinha como objetivo ensinar os conceitos matemáticos baseados na formalidade e no rigor dos fundamentos da teoria dos conjuntos e da álgebra.

Esse movimento teve uma grande influência na educação matemática brasileira, com seus princípios sendo introduzidos nos livros didáticos formulados a partir da década de 1960 e 1970, a exemplo dos autores Benedito Castrucci, Manoel Jairo Bezerra e Scipione Di Pierro Netto. A lógica formal e axiomática foi a base do desenvolvimento do ensino dos conteúdos matemáticos, trabalhando-se, de forma acentuada, as propriedades dos objetos matemáticos. Mas esse movimento não logrou êxito, principalmente pelo despreparo dos professores para trabalhar com os conceitos novos, como teoria dos conjuntos e estruturas algébricas, devido a frágil formação em nível superior em matemática.

Com relação ao ensino-aprendizagem do conceito de números, pesquisas realizadas a respeito das abordagens atuais indicam que alunos ingressantes (e até mesmo os concluintes) no ensino superior demonstram dificuldades em reconhecer os irracionais, não conseguindo diferenciá-los da compreensão de conceitos relacionados aos números racionais; notoriamente, as propriedades de densidade e continuidade não são perceptíveis para a maioria dos estudantes. Além disso, não são conhecidas pelos discentes as propriedades importantes para a construção da reta real, tal como a propriedade da completude (IGLIORI; FONSECA, 2013).

No ensino conceitual dos números reais, conforme Igliori e Fonseca (2013), não são considerados o desenvolvimento lógico-histórico, as crises da matemática e a necessidade de uma fundamentação teórica, que veio a acontecer no século XIX, com a Análise Matemática, que estabeleceu uma construção rigorosa dos números reais, colocando-a em bases sólidas. Isso permitiu o avanço científico em outras áreas das ciências exatas. Como consequência, a partir disso, conceitos basilares da matemática foram estabelecidos, como, por exemplo, funções, derivadas e integrais, provocando amplo desenvolvimento dessa ciência.

As abordagens clássicas dos números, em decorrência do excessivo rigor matemático, evidenciam a perspectiva axiomática, com definições e propriedades com base na teoria dos conjuntos, explorando-se tão somente as relações entre conjuntos numéricos, nas quais o conjunto maior figura como extensão do conjunto menor. É preciso relacionar ao conceito de número, também, a parte extensional, ou seja, que interpreta o objeto matemático (no caso, os números) com as suas aplicações, tornando-o modelo de uma teoria (FONSECA, 2010).

Muitas propostas para a conceituação de números emergiram nos últimos anos. O Matemático John Conway[2] interpreta os números reais em uma classe específica de jogos, favorecendo o aspecto extensional do conceito, enquanto nos estudos referentes a Davydov e seus seguidores, o aspecto extensional seria o conceito de número como grandezas, relacionando-os com as unidades de medidas. Pinto, Giraldo e Heitmann (2013) fazem uma crítica ao ensino dos números reais, do modo como é abordado nos livros didáticos do ensino Fundamental e Médio, que acreditam serem formas, muitas vezes, ambíguas ou que possuem erros conceituais.

> Tal abordagem do conceito de números em nossos livros-texto explica, em parte, o conhecimento sobre o tema dos alunos que chegam à Universidade brasileira e torna menos surpreendentes alguns resultados de pesquisa. [...]. Os autores acrescentam que, nos livros didáticos brasileiros, o conceito de número real é introduzido de forma cíclica: números irracionais são os números que não são racionais, e os reais são os números racionais e irracionais (PINTO; GIRALDO; HEITMANN, 2013, p.192).

Isso, de certa forma, é um agravante. Nossa tradição escolar mostra que é nos livros didáticos que a maioria dos professores busca embasamento teórico e didático para planejar suas aulas. Acrescentamos, ainda, o fato de que, nesses materiais, o conceito de número é reduzido a um conjunto de propriedades e rotinas, ignorando-se qualquer contextualização a respeito do que os números reais realmente sejam em suas estruturas algébrica e geométrica, ou ainda, porque fora necessário construí-los. Entendemos a necessidade de que a formação do professor seja suficiente para que ele não tenha como referência apenas o livro didático, mas uma formação didática para o planejamento de ensino focado na transformação mental do estudante.

Tais abordagens, no livro didático, contrariam as considerações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) sobre o ensino dos números. A respeito dos irracionais, os PCNs propõem:

> Na perspectiva de que o aluno amplie e aprofunde a noção de número, é importante colocá-lo diante de situações em que os números racionais são insuficientes para resolvê-las, tornando-se necessária a consideração de outros números: os irracionais. Recomenda-se, no entanto, que a abordagem destes últimos não siga uma linha formal, que se evite a

---

[2] John Horton Conway nasceu em 1937 na cidade de Liverpool. Desenvolveu seus estudos superiores em Cambridge, na Inglaterra, onde cursou doutorado em 1964. Fez importantes contribuições na teoria dos grupos e teoria dos jogos combinatórios. Atualmente é professor na Universidade de Princeton (FONSECA, 2010).

> identificação do número irracional com um radical e que não se enfatizem os cálculos com radicais, como ocorre tradicionalmente (BRASIL, 1998).

Os PCNs sugerem, ainda, que se deva trabalhar com os números reais correspondentes à sua representação geométrica, tal como pontos da reta numérica, propondo que o aluno compreenda a necessidade do número irracional na construção do conjunto dos números reais. No entanto, na maioria das vezes, o número irracional é trabalhado com dois conceitos limitativos: a) Os números irracionais são números que não podem ser expressos na razão entre dois inteiros; b) Os irracionais são números decimais infinitos não periódicos.

Pommer (2012) ressalta que os conceitos citados anteriormente não consideram o desenvolvimento da estrutura dos irracionais, levando o aluno a entender que estes números existem só na abstração e que seriam, por conseguinte, números invisíveis nas relações cotidianas. Mas, na verdade, esses números aparecem em muitas situações-problemas, como no cálculo da área do círculo e comprimento da circunferência, em que emerge o número irracional pi (*π).* Outras vezes, o número irracional é relacionado com as raízes não exatas, limitando o seu estudo ao cálculo com radicais, o que não contribui para a compreensão do seu conceito em toda sua extensão. Silva e Vendemiatti (2013) sugerem a apresentação dos irracionais por uma abordagem de sua gênese, muitas vezes, desenvolvida a partir de um problema prático, que traz, em seu bojo, a necessidade de criação de novos campos numéricos.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento que foi homologado em dezembro de 2017 e que determina os conhecimentos básicos que todos os alunos da Educação Básica devem aprender, independente da região onde moram e do sistema de ensino (público ou particular) no qual estudam. Seu objetivo é propiciar que todos os estudantes tenham acesso a todos os conhecimentos essenciais da Educação básica, com foco no desenvolvimento das competências gerais. A BNCC estabelece dez competências gerais que orientam o ensino em todas as etapas, que vai da educação infantil até o ensino médio, e em todas as áreas do conhecimento (BRASIL, 2017).

Além das competências gerais, em cada área do conhecimento, a BNCC possui as competências e habilidades específicas. Assim, em relação à Matemática, temos:

> No caso da Matemática, ela tem fundamental importância na formação dos cidadãos críticos, com responsabilidades sociais e que atendam as dinâmicas do mundo do trabalho, que cada vez mais, requer sujeitos autônomos, com iniciativa para resolver problemas de forma colaborativa, criativa e flexível, que se comuniquem por meio de diferentes linguagens e que dominem o uso de tecnologias. (BRASIL, 2019, p. 3).

A Matemática é vista, como uma construção social proveniente da história, que estabelece conexões com outras áreas do conhecimento e tem papel fundamental na resolução de problemas, ampliando o entendimento e a compreensão do mundo que nos rodeia. Os conteúdos matemáticos foram reorganizados e foram contemplados alguns conteúdos que antes não constavam no currículo, como álgebra, probabilidade e estatística, que serão trabalhados desde os anos iniciais, na 1ª etapa do ensino Fundamental, sendo que tais conteúdos só eram introduzidos na 2ª etapa do Ensino Fundamental.

Os conteúdos matemáticos são apresentados em cinco unidades temáticas pela BNCC, divididas em números, grandezas e medidas, álgebra, geometria e probabilidade e estatística. As habilidades que os alunos podem desenvolver com o ensino de tais conteúdos é o aprimoramento do raciocínio lógico-dedutivo, visando à capacidade do aluno de mobilizar os conhecimentos aprendidos para solucionar problemas de ordem prática no seu cotidiano. No capítulo 5 será analisado dois livros didáticos referentes ao conteúdo dos números reais baseados na BNCC, pois é ela que vai orientar as pesquisas na área da Educação Matemática nos próximos anos.

Ressaltamos que a BNCC penaliza as classes mais marginalizadas da nossa sociedade com relação ao acesso aos conhecimentos científicos, pois contempla as áreas da linguagem e da matemática em detrimento das outras áreas. Por exemplo, as disciplinas de Química e Física terão suas cargas horárias reduzidas e podem até serem matérias optativas futuramente. Este fato contraria a teoria do ensino desenvolvimental de Davydov, que tem como um de seus principais pressupostos o acesso ao conhecimento teórico-científico para todos os alunos que frequentam a escola, não importando a sua classe social. Além disso, a BNCC não contribui com o desenvolvimento do pensamento matemático do aluno pela lógica dialética. A BNCC forma no aluno o pensamento utilitarista.

Contrapondo com esse ensino estabelecido pela lógica formal, enfatizada pelo movimento da matemática moderna, Elkonin e Davydov investigaram a problemática da atividade de estudo, estabelecendo os fundamentos da teoria desenvolvimental com o objetivo de que os alunos compreendam os conteúdos científicos na sua totalidade. Para Davydov (1988), o aluno só assimila um conceito quando interage com o objeto pela realização das tarefas de estudo, considerada como a atividade principal das crianças que adentram a escola. Os fundamentos científicos que lhe permitiu teorizar a respeito foram os estudos de Vygotsky, a partir do método histórico-dialético de Marx, em que o objeto de estudo está imerso em uma totalidade social.

É a partir de um olhar voltado às teorias que explicam o desenvolvimento do aluno que o processo de ensino-aprendizagem se inicia, indicando formas de planejamento do conteúdo, escolha do método de ensino, o que exige uma formação e especialização docente no aspecto epistemológico, nas teorias da didática geral e específica.

Nesse sentido, o problema que nos propomos estudar nesta pesquisa será investigado e fundamentado na teoria histórico-cultural, principalmente no ensino Desenvolvimental proposta por Davydov (1988), por entendermos que ela contém os fundamentos para organização de um ensino capaz de promover o desenvolvimento cognitivo dos alunos, pela apropriação de conceitos científicos, imprescindíveis à formação das funções mentais superiores.

Este estudo visa também aprofundar a análise teórica com o objetivo de extrair os elementos que sustentam a proposição do ensino do conceito de número, que esperamos contribuir com os caminhos que o professor deve percorrer para planejar uma atividade de ensino, que possibilite um aprendizado significativo para os seus educandos.

Para Libâneo (2015), a teoria do ensino desenvolvimental de Davydov tem como pressuposto que a função preponderante da escola é a de assegurar os meios necessários para que os alunos se apropriem dos conhecimentos historicamente produzidos pela humanidade e, assim, formem um método teórico-conceitual de pensar e atuar. A apropriação de conhecimento provoca nos alunos mudanças psíquicas, na maneira de pensar e relacionar o objeto de estudo, nas mudanças comportamentais. No momento em que o aluno se encontra em dificuldade em compreender determinados assuntos, o professor tem uma função essencial de auxiliá-lo a encontrar caminhos que possibilitem desenvolver as capacidades mentais indispensáveis a resolução de problemas.

Os estudos de Davydov indicam que o ensino tradicional não caracteriza o processo gerador e formativo do conceito, conforme atesta Sousa:

> Dessa forma ignora-se na maioria das escolas brasileiras tudo o que permite conhecer a gênese e a natureza dos conceitos por não estar em consonância com as suas possibilidades. [...]. Nesta perspectiva, as crianças saem da escola com a impressão de que os conceitos científicos que aparecem nos livros didáticos de forma linear, sem apresentar hesitação, contradição e rupturas estão prontos e acabados (SOUSA, 2014, p.61).

A nossa tese se baseia na pesquisa teórica e documental. A partir de uma revisão bibliográfica no banco de teses e dissertações no banco de dados da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes) e artigos científicos pesquisados no site da Scielo a respeito do ensino dos números reais, fundamentados na teoria histórico-cultural, percebemos uma contradição, a saber, a construção do conceito de números reais proposta não pode ser realizada a contento, pois exige a inclusão das grandezas incomensuráveis, que não estão abordadas nestes trabalhos.

Há uma lacuna a ser preenchida, que é a inclusão das grandezas incomensuráveis (ligada aos números irracionais), para se chegar ao conceito de número real, pois não é possível medir todos os objetos com o auxílio de um instrumento, uma régua ou uma fita. Os livros didáticos abordam essa questão, entretanto, de modo informativo, se atendo aos aspectos superficiais do objeto. Nas teses, dissertações e artigos relacionados à conceituação de número real, a concepção percebida nos trabalhos é a mesma da escola pitagórica. Porém, como nos mostra a história da matemática, não há como desconsiderar as grandezas incomensuráveis devido à insuficiência dos números racionais e à existência de fato dos números irracionais.

Além disso, foi pesquisado livros de autores que fundamentaram a Teoria Histórico Cultural e a Teoria do Ensino Desenvolvimental de Davydov, bem como autores que investigam e estudam este aporte teórico. Sobre o conceito matemático de número real, foi feito um estudo nos livros de História da Matemática para entender o percurso lógico histórico deste conceito, bem como livros da disciplina de Análise Matemática que discute o conceito deste objeto na sua síntese final, que é realizada pelo método axiomático-dedutivo. Por fim, com essa fundamentação teórica, foi proposto um plano de ensino do conceito de número real na turma do 9º ano, baseado na Teoria do Ensino Desenvolvimental de Davydov.

A dificuldade de conceituar os números reais é histórica e inicia-se na Grécia Antiga, onde a escola pitagórica afirmava que tudo era número (racional) e que ele era suficiente para medir todas as coisas. Mas, como afirma Eves (2011), a própria escola pitagórica descobriu a existência de objetos que não podem ser medidos com esse tipo de número, quando tentaram medir a diagonal de um quadrado de lado de medida unitária. Tal episódio foi denominado de crise dos incomensuráveis, pois a diagonal do quadrado não correspondia a um número que podia ser expresso de forma racional, como razão de duas grandezas mensuráveis, ou seja, não podia ser representada na forma de razão entre dois números inteiros. “Tal episódio representou a primeira crise da Matemática, que posteriormente teve encaminhamentos importantes: a descoberta de números incomensuráveis, os irracionais, aqueles que não podem ser escritos na forma de divisão de dois inteiros” (EVES, 2005, p. 104).

Deriva desse fato a importância de se analisar e compreender o percurso lógico-histórico da elaboração do conceito de números reais e considerar tal análise na organização do ensino, que na maioria das vezes não considera a crise dos incomensuráveis, que é a gênese dos números irracionais. O percurso lógico-histórico leva em consideração a constituição do conhecimento matemático desses números pelos pesquisadores que o tomaram como objeto de investigação. O estudo dos números irracionais não termina com a proposta da Matemática grega, muitos problemas foram suscitados no decorrer da história da matemática, exigindo encaminhamentos que abordaremos no trabalho para demonstrar a nossa proposta.

Fica evidenciada, assim, a problemática da nossa pesquisa, a qual pode ser resumida na seguinte proposição: Quais são as contribuições da teoria do ensino desenvolvimental de Davydov para o planejamento de uma atividade de estudo para o desenvolvimento do conceito de número real no último ano do ensino fundamental? A razão de escolher o nono ano do ensino fundamental reside no fato de que é ali que nossas escolas trabalham o tema, recomendado pela legislação oficial do MEC, orientado pela BNCC para o currículo na temática número real.

Para estudar o conceito científico dos números reais, é necessário pesquisar qual é a importância assumida pelos números irracionais na conceituação destes números, com implicações para o processo de ensino-aprendizagem. Percebemos, no nosso sistema escolar, que os alunos não compreendem o que realmente são e qual a importância dos números irracionais na constituição dos números reais. Das categorias de números que são abordadas no ensino básico, os números racionais têm recebido maior ênfase, é trabalhado em todas as séries anteriores ao nono ano. De todo modo, o estudo dos números reais tem um espaço importante no currículo matemático brasileiro, mas este não se transformou em êxito, conforme apontam pesquisas (Pommer, 2012) e nossa atuação enquanto professor.

A nossa pesquisar se fundamenta na teoria de Vygotsky e em seus desdobramentos, como a teoria da atividade de Leontiev e na teoria desenvolvimental de Davydov. Vasconcellos (1992) aponta-nos elementos fundamentais (Síncrese, análise e a síntese) dos quais pretendemos fazer uso em nossas investigações, pois acreditamos que são ideias essenciais também presentes em Vygotsky. Segundo ele (1992, p. 2),

> Uma metodologia na perspectiva dialética entende o homem como um ser ativo nas relações sociais, que o conhecimento não é transferido ou depositado pelo outro, nem é inventado pelo sujeito, mas é construído pelo sujeito na sua relação com os outros e com o mundo. Nesta perspectiva, o conhecimento científico que o professor apresenta precisa ser trabalhado, refletido, reelaborado, pelo aluno, para que ele se aproprie dele. Caso contrário, o educando não aprende, podendo, quando muito, apresentar um comportamento condicionado, baseado na memória superficial. A teoria dialética do conhecimento nos aponta que o conhecimento se dá basicamente em três grandes momentos: Síncrese, Análise e Síntese.

Para Vasconcellos (1992), a Síncrese corresponde à totalidade, fragmentada, confusa e indeterminada de uma situação social; a análise consiste em repartir a realidade em seus elementos mais simples, fazendo a divisão do todo para compreendê-lo; a síntese é como um caminho inverso, integrando as partes do todo de modo lógico, que resulta em uma compreensão dele. Essa dinâmica geral de obtenção do conhecimento vale também para a educação. Ocorre que a sala de aula tem as suas especificidades, nas quais o processo de conhecimento é mediado do educador para o educando.

> Em função desta situação, tem-se a necessidade de uma tarefa de caráter pedagógico, referente a mobilização para o conhecimento, o que quer dizer que cabe ao educador não apenas apresentar os elementos a serem conhecidos, mas despertar, como frequentemente é necessário, e acompanhar o interesse dos educandos pelo conhecimento. A partir disso, o educando deve construir propriamente o conhecimento, até chegar a elaborar uma síntese do mesmo. (VASCONCELLOS, 1992, p.3).

A mobilização se coloca como um momento especificamente pedagógico em relação à teoria dialética da construção do conhecimento, que supõe o interesse do sujeito em conhecê-lo. Assim:

> De modo geral, na situação pedagógica, este interesse tem que ser provocado. Visa possibilitar o vínculo significativo inicial entre sujeito e o objeto, provocar, acordar, desequilibrar, fazer a corte. O trabalho inicial do educador é tornar o objeto em questão, em objeto de conhecimento para aquele sujeito. (VASCONCELLOS, 1992, p. 3).

Ainda, segundo Vasconcellos (1992), devemos fazer o confronto de conhecimento entre o sujeito e o objeto de estudo, de modo que o educando possa compreender o objeto em suas relações internas e externas, captando sua essência. Nesse sentido:

> Conhecer é estabelecer relações; quanto mais abrangentes e complexas forem as relações, melhor o sujeito conhecerá. O educador deve colaborar com o educando na decifração, na construção da representação mental do objeto em estudo. [...]. Na elaboração da síntese do conhecimento, na relativa sistematização dos conhecimentos que vão sendo adquiridos, bem como da sua expressão. O trabalho de síntese é fundamental para a compreensão concreta do objeto. Por seu lado, a expressão constante dessas sínteses (ainda que provisórias) possibilita a interação do educador com o caminho de construção de conhecimento que o educando está fazendo. (Vasconcellos, 1992, p.3).

No campo da pedagogia, tais orientações foram tratadas de um modo específico por Davydov (1988), que estabeleceu uma rica produção teórica sobre ensino-aprendizagem, a partir de outros teóricos da área. Particularmente, entendemos que o cerne de nossa proposta repousa no movimento do abstrato ao concreto, determinado pelas seis ações que sintetizam a sua proposta, mas que pretendemos esclarecer detalhadamente no decorrer deste trabalho.

Considerando a tese a ser apresentada, este texto apresenta a pesquisa em seu conjunto e ele compõe-se de seis capítulos, além da Introdução e Considerações Finais. No primeiro capítulo, descrevemos, por meio de uma pesquisa bibliográfica, quais foram as tendências educacionais que orientaram o ensino dos números reais na última década, a partir das leituras de teses e dissertações. Tal revisão bibliográfica identifica as metodologias de ensino utilizadas sobre o tema, os principais teóricos que fundamentaram esses trabalhos, no cenário educacional brasileiro, investigando aspectos relacionados às dificuldades enfrentadas pelos alunos e professores, de um ponto de vista metodológico e formação docente e os principais resultados alcançados por esses trabalhos.

No próximo capítulo são apresentados os seguintes referenciais teóricos: a teoria histórico-cultural formulada por Vygotsky (1998, 2004, 2018), a teoria da atividade estabelecida por Leontiev (2004, 2015) e a teoria do ensino desenvolvimental de Davydov (1988, 1989) complementando por Freitas (2010, 2011, 2012, 2017) e Libâneo (2007, 2012, 2013, 2015, 2016). Esses aportes teóricos são fundamentais na elaboração da proposta de ensino, desenvolvida no último capítulo. Por fim analisamos, dissertações e artigos científicos referentes ao ensino-aprendizagem do conceito de números na proposição de Davydov, para confrontar com o ensino de número na educação vigente, realizada nas escolas brasileiras, principalmente os trabalhos de Rosa, Damazio e Eusébio (2011, 2012) e Rosa e Damazio (2016).

No terceiro capítulo, apresentamos um estudo lógico-histórico e epistemológico dos números reais, mostrando as necessidades e as dificuldades que levaram a sua criação, desde o seu surgimento nas sociedades primitivas até o conceito do número real, no final do século XIX. A análise lógico-histórica é a condição necessária para explicitar a gênese e o desenvolvimento do conceito e, então, identificar seu núcleo conceitual para, depois, situá-lo na proposição de uma abordagem teórica do ensino desenvolvimental, formulada por Davydov. Os fundamentos do lógico-histórico terão como referência os autores Saito-Dias (2013) e Sousa (2014). A respeito da epistemologia dos números reais, nos apoiaremos em Karlson (1961), Caraça (1951), Bongiovanni (2005), Roque (2012) e Ifrah (2005).

No quarto capítulo, apresentamos o aspecto nuclear do conceito de número real, na área da Análise Matemática, realizada a partir da necessidade de uma sistematização deste conceito, para o desenvolvimento de todas as áreas da Matemática. Essa fundamentação teórica proporcionou à Matemática um desenvolvimento consistente, de modo que os conceitos, até então existentes, pudessem ser provados e explicados. Apresentamos, ainda, uma caracterização do número real, evidenciando os números que o constituem: racionais e irracionais, algébricos e transcendentes, e mostramos a irracionalidade de vários números. Para isso, analisaremos os livros de Lima (2004), Ávila (2012) e Caraça (1951), para tratar dos números reais, e Niven (2012), para tratar dos números irracionais.

No capítulo 5, apresentamos uma análise do ensino-aprendizagem do conceito de números na educação básica. Primeiramente, realizamos uma análise de bibliografias que investigaram incoerências, nos livros didáticos, a respeito do ensino de números reais. Para essa análise, nos apoiamos em Trindade (2017) e Almeida (2015). Posteriormente, analisamos dois livros didáticos do 8º e 9º do ensino fundamental, aprovados pelo PNLD 2018, com relação ao conteúdo de números reais, orientados pela BNCC (2017).

Por último, no sexto capítulo, propomos uma possibilidade de ensino para o conceito de números reais, baseada na teoria desenvolvimental de Davydov. Assim, por meio do planejamento de atividades de estudo, visamos desenvolver nos alunos a compreensão dos nexos internos e externos do conceito por meio das ações na resolução das atividades propostas. Tais atividades de estudo buscam compreender a necessidade dos números irracionais na construção dos reais, com problemas investigativos que remetem aos obstáculos da época pitagórica, à descoberta das grandezas incomensuráveis e outros desdobramentos.

1 O ENSINO DO CONCEITO DE NÚMEROS REAIS: UMA ANÁLISE DO TEMA TRATADOS EM TESES E DISSERTAÇÕES PRODUZIDAS NA PÓS-GRADUAÇÃO BRASILEIRA NO PERÍODO DE 2010 A 2018

Neste capítulo, apresentamos um levantamento bibliográfico a respeito das publicações que tratam do ensino do conceito de números reais nas teses e dissertações brasileira, no período de 2010 a 2018, nas diferentes etapas do ensino, desde o fundamental até o superior. Este capítulo tem como objetivo analisar em quais fundamentações teóricas e metodológicas embasaram-se as teses e as dissertações, referentes ao ensino do conceito de números reais, na última década, na pós-graduação brasileira na área da Educação e Educação Matemática, analisando em quais direções as pesquisas estão apontando para o ensino do conceito de número real.

Na educação brasileira, o conteúdo relativo aos números reais, com a incorporação dos irracionais, só é trabalhado no final do ensino fundamental e no ensino médio, focando-se, na maioria das vezes, nos aspectos aritmético e operacional dos números. Já nas proposições de Davydov e colaboradores, segundo Rosa, Damázio e Eusébio (2011), almeja-se ensinar os números reais desde os primeiros anos do ensino fundamental, mostrando-se outro aspecto conceitual de número, apresentado nas noções entre grandezas e nas inter-relações das significações aritméticas, algébricas e geométricas.

É imperativo informar a impossibilidade de realizarmos o movimento do abstrato ao concreto sobre o tema em toda a sua extensão, o que demanda uma atividade longeva, sendo necessário o amadurecimento de certas operações e ações mentais relacionadas, contemplando certas especificidades dos números, como propriedades, limitações operacionais, estrutura e aplicações. Dessa maneira, compreendemos que esses trabalhos são contribuições importantes, mas limitadas a um tipo de números reais, em que é possível aplicar corretamente a proposição davydoviana. Entretanto, notamos uma limitação desses trabalhos para abordarem os irracionais, fato importante na complementação do aspecto geral do conceito.

A partir desta revisão bibliográfica, pretendemos acrescentar novos elementos e novas nuances, inclusive de forma crítica, mas com o intuito de contribuirmos com o debate sobre o que vem sendo investigado nas pós-graduações brasileiras a respeito do conceito de números reais, enfatizando a importância dos números irracionais para o desenvolvimento do ensino de Matemática na educação básica.

1.1 METODOLOGIA DA REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Na revisão bibliográfica de caráter teórico, discutimos as teses e dissertações sobre conceito de número reais, por meio de um recorte temporal de 2010 até 2018, para investigar o que foi produzido, na última década, nos programas de pós-graduação no campo da Educação e da Educação Matemática no território nacional. A busca foi realizada no banco de catalogação da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes). A escolha por este banco de dados ocorreu pela amplitude de disponibilidade de teses e dissertações defendidas nos programas de pós-graduação em nível nacional. Essa escolha foi influenciada, também, pelo acesso gratuito aos trabalhos disponibilizados na plataforma.

No descritor, escrevemos *“o ensino do conceito de número real”* com um recorte temporal de 2010 a 2018, não efetuando, nessa parte, nenhum filtro sobre quais seriam as principais tendências a respeito desse tema na educação e na educação matemática. Na busca, foram encontradas 6.783 teses e 20.018 dissertações, considerando todas as etapas e níveis de ensino, do fundamental até o superior. Como foi um número elevado de publicações, foi necessário filtrar os resultados para efetivar a pesquisa.

Como um dos objetivos da tese era mostrar a importância dos números irracionais na construção dos reais, efetuou-se a seguinte busca com as palavras-chave: “ensino do conceito de números irracionais e números reais”, restringindo a pesquisa para 438 teses e dissertações. Para selecionar as publicações para a revisão, foi realizada, primeiramente, a leitura do resumo, na qual se verificou quais seriam os problemas e a metodologia da pesquisa, assim como os resultados almejados. Em determinados trabalhos, houve a necessidade de leitura da introdução, metodologia e considerações finais, as quais possibilitaram um julgamento melhor referente à pesquisa.

Na seleção das pesquisas, foram excluídas aquelas que focaram somente no conceito de números reais ou irracionais, sem relação com o ensino, pois muitas dessas publicações realizam as construções dos números reais na análise matemática, utilizando vários métodos. As publicações reunidas somaram o total de 30 trabalhos, sendo 26 dissertações e 4 teses, como mostra o Quadro 1, a seguir:

Quadro 1 – Resultado da busca de teses e dissertações no banco da Capes de 2010 a 2018

Nº	Título	Autor	Ano	Instituição
1	Uma Abordagem de ensino dos números reais	Jozan Medeiros	2010	UFPB
2	A complementaridade entre o aspecto intensional e extensional na conceituação de números na proposta de John Conway	Rogério Ferreira da Fonseca	2010	PUC-SP
3	Análise dos conceitos de número irracional e número real em livros didáticos da educação básica	Alexandre Machado Souto	2010	UFRJ
4	Os números reais: um convite ao professor de Matemática do ensino fundamental e ensino médio	Willian José da Cruz	2011	UFJF/MG
5	A construção do significado dos números irracionais no ensino básico	Wagner Marcelo Pommer	2012	USP
6	Proposições de Davydov para o ensino de Matemática no primeiro ano escolar: inter-relações dos sistemas de significações numéricas	Josélia Euzébio Rosa	2012	UFPR
7	Prática: Uma leitura histórico-crítica e proposições davydovianas para o conceito de multiplicação	Silvana Citadim Madeira	2012	Unesc
8	Conjuntos Numéricos	Carlos Eduardo de Lima Duarte	2013	UFRN
9	Uma contribuição ao ensino dos números irracionais e incomensuráveis para o ensino médio	Ana Claudia Guedes dos Santos	2013	UFCG
10	O ensino do conceito de número: objetivações nas proposições davydovianas e formalista moderna	Marlene Beckhauser de Souza	2013	Unesc
11	A construção do conceito de número natural e o uso das operações fundamentais nas series iniciais do ensino fundamental: Uma análise conceitual	Joelma Nogueira dos Santos	2013	UFC
12	Sistema de Numeração e grandezas incomensuráveis	André Valner Ruis	2014	Unesp
13	A construção dos números reais	Ricardo Cesar Massad	2014	PUC-Rio
14	A conceitualização dos números irracionais no primeiro ano do ensino médio	Josimar José dos Santos	2014	UFA
15	Conjunto dos números reais. Uma proposta de ensino do conjunto dos números reais	Fredson Luis Torres Alves	2014	Unifap
16	A introdução do conceito de grandezas incomensuráveis/ números irracionais nos anos finais do ensino fundamental/uma análise do livro didático	Fernando Augusto da Silva Souza	2014	UFPE

Nº	Título	Autor	Ano	Instituição
7	Proposições para o ensino da tabuada com base na lógica formal e dialética	Ediséia Suethe Faust Hobold	2014	Unisul
18	Cálculo no ensino médio. Números reais	Orlando da Silva Júnior	2014	IIMPA
19	O ensino dos números reais na formação do professor de matemática	Cleber Luiz da Cunha	2014	Unoeste
20	A tricotomização entre aritmética, álgebra e geometria nos erros apresentados por estudantes da disciplina de cálculo diferencial e integral	Beatriz Alves Da Silva Dalmolin	2015	Unisul
21	Construção dos números reais voltados para professores da rede básica de ensino	Fernando Araújo Ribeiro	2015	UFC
22	Unidade entre o lógico e histórico no movimento conceitual do sistema de numeração proposto por Davydov e colaboradores para o ensino das operações da adição e subtração	Gisele Mezzari Silveira	2015	Unisul
23	Uma construção geométrica dos números reais	Simone de Carvalho Santos	2015	UFS
24	Estudo da reta numérica na perspectiva histórico-cultural	Priscila de Mattos	2015	USP
25	Organização do ensino de Matemática na perspectiva do desenvolvimento do pensamento teórico: uma reflexão a partir do conceito de divisão	Sandra Crestani	2016	Unisul
26	O ensino de números irracionais para alunos ingressantes na licenciatura em matemática	Geraldo Claudio Broetto	2016	UFES
27	A construção dos números reais e aplicações	José Elias da Silva	2016	UEPB
28	Conceito de análise matemática na reta para bem compreender os números reais no ensino médio	Mirelli Morais de Oliveira	2016	UFCG
29	Sobre a construção do sistema numérico	Tassia Roberta Zangiacomo	2017	Unesp
30	A organização do processo de ensino do conceito de número nos anos iniciais do ensino fundamental: uma análise histórico cultural	Márcia Amélia Guimarães	2018	PUC-Go

Fonte: Elaborado pelo autor da pesquisa.

1.2 ANÁLISE DOS RESULTADOS DA REVISÃO BIBLIOGRÁFICA REFERENTES A TESES E DISSERTAÇÕES NAS PÓS-GRADUAÇÕES

Nas teses e dissertações pesquisadas no banco de dados da Capes, verificamos que o ensino do conceito de número real teve uma produção bastante considerável na última década, destacando-se 30 trabalhos, se considerarmos que a busca se ateve somente ao ensino-aprendizagem de um conteúdo em particular da disciplina de matemática. No Quadro 2, mostramos as produções de teses e dissertações de acordo com o ano da defesa. Ao analisarmos o número significativo de pesquisas a respeito dessa temática, levamos em conta o número de programas de pós-graduação que envolvem ensino e matemática, tais como: Educação Matemática, Ensino de Ciências e Matemática e o Programa de Mestrado Profissional em Matemática, o Profmat[3].

Quadro 2 – Quantidade de defesas por ano

Ano	Teses	Dissertações
2010	1	2
2011	-	1
2012	2	1
2013	-	4
2014	-	8
2015	-	5
2016	1	3
2017	-	1
2018	-	1

Fonte: Elaborado pelo autor da pesquisa.

O programa Profmat teve um aumento expressivo na última década, atingido 75 Câmpus de 61 instituições em todo o país até o ano de 2017 (SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 2017). Ele possui como público-alvo professores de matemática em exercício na educação básica, com destaque para as escolas públicas, que buscam o aprimoramento com ênfase no domínio aprofundado de conteúdos matemáticos, relevantes para suas atuações profissionais. Notamos que uma das preocupações dos docentes da educação básica é o ensino dos números reais.

[3] Profmat é um programa de mestrado em matemática semipresencial, formada por uma rede de instituições de ensino superior e Universidades com o apoio da Capes, SBM (Sociedade Brasileira de Matemática) e o IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada) que tem como prioridade atender professores de matemática da educação básica em exercício.

No Quadro 3, destacamos os programas de pós-graduação que investigaram o conceito de número real, no período de 2010 até 2018, perfazendo-se um total de 6 programas, distribuídos em 22 instituições. Extraímos, ainda, do Quadro 3, que a Unisul, juntamente com a Unesc, foi responsável, no total, por seis pesquisas. As duas instituições têm se destacado em pesquisas sobre o ensino de números e operações fundamentais, baseadas nas proposições davydovianas.

Quadro 3 – Programas de pós- graduação

Instituições	Teses	Dissertações	Programas de pós-graduação
Universidade Federal da Paraíba (UFPB)		1	Profmat
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP)	1		Doutorado em Educação Matemática
Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ)		1	Mestrado em Ensino de Matemática
Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)		1	Profmat
Universidade de São Paulo (USP)		1	Mestrado em ensino de Ciências
Universidade de São Paulo (USP)	1		Doutorado em Educação
Universidade Federal do Paraná (UFPR)	1		Doutorado em Educação Matemática
Universidade do Extremo Sul catarinense (Unesc)		2	Mestrado em Educação
Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN)		1	Profmat
Universidade Federal de Campina Grande (UFCG)		2	Profmat
Universidade Federal do Ceará (UFC)		2	Mestrado em ensino de Ciências e Matemática
Universidade Estadual Paulista Júlio De Mesquita Filho (Unesp)		2	Profmat
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio)		1	Mestrado em Matemática

Instituições	Teses	Dissertações	Programas de pós-graduação
Universidade Federal d e Alagoas (UFA)		1	Profmat
Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)		1	Mestrado em Educação Matemática e tecnológica
Universidade Federal do Amapá (Unifap)		1	Profmat
Universidade do Sul de Santa Catarina (Unisul)		4	Mestrado em Educação
Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA)		1	Profmat
Universidade do Oeste Paulista (Unoeste)		1	Mestrado em Educação
Universidade Federal de Sergipe (UFS)		1	Profmat
Universidade Federal do Espírito Santo (UFES)	1		Doutorado em Educação
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)		1	Profmat
Pontifícia Universidade Católica de Goiás (PUC-Go)		1	Mestrado em Educação

Fonte: Elaborado pelo autor da pesquisa.

No levantamento que foi realizado, também efetuamos uma análise do ensino de número real de acordo com o nível de ensino considerado nas teses e publicações referenciadas. Os dados coletados constam na Quadro 4.

Quadro 4 – Trabalhos por nível de ensino

Modalidade de ensino no estudo teórico ou prático da pesquisa	Tese	Dissertação
Anos iniciais do Ensino Fundamental	1	7
Anos Finais do Ensino Fundamental	1	2
Ensino Médio	-	8
Ensino Superior	2	6

Outros[4]	-	3

Fonte: Elaborado pelo autor da pesquisa.

Analisando o Quadro 4, verifica-se que há oito trabalhos nos anos iniciais do ensino fundamental e todos eles se fundamentam nas proposições Davydovianas para conceituar o número real. Destes, quatro publicações tratam do conceito de número nos primeiros anos do ensino fundamental e quatro tratam das operações fundamentais: adição, subtração, multiplicação e divisão. Ressaltamos que as operações fundamentais, na proposta de ensino de Davydov, têm o seu ponto de partida no conceito geral de número (no caso da multiplicação e divisão) ou na ideia de base numérica no sistema de numeração (adição e subtração). Por isso, essas pesquisas foram colocadas em nossa revisão bibliográfica, pois se relacionam com a nossa investigação.

Por fim, no que diz respeito ao problema de pesquisa dos trabalhos analisados, os quais influenciam no ensino do conceito de números, foram organizados em quatro categorias: 1) Dificuldade do professor/aluno sobre o conhecimento dos números reais; 2) Tratamento dado pelos livros didáticos; 3) Formação docente (dicotomia entre teoria/prática) e 4) Metodologia (dicotomia entre tradicional/inovadora). O número de trabalhos em cada aspecto consta no Quadro 5:

Quadro 5 – Aspectos da pesquisa nos trabalhos analisados

Aspecto da pesquisa	**Tese**	**Dissertação**
Dificuldade professor/aluno sobre o conceito de número real	-	8
Tratamento dado nos livros didáticos	1	4
Formação docente (dicotomia teoria/prática)	1	2
Metodologia (dicotomia tradicional/inovadora)	2	12

Fonte: Elaborado pelo autor da pesquisa.

[4] Inserimos a palavra outros na tabela porque três dissertações não se enquadram em um nível de ensino. Neste caso as três dissertações tratam da formação continuada para tratar do conceito de número real.

As teses e dissertações serão separadas, nos subitens expostos adiante, em conformidade com cada aspecto selecionado no Quadro 5. Em cada abordagem, há trabalhos somente de natureza teórica e outros que, além da fundamentação teórica, possuem estudos de caso ou experimentos didáticos, os quais conferem suporte à teoria por eles exposta.

1.2.1. Dificuldade professor/aluno sobre o conceito de número real

A dificuldade de compreender o conceito de número real, principalmente o número irracional, não é exclusividade dos alunos, mas também de professores, como mostram Fonseca e Igliori (2013). Por isso, mapeamos trabalhos cujos objetos versavam sobre a orientação de alunos e professores (principalmente) na compreensão do conceito de número real, sua construção e propriedades.

Ruis (2014) e Massad (2014) abordam a evolução histórica dos números reais, sendo destacadas por Ruis as grandezas comensuráveis e incomensuráveis, com atenção especial aos irracionais, ao passo que Massad utiliza a fundamentação teórica da Análise Matemática. Ambos os trabalhos têm como objetivo dar segurança aos docentes na hora de ensinar números reais, fornecendo-lhes embasamento teórico para otimizar a definição e a abordagem de tais conteúdos no ensino médio.

Alves (2014) apresenta, em sua dissertação, a seguinte problemática: “como é possível ensinar conjunto dos números reais de forma correta e ao mesmo tempo acessível ao aluno? ” A proposta é trabalhar, no ensino médio, os números reais pelo método axiomático, relacionando-os com elementos algébricos e geométricos (reta real) para que os alunos tenham uma compreensão teórica dos números reais.

No mesmo caminho, Santos (2015) apresenta a construção dos reais, caracterizando-os como números que expressam uma medida na reta (segmento de reta) e depois demonstra que a reta possui uma estrutura de corpo ordenado completo[5]. Ribeiro (2015) e Silva (2016) propõem mostrar que o conjunto dos

[5] A adição e a multiplicação no conjunto dos números reais que satisfazem as propriedades associativa, comutativa, possui um único elemento neutro, todo número não-nulo possui um elemento inverso e a propriedade distributiva que relaciona as duas operações (multiplicação e adição) é uma estrutura algébrica chamada de corpo. Se tal estrutura possui uma relação de ordem com relação as operações de multiplicação e adição é chamado de corpo ordenado. Se este conjunto tiver uma correspondência biunívoca com a reta, o corpo é ordenado completo (LIMA, 2004).

números reais é o único corpo ordenado completo a menos de um isomorfismo, sendo suas dissertações destinadas a professores de matemática e alunos que queiram aprofundar na teoria, pois oferecem aos docentes mais clareza e segurança na hora de ensinar tal conteúdo.

O trabalho de Dalmelin (2015) faz um estudo de caso investigando a natureza dos erros apresentados por 7 estudantes de dois cursos de engenharia de uma Faculdade particular na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I. A pesquisa fundamenta-se na Teoria Histórico Cultura e na teoria do ensino Desenvolvimental de Davydov, sendo que a autora indica que os erros nos quais incorreram tais discentes decorrem da separação entre aritmética, álgebra e geometria.

Por fim, Zangiacómo (2017), em sua dissertação, trabalha as construções numéricas, a saber: naturais, inteiros, racionais, reais. O conjunto dos reais é construído por meio do corte de Dedekind e mostra a imersão do conjunto anterior ao conjunto que surge na sequência.

Diante das exposições, constatamos que as propostas referentes aos números reais estão baseadas em uma abordagem clássica, que tem como fundamento a estrutura de conjuntos, com exceção da dissertação de Dalmelin (2015). Foram utilizadas várias formas de construir os reais (método axiomático, estrutura de corpos, método geométrico), mas todas, em sua essência, fazem uso do corte de Dedekind ou da equivalência de sequência de Cauchy, os quais não utilizam os números irracionais na passagem dos racionais para os reais.

Entendemos, a partir disso, a necessidade de realizar pesquisas futuras nas formas de ensinar os números reais nas licenciaturas, pois ninguém discorda que é extremamente importante os docentes se apropriarem do conteúdo que vão ministrar, mas é imprescindível, também, que se apropriem dos meios com os quais se valerão para ensinar tal conteúdo na educação básica. Concluímos que, no caso do conceito de número real, os cursos de licenciatura em Matemática não são capazes de fornecer aos professores os conhecimentos pedagógicos e didáticos referentes a esse conceito, o que é evidenciado pelos péssimos resultados obtidos pelos alunos nas avaliações nacionais e internacionais referentes a tal tema, como foi apontado na introdução desta tese.

1.2.2 Tratamento dado nos livros didáticos

Sobre esse aspecto do ensino de número real, Pommer (2012), em sua tese, investiga como são abordados os números irracionais nos livros didáticos na educação básica, concluindo que os números irracionais são apresentados de maneira polarizada, ou seja, os números são apresentados de duas maneiras nos livros didáticos: na forma decimal infinita não periódica ou como número não racional. Alguns livros optam pelo viés empírico e outros pela abordagem formal, que é o conhecimento focado na sua forma final, no resultado, não apresentando o processo de formação do conceito. Os livros didáticos não propõem o movimento dialético entre os pares discreto/contínuo, finito/infinito, exato/aproximado, o qual contribui para uma abordagem mais abrangente dos números irracionais em vários aspectos no ensino.

A dissertação de Souto (2010) descreve como os livros didáticos brasileiros abordam o conceito de número real, devido a dificuldades de professores e alunos sobre o assunto. A metodologia está centrada em quatro temas: definições, representações, tarefas e abordagem histórica, nas quais o autor conclui que a abordagem nos livros privilegia os aspectos aritméticos, com tarefas que utilizam procedimentos mecânicos, que nada contribui para o aprofundamento conceitual de número real.

Duarte (2013) aborda, na sua dissertação, as necessidades sociais e humanas para a construção do conjunto numérico, reescrevendo o capítulo do livro de Bento Jesus Caraça, *Conceitos Fundamentais de Matemática*, que possui como objeto os números reais. Esse trabalho tem como justificava a ausência de explicações nos livros didáticos sobre a construção dos números reais, além de possuírem erros conceituais. Por isso, a escolha de reescrever o capítulo do livro sobre este tema, de modo a propor um material acessível aos professores, conciliando a conceituação correta com a escrita de forma clara e didática. O livro de Caraça trata de questões como: O que falta aos números racionais para se ter a correspondência biunívoca com a reta? Quem possui mais elementos, os racionais ou irracionais?

A pesquisa de Souza (2014) investiga como é introduzido o conceito de número irracional, no final do ensino fundamental, pelos livros didáticos aprovados pelo PNLD. Para a análise dos livros, Souza buscou o papel da História da

Matemática, as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) e estudos anteriores sobre o tema. O autor verifica que a matéria é tratada tão somente no campo aritmético e das operações, sem se relacionar com os outros eixos, como grandezas e medidas, recomendados pelo PCNs. Com relação à História da Matemática, os livros analisados recorreram às grandezas incomensuráveis, mas não avançam com relação às tarefas sobre medição e comparação de segmentos.

Oliveira (2016) estabelece uma relação entre a abordagem do número real no ensino médio (por meio dos livros didáticos) e nas licenciaturas. Em sua dissertação, a autora demonstra a completude dos reais, usando o teorema dos intervalos encaixantes, que, segundo sua óptica, torna os números reais mais próximos do conceito utilizado no ensino médio.

Diante desses dados, notamos que, nos livros didáticos, há uma tendência de abordar os números reais (principalmente os irracionais) de maneira empírica, com ênfase no resultado final, não perpassando pelos aspectos lógico-históricos na formação desses conceitos. Efetua-se, na maioria das vezes, somente o tratamento aritmético e deixando-se de lado as relações algébricas e geométricas dos números. Na maioria dos livros didáticos, há a impressão de que somente as raízes não exatas e o número π são números irracionais, restringindo-se as operações com os irracionais a manipulações aritméticas com radicais. Esses dados são preocupantes, pois a maioria dos professores utiliza o livro didático como única referência para o planejamento das aulas.

1.2.3 Formação docente: dicotomia teoria/prática

A pesquisa proposta por Cruz (2011) visa aproximar a matemática escolar da matemática científica, estudada na Universidade, que são distintas em vários aspectos, sendo discutida pelo autor a possibilidade de trabalhar a disciplina análise real, ministrada no curso de licenciatura em matemática, de forma mais próxima à realidade escolar, diminuindo-se, assim, a distância entre formação matemática e formação docente.

Cunha (2014) investiga como os números reais são concebidos enquanto saberes a serem ensinados na licenciatura, com vistas ao aprimoramento da prática docente na escola básica. O autor fundamenta sua pesquisa na necessária desconstrução conceitual enquanto elemento propulsor do desenvolvimento do conhecimento, consoante o preconizado por Bacherlad (2001). A conclusão à qual Cunha chega é de que questões como infinito, incomensuráveis, densidade e constituição dos reais são delegadas na disciplina de Cálculo e Análise Real, sendo que tais questões não se encontram inseridas nas disciplinas de didática da matemática e estágio supervisionado, tão caras à prática docente.

Na mesma linha de Dias, Broetto (2016) também realizou pesquisa qualitativa com o estudo de caso, analisando as imagens conceituais de números racionais e irracionais, trazidas por ingressantes em Matemática, bem como analisar o movimento dessas imagens ao longo da pesquisa, através do experimento didático. Seu objetivo foi o de enriquecer o conhecimento dos estudantes acerca dos números irracionais e prepará-los para ensinar o tema na educação básica de forma adequada.

As análises realizadas nas pesquisas sobre a formação de professores nos cursos de Licenciatura em Matemática, no que diz respeito ao conceito de números reais, mostram que o conceito formal prevalece, principalmente, nas disciplinas de Análise Matemática e Cálculo, desconectadas do conhecimento didático e pedagógico. As aludidas disciplinas não fornecem aos futuros docentes metodologias de como trabalhar tal conteúdo na educação básica. A função docente é complexa e, assim sendo, deve o licenciado apropriar-se não apenas do conteúdo que ensinará, mas, também, da forma pela qual o ministrará, devendo conhecer a realidade da sua escola de atuação, onde fatores externos influenciam no modo pelo qual os alunos aprenderão.

1.2.4 Metodologia: dicotomia tradicional/inovadora

Neste tópico, são apresentadas pesquisas que propõem o ensino de número em várias vertentes didáticas, tais como: classe de jogos (FONSECA, 2010), utilização da reta numérica (MEDEIROS, 2010) e a incomensurabilidade de segmentos de reta (SANTOS, 2013). As pesquisas que trabalham as quatro operações aritméticas fundamentais, que são adição, subtração, multiplicação e divisão, são analisadas segundo as proposições Davydovianas, pois tais proposições utilizam, em sua gênese, o conceito geral de número dado pela sua síntese histórica, que é a relação entre grandezas.

A dissertação de Medeiros (2010) é constituída pelo experimento didático aplicado a uma turma do 3º ano do ensino médio, visando à construção dos números reais recomendados pelo PCNs. O experimento em questão utiliza a reta numérica como eixo orientador, o qual é enriquecido por situações-problemas e pela História da Matemática, procurando associar aritmética, álgebra e geometria na constituição dos reais.

Fonseca (2010), em sua tese, estuda a conceituação do número real apresentada por John Conway, que a interpreta por uma classe específica de jogos. Na pesquisa, de natureza teórica, o autor analisa a natureza epistemológica dos números reais e conclui que a conceituação de Conway favorece a complementariedade entre o aspecto intensional (método internalista e formal próprio da Matemática) e extensional (um jogo) de números reais.

Em sua tese, Rosa (2012) investigou a introdução do conceito de número nos anos iniciais do ensino fundamental na perspectiva da teoria de Davydov, analisando o manual de proposições davydovianas para o professor. A autora mostrou que, nessa abordagem, as relações aritmética, algébrica e geométrica do conceito de número estão interligadas com os fundamentos da Teoria do ensino desenvolvimental de Davydov, no movimento do geral para o particular e do abstrato para o concreto. Neste trabalho, Rosa também compara o manual formulado por Davydov e colaboradores com os livros didáticos aprovados pelo Plano Nacional do Livro Didático (PNLD), indicando as diferenças entre as duas orientações. A utilização do material de Davydov, referente ao conceito de número real, desde os primeiros anos do ensino fundamental, tem como finalidade desenvolver o pensamento teórico do estudante, relacionando as significações aritmética, algébrica e geométrica; enquanto isso, o livro didático tradicional trabalha com a ideia de contagem e noções cotidianas para conceituar número, neste caso o número racional, desenvolvendo no aluno somente o pensamento empírico.

O trabalho de Rosa (2012) sobre a proposição de Davydov busca promover o desenvolvimento do pensamento teórico dos estudantes, mediante a apropriação do conteúdo científico, o qual se figura como função principal da escola. O estudo de número real, proposto nessa teoria, é iniciado a partir da relação geral das noções de grandezas, que estão interligadas com as significações aritméticas, algébricas e geométricas; assim, o conceito geral é dado por uma fórmula algébrica, que é obtida por meio da representação geométrica (objetal e, depois, por segmento) e o conceito particular de número (natural, inteiro, racional, irracional e real) definido posteriormente, pela relação de multiplicidade/divisibilidade através da ideia de grandeza. Com essa metodologia, o movimento conceitual é desenvolvido pela ascensão do concreto ao abstrato e, depois, do abstrato ao concreto pensado, sendo que a dinâmica conceitual constitui a definição singular de número. A construção de número real, proposta pela autora, será analisada com detalhes na nossa fundamentação teórica.

A pesquisa realizada por Santos (2013) apresenta proposta pedagógica pela aplicação de uma atividade na turma do primeiro ano do ensino médio, a qual mostra a importância de segmentos comensuráveis/incomensuráveis para o estudo dos números racionais e irracionais.

Já a proposta feita por Santos (2014), em sua dissertação, tem como objetivo conceituar os números irracionais no primeiro ano do ensino médio, devendo ser trabalhados três temas: irracionalidade de π, $\sqrt{2}$ e representação decimal dos irracionais, fundamentada no livro de Análise Matemática de Figueiredo (2002) e na tese de Pommer (2012). Na mesma linha, da Silva Júnior (2014) elabora atividades no ensino médio que inserem elementos de Cálculo, explorando o máximo possível o conceito de números reais.

Em seu trabalho de pós-graduação, Santos (2013), por sua vez, aborda a construção dos naturais e as operações fundamentais nos anos iniciais. Foram desenvolvidas atividades na construção dos naturais cujo público-alvo foram professoras dos anos iniciais, fundamentando-se a pesquisa didática a partir da sequência Fedathi.

As dissertações de Souza (2013) e Guimarães (2018) discutem o conceito de número no primeiro ano do ensino fundamental, comparando as proposições davydovianas (com base na Teoria Histórico-Cultural) às tendências educacionais baseadas no formalismo moderno. Souza utiliza como referência de análise os livros didáticos das duas propostas de ensino referenciadas, assim como o manual do professor, feito por Davydov e colaboradores. Na investigação de Guimarães, é utilizada a pesquisa de campo realizada em duas escolas municipais da cidade de Goianira em Goiás, sendo o público-alvo professoras efetivas atuantes nos anos iniciais. A autora faz um paralelo entre a atuação das professoras no modelo tradicional e as proposições Davydovianas para o ensino de conceito de número.

Na mesma direção, Hobold (2014) compara o ensino de tabuada, utilizando como referência o livro didático mais utilizado nas escolas estaduais do Sul Catarinense, com o material proposto pelo sistema Elkonin-Davydov. Madeira (2012), Silveira (2015) e Crestani (2016) discutem, em seus trabalhos, as operações fundamentais baseadas nas proposições Davydovianas, embasando-se no livro didático formulado por Davydov e colaboradores nos anos iniciais e no manual do professor, desenvolvido por eles. Madeira aborda a multiplicação e Crestani a divisão, sendo o ponto de partida para conceituar as duas operações a ideia da relação entre grandezas, na qual figura o conceito geral de número real proposto por Davydov, em que as operações são casos particulares desta relação geral. Silveira conclui que a essência das operações de adição e subtração, nas proposições Davydovianas, é constituída por agrupamento e reagrupamento de ordens, bem como determinada por diferentes bases numéricas enriquecedoras do sistema de numeração.

O foco da dissertação de Mattos (2015), por seu turno, é o conceito de números reais, a ser ministrado no primeiro ano do ensino fundamental, em conformidade com o movimento conceitual da reta numérica, preconizado na teoria de Davydov, a qual relaciona, na construção do conceito de número real, diferentes concepções, quais sejam, aritmética, algébrica e geométrica.

Vislumbra-se, assim, que as sugestões teóricas sobre metodologias de ensino, acima descritas, possuem possibilidades de aplicação no campo pedagógico e na didática, levando em consideração a realidade das nossas escolas, que têm necessidade de resolver os problemas que são enfrentados no seu dia a dia. No entanto, destacamos que tais metodologias descritas não trabalham o conceito de número real nas etapas finais do ensino fundamental pelo método histórico dialético. Algumas das sugestões teóricas focam, de forma mais abrangente, o desenvolvimento do conteúdo e dão pouca ênfase no método de ensino. Outros trabalhos propõem aprofundar o conhecimento dos professores à luz da análise matemática, não se preocupando com a didática de ensinar tais conhecimentos.

1.4 CONCLUSÃO DA REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Verificamos várias tendências metodológicas com base em diferentes teorias, que vão do ensino formal às propostas fundamentadas na Educação Matemática, embora, nos últimos anos, os estudos na educação matemática fundamentados na teoria davydoviana tenham aumentado consideravelmente, como reforçam Navarro e Fillos (2017), sendo o ensino-aprendizagem do conceito de número um dos tópicos mais pesquisados.

Constatamos que o ensino-aprendizagem do conceito de número real está muito articulado aos nexos externos[6] do conceito, que são as definições e fórmulas, com ênfase no conteúdo em sua lógica formal, sem considerar a gênese do conceito e uma visão mais abrangente dos significados dos conceitos matemáticos. A ideia de número, nesses trabalhos, não é aplicável em todas as situações, como a comparação de medidas incomensuráveis, que dão origem ao conjunto dos números reais. Não há uma interrelação entre as significações aritméticas, algébricas e geométricas do conceito de número nas etapas finais do ensino fundamental.

Muitos trabalhos analisados têm como objetivo ensinar o conteúdo de números reais para o aprimoramento dos professores, como se o conhecimento aprofundado desse conteúdo resolvesse o problema de como ensiná-lo. É fundamental conhecer com profundidade a matéria que se ensina, mas como ministrar tal matéria não é menos importante. Nos cursos de Licenciatura em Matemática, os futuros docentes aprendem o conceito de número real na disciplina de Análise Matemática, que é desenvolvida, na maioria das vezes, desvinculada da didática, ou seja, não se correlaciona o conteúdo com a sua efetiva prática docente. E trabalhos que visam aproximar o conteúdo da Análise na Universidade com a matemática do ensino médio não contribuem efetivamente com a melhoria do ensino.

[6] "Os nexos externos se limitam aos elementos perceptíveis do conceito. Os nexos externos ficam por conta da linguagem, são formais" (SOUSA, 2014, p. 65).

2 PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM NA TEORIA HISTÓRICO CULTURAL E NA TEORIA DO ENSINO DESENVOLVIMENTAL DE DAVYDOV

Este capítulo tem como objetivo destacar os principais marcos teóricos da teoria histórico-cultural, que são: a mediação, os processos de internalização, a zona de desenvolvimento proximal (ZDP), a formação de conceitos, o significado e o sentido. Além destes temas centrais, existem outros temas interessantes para a compreensão do processo de ensino aprendizagem. A criatividade e o papel das disciplinas escolares para o desenvolvimento cognitivo são dois deles. Soma-se, ainda, segundo Moysés (1997), a questão da atividade e da consciência, desenvolvida por Leontiev (1903-1979) que são aspectos complementares e a atividade em grupo é um dos temas centrais no campo da Educação Matemática sobre a zona de desenvolvimento proximal (POLONI, 2004).

Será apresentada, neste capítulo, a teoria de ensino desenvolvimental proposta por Davydov, que parte de um princípio fundamental da psicologia histórico-cultural, tal como desenvolvida por Vigotski (2004): a aprendizagem impulsiona o desenvolvimento, princípio que serve de base para a teoria da atividade e do ensino desenvolvimental. Uma premissa básica do ensino desenvolvimental é que os métodos de ensino decorrem do conteúdo, ou ainda, dos conceitos que compõem os conteúdos escolares (DAVYDOV, 2018).

Portanto, a atividade de estudo na teoria do ensino desenvolvimental de Davydov é organizada e proposta, pelo professor, por meio de um conjunto de tarefas que poderão levar o aluno a formar, em sua mente, diversos conceitos que, inter-relacionados, compõem um dos conteúdos de uma determinada área do conhecimento a ser aprendido. No fim, será descrita a aplicação de tarefas particulares na teoria do ensino desenvolvimental para conceituar a relação geral de número real (ROSA; DAMAZIO; EUZÉBIO, 2011; ROSA; DAMAZIO, 2012, 2016).

2.1 TEORIA HISTÓRICO-CULTURAL DE VYGOTSKY

Lev Semionovch Vygotsky nasceu em 17 de novembro de 1896, na pequena cidade de Orsha, localizada na Bielorrússia. Filho de família judia, ele viveu em uma época muito conturbada devido às perseguições étnicas que aconteciam durante o período da revolução socialista russa. Cresceu em um ambiente em que foi estimulado intelectualmente, se interessando por várias áreas do conhecimento. Formou-se em Moscou em Filosofia e História e, apesar de nunca ter se graduado em psicologia, aprofundou seus conhecimentos nessa área, cursando, inclusive, medicina com interesse em neurologia, como forma de entender o funcionamento psicológico dos homens (OLIVEIRA, 1993).

Boa parte dos trabalhos de Vygotsky eram pautados na teoria do desenvolvimento mental ontogenético (estudo psíquico desde a concepção de um embrião). Apesar de tanto esforço e dedicação, Vygotsky não teve a oportunidade de ver seus trabalhos serem publicados, pois veio a falecer ainda jovem, aos 37 anos de idade, devido a uma tuberculose que o acompanhou durante toda a vida (OLIVEIRA, 1993). As ideias de Vygotsky não se encerraram após sua morte, ao contrário, multiplicaram-se e desenvolveram-se devido às publicações de seus seguidores, sendo que os mais conhecidos foram Alexander Romanovich Luria e Aleksei Nicolaievitch Leontiev (OLIVEIRA, 1993).

Lev Vygotsky foi um importante pensador na área psicológica, sendo precursor no conceito de que o desenvolvimento intelectual das crianças acontece em função das interações sociais, históricas e culturais. A base da teoria Vygotskyana reside em três princípios básicos para explicar o funcionamento das funções psicológicas do homem, que são: a herança biológica, a relação entre o indivíduo e o mundo exterior que o cerca, que se desenvolve em um processo histórico, e, por último, que a relação do indivíduo com este mundo exterior ocorre por meio de signos e instrumentos, adaptados através da cultura (OLIVEIRA, 2010). Para Vygotsky, o homem é um ser histórico-social ou histórico-cultural, pois este é moldado pela cultura em que está inserido e que ajuda a criar e modificar e é, também, determinado pelas relações sociais em que vive (MELLO, 2004).

A atividade humana é o principal marco da fundamentação da obra de Vygotsky, que tem sua matriz nos fundamentos ontológicos e sócio-históricos do Materialismo Histórico-dialético de Karl Marx (OLIVEIRA, 2010). A obra de Vygotsky e seus colaboradores da União Soviética foi a percussora do que hoje é chamado de Teoria Histórico-cultural (THC). É necessário esclarecer que a THC não se refere a uma simples ação de um sujeito que responde de forma imediata às influências do meio na qual este está inserido, restrita aos limites genéticos da sua espécie biológica, como muitas vezes é entendido. Segundo Oliveira:

> Bem ao contrário, essa categoria empregada na psicologia soviética se refere a uma determinada mediação entre o homem e natureza, entendendo-se aí, também, a natureza modificada por esse homem. [...]. É uma atividade realizada por um sujeito que transforma intencionalmente a natureza e a si mesmo, para além daquilo que foi previsto pela natureza. Está aí subentendido que é através dessa atividade que o homem não só busca satisfazer suas necessidades biológicas, mas, principalmente, aquelas necessidades que ele mesmo vai criando, com os resultados sempre novos dessa atividade que o medeia na sua relação com a natureza, dentro de um determinado contexto. (OLIVEIRA, 2010, p.3).

A atividade humana não é movida somente pelas leis biológicas da natureza, como ocorre com os demais animais, mas pelas leis histórico-sociais, criadas pelo próprio homem ao longo do percurso histórico. A categoria atividade humana foi exposta por Marx e Engles, que queriam demonstrar que, para compreender a realidade humana, era importante compreender a atividade humana como uma atividade revolucionária, ou seja, como uma atividade prático-critica (transformadora) dentro de um determinado contexto histórico-social (OLIVEIRA, 2010).

Marx, em suas obras, segundo Vasquez (1977), discute o conceito de essência humana, concluindo que a essência da natureza humana reside em três dimensões, que são de natureza prática (produtora), social e histórica. Nas palavras do autor “O homem é um ser que produz socialmente, e que nesse processo se produz a si mesmo. Esse autoproduzir-se – como processo no tempo - faz dele um ser histórico” (VASQUEZ, 1977, p. 423).

Para concluir o que determina verdadeiramente a matriz da teoria histórico-cultural, Marx afirma, considerando a categoria atividade humana, que indivíduo e sociedade são dois polos que se complementam, formam o mesmo processo, que é a sociabilidade humana. O indivíduo é formado por meio da realização da atividade concreta, na qual ele se apropria dos conhecimentos já existentes, acumulados historicamente pela humanidade, para executá-la e se objetiva ao concretizá-la, resultando daí o produto de sua atividade. É por meio desse processo de apropriação-objetivação (apropriar dos conhecimentos para realizar uma atividade, obtendo o seu produto, isto é, o objeto) que o homem vai moldando a sua individualidade (OLIVEIRA, 2010). O homem por meio da atividade, transforma a natureza e, consequentemente, transforma a si mesmo, para concretizar a atividade necessita dos conhecimentos acumulados para executá-la, que somente ocorre nas relações sociais, num determinado período histórico. Tendo apresentado alguns aspectos sobre a vida e o trabalho de Vygotsky, passa-se, a seguir, a abordar alguns dos conceitos de sua teoria.

Para o propósito deste trabalho, considerou-se relevante destacar na teoria desse autor conceitos que contribuem para a discussão do ensino de números reais na educação básica porque a formação de conceitos faz parte dos trabalhos de Vygotsky e seus colaboradores, principalmente de Luria, como extensão dos processos de internalização. As investigações relacionam-se com conceitos espontâneos e conceitos científicos. Os primeiros são aqueles obtidos ou apreendidos nas relações do dia a dia. Já os outros são aqueles que são obtidos por uma metodologia específica, por exemplo, em uma sala de aula, quando o professor apresenta algum conhecimento científico (VYGOSTKI, 2000). Segundo Moysés (1997), a questão da atividade em grupo é um dos temas centrais no campo da Educação Matemática sobre a zona de desenvolvimento proximal (ZDP).

Campos (2008) afirma que, para Vygotsky, o desenvolvimento humano é um processo longo, marcado por saltos históricos e é o resultado das relações sociais entre os indivíduos, do aprendizado social e coletivo, da interação e internalização da cultura, seja na forma empírica, teórica ou científica. Isso ocorre desde os primórdios dos tempos ou, para ser mais preciso, quando os indivíduos começaram a se comunicar e se relacionar dentro de um contexto social. Na relação social, já fica implícita a relação de, no mínimo, duas pessoas trocando experiências, informações ou interagindo entre si para que isso ocorra, pois é nesse ato de interação que o sujeito amplia seus conhecimentos, se desenvolvendo cada vez mais e, assim, sendo capaz de modificar a natureza de seus pensamentos, a partir da mediação.

> A compreensão das concepções de Vygotsky sobre o desenvolvimento humano num processo sócio-históricos envolve a noção de mediação, que é feita pela representação mental através do uso de símbolos, isto é, da linguagem, dispensando os referentes concretos. [...]. Assim, os processos simbólicos que interpõem entre sujeito e objeto do conhecimento têm origem social, sendo então fornecidos pela cultura, quando o indivíduo em seu desenvolvimento vai internalizando as formas culturalmente oferecidas de comportamento. (CAMPOS, 2008, p.65)

Vygotsky (1998) destaca dois níveis de desenvolvimento na criança durante seu desenvolvimento intelectual: o nível de desenvolvimento real (ZDR) e o nível de desenvolvimento proximal (ZDP). As capacidades mentais naquilo que a criança já sabe fazer sozinha, sem ajuda de ninguém, determinam o nível de desenvolvimento real. E o que a criança ainda não consegue fazer sozinha, mas que pode ser realizado pela mediação de outra pessoa mais experiente, é entendido como o nível de desenvolvimento proximal.

Nas ideias de Vygotsky, relatadas no parágrafo anterior, a questão do desenvolvimento humano está vinculada à atividade humana, que será refletida nas ações mentais dos indivíduos. Nesse sentido, o desenvolvimento humano ocorre justamente na transformação da zona de desenvolvimento proximal em zona de desenvolvimento real. Para tanto, nesse intervalo, é necessária uma atividade, no sentido pedagógico, com a mediação de alguém mais experiente, no caso o professor.

> Ela é distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da solução independentemente de problemas, e o nível de seu desenvolvimento potencial, determinado através da solução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com companheiros mais capazes. (VIGOTSKY, 1998, p. 112).

A ZDP seria o caminho que a criança percorre para desenvolver papéis que estão em processo de amadurecimento e, ao serem concretizados, passam a integrar a ZDR. A ZDP é um conceito imprescindível para planejar o ensino e explicar seus resultados, pois o desenvolvimento humano caracteriza-se pela habilidade de adquirir ferramentas psíquicas, não negando o desenvolvimento biológico humano, realizado por meio do desenvolvimento social e histórico.

De acordo com Vygotsky (1998), para se ter uma compreensão de zona de desenvolvimento proximal, deve-se considerar o papel da imitação no desenvolvimento mental da criança. Vygotsky, em sua discussão sobre a imitação, nos remete à questão do lúdico, ressaltando a importância que ele traz nos processos iniciais de aprendizagem da criança, que também cria uma zona de desenvolvimento proximal. A ZDP pode ser colocada em prática no desenvolvimento de certa atividade pelo aluno na escola, interligada com o processo de ensino-aprendizagem (OLIVEIRA, 2010). O professor tem como papel conduzir tal processo, dentro da escola, de modo apropriado à condição atual do desenvolvimento do aluno, considerando o seu contexto cultural e social.

Segundo Moreira (1999), a aprendizagem se faz necessária para que ocorra o desenvolvimento humano e o bom ensino é aquele que está à frente do desenvolvimento cognitivo e o dirige. Assim, fica implícita, na teoria de Vygotsky, a dificuldade de alguém entender o conceito real de algo que nunca viu ou teve contato, ou seja, que está distante da ZDP. Por exemplo, como explicar para um estudante de ensino fundamental a teoria da relatividade, desenvolvida por Albert Einstein, se ele nunca teve contato com os conceitos básicos da Física?

Para Vygotsky (1998), a ação de mediação acontece na interação entre o sujeito e o ambiente pela utilização de instrumentos e signos. Os signos (linguagem e escrita), assim como os instrumentos, são criados pelo homem, ao longo da história, e alteram a sua função social de acordo com o nível de desenvolvimento cultural (VYGOSTKI, 2000). Isso porque, para Vygotsky, o verdadeiro aprendizado cognitivo acontece na mediação entre dois sujeitos, em que o conhecimento se torna abundante e internalizado.

Ele afirma que a maior apropriação do ser humano foi a fala, pois foi por meio desta que ele começou a desenvolver suas capacidades mentais mudando o rumo de sua história.

> O momento de maior significado no curso do desenvolvimento intelectual, que dá origem às formas puramente humanas de inteligência prática e abstrata, acontece quando a fala e a atividade prática, então duas linhas completamente independentes de desenvolvimento, convergem (VYGOTSKY, 1988, p.20).

Toda assimilação (sentido da palavra, ciência, artes) acontece por meio da formação de conceito. Em um determinado momento do desenvolvimento da criança (por volta de 2 anos), o percurso do pensamento encontra-se com o da linguagem, iniciando uma nova forma de funcionamento psicológico: a fala torna-se intelectual como função simbólica, generalizadora, e o pensamento torna-se verbal, mediado por significados dados pela linguagem (OLIVEIRA, 2010). Pela união do pensamento verbal e da linguagem intelectual, o ser humano tem um funcionamento psicológico mais sofisticado, mediado pelo sistema simbólico da linguagem. O pensamento verbal passa a predominar na ação psicológica humana, elevando o seu pensamento a níveis mentais superiores. Tais questões são fundamentais para compreendemos o funcionamento humano como fenômeno sócio-histórico, porque o desenvolvimento da linguagem racional e do pensamento racional ocorre por meio da interação do indivíduo com os outros membros do grupo social no qual ele está inserido, num determinado período (tempo), transformando o indivíduo em um ser histórico e social (OLIVEIRA, 2010).

Nas relações entre conceitos, primeiro ocorre o agrupamento sincrético, a formação de complexos e, por último, os conceitos, indo de uma compreensão caótica de significados das palavras até uma compreensão que lhe permite extrapolar o significado que está posto, vendo além do que está aparente, estabelecendo relações e ampliando a compreensão de fenômenos que compõem a realidade social em que vive. “Neste caso, o professor deve partir do conhecimento sincrético (desorganizado para o aluno) para chegar ao conhecimento sintético, o conceito sistematizado” (POSSANAI, 2014 apud SAVIANI, 1981, p. 92).

Uma das premissas básicas da teoria histórico social é que o conhecimento ocorre do interpessoal para o intrapessoal. De fato, a criança nasce num mundo desenvolvido sob todos os aspectos. Busca, inicialmente, se apropriar dos valores culturais transmitidos pela família, pela sua vida social, pelas linguagens falada, escrita e simbólica, todas elas com alto grau de complexidade. Seu conhecimento empírico vai se consolidando, fundamentado nas suas relações sociais. Nessa relação com o mundo que lhe concerne, a atividade mental da criança é mediatizada pela linguagem, juntamente com os objetos ali constituídos, os quais estão carregados de historicidade e são interiorizados, isto é, a criança se apropria dos êxitos do desenvolvimento histórico e dos objetos criados pelo homem para dominar seu ambiente. Isso se dá, inicialmente, por meio da comunicação, depois pela atividade mental, às vezes reprodutiva e criadora, num processo sem fim (FREITAS; LIMONTA, 2012).

O professor deve buscar o princípio geral do objeto, com a finalidade de que o aluno compreenda esse princípio, inicialmente, aplicando-o a situações particulares. Esta deve permitir ao aluno acessar o núcleo do objeto e transitar do geral para o particular e também do particular para o geral. O próprio Vygotsky afirma que:

> Em vez da antiga concepção segundo a qual o conceito surge através de uma simples discriminação de atributos semelhantes de uma série de objetos concretos, os estudiosos passaram a conceber o processo de formação dos conceitos em sua real complexidade como um intricado processo de movimento do pensamento na pirâmide dos conceitos, processo que sempre operava uma transição do geral ao particular e vice-versa. (VYGOTSKY, 2018, p. 233).

Sendo assim, o professor não deve perder de vista que a aprendizagem se constrói por essa via, contemplando a coletividade que se transformará em atividade individual. O processo é do social para o individual, isto é, primeiramente, o aluno interioriza os conteúdos no plano social para, depois, aplicá-los a situações particulares. A principal função do professor é mediar o conhecimento científico com o conhecimento do cotidiano do aluno, é buscar desenvolver o seu aspecto cognitivo, por meio da obtenção do conhecimento científico.

De acordo com Vygotsky (2004, p. 449), “o desempenho do professor deve priorizar o desenvolvimento que considere os aspectos que respirem dinamismo e vida”. O método de ensino-aprendizagem deve provocar no aluno um entusiasmo pela matéria em estudo. Mas, não basta apenas isso para ser um bom professor. Um outro aspecto importante, enfatizado por Vygotsky (2004) é que o professor deve ter em sua base, um amplo conhecimento científico:

> [...] um profissional cientificamente instruído é um professor de verdade antes de ser um matemático [...]. A complexidade crescente das tarefas que se coloca perante o professor, o número de procedimentos exigidos tornou-se tão infinitamente diversificado e tão complicado que, se o professor quiser ser um pedagogo cientificamente instruído, deve ter um embasamento cultural muito vasto (VIGOTSKY, 2004, p. 455).

Vygotsky afirma a necessidade de o professor conectar a escola à vida e a consequência desta ligação é verificada pelo entendimento que o professor tem sobre o trabalho educativo a ser realizado na escola. Assim, a finalidade fundamental da atividade pedagógica deve ser a de proporcionar aos alunos os conhecimentos fundamentais da ciência, o desenvolvimento e a formação de sua independência cognitiva, que combinem com uma atividade que os auxilie para a vida (VIGOTSKY, 2004).

É de grande importância, para que a atividade pedagógica tenha êxito, que o professor tenha domínio de sua matéria. A sua atuação está associada, também, ao conhecimento didático, que dá a ele condições de organizar um ensino de forma que os alunos compreendam e assimilem esses conhecimentos, sendo capazes de fazer suas aplicações. O modo de descobrir a lógica e as relações entre os diversos conceitos e relacioná-los aos conteúdos das diversas matérias é fundamental para que os alunos possam compreender, como um princípio único, as noções científicas.

Uma indagação importante é formulada por Poloni (2004): Qual é a visão social do mundo em vigor nas atividades escolares em que os conhecimentos matemáticos dos alunos são testados em uma linguagem que não entendem, ou em uma linguagem que somente valorize as estruturas lógico-matemáticas? Vygotsky, que trata da aquisição da cultura acumulada historicamente, esclarece que novos conhecimentos devem ser constituídos em uma perspectiva sociocultural. Segundo Poloni:

> Essa psicologia, ao ser tomada como modelo teórico-cognitivo no âmbito da educação matemática, desloca a prática centrada no professor e no aluno

> para centramento de foco nos aspectos sociais que se reportam para a constituição da cidadania, aqui entendida como aquela justa para a maioria. Estabelece relações com o mundo experimentado e não com o circunscrito ao virtual ou às ideias. [...] juntamente com a aquisição de conceitos científicos, essa psicologia permite discutir no coletivo da sala de aula um desenvolvimento segundo a pedagogia histórico-critica (POLONI, 2010, p. 151).

As tentativas de formações dos conceitos matemáticos, no ensino tradicional, ocorrem, em sua maioria, priorizando a transmissão da ciência matemática já elaborada, na tentativa de estruturação do pensamento matemático por meio dos saberes elaborados na concepção final, dados por definições e propriedades, priorizando somente os aspectos externos do conceito.

A teoria histórico-cultural de Vygotsky tem sua fundamentação na lógica dialética, na qual os conceitos matemáticos são expressos no movimento próprio dos significados produzidos socialmente para a aquisição dos conceitos. As leis da dialética são aquelas que dirigem o movimento objetivo da realidade, transformando-as em leis do pensamento, e que apresentam nos conceitos a máxima generalidade; os fenômenos são tratados como processos sociais em constante movimento, que desencadeados, produzem novas transformações.

Leontiev, segundo Poloni (2004), analisa a ampliação da resolução de problemas em matemática, argumentando que, historicamente, a ciência não se separa dos grandes problemas da vida do homem, ajudando-o a resolvê-los, levando-se em consideração o meio social, no qual o educador deve considerar a trajetória de vida dos alunos. A prática coloca professores e alunos em situações de comunicação, cuja interlocução tem a atividade de ensino-aprendizagem, voltada para o desenvolvimento da produção de significado, elevando as faculdades cognitivas dos agentes envolvidos.

No ensino de matemática, determinadas concepções, principalmente no modelo tradicional, consideram o processo de ensino-aprendizagem como processos individuais, mesmo reconhecendo a importância do papel desempenhado pelo educador nos resultados cognitivos obtidos pelos alunos. Na concepção davydoviana do processo ensino-aprendizagem de matemática, o desenvolvimento e a interação entre alunos e professores estão intimamente relacionados, como observa Poloni (2010). Vygotsky, em seus estudos, demonstrou que o conhecimento empírico ou cotidiano surge no contato do aluno com o objeto de estudo de forma direta, assimilando somente as propriedades externas e a experiência sensível na relação com tal objeto de estudo. No conhecimento científico, sugerido pela Teoria Histórico-Cultural, o indivíduo apreende as propriedades internas referentes ao objeto, abstraindo sua relação geral, para depois aplicá-la em situações particulares.

O aluno, para aprender conceitos matemáticos, além das informações recebidas do meio externo, pratica uma intensa atividade mental. As necessidades e motivos são fundamentais para o estudante aprender tais conceitos, pois é pelos motivos e necessidades que se estimula o aluno a desenvolver a atividade, favorecendo a compreensão do conteúdo científico matemático. A atividade coletiva também é importante para o desenvolvimento da produção de significados na disciplina de Matemática; conforme descreve Poloni:

> A implantação de uma atividade pedagógica emancipadora e voltada para a interlocução entre o professor e o aluno tem a aprendizagem/ensino como sustentáculo para desenvolver a produção de significados. Infelizmente, esse processo raramente ocorre na sala de aula de Matemática. O professor se omite, ou equivalentemente, se demite do envolvimento com a possibilidade de construir uma sociedade justa para a maioria, o que hoje passa, inevitavelmente, pelo aprimoramento de determinada concepção de educação matemática e comunicação (POLONI, 2010, p. 158).

A aprendizagem da matemática, na perspectiva da Teoria Histórico-Cultural, oferece uma alternativa emancipadora, pela interação social e orientada prospectivamente a partir da atuação na zona de desenvolvimento proximal (ZDP) do aluno. O educador deve atuar na ZDP do aluno na elaboração dos conceitos matemáticos, na interlocução com o professor e colegas discentes, juntamente com ferramentas e informações relevantes para a internalização de tais conceitos pelos estudantes. No processo de ensino-aprendizagem de matemática, os alunos têm que ser ativos e interativos.

Na perspectiva histórico-cultural realizada em grupos, a assimilação dos conceitos científicos da matéria ensinada (no caso a Matemática), a sua lógica e a sua gênese e o sentido de realizar a atividade é de fundamental importância que os integrantes se apropriam das habilidades e aptidões cognitivas inerentes à realização desta tarefa.

Um dos principais pressupostos da teoria do ensino desenvolvimental de Davydov é de que a aprendizagem acontece do interpessoal para o intrapessoal, ou seja, a criança começa a internalizar novos conceitos a partir do contato com outras pessoas mais experientes ou na interação com outras culturas. Davydov, citando Leontiev (DAVYDOV, 1988, p. 31), afirma “que a atividade interna é secundária, na qual ela se forma no processo de interiorização da atividade objetal externa". Há uma relação recíproca entre a atividade externa e atividade interna, pois ambas fazem a mediação das inter-relações entre o homem e o mundo. Segundo Vygotsky:

> Um processo interpessoal é transformado num processo intrapessoal. Todas as funções no desenvolvimento de uma criança aparecem duas vezes: primeiro, no nível social, e depois, no nível individual; primeiro entre pessoas (interpsicológica), e depois no interior da criança (intrapsicológica) (VYGOTSKY, 1991, p.41)

As funções psíquicas superiores, como a linguagem, o pensamento, a leitura, a memória, o cálculo, antes de se internalizarem no indivíduo, precisam ser vivenciadas nas relações sociais. O processo de aprendizagem é coletivo, isto é, resulta da interação entre o professor ou entre uma criança mais experiente com a criança que aprende. Rubtsov (1996) descreve que pesquisas realizadas por psicólogos mostraram que a aptidão para a aprendizagem é resultado de uma determinada interiorização, de maneira que a atividade de aprendizagem (de estudo) se apresenta, essencialmente, sob a forma de uma atividade realizada em comum, na qual as tarefas são repartidas entre os alunos, ou entre alunos e professor (RUBTSOV, 1996).

2.2 TEORIA DA ATIVIDADE DE LEONTIEV

Alexei Nikolaievich Leontiev nasceu em 18 de fevereiro de 1903, em Moscou. Aos 22 anos de idade, terminou a Faculdade de Ciências Sociais da Universidade de Moscou. Sua orientação em Psicologia foi de Chelpanov. O ano de 1924 marcou o início da vida profissional e científica de Leontiev, pois, entre outros acontecimentos, ele foi nomeado colaborador científico do Instituto de Psicologia. Nesse mesmo ano, aconteceu uma mudança fundamental no rumo científico e pessoal de Leontiev: a relação com Luria e com Vigotski, nesta ordem, que, em conjunto, desenvolveram uma teoria da origem sócio- histórica das funções psíquicas superiores, as funções especificamente humanas. Entre 1936 e 1940, realizou um importante ciclo de investigações destinado ao estudo do desenvolvimento histórico da psique no aspecto filogenético e da consciência humana. Leontiev faleceu em 1979, em Moscou (GUIMARÃES, 2018).

Na concepção da Teoria Histórico-cultural, a atividade é um marco fundamental, pois é por meio desta que acontece a relação entre o sujeito e a realidade objetiva. O homem, como foi citado anteriormente, não reage ao meio em que está inserido de forma mecânica, e sim por meio de sua atividade, colocando-se em contato com o objeto e o fenômeno do mundo que o cerca, agindo sobre eles, transformando-os e transformando a si mesmo (FACCI, 2004).

A teoria da Atividade foi desenvolvida por A. N. Leontiev como desdobramento da Teoria Histórico-cultural e foi estudada por seus seguidores. Vygotsky, Leontiev e Luria formaram a primeira geração do que ficou conhecida por “A Escola de Vygotsky”, trabalhando juntos até a morte de Vygotsky, em 1934. No começo dos anos 1930, Leontiev liderou uma equipe de pesquisadores para investigar a teoria da atividade humana. Posteriormente, outros autores desenvolveram estudos mais pontuais da teoria da atividade, como, por exemplo, Elkonin (psicologia do desenvolvimento) (LIBÂNEO; FREITAS, 2008).

A terceira geração, liderada por Davydov, formulou a Teoria do Ensino Desenvolvimental, nos anos de 1960, pesquisando a atividade de estudo, cuja base é o conteúdo das disciplinas escolares, na qual a aquisição do saber teórico-científico, pela realização da atividade de estudo, desenvolve nos escolares suas capacidades cognitivas e o pensamento teórico (LIBÂNEO; FREITAS, 2008).

Leontiev, corroborando com as pesquisas de Marx e Engels, reafirma que é pela atividade (no caso o trabalho) que o homem entra em contato com a realidade objetiva, isto é, o homem não reage automaticamente às influências do meio social, ele transforma a realidade a sua volta e, consequentemente, transformando a si mesmo. Segundo Leontiev, é pela atividade que surge a consciência, que é o início de uma etapa superior no desenvolvimento psíquico humano. Engels escreve sobre o trabalho (principal atividade humana): “O trabalho criou o próprio homem. O trabalho criou também a consciência do homem” (LEONTIEV, 2004, p. 76).

> O aparecimento e o desenvolvimento do trabalho, condição primeira e fundamental da existência do homem, acarretam a transformação e a hominização do cérebro, dos órgãos de atividade externa e dos órgãos dos sentidos. “Primeiro o trabalho, escreve Engles, depois ele, e ao mesmo tempo que ele, a linguagem: tais são os dois estímulos essenciais sob a influência dos quais o cérebro de um macaco se transformou pouco a pouco num cérebro humano, que malgrado toda a semelhança o supera de longe em tamanho e em perfeição” (LEONTIEV, 2004, p.76).

Corroborando essa afirmação, Davydov ressalta que:

> O desenvolvimento mental de um indivíduo é, antes de tudo, constituído a partir de uma atividade reflexo da realidade vivida em sua consciência, de

> sua consciência e, claro, de todos os processos mentais as que “servem”, como os processos cognitivos, emocionais etc. (DAVYDOV, 1988, p. 14).

O princípio da atividade pode ser articulado em dois processos: 1º) todos os processos e funções (estruturas) do homem emergem-se, desenvolvem-se e se convertem em uma atividade relacionada com os objetos que vinculam o indivíduo com o mundo; 2º) todos os processos mentais superiores dos homens são derivados da atividade externa, tem sua origem nas relações sociais do indivíduo em seu contexto social e cultural (LEONTIEV, 2004).

Leontiev pesquisou também o desenvolvimento de várias formas de atividade dos animais, concluindo que, por mais complexa que seja a atividade dos animais, jamais ela terá o caráter social, isto é, não é realizada no coletivo e não determina as relações de comunicação entre os seres da mesma espécie que a executam. Segundo Leontiev:

> O trabalho humano é em contrapartida, uma atividade originariamente social, assente na cooperação entre indivíduos que supõe uma divisão técnica, embrionária que seja, das funções do trabalho; assim, o trabalho é uma ação sobre a natureza, ligando entre si os participantes, mediatizando a sua comunicação Marx escreve: “Na produção os homens não agem apenas sobre a natureza. Eles só produzem colaborando de uma determinada maneira e trocando entre si as suas atividades” (LEONTIEV, 2004, p.81).

Outra diferença entre a atividade humana e a atividade dos animais está na relação entre o objeto da atividade (necessidade) e o motivo de realizá-la. Segundo Leontiev, “o objeto da atividade dos animais confunde-se sempre com seu motivo biológico, por mais complexa que possa parecer tal atividade” (LEONTIEV, 2004, p. 82). O autor pontua que, na atividade humana, nem sempre o seu motivo coincide com o objeto. Na atividade de um indivíduo, realizada no meio coletivo, quando um membro da coletividade realiza uma atividade, ela se realiza, também, para satisfazer uma necessidade.

Leontiev (2004) utiliza o exemplo do batedor em uma caçada coletiva. A atividade do batedor é estimulada pela necessidade de se alimentar ou de se vestir, mas a sua atividade não está diretamente orientada com a satisfação de alimento ou de vestuário. Ela está direcionada a assustar a caça em direção a outros caçadores que estão à espreita, para realizar o abate. Nesse exemplo, o motivo da atividade não está ligado diretamente à necessidade, que é abater o animal. Portanto, quando o processo da atividade para atingir um objetivo não coincide com o seu motivo, dá-se o nome de ação.

Como se dá a separação do objeto da atividade de seu motivo? Ela ocorre no seio do processo coletivo agindo sobre a natureza. Como escreve Leontiev, "O produto do processo global que responde a uma necessidade da coletividade, acarreta igualmente a necessidade que experimenta um indivíduo em particular" (LEONTIEV, 2004, p. 83). O autor destaca que a atividade humana se concretiza por meio de ações e operações (tarefas), suscitadas por necessidades e motivos. Desse modo, a atividade humana não pode existir a não ser em forma de ações ou grupo de ações que lhe são necessárias em função de um objeto.

Logo, Leontiev (2004) verificou que a consciência (a passagem para o desenvolvimento do psiquismo em nível superior) só podia aparecer nas condições em que a relação do homem com a natureza era mediatizada pelas suas relações de trabalho com outros. A consciência humana faz a distinção entre a atividade (gerada por um motivo) e o objeto (o seu fim). A consciência é um produto histórico desde o início (MARX, 1975 *apud* LEONTIEV, 2004).

Davydov incorporou, em sua teoria do ensino desenvolvimental, os elementos que constituem a atividade humana formulada por Leontiev, que são: objeto, necessidade, motivo, ações, operações e condições (LIBÂNEO; FREITAS, 2017). Esses componentes da atividade podem ser utilizados em qualquer atividade humana, inclusive na educação escolar. Para isso, é preciso compreender qual é o conteúdo objetivo e os componentes da atividade específica para conhecê-lo em sua totalidade. Davydov identificou o conhecimento teórico como o conteúdo central da atividade de aprendizagem dos alunos (LIBÂNEO; FREITAS, 2017).

2.3 TEORIA DE ENSINO DESENVOLVIMENTAL DE DAVYDOV

Vasily Vasilyevich Davydov tem seu nascimento em 1930, na cidade de Moscou, e seu falecimento em 1998, aos 68 anos. Cursou Filosofia e Psicologia na Universidade Estadual de Moscou e, então, teve início sua carreira, como pesquisador na área da psicologia pedagógica. Davydov trabalhou na investigação da aprendizagem, dos processos de ensino e desenvolvimento no contexto escolar. Nos anos de 1960 e 1970, juntamente com o psicólogo Elkonin (1904-1984), desenvolveu pesquisas a respeito de atividade de estudo e estabeleceu a "Teoria do

Ensino Desenvolvimental", se formando no bom emprego pedagógico da teoria histórico-cultural para a educação. Seus estudos tinham como objetivo identificar as características psicológicas, como o desenvolvimento do pensamento teórico dos alunos (LIBÂNEO; FREITAS, 2017).

Davydov, em suas pesquisas, tinha como principal problema: Como o ensino e a educação formam, em uma pessoa, capacidades mentais que anteriormente não tinham sido desenvolvidas? (DAVYDOV, 1988, p. 10). Assim, ele conclui que "a organização do ensino que desenvolve as potencialidades mentais dos alunos seria pela formação do conceito teórico" (LIBÂNEO; FREITAS, 2019, p. 213).

A teoria formulada por Davydov teve a pretensão de fornecer uma base teórica e metodológica de ensino, constituída a partir da Teoria Histórico-cultural de Vygotsky, sobre a qual possuía bastante conhecimento, já que foi colaborador das pesquisas de Luria e Leontiev. As ideias formuladas por seus antecessores fundamentaram uma didática que visa proporcionar o desenvolvimento dos alunos, chamada de ensino desenvolvimental (LIBÂNEO; FREITAS, 2019). Segundo Libâneo e Freitas:

> O ensino desenvolvimental, tal como propôs Davydov, mantém a premissa básica da teoria histórico-cultural segundo a qual a educação e o ensino são formas universais e necessárias do desenvolvimento humano, em cujo processo estão interligados os fatores socioculturais e a atividade interna dos indivíduos (LIBÂNEO; FREITAS, 2013, p. 5).

As principais premissas da teoria desenvolvimental de Davydov foram baseadas na teoria histórico-cultural de Vygotsky (LIBÂNEO; FREITAS, 2017). Para Davydov, o aspecto essencial da aprendizagem é que ela estimula e ativa os processos internos do desenvolvimento da criança, sendo um dos pilares da teoria de Vygotsky. Por esse motivo, Davydov defende a escola e o ensino dos conhecimentos científicos como os principais meios de promoção do desenvolvimento psicológico e sociocultural desde a infância. Além disso, baseado em Vygotsky, Davydov atribui ao ensino um papel fundamental na promoção mental do aluno, por meio da atividade de estudo com foco no conhecimento teórico, na generalização e abstração

Para Davydov, a função da escola contemporânea consiste em ensinar os alunos a orientarem-se, independentemente, na formação científica e em qualquer outra, ensinando-os a pensar, mediante um ensino que impulsione o desenvolvimento mental. (DAVYDOV, 1988 apud LIBÂNEO; FREITAS, 2017). A Teoria do Ensino Desenvolvimental tem a escola como um lugar democrático, que deve propiciar ao aluno um conhecimento teórico acessível para, assim, formar seu pensamento teórico (LIBÂNEO, FREITAS, 2017).

Para Libâneo (2012), a teoria desenvolvimental tem como pressuposto que a função preponderante da escola é a de assegurar os meios necessários para que os alunos se apropriem dos conhecimentos e, assim, formem um método teórico-conceitual de pensar e atuar. A apropriação de conhecimento requer dos alunos mudanças psíquicas, na maneira de pensar e relacionar o objeto de estudo, bem como mudanças comportamentais quando se encontra em dificuldade em compreender determinados assuntos.

Libâneo e Freitas (2017) destacam que o fator que motivou Davydov a formular esta teoria, que era a sua preocupação com o ensino da época e como poderia influenciar a construção da sociedade e dos futuros adultos. Para ele era insuficiente que a escola ensinasse de forma fragmentada ou instruir a ciência com informações ou fatos de forma isolada. A sua visão era de que o processo escolar deveria formar cidadãos, cada vez mais, autônomos na busca pelo conhecimento e, assim, influenciar a sociedade de forma positiva como cidadãos críticos, capazes de mudar a natureza e os caminhos de sua própria história.

Os conteúdos científicos representam a síntese do pensamento humano em uma determinada área. Tais conhecimentos estão presentes, principalmente, nos livros, *softwares*, teses, entre outros. Por exemplo, se considerarmos os números reais, como são apresentados nos livros didáticos, sua representação constitui um momento importante de sua história. Para o aluno, é essencial compreender seu alcance, com a finalidade de se apropriar do conceito, pois deste resultado se tem o desenvolvimento do pensamento matemático, nesta e em outras situações que serão apresentadas futuramente.

Por isso, é fundamental estruturar os conteúdos escolares de modo a formar nos alunos o pensamento teórico, importante para o seu desenvolvimental mental, mediante a apropriação do princípio geral do objeto de estudo, reconstruído sob a forma de conceito teórico. A formação do conceito se dará por meio da atividade de estudo, possibilitando o exercício das funções mentais dos alunos (LIBÂNEO, 2012).

Para compreender as premissas básicas da teoria do ensino desenvolvimental, que coloca em evidência o desenvolvimento do pensamento humano, indicando a possibilidades que decorrem desta teoria para ensinar o conteúdo de números reais, serão identificados dois tipos de pensamento humano: o pensamento empírico e o pensamento teórico e os tipos de abstrações, generalizações e formação de conceitos a eles correspondentes (DAVYDOV, 1998). Davydov (1998) revela, ainda, que a formação do conceito teórico é interiorizada por meio das tarefas de estudo, procedimento esse conhecido como ascensão do abstrato para o concreto pensado.

2.3.1 Formação de conceitos. Pensamento empírico e pensamento teórico

> Para Vygotsky (2018) o conceito é a representação mental de um objeto ideal ou real no nosso pensamento através de abstrações, que assimila o objeto concreto e o reproduz mentalmente. A formação do conceito se inicia pela abstração, por meio das palavras ou signos, que orientam nossas ações mentais (VYGOTSKY, 2018).

O conceito interiorizado é dado pelo processo de internalização das operações psicológicas, obtidas inicialmente na vida social, por meio do domínio de signos e instrumentos culturais que, ao longo do movimento histórico, vão regulando as suas próprias operações mentais superiores (VYGOTSKY, 2018). Inspirado na afirmação anterior, Davydov formulou a teoria do ensino desenvolvimental, aplicando a formação de conceitos de Vygotsky no processo de ensino-aprendizagem.

Para Vygotsky (2018), existem três estágios básicos que culminam na formação do conceito. No primeiro estágio, temos o amontoado sincrético, no qual a criança associa, a partir de uma única impressão, elementos diversos e desconexos, agrupando-os por conglomerados vagos, são sincréticos de objetos isolados, sem identificação de relação entre eles (VYGOTSKY, 2018, p. 175). Já o segundo estágio, que é o pensamento por complexos, a criança organiza os objetos não de forma isolada, mas por classes, reconhece relações entre esses objetos. Nas palavras de Vygotsky:

> Essa passagem para o tipo superior de pensamento consiste em que, em vez do nexo desconexo que serve de base a imagem sincrética, a criança começa a unificar objetos homogêneos em um grupo comum, a complexifica-los já segundo as leis dos vínculos objetivos que ela descobre em tais objetos. [...]. Já não confunde as relações entre as suas próprias impressões com as relações entre objetos – um passo decisivo para se afastar do sincretismo e caminhar em direção a conquista do pensamento objetivo (VYGOTSKY, 2018, p. 179).

O conceito por complexos representa a transição para a formação do conceito. Na última etapa do complexo, chamada de pseudoconceito, a criança forma generalização, mas diferente da generalização do adulto, porque ainda se orienta pela semelhança concreta sensorial. “Os resultados são idênticos na obtenção do conceito, mas os processos mentais são distintos” (VYGOTSKY, 2018, p. 194).

O terceiro estágio é o pensamento por conceito, que se forma pela operação intelectual que envolve todas as funções mentais, sendo esta operação guiada pelo uso das palavras como o meio para fixar a atenção e abstrair a máxima semelhança entre os objetos, sintetizando-os e representando-os por meio de signos, segundo Vygotsky (2018). Portanto:

> O conceito surge no processo de operação intelectual, não é o jogo e associações que leva a obstrução dos conceitos: em sua formação participam todas as funções intelectuais em uma original combinação, sendo que o momento central de toda essa operação é o uso funcional da palavra como meio de orientação arbitrária da atenção, da abstração, da discriminação de atributos particulares e de sua síntese e simbolização com o auxílio do signo (VYGOTSKY, 2018, p. 236).

Davydov (1998) afirma que a estrutura das disciplinas escolares deve proporcionar no aluno um nível mais alto de desenvolvimento do pensamento, o qual é a principal finalidade do processo de ensino-aprendizagem. A organização do ensino, vigente na escola atual (na época de Davydov, que continua vigente no Brasil), é orientada, em sua maioria, na formação do pensamento empírico. O pensamento empírico é obtido a partir de um objeto de estudo por meio da sua classificação, pela experiência sensorial e um estudo do material concreto dado visualmente, desenvolvendo aspectos superficiais do objeto, que possibilitam as ações mentais de sistematização, classificação e hierarquização de objetos, sendo um caminho fundamental, mas não suficiente no desenvolvimento da consciência dos alunos (DAVYDOV, 1998).

A generalização aparece, com frequência, na didática e nos métodos de ensino, sendo associada na tradição escolar à assimilação de conceitos por meio da comparação entre objetos que possuem semelhanças dadas sensorialmente, separando-os em classes, chegando a seu conceito por meio da palavra (DAVYDOV, 1998). Para Davydov (1998), esse tipo de generalização, chamada de empírica, é o passo inicial para se chegar ao conhecimento teórico. Este conhecimento é obtido pela formação do conceito do objeto de estudo, revelando a sua essência, a lei geral e suas propriedades internas, de modo a transformar tais propriedades em conceitos científicos, desenvolvendo o pensamento intelectual do aluno em sua integridade.

Assim: “Esse tipo de generalização, na interpretação do geral como igual ou semelhante em um grupo de objetos, separando-os em traços essenciais e depois o descrevendo através da representação sensorial, forma o conceito empírico” (DAVYDOV, 1998, p. 107). O conceito empírico consiste na descrição do objeto; para Davydov (1998), essa discussão conceitual é realizada pelo professor de Matemática quando este descreve os objetos matemáticos, fundamentado na lógica formal dessa ciência, não considerando a importância da experiência do aluno num processo educativo.

Para exemplificar, no nosso ensino atual, chamado de tradicional por Davydov, os conceitos científicos são ministrados desde os anos iniciais do ensino fundamental na educação escolar, mas tal conteúdo é exposto de forma verbal, visual, concreta, que vai do mais simples ao mais complexo. Nessa perspectiva, o aluno desenvolve somente o pensamento empírico, classificador e resultante da experiência sensorial. Reforça-se que Davydov considera o conhecimento empírico importante, mas não o mais efetivo na promoção do desenvolvimento amplo e crítico do pensamento do aluno.

> A estruturação moderna das disciplinas escolares (em todo caso, para os primeiros graus) deve propiciar a formação, nos alunos, de um nível mais alto de consciência e de pensamento que aquele a qual se orienta a organização até agora vigente do processo de aprendizagem na escola. O conteúdo e os métodos do ensino primário vigentes se orientam predominantemente à formação, nos escolares dos primeiros graus, das bases da consciência e do pensamento empíricos, caminho importante, mas não o mais efetivo na atualidade, para o desenvolvimento psíquico da criança (DAVYDOV, 1988, p. 103).

As abstrações e generalizações, formadas a partir dessa lógica formal, não expressam o conceito teórico, pois ele permite descrever somente os resultados do pensamento empírico, como classificar objetos segundo suas semelhanças, por meio de traços concretos dados visualmente (DAVYDOV, 1998). Este tipo de conhecimento, fornecido pelo pensamento empírico, é o passo inicial do conhecimento, no qual o conteúdo adquire uma generalização na sua lógica-formal.

> O entendimento está, orientado, antes de tudo, à separação e comparação das propriedades dos objetos com a finalidade de abstrair a generalidade

> formal, quer dizer, dá-lhe a forma de conceito. Graças a isso, pode-se diferenciar e separar com precisão os objetos. Este é o degrau inicial do conhecimento, no qual o conteúdo da contemplação adquire uma universalidade abstrata, formal (DAVYDOV, 1988, p. 110).

Por outro lado, o pensamento formal não expressa o conceito teórico, que passa da descrição dos fenômenos à descoberta da sua essência, como conexão interna deles, que são diferentes das propriedades dadas diretamente pela lógica-formal (DAVYDOV, 1998). Para isso, o ensino necessita partir da essência do objeto de estudo, aquele aspecto que o distingue dos outros, sua relação geral que o define, para que, em seguida, o aluno seja capaz de concluir relações particulares sobre este objeto de estudo.

No ensino dos números reais, na maioria das vezes, é pedido ao aluno para classificar e separar os números reais em racionais e irracionais, a partir de uma lista de números dada *a priori*. Esse processo leva-o realizar generalizações empíricas, por meio da observação dada visualmente, na qual o aluno desenvolve somente o pensamento empírico, não ultrapassando para o próximo nível de desenvolvimento mental, por meio da assimilação do conceito teórico.

O conceito teórico é uma unidade de dois processos: a investigação científica, que possibilitou a sua criação, e as ações mentais, presentes nesse processo de criação. “Por esse motivo é que o foco da aprendizagem não é o conteúdo em si, mas principalmente, a apropriação das ações mentais conexas a esse conteúdo” (FREITAS, 2016, p. 391).

O pensamento teórico opera propriamente com conceitos científicos, compreendendo o conceito em sua essência. Isto quer dizer que a essência não pode ser abstraída diretamente, pois ela é a reunião de coisas desiguais, que só se revelam pela relação entre o geral e o particular, o universal e o singular (DAVYDOV, 1998).

> As ações que estabelecem as conexões entre o externo e o interno (singular e universal) constituem a base para a compreensão do objeto. A continuação do processo de formação do concreto, com a ajuda destas ações, é o pensamento realizado em forma de conceitos, isto é o pensamento teórico (DAVYDOV, 1988, p. 139).

Nas ciências matemáticas, há uma relação entre o conteúdo do conceito e a sua construção. Por exemplo, o conceito de números reais só é entendido na sua construção, que é a ideia de medição de grandezas. Dialeticamente, a compreensão da essência dos números reais se dá pelas conexões internas das partes que formam o todo.

Para o desenvolvimento do pensamento teórico dos estudantes, segundo Freitas (2016), a apropriação dos conceitos científicos ocorre pelo movimento do abstrato ao concreto, do geral para o particular e do universal para o singular. Com este procedimento, o desenvolvimento intelectual será voltado para a formação de conceitos, pela abstração e generalização do objeto de estudo, fazendo com que a apropriação de tais conceitos estabeleça o pensamento teórico dos estudantes.

O Quadro 6, a seguir, é baseado em Davydov (1998) e determina as diferenças entre o conhecimento empírico e conhecimento teórico.

Quadro 6 – Pensamento teórico e empírico

Conhecimento empírico	Conhecimento teórico
Deriva da observação sensorial	Busca as relações e conexões internas não observadas diretamente
Busca semelhanças e diferenças	Busca contradições, conflitos e contrastes.
Propriedades comuns dos objetos através da identificação, comparação e classificação	Busca o processo de constituição do objeto, sua origem, sua transformação e movimento.
Ordenação do conteúdo com base em características formais	Utiliza a atividade humana na constituição do objeto, pelo processo lógico e investigativo
O conceito se confunde com a definição	Não visa a descrição, mas a descoberta da relação geral dentro das relações do objeto (geral/particular e universal/singular)

Fonte: Davydov (1998, p. 154-155).

2.3.2 Generalização e abstração

Para a formação do conceito nos alunos, o método aconselhado é o que permite o movimento do abstrato ao concreto, segundo a Teoria Histórico-cultural. Para realizá-lo, é necessária a atenção aos seguintes procedimentos mentais: a abstração e a generalização (FREITAS; LIBÂNEO, 2017). Para alcançá-los, orientam-se os seguintes procedimentos: concreto sensorial, abstração substantiva, generalização substantiva até atingir o concreto pensado, que é dado pelo conceito teórico.

O concreto sensorial, que é o objeto real, é captado pela experiência sensorial, nas suas relações mais simples, dadas diretamente. O objeto é apreendido pela contemplação e representação, captando a sua totalidade, mas de forma desconectada, fragmentada, não estabelecendo o caráter das relações internas. Temos o concreto I, dado sensorialmente (DAVYDOV, 1998).

O procedimento é dado pela assimilação do concreto real no pensamento e sua reprodução mental é chamada por Davydov (1998) de abstração substantiva. Esta abstração contém os aspectos mais importantes, essenciais do objeto de estudo. As abstrações substantivas não devem ser dadas diretamente pelo professor, e sim pelos alunos por meio das tarefas de estudo, que devem abstrair e identificar o traço geral, o aspecto universal do objeto (LOMPSCHER, 2018).

A essência do objeto é mediatizada (passa por uns e outros fenômenos), é o interno com base nos fenômenos que se manifestam externamente, segundo Davydov (1998). Por isso, o método de ensino proposto por Davydov difere do método baseado nos resultados da ciência pela descrição dos objetos pelo professor, pois é pela abstração substantiva que determina a essência, o traço universal do objeto.

Davydov (1998) destaca o papel da análise neste processo da abstração substantiva, que reduz as diferenças existentes dentro da totalidade a uma única base, que é a sua essência. “Primeiro se separa (completar) e depois estuda a sua forma universal” (DAVYDOV, 1998, p. 148). Assim, temos uma apropriação do objeto, por meio das suas relações internas e externas, suas contradições, as conexões essenciais do real concreto, ascendendo ao concreto pensado. Para Davydov, o pensamento teórico se realiza desta forma:

> O pensamento teórico se realiza de duas formas fundamentais: 1) pela análise dos dados reais e sua generalização separa-se a abstração substantiva, que estabelece a essência do objeto concreto estudado e que se expressa no conceito de sua “célula”; 2) depois, pelo caminho da revelação das contradições nesta “célula” e da determinação do procedimento para sua solução prática, segue a ascensão a partir da essência abstrata e da relação universal não desmembrada até a unidade dos aspectos diversos do todo em desenvolvimento, ao concreto (DAVYDOV, 1988, p. 150).

Após a abstração substantiva no processo de ascensão ao concreto pensado, realiza-se a generalização substantiva que, nas palavras de Davydov (1998), é quando se descobre as inter-relações do universal com o singular e o geral com o particular. Para Libâneo e Freitas (2017), é neste momento que os alunos detectam situações particulares envolvendo o objeto de estudo, que pode ser solucionado pela relação geral que o rege.

> Pode-se dizer que a generalização substantiva consiste, predominantemente, na redução dos diversos fenômenos a sua base única; o conceito teórico, na dedução da correspondente diversidade como certa unidade. [...]. Ter um conceito sobre tal objeto significa dominar o procedimento geral de construção mental deste objeto (DAVYDOV, 1988, p. 152).

Quando o aluno consegue resolver tarefas particulares semelhantes por meio da relação geral, Davydov (1998) afirma que o aluno realiza generalizações, ou seja, significa que ele tem a consciência do conceito, ele pensa teoricamente. Na educação escolar, o conceito teórico é atingido quando os escolares realizam a atividade de estudo, segundo a proposta do ensino desenvolvimental.

Os métodos de ensino, nas escolas brasileiras, levam os alunos, nos primeiros anos do fundamental, a desenvolverem a generalização por meio do material concreto, dado visualmente e captado sensorialmente. Para Davydov (1988), este tipo de generalização conceitual corresponde ao conhecimento empírico, no qual o caráter geral se dá na igualdade e semelhança entre grupos de objetos e o caráter essencial se verifica nas classes distintivas entre tais objetos.

2.3.3 Atividade de estudo

Os alunos só interiorizam o conhecimento acumulado historicamente quando realizam uma atividade adequada a sua faixa etária. A atividade que os alunos realizam é chamada atividade de estudo. O conteúdo da atividade de estudo é o conhecimento teórico (DAVYDOV, 1998).

Em vários momentos da história da psicologia, houve tentativas de determinar etapas do desenvolvimento humano. A periodização estuda o desenvolvimento da mente da criança, fazendo uma análise da sua atividade principal e as condições da sua vivência (DAVYDOV, 1988 *apud* LEONTIEV, 1976). Isso significa que cada etapa do desenvolvimento mental da criança está associada ao tipo de atividade mais significativa naquele momento.

Ressaltamos que o estudo da atividade principal por Leontiev tem como fundamento o trabalho de Vygotsky acerca do contexto social do desenvolvimento da criança em certa idade específica (DAVYDOV, 1998). Davydov (1998) utiliza o termo atividade principal como sinônimo para a interação social do desenvolvimento, no qual a mudança de etapa de desenvolvimento está ligada à mudança da atividade principal do indivíduo com relação ao contexto social em que vive. Isso não quer dizer que outras atividades, consideradas secundárias, não estejam presentes em uma determinada faixa etária.

Davydov (1998) examina uma periodização da infância cujo perfil foi desenvolvido por Vygotsky, Leontiev e Elkonin. Cabe lembrar que o contexto desta periodização está de acordo com o desenvolvimento mental da criança na época do socialismo soviético. Assim, iremos discutir a atividade principal nas crianças que estão na idade escolar, cuja fase de escolaridade é foco do nosso estudo.

As crianças que adentram a idade escolar (6 a 10 anos) possuem como atividade principal a atividade de estudo. Vale ressaltar que a atividade de estudo não é a única atividade desenvolvida pelas crianças nesta faixa etária, mas é a principal e condizente com o seu desenvolvimento mental. Nessa etapa, as crianças adentram a primeira fase do ensino fundamental e a aprendizagem e, consequentemente, o desenvolvimento neste período está relacionado à apropriação do conhecimento teórico. Por este motivo, pesquisadores da teoria do ensino desenvolvimental defendem o conceito geral de número desde os primeiros anos da fase escolar, para já ir desenvolvendo o pensamento teórico.

Já na adolescência, condizente com as crianças de dez a quinze anos, o desenvolvimento da consciência e do pensamento teórico ocorre conjuntamente com a comunicação pessoal, ligada às atividades sociais úteis, como práticas esportivas e culturais (DAVYDOV, 1998). Davydov esclarece que, embora muitos educadores afirmem que a tarefa principal da criança na idade escolar (incluindo os adolescentes) é a tarefa de estudo, o conhecimento assimilado pelos adolescentes não vem só do processo de ensino, mas também de outras atividades sociais, em que o estudo é ainda uma atividade mais importante nesta fase.

Além disso, Vygotsky (2018) afirma que a formação do conceito teórico se inicia na infância, mas as funções intelectuais que constituem a base psicológica da formação do conceito configuram-se somente na adolescência. É nessa idade que temos a existência do conceito autêntico, sendo que, nas fases anteriores, temos só o pré-conceito ou o pseudoconceito.

O processo de interiorização do conceito pelas crianças é caracterizado pela ascensão do abstrato ao concreto, que se realiza pela atividade de estudo. Assim, no planejamento da atividade de estudo, os professores devem estar atentos a sua estruturação para que os alunos assimilem os conceitos, sendo importantes analisar o conteúdo, mobilizar a necessidade que gera o motivo do aluno em aprender tal conceito e o caráter investigativo da atividade de estudo (DAVYDOV, 1998; FREITAS, 2016; LOMPSCHER, 2003).

Na análise do conteúdo, o professor deve identificar a relação geral do objeto de estudo, depois registrar a relação geral, construindo, com isso, a abstração substantiva do tema a ser estudado. O professor deve vincular a relação geral às manifestações particulares do objeto de estudo, realizando, assim, a generalização substantiva. A partir daí os alunos deverão fazer abstrações particulares e, desse modo, converter a formação inicial em conceito, que registra a essência do objeto estudado (Davydov, 1998).

Outro papel importantíssimo do professor é o de despertar a motivação do aluno em desvendar determinado conceito para resolver determinada tarefa de estudo. Muitas criações humanas, ao longo da história, foram impulsionadas pela necessidade de resolver algum problema prático. A criação da machadinha, do arco e flecha e da lança só sobreveio à vontade dos antepassados de matarem sua fome e a fome de seus entes queridos. Ou seja, a resposta do homem para saciar a fome e garantir sua sobrevivência foi fabricar utensílios que os auxiliasse na caça, ou seja, a lança, o arco e a flecha vieram como solução de um problema social humano.

"A atividade de estudo só terá sentido para a criança se houver uma coincidência entre motivo e objetivo, ou seja, ela atuará ativamente na atividade porque estará interessada ou motivada pelo resultado da tarefa" (MELLO, 2004, p.147). De acordo com a autora, a atividade que faz sentido para a criança é a chave pela qual ela entra em contato com o mundo e pode aprender a usar a cultura e se apropriar de aptidões, capacidades e habilidades humanas. Por isso, o motivo ou necessidade é um fator fundamental na teoria de Davydov.

É na atividade de estudo que o aluno vai atribuindo sentido aos conceitos estudados, mobilizando o desejo e a motivação, no qual o aluno vai conseguir alcançar seus objetivos, quer seja instigando-o, levantando questionamentos, fazendo-o pensar por outra perspectiva, desafiando-o nas resoluções de problemas.

> O desejo de aprender determinado conteúdo está intimamente ligado à motivação para a realização da tarefa, que é de certa forma, o elo social que o professor propõe para criar na criança o desejo de participar daquela atividade, de responder às perguntas do professor, de dizer aos outros o que já sabe, enfim, de aprender (DAVYDOV, 1988 apud FREITAS, 2016, p.11).

Para Freitas (2016, p. 402), “a atividade deve ter a conexão entre o percurso investigativo científico do objeto e o percurso de estudo pelo aluno”. A exposição do conhecimento da investigação científica se realiza por um movimento que parte da análise do objeto, mediada pela abstração para explicá-lo em sua forma concreta e real. Tal procedimento é chamado de síntese.

Para ter a mudança da experiência sensorial, concreta e empírica para o pensamento teórico, é necessário conhecer as leis internas do desenvolvimento do objeto. Os escolares, no ensino tradicional, iniciam o estudo de um conceito pela forma sistematizada, pronta e acabada, desconsiderando a sua formação dada na história do conhecimento, criando uma deficiência lógica. Conforme Davydov:

> O divórcio entre o ensino dos conceitos e o exame das condições nas quais se originam se deriva legitimamente da teoria da generalização empírica, segundo a qual o conteúdo dos conceitos é idêntico ao que inicialmente se dá na percepção. Nela se examina somente a transformação da forma subjetiva deste conteúdo: a passagem de sua percepção imediata ao “subentendido” nas descrições verbais (DAVYDOV, 1988, p. 116).

O planejamento do ensino, nessa perspectiva, solicita ao professor que conheça a origem histórica e o desenvolvimento dos conteúdos, tanto na lógica própria do campo científico quanto em suas relações com outras ciências e com a cultura geral.

As atividades de estudo possuem três importantes elementos, considerados por Davydov (DAVYDOV, 1988), sendo eles: as tarefas de estudo, as ações de estudo e a auto avaliação e regulação. As tarefas de estudo levam o aluno às formas superiores da consciência social, que buscam modificações qualitativas em seu desenvolvimento psíquico. A tarefa de estudo articula-se com a generalização substantiva, que propicia ao escolar o domínio de novos procedimentos de ação e de conhecimentos teóricos na área estudada.

> As ações de estudos possibilitam o estudante particularizar as relações gerais, aproximar as ideias centrais, dominar procedimentos e as ideias chave da área dada de conhecimentos, a modelar estas relações, a dominar os procedimentos de passagem das relações gerais, a sua concretização e o inverso, os procedimentos de passagem do modelo ao objeto e o inverso etc. (DAVÍDOV; MÁRKOVA, 1987, p. 325).

O controle e a regulação [ou monitoramento] garantem ao aluno uma execução correta das ações de estudo, e a avaliação lhe permite determinar se assimilou ou não (e em qual grau) a forma geral de solução da tarefa de estudo dada.

A proposta de ensino em Davydov e de seus colaboradores é organizar tarefas de estudo que requerem determinadas ações de estudo, nas quais são realizadas tarefas particulares. A caracterização da atividade pedagógica objetiva que o aluno busque e identifique uma forma geral de abordagem de problemas particulares em relação a um objeto de estudo, para que possa ser resolvida de maneira imediata e correta, empregando essa forma geral (DAVYDOV, 1998). Para que a tarefa de estudo atinja o objetivo desejado, deve-se executar as seguintes ações de estudo (DAVYDOV, 1998; FREITAS, 2016):

1) *Transformação dos dados da tarefa a fim de revelar a relação universal do objeto estudado.*

Nesta ação inicial, os alunos procuram reunir os dados da tarefa presente no problema a fim de obter a relação geral e universal do objeto de estudo, realizando a abstração substantiva.

2) *Modelação da relação diferenciada em forma objetivada, gráfica ou por meio de letras.*

É a representação da relação universal, identificada no processo de transformação dos dados da tarefa. Essa modelação retrata a essência do objeto, enunciada por meio de desenhos, símbolos, fórmulas ou palavras.

3) *Transformação do modelo da relação para estudar suas propriedades em "forma pura".*

No trabalho com o modelo, a relação universal aparece em forma pura e abstrata. Nessa etapa, os alunos identificam o núcleo conceitual do objeto, mas a adequação do núcleo só se revela quando se extraem as múltiplas determinações particulares. Logo, servem para os alunos solucionarem diversas tarefas em que o objeto é apresentado em situações particulares, a partir da relação geral e universal do objeto. Na matemática, entendemos que é necessária uma validação que mostre a generalidade dessa essência, inclusive sua limitação relacionada a outros objetos.

4) *Construção do sistema de tarefas particulares que podem ser resolvidas por um procedimento geral.*

Nesta etapa, os alunos resolvem várias tarefas, tendo como base a relação geral e seu vínculo com as relações particulares. As tarefas particulares são adaptações da atividade inicial e os alunos identificam em cada uma delas a relação geral e universal como um procedimento geral para pensar e analisar o objeto em todas as situações concretas e reais.

5) Controle da realização das ações anteriores.

O controle permite verificar se os alunos estão assimilando a relação geral como procedimento para resolver várias situações particulares, bem como contrastarem o resultado das suas ações com os objetivos definidos, verificando a relação entre eles com a sua aprendizagem.

6) *Avaliação da assimilação do procedimento geral como resultado da solução da tarefa de aprendizagem dada*.

Nesta fase, o professor verifica se o aluno se apropriou da relação geral e abstrata do objeto e a utiliza na análise de relações particulares concretas deste objeto. Para tanto, há que serem suscitados nele os motivos, a necessidade e assim também o desejo de aprender. Observa-se, na organização do ensino sugerida por Davydov, que cada uma das ações é composta pelas correspondentes operações, cujo conjunto varia conforme as condições concretas em que se realiza uma tarefa de estudo (DAVYDOV, 1988).

A atividade de estudo se desenvolve, então, por meio de tarefas e ações de estudo. As ações são organizadas com o propósito de solucionar os problemas apresentados pela tarefa de estudo e ambas têm em vista a consecução da atividade de estudo que pretende a aprendizagem de procedimentos de análise, capacidade de dedução (abstração e generalização substantivas) e domínio do procedimento geral de construção do objeto, intentando o conhecimento científico ou o pensamento teórico (DAVYDOV, 1988).

Apresentando-se como uma opção esperançosa para alcançar o pensamento teórico dos estudantes, considerado como algo muito importante para Davydov, tal ensino é de grande relevância para a sistemática metodológica, ao inserir o aluno numa atividade em que os conceitos sejam experimentados de forma expressiva a ele e as mediações o transportem a pensamentos teóricos. É função do professor organizar a atividade de ensino, planejando as tarefas de estudo, e acompanhando todo o caminho do aprendizado, desenvolvendo métodos e ferramentas que sejam capazes de fazer alcançar o objetivo almejado.

O que o professor deve compreender é que a atividade precede o desenvolvimento; em outras palavras, toda proposta de ensino-aprendizagem desenvolvida pelo professor deve estar voltada ao ensino de conceitos científicos, toda ferramenta pedagógica deve ser utilizada para alcançar este objetivo, pois o processo de formação do pensamento teórico nas crianças, em fase escolar, se inicia quando esta começa a realizar atividades de aprendizagem (DAVYDOV, 1988,). Por exemplo, quando uma criança aprende a contar e após uma atividade relacionada à quantidade, ela consegue abstrair que o número 5 representa uma quantidade maior do que o número 2 e, consequentemente, consegue generalizar para outras medidas, ela consegue fazer um elo de um caso particular, que é o número, iniciando o processo de generalização para quantidade, medidas, ordem. Freitas e Limonta (2012) explicam que, quando a criança percebe um conceito, ela faz relações e aplicações deste com as diversas atividades que vivência, como no exemplo acima citado.

Portanto, o processo de aprendizagem acontece quando a criança é capaz de relacionar um objeto geral para um caso particular, como no exemplo citado anteriormente, no qual o aluno possa compreender o conceito de número, que é um “objeto matemático abstrato”, e passa a utilizá-lo como uma grandeza que possibilite a compreensão real de sua aplicação, o que vem a ser o “objeto matemático concreto”. Logo, o método de ensino deve percorrer do geral para o particular, pois Davydov ressalta que:

> A capacidade de ver o todo antes que de suas partes, isto é, uma atividade da imaginação. Isso é muito importante como premissa e uma das condições indispensáveis da reprodução teórica da realidade. Examinando as condições de formação de novos conceitos, A. Arséniev ressalta: “O novo sempre surge como um todo que logo forma suas partes, desenvolvendo-se em sistema. Isto aparece como “a captação”, pelo pensamento, do todo antes que de suas partes e constitui o traço característico do pensamento teórico substantivo na ciência. Na dialética é um dos momentos essenciais do movimento do abstrato ao concreto” (DAVIDOV, 1988, p.150).

A transformação do pensamento abstrato do aluno em pensamento teórico se sustenta na lógica dialética e se movimenta nas transformações do objeto, em seus diferentes aspectos. A abstração geral do objeto torna-se referência para a generalização teórica, que relaciona os aspectos gerais a particulares. Nesse caso, a apreensão do conceito teórico consiste em descobrir a relação básica, para depois identificar a presença dessa relação em situações particulares (LIBÂNEO, 2016). Mas, para que isso aconteça, é importante que a atividade a ser executada pelo aluno alcance o núcleo do objeto a ser estudado. Cabe ao professor organizar as tarefas para que os alunos consigam obter as características mais gerais do objeto de estudo para que o aluno consiga relacioná-las ao particular, de aplicação mediante a proposta de ensino.

Vale ressaltar que a organização do ensino a ser aplicado deriva do conteúdo a ser estudado pelo aluno. Para tanto, é fundamental uma ação específica de mediação por parte do professor para determinado assunto a ser abordado, levando em conta a complexidade do tema, as ferramentas didáticas disponíveis para um possível uso, o tempo adequado para a atividade, o cronograma a ser executado e outros elementos necessários para alcançar o objetivo, que é o desenvolvimento do pensamento teórico dos escolares. Davydov afirma que é:

> O programa, que determina o conteúdo da matéria, determina também os métodos de ensino, a natureza do material didático, o período do ensino e outros elementos do processo. E, o mais importante, é que ao sinalizar a composição dos conhecimentos a assimilar e suas relações, o programa projeta com ele o tipo de pensamento que se forma nos escolares durante a assimilação do material de estudo apresentado (DAVYDOV, 1988, p. 184).

Notamos, assim, que o ensino desenvolvimental relaciona o aprendizado do aluno com a organização metodológica a ser utilizada pelo professor, bem como o pleno domínio dos conteúdos a serem ministrados em sala de aula e o conhecimento prévio do contexto sociocultural de cada aluno.

A importância de o professor conhecer o contexto no qual seus alunos estão inseridos está no fato de poder contextualizar o conteúdo da disciplina de forma a alcançar, de maneira homogênea, os alunos da sala de aula, respeitando as diversidades étnicas, estéticas, sociais, religiosas e culturais, de modo a que eles se respeitem mutuamente. Com isso, ele pode propiciar uma atividade em grupo de forma harmoniosa, na qual cada aluno possa colocar suas ideias e ouvir as colocações dos colegas, bem como as ressalvas do orientador da atividade, possibilitando, assim, que cada membro se aproprie do conhecimento.

A função do professor está muito além de um transmissor de conhecimento, assumindo o papel de mediador do processo de ensino-aprendizagem, orientando, monitorando, colaborando para que o aprendiz consiga romper obstáculos e alcançar o seu objetivo, que é aprender de forma autônoma, internalizando os conceitos adquiridos ao longo dos estudos.

2.4 PROPOSIÇÕES DAVYDOVIANAS PARA O ENSINO DO CONCEITO DE NÚMERO

Neste tópico, serão abordados os estudos relacionados ao conceito de números reais, baseados na teoria do ensino desenvolvimental de Davydov. Nos trabalhos analisados sobre este assunto, destacam-se os autores Rosa, Damazio e Euzébio (2011, 2012, 2016) e seus colaboradores. Esses autores pesquisam o ensino-aprendizagem de conceitos matemáticos na perspectiva histórico-cultural e na teoria do ensino desenvolvimental, principalmente o conceito de números reais desde os primeiros anos do ensino fundamental, realizados no “Grupo de Pesquisa Educação Matemática: uma abordagem histórico-cultural” (GPEMAHC/Unesc).

Observamos que a maioria das propostas de ensino-aprendizagem, que serão aqui relatadas, foi baseada em artigos, teses e dissertações, que possuem fundamentação teórica em Davydov e seus colaboradores, tais como: livros (DAVYDOV, 1988), materiais didáticos e livros de orientações aos professores no primeiro e segundo ano do ensino fundamental do sistema de ensino de Elkonin-Davydov.

Na abordagem davydoviana, as crianças devem aprender os conteúdos novos, os conhecimentos científicos, desde os primeiros anos do ensino fundamental. Para Caraça (1951), os números naturais e racionais na atualidade são entes puramente aritméticos, desligados das coisas reais, ou seja, é um objeto puramente abstrato, mas, com essa atitude, o homem se esquece da origem histórica dos números. Nela, os números naturais e racionais são abstrações da realidade imediata. Os números reais são abstrações de problemas reais, como é o caso do surgimento dos incomensuráveis (irracionais), que teve motivação na construção de uma teoria mais geral acerca desses números, introduzindo o conceito de número real (ROSA, 2012).

O número irracional foi concebido na impossibilidade de efetuar algumas medições, não existindo instrumentos concretos capazes de obtê-las. Por exemplo, a diagonal de um quadrado de lado *um* existe no concreto, mas não se consegue efetuar a sua medição de maneira exata, pois tal medida real só existe na abstração, teoricamente. Disso se conclui que a relação geral, que está presente no conceito do número irracional, é a sua não racionalidade, ou seja, não é possível escrevê-lo na forma de razão entre dois inteiros que representam duas grandezas de mesma espécie, como é o caso da razão entre a diagonal de um quadrado e seu lado medindo *um*.

"Para Davydov, a essência do conceito de número real é o conceito de grandeza. Os números naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais são casos particulares de um objeto matemático mais geral, que é a relação entre grandezas" (ROSA, 2012, p. 29). Para a autora, os escolares devem ter uma concepção completa de números reais, com base no conceito de grandeza, ao terminar o ensino fundamental. Outro aspecto da proposta de Davydov é a superação da tricotomia entre as significações aritméticas (contagem), geométricas (posição dos números na reta real) e algébricas (representação literal do número).

Rosa (2012) destaca a diferença da abordagem davydoviana com o ensino aplicado nas escolas brasileiras a respeito do ensino de números. Em nossas escolas, o ensino vai do particular ao geral, isto é, no movimento naturais → inteiros → racionais → irracionais → reais, de forma fragmentada, em que, nos primeiros anos do ensino fundamental, as crianças só aprendem o conceito de números naturais e racionais. Na proposta de Davydov, o conceito vai do geral ao particular, ensinando primeiro a relação geral, relacionada com o conceito de grandeza. Para Davydov, a gênese do conceito de número natural é a mesma do número racional. Tal concepção de números é assimilada pelos alunos por meio da atividade de estudo.

O ensino de conceito de número será descrito na proposição davydoviana para exemplificar seu método, segundo os trabalhos de Rosa (2012), Rosa e Damazio (2012, 2016), Damazio, Rosa e Euzébio (2011, 2012) e Rosa, Soares e Damazio (2011). Em Rosa e Damazio (2016) é apresentado um problema gerador, organizado em tarefas de estudo, que requerem determinadas ações executadas por operações.

A primeira ação de estudo é obter as relações de igualdade e desigualdade entre grandezas, por exemplo, o comprimento (poderia ser área, volume etc.). As relações, primeiramente, são obtidas no modelo objetal (tiras de papel) e depois em forma gráfica, por meio de segmentos de retas, como é o caso do comprimento. Portanto, temos a primeira ação de estudo que é transformar os dados da tarefa a fim de obter a relação universal do objeto estudado, obtido pelas relações de igualdade e desigualdade entre grandezas *(a=b, a<b* e *a>b)*.

> Qual seria a chave correspondente ao conceito de número? Na proposta Davydoviana, a resposta diria que não contempla todas as propriedades dos objetos, mas apenas aquelas que pode aumentar, diminuir, medir. Enfim, que a partir delas, as grandezas, pode-se definir igualdade, desigualdade, contagem, adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação, radiciação, entre outros (Rosa, 2012, p.111).

Com relação à quantidade, destacam-se as grandezas contínuas (peso, volume etc.) e sobre suas bases se estabelecem as relações e comparações entre grandezas discretas. Vale destacar o que são grandezas discretas e contínuas. No caso da grandeza discreta, o objeto a ser quantificado é uma coleção, é um subconjunto finito de coisas, que podem ser enumeradas (contadas), como, por exemplo, o número de ovos, bolas, pedras etc. Já nas grandezas contínuas, o objeto a ser quantificado é uma medida que nem sempre pode ser enumerada, como o comprimento de um segmento de reta, a capacidade de um recipiente de comportar líquido, a massa de um corpo etc. As medidas de grandezas discretas e contínuas são expressas por um número, que depende do objeto que se está medindo.

Com relação ao conceito de números, destacam-se dois tipos: o número concreto e o número abstrato; o número concreto vem acompanhado da unidade de medida a qual ele representa e o número abstrato omite a unidade de medida. Por exemplo, *10* é um número abstrato e quando temos *10* metros, esse número é concreto. No entanto, os números concretos estão relacionados às grandezas que são comensuráveis, sejam elas discretas ou contínuas. Entretanto, existem as grandezas incomensuráveis, ou seja, não mensuradas, que são representadas por números abstratos, como é o caso do número irracional. Os números concretos designam grandezas mensuradas, sejam elas discretas ou contínuas, enquanto os números abstratos são tratados independentemente das grandezas serem mensuradas ou não (TRINDADE; SILVA, 2018).

A correspondência biunívoca (enumerabilidade) não é ignorada pelo ensino de Davydov. Ela ocorre na correspondência com objetos reais comparados a quantidades entre conjuntos, verificando a igualdade (correspondência biunívoca) e desigualdade (prevalência de um conjunto para o outro).

> Importa reafirmar que não existe número sem relação entre grandezas, sejam elas discretas ou contínuas. Em outras palavras, sem ela não se pode compreender teoricamente o conceito de número, por outro lado, é possível compreender as relações entre grandezas sem conhecer o número. Enfim, as relações entre grandezas são a abstração inicial, que refletem a essência, a causa do conceito de número. A partir dela, o referido conceito surge e se desenvolve, com todos os seus elementos e

> características, tais como: maior, menor, sequência, classe, série, correspondência, unidade, medida, subdivisão de unidade, adição, subtração, entre outros. (ROSA, 2012, p.116).

Na segunda ação de estudo, o registro realizado pelos estudantes, na comparação de grandezas na etapa anterior, é feito por meio da modelação algébrica, por exemplo, $a = b, a < b$ e $a > b,$ em que a e b representam medidas do comprimento de tiras, nas quais ocorre a mudança gradual da representação gráfica (concreta) para a algébrica (abstrata). Após a modelação das relações entre grandezas, a criança é levada a refletir quantas vezes uma unidade de medida está contida em uma determinada grandeza, levando-a a reproduzir o conceito abstrato e universal de número, dada pela relação $n = \frac{A}{e}$, onde A representa a grandeza, e a unidade de medida e n é o valor (número) da grandeza A, em relação à unidade e. Neste momento, é obtida a relação geral do conceito de número. “O movimento conceitual do concreto ao abstrato é atingido, segundo a autora, onde o concreto está nas relações entre os comprimentos, seguida das abstrações (objetal e gráfica) até atingir a abstração essencial expressa pela modelação algébrica” (ROSA; DAMAZIO, 2016, p. 512).

Após esse movimento, é definida a unidade de medida particular para determinar o número concreto n. Por exemplo, se *e* cabe duas vezes em A, temos o número concreto dois, obtido pela relação $n = \frac{A}{e}$. Nesse momento, temos a passagem do abstrato para o concreto, que, neste caso, é denominado o concreto pensado. Daí surge o conceito de número dado teoricamente, como um movimento conceitual do *concreto – abstrato – concreto pensado.* O número real é a unidade do diverso, engloba uma variedade de fenômenos diversos do mundo objetal – sensorial em um sistema único, por isso é concreto (ROSA, 2012).

Na terceira ação de estudo, é levado em consideração que a mudança da unidade de medida leva à mudança do número concreto n. Neste caso, temos a transformação do modelo universal para estudar o objeto (o número) em suas propriedades em forma pura. Rosa e Damazio (2016) analisam que o conceito de números como comparação de medidas extrapola os limites dos números naturais:

> A expressão do resultado da relação entre os comprimentos dos passos de Enim e Verdim, tomando o último como unidade, extrapola os limites dos números naturais. Isso evidencia a finalidade principal da proposta de Davydov e colaboradores para o ensino da Matemática: ao finalizar o ensino fundamental, o estudante forme uma concepção autêntica e completa do

> número real a partir da gênese teórica do conceito. Esta gênese refere-se ao estágio atual de desenvolvimento dos números reais, que contempla os números naturais, inteiros, racionais e irracionais (ROSA; DAMAZIO, 2016, p.515).

Nesta relação $n = \frac{A}{e}$, se a unidade *e* cabe um número inteiro de vezes na grandeza A, o número n na relação será um número natural (inteiro) e se e não cabe um número inteiro de vezes em A, temos a ideia de número racional ou irracional, segundo a autora que, na proposta de Davydov, desvenda o conceito geral de número real, por meio das relações entre grandezas. Esse conceito está de acordo com o estágio atual acerca do número real, que é a medição de grandezas contínuas. Neste caso, os números naturais não são suficientes, pois pela sua origem histórica, que surgiram no processo de contagem, houve a necessidade da obtenção de outro campo numérico, no caso os números racionais. Nesta concepção de número real, não fica claro como emerge a ideia do número irracional, pois não é imediato verificar se a relação entre $\frac{A}{e}$ é comensurável ou incomensurável, principalmente nos primeiros anos do ensino fundamental. Logo, não está claro como se obtém o número real utilizando a relação entre grandezas, pois esse fato não é mostrado de forma contundente.

Voltando à análise na proposta de Rosa (2012), na quarta ação de estudo, os alunos, aos poucos, vão dominando o procedimento universal, para resolverem, posteriormente, as tarefas particulares de forma correta. Na quinta ação, há de se fazer o controle das ações anteriores, de modo a garantir as correções necessárias para conseguir o cumprimento das ações. Na sexta e última ação, faz-se a avaliação da apropriação do procedimento como resultado das resoluções das tarefas particulares de estudo.

Na proposta de ensino de número real, conforme Rosa (2012), fica estabelecido o contraste discreto/contínuo dado pela medida que, no caso, foi no comprimento de um segmento de reta, sendo que a natureza dos números naturais foi dada pela relação entre grandezas. Da modelação do conceito universal de números (por meio da representação algébrica) decorrem as propriedades numéricas destes, como resultado da comparação entre grandezas e unidade de medidas. Portanto, os movimentos entre o geral e o particular, o universal e o singular ocorrem na interconexão das significações aritméticas, algébricas e geométricas do número. A reta numérica, como objetivação do conceito de número, expressa o encadeamento lógico, os nexos dos números naturais, racionais e inteiros (ROSA, 2012).

Nesta proposta, “os números reais são a síntese do processo histórico, do desenvolvimento do conceito composto por particularidades dadas pelas diferentes unidades de medida e a singularidade, obtendo o número natural, racional ou irracional” (ROSA, 2012, p. 138). Rosa (2012) destaca que a gênese do número real, sua abstração essencial, a célula que determina o surgimento é a relação complementar de multiplicidade e divisibilidade:

> O modelo expresso pela fórmula $\frac{A}{e} = n$ ou $A = ne$ é a unidade entre a essência universal (relação de multiplicidade e divisibilidade entre grandezas) e sua expressão singular (os números naturais, inteiros, racionais e irracionais) mediada pela unidade de medida. Se a unidade couber um número de vezes nas grandezas, o resultado da medição será inteiro, se não, é racional. E, ainda, se a unidade for incomensurável em relação a grandeza, será irracional (ROSA, 2012, p.160).

Embora a proposta seja coerente, ela não mostra claramente como realizá-la, no caso dos irracionais. Na nossa concepção, esta perspectiva não define os números reais em sua totalidade. A concepção de números como resultado da comparação entre grandezas e unidades de medidas contempla somente os números naturais e racionais, não fazendo referência aos números irracionais, que são fundamentais na construção dos números reais. Rosa (2012, p.139) afirma que “os números reais sem os números irracionais não podem ser considerados concreto, pois não contempla a totalidade”. Epistemologicamente, os números racionais surgiram a partir de alguns obstáculos que dificultavam a realização das medições, a partir do momento em que houve a percepção de que quase sempre o número de vezes que a unidade de medida cabia na grandeza a ser medida não era um inteiro, pois acabava sobrando um “pedaço” cujo tamanho era menor que a unidade utilizada.

Neste contexto, os racionais têm sua origem a partir da necessidade de representar grandezas de medidas não inteiras, ou seja, números que indicassem partes menores que uma unidade. Por esse motivo, os egípcios utilizavam quase exclusivamente as frações unitárias, pois são as que melhor expressam a noção da relação entre a parte, ou seja, o “pedaço” a ser medido, e o todo, que seria uma unidade inteira. Mas como é trabalhosa a transformação de uma fração qualquer em fração unitária, o nosso sistema fracionário, utilizado atualmente, é a maneira mais cômoda de operar com esses tipos de números. No caso dos números irracionais, há uma ruptura epistemológica que dificulta a sua construção nesta perspectiva. A passagem dos números racionais para os reais se caracteriza pela mudança do método, abandonando o caráter de extensão do conceito de número, utilizado na passagem dos naturais → inteiros → racionais; assim, empregam-se novos métodos, como o corte de Dedekind ou sequência de Cauchy nas abordagens clássicas da Análise Real (IGLIORI; FONSECA, 2013).

Portanto, as proposições Davydovianas e a construção do conceito de número, expostas nos trabalhos de Rosa e Damazio, não contemplam satisfatoriamente a construção dos números irracionais. Na construção dos números reais, em Lima (2004), é realizada a passagem dos números racionais para os números reais, sem a necessidade da construção dos números irracionais que, posteriormente, são definidos como sendo o conjunto numérico formado pelos números que não são racionais. Tal construção de número utiliza novos métodos, como mencionado no parágrafo anterior, acarretando uma abordagem axiomática e abstrata, que não favorece uma nova metodologia para o ensino de números reais na educação fundamental e média.

A abordagem de Rosa e Damazio (2011, 2012 e 2016) é trabalhada no primeiro ano do fundamental, que tem por objetivo iniciar os alunos em relação ao conceito de número real, de modo que estes tenham uma concepção completa e autêntica de tal conceito ao término do ensino fundamental. Dessa forma, os alunos, por meio da resolução das tarefas de aprendizagem para a construção de um método geral para obter o número, vão assimilando, simultaneamente, tal conceito (DAVYDOV, 1988).

A proposta de ensino do sistema de numeração, concebida por Davydov e colaboradores, como mostra a pesquisa elaborada por Rosa, Damazio e Silveira (2014), analisa o movimento conceitual no 2º ano do ensino fundamental, investigando a unidade entre o lógico e o histórico, que utiliza o princípio da lógica dialética[7]. Nas palavras de Koppin, é a “unidade entre o abstrato e o concreto no pensamento científico, dando ênfase a interrelação entre o singular, o particular e o universal” (KOPPIN apud ROSA; DAMAZIO; SILVEIRA, 2014, p.1140).

[7] As leis da dialética são aquelas que dirigem o movimento objetivo da realidade transformada em leis do pensamento e que apresentam nos conceitos a máxima generalidade.

O ensino do sistema de numeração é organizado em tarefas de estudo, nas quais a primeira tarefa é agrupar e registrar, de maneiras diferentes, a contagem de uma mesma quantidade de objetos, fazendo a utilização de diversas bases numéricas para contar e escrever a mesma quantidade. Os autores afirmam que:

> Ressalvamos que não faz o uso das diferentes bases numéricas por diferentes povos antigos, não reproduzindo o percurso histórico do sistema de numeração na integra, mas a lógica do sistema de numeração vivenciadas pelos antigos nas tarefas realizadas pelos alunos são contempladas, no qual o lógico reflete as etapas essenciais do processo histórico (ROSA; DAMAZIO; SILVEIRA, 2014, p.1139).

É importante ressaltar que as tarefas propostas por Davydov relacionam a lógica das diferentes bases numéricas. Na tarefa 2, os alunos reproduzem o processo de construção das diferentes ordens (unidade, dezena e centena) numa determinada base numérica, levando-os a compreender que a unidade de medida da 2ª ordem (dezena, se for a base 10, por exemplo) é n vezes a unidade de medida da 1ª ordem (unidade) e que a unidade de medida da 3ª ordem é n vezes a unidade de medida da 2ª ordem e assim sucessivamente, concluindo que a base encontrada é n.

Na tarefa 3, os estudantes medem com a unidade de medida T, a superfície de área A, nos sistemas de bases 4 e 5, utilizando o conceito geral de número, que é o todo dividido pela unidade de medida, buscando a relação de multiplicidade e divisibilidade, no qual tal relação é mediada pelas diferentes bases numéricas. “Neste contexto, as bases numéricas constituem as particularidades do sistema de numeração, que possibilitam a representação das diversas singularidades numéricas” (ROSA; DAMAZIO; SILVEIRA, 2014, p.1146).

A 4ª tarefa consiste no registro do valor numérico das medidas dos comprimentos, porém, fora do quadro valor de lugar, ou seja, registrar três números formados por dois algarismos, deixando em cada número um campo da unidade, dezena ou centena sem nenhum algarismo, cuja síntese a elaborar é que, para registrar algarismos que estão fora do quadro valor de lugar (unidade, dezena e centena), necessita-se do símbolo para representar o espaço vazio que, neste caso, é simbolizado pelo número zero, uma descoberta fundamental na História da Matemática. Isso reflete o lógico do desenvolvimento histórico, não segue o percurso histórico na íntegra, mas contempla a necessidade deste desenvolvimento e capta o essencial dele. Dito de outro modo:

> As proposições Davydovianas não seguem minuciosamente o percurso histórico pela humanidade durante o desenvolvimento do sistema de numeração, mas o reflexo deste. As tarefas revelam a necessidade de desenvolvimento deste sistema. O zero é desenvolvido por Davydov a partir da necessidade vivenciada pela humanidade na escrita dos números (Rosa, Damazio e Silveira, 2014, p.1449).

As tarefas não contemplam a história do zero, porém elas são organizadas de modo que possibilitam a reprodução do zero a partir das necessidades semelhantes àquelas vivenciadas historicamente pela humanidade.

Na 5ª tarefa de estudo, os alunos realizam a contagem no sistema de numeração decimal, que é a base utilizada atualmente pela humanidade; ressalta-se que, nas tarefas anteriores, os estudantes trabalharam a contagem de quantidades, utilizando outras bases numéricas, sendo a base decimal uma particularidade de todos os sistemas de numeração, ou seja, a lógica de se trabalhar com a base 10 é a mesma ao utilizar outras bases numéricas. No sistema educacional brasileiro, ensina-se, geralmente, somente o sistema de numeração decimal, ou superficialmente as outras bases numéricas, enfatizando a representação concreta e visual, utilizando os dedos das mãos, negando aos estudantes o conhecimento de outras bases numéricas, como a binária, ternária etc.

De acordo com Rosa, Damazio e Silveira (2014, p. 1152), "Na última tarefa, os estudantes devem localizar os números formados a partir de diferentes bases na reta numérica, que para Davydov, tal tarefa tem como proposta a composição da lógica interna do sistema de numeração". O princípio que Davydov propõe é que os alunos iniciem o estudo do sistema de numeração por meio da relação geral de número, obtido pelas relações entre grandezas, descritas no item anterior, por meio das relações de multiplicidade e divisibilidade. "O resultado da medição é registrado na forma de um número posicional, que dependendo das relações entre medidas, pode pertencer a qualquer sistema de numeração, inclusive a decimal" (ROSA; DAMAZIO; SILVEIRA, 2014, p.1151).

As propostas davydovianas para o ensino do sistema de numeração contemplam as várias bases numéricas, dando origem a diversos números, nas quais o sistema de numeração decimal é um caso particular do sistema de numeração, mas a lógica de agrupamento das ordens é igual para todas as bases. Portanto, a proposta de ensino contempla a lógica que constrói todas as bases numéricas (o geral).

Na investigação referente às relações entre os diferentes tipos de grandezas, que são a base do conceito teórico de número, as operações de adição e subtração se apresentam na perspectiva de tal conceito, com a especificidade expressa na relação todo-partes. O conceito científico das operações adição e subtração utiliza como fundamento o conceito teórico de número, conforme Rosa (2012) e Rosa, Damazio e Alves (2013). A relação todo-partes se inicia no âmbito conceitual das abstrações de igualdade e desigualdade, designada por duas grandezas distintas: a objetal (que trata do volume de dois recipientes iguais cujas medidas são diferentes) e a gráfica (segmento de reta que revela a grandeza comprimento), na qual a tarefa proposta é quanto o recipiente de menor volume precisa para obter a mesma quantidade de líquido do outro recipiente? (ROSA; DAMAZIO; ALVES, 2013).

Assim, "Com essa tarefa, o conceito de adição e subtração é introduzido através da relação todo-partes, ao trazer a inter-relação entre o plano objetal e o geométrico" (ROSA, DAMAZIO E ALVES, 2013, p. 460). A ideia de acrescentar líquido em um dos recipientes e aumentar um dos segmentos que representam a quantidade de líquido se vincula a determinar a diferença, isto é, a outra parte do todo que constitui em uma propriedade da adição. Do mesmo modo, retirar líquido e riscar um pedaço do segmento se caracteriza em uma propriedade da subtração que, no caso, é eliminar a diferença (ROSA; DAMAZIO; ALVES, 2013, p. 462).

> Portanto, a diferença se refere tanto a adição (determiná-la) quanto a subtração (eliminá-la). É ela que gera o movimento caracterizador da relação de igualdade e desigualdade, que na proposição Davydoviana, proclama a relação essencial todo-partes. Caso fossem iguais, ter-se-ia o todo sem a necessidade de especificar as suas respectivas partes; consequentemente, não haveria qualquer relação pertinente ao sistema conceitual. Em outras palavras, a diferença permite o aumento ou diminuição em relação ao todo (ROSA; DAMAZIO; ALVES, 2013, p.462).

Em sua tese, Rosa (2012, p. 196) afirma que "é na reta numérica que o conhecimento teórico das operações de adição e subtração surge no processo de análise da diferença entre grandezas, que é gênese inicial de ambas as operações". As operações (adição e subtração) são estudadas conjuntamente, no movimento de inversão entre ambas. As operações na reta numérica, relacionadas com as propriedades do conceito de número, são convertidas para o plano mental. Na apropriação de tais conceitos (operações), são sintetizadas as inter-relações algébricas, aritméticas e geométricas.

A algébrica tem o caráter de generalização, incidindo no conceito de equação, base para a resolução problemas. A aritmética forma, na reta numérica, a comparação de números (maior ou menor), introduzindo a propriedade da sequência numérica, base essencial para a ideia de antecessor e sucessor (ROSA, 2012). Geométrica, porque se refere ao tratamento de grandezas, dado com o experimento objetal-sensorial (volume, comprimento e área), até a representação na reta numérica. A operação de subtração, dada sucessivamente, prepara a introdução do conceito de números negativos, que é ministrado no 5º ano do ensino fundamental (ROSA, 2012).

Para resolver problemas de adição e subtração, o professor fala da importância de esquematizar o caráter geral e abstrato na reta numérica, para compreender o problema. Se o valor desconhecido é o todo, adicionam-se as partes e se o valor desconhecido é a parte, subtrai a parte conhecida do todo. Do problema geral, o aluno parte para a resolução de problemas particulares, resolvendo-os a partir de um esquema abstrato, mas que é concretizado no processo (ROSA, 2012).

A proposta Davydoviana para o conceito de número real por meio da sua relação geral dada pela expressão singular $n = \frac{A}{e}$, mediada pelas relações entre grandezas, que corresponde à relação de multiplicidade e divisibilidade, satisfaz as premissas do ensino desenvolvimental proposto por Davydov. Nele, o conceito teórico de número se movimenta do geral ao particular. Com a introdução da unidade de medida, introduz o contraste discreto/contínuo, formação do modelo universal de número por meio de expressão literal e a representação do número na reta numérica.

Davydov tem como objetivo introduzir, desde os primeiros anos escolares, o conceito teórico de número (do natural até o real), que será trabalhado com mais detalhes em anos subsequentes. Além disso, o conceito de número é a base para introduzir o sistema de numeração no 2º ano do ensino fundamental, as operações de adição e subtração, os números racionais a partir do 3º ano do ensino fundamental, os números negativos no 6º ano do ensino fundamental e os números irracionais, que é o caso geral para determinar os números reais, no final do ensino fundamental.

3 O LÓGICO-HISTÓRICO DO CONCEITO DE NÚMEROS REAIS

O percurso lógico–histórico pretende descrever o movimento histórico que os pesquisadores fizeram, para compreender e apresentar um determinado conteúdo até o momento atual. Na análise desse percurso, será identificada a relação geral básica e as relações particulares que compõem o conceito deste conteúdo. O movimento lógico-histórico pode ser explicitado como:

> O lógico-histórico pode ser entendido enquanto uma possível forma de pensamento elaborada pelos homens. Assim, os elementos constitutivos do lógico-histórico estão diretamente relacionados aos conceitos de: totalidade, realidade, *práxis*, movimento, fluência, interdependência, mutabilidade, imutabilidade, momentos de permanência, relatividade, lógica, história, processo, conhecimento e pensamento" (Sousa, 2014, p. 63 apud Kopnin 1978).

A importância de se efetuar o movimento lógico-histórico de um conceito é elucidar a sua gênese, seu desenvolvimento histórico, seus entrelaços, os motivos de sua criação e de sua permanência no mundo científico. Na maioria das escolas brasileiras, isso é ignorado, não mostrando as contradições e os obstáculos epistemológicos existentes na construção de um conceito. Conforme Sousa (2014, p. 61):

> As crianças saem da escola com a impressão de que os conceitos científicos apreendidos em classe, sistematizados pelos livros didáticos, estão prontos e acabados, como se eles estivessem sido construídos de forma linear, sem rupturas e contradições (Sousa, 2014, p. 61).

Para Sousa (2014), o desenvolvimento do pensamento teórico dos escolares por meio da assimilação dos conteúdos científicos é obtido pelas relações e conexões internas do objeto para chegar a sua essência, buscando contradições e conflitos, não visando a sua descrição, mas a descoberta da relação geral do objeto. Essa descoberta se processa pela sua constituição, sua origem, desenvolvimento e transformação, sempre em movimento, utilizando a atividade humana na constituição do objeto, por meio dos procedimentos lógicos e investigativos da ciência a ser ensinada. Tal movimento de investigação do conceito nos permite compreender seus nexos internos, cujo fundamento contém a história, as abstrações, generalizações e a formalização do pensar humano.

Para exemplificar, “os nexos internos do número natural é o senso numérico, correspondência biunívoca, agrupamento regulares e irregulares, bases numéricas e diversas representações de números” (JESUS; SOUSA, 2011, p. 116). Com relação aos nexos externos, os autores pontuam que:

> Já os nexos externos se limitam a ensinar a representação de algarismo e o sistema de numeração decimal, no qual o número está atrelado ao seu símbolo, não mostrando as diversas representações numéricas que foram desenvolvidas por várias civilizações. (JESUS, SOUSA, 2011, p. 117).

Portanto, o ensino dos números naturais deve articular-se aos dois nexos conceituais: externos e internos. Mas o que se observa, na maioria das escolas brasileiras, é que são trabalhados somente os nexos externos do número natural.

Já os nexos conceituais ou internos dos números racionais é a relação entre duas grandezas de mesma espécie como comprimento, volume e área (ROSA, 2012). Os números irracionais surgem da impossibilidade de comparação de grandezas de mesma espécie, através das grandezas incomensuráveis, sendo o número real o conceito teórico da medida para superar essa contradição, cuja síntese é a ideia da reta contínua, abrangendo as grandezas comensuráveis (racionais) e incomensuráveis (irracionais).

A história da matemática nos mostra que os primeiros conhecimentos matemáticos, originários das civilizações antigas como Babilônia e Egito, estavam associados a necessidades práticas (SILVA; MENDES, 2013). Nessas civilizações, o conhecimento dos números e da geometria era destinado a resolver problemas sociais dos primeiros núcleos urbanos. Tarefas como contar, calcular e medir estavam ligadas às práticas sociais (SILVA; MENDES, 2013).

Caraça (1951) afirma que os números naturais surgiram de forma lenta, pela prática da contagem, em diversas civilizações, sendo que cada uma delas trabalharam simultaneamente com sistemas de numeração distintos, cada um satisfazendo a sua necessidade prática da época. O mesmo ocorreu com os números racionais, com a necessidade prática de efetuar medições, ou seja, os números naturais e racionais (frações) surgiram nas primeiras civilizações a partir de uma necessidade prática.

No contexto da sociedade grega, as questões práticas da matemática eram ainda utilizadas, mas eles já demonstravam interesse por uma matemática mais abstrata e teórica, sendo Tales de Mileto considerado o precursor da demonstração teórica de propriedades da geometria (SILVA; MENDES, 2013). Foi na escola Pitagórica que a matemática ganhou *status* mais elevado, quase divina, sustentada pela mística de que tudo é número (racional). Nesse caso, o mundo era regido pelos números naturais, sendo os racionais aceitos, pois eram representados pela razão entre dois inteiros (SILVA; MENDES, 2013).

Foi nesse contexto que emergiu a ideia de números irracionais, a partir da crise dos incomensuráveis, na época de Pitágoras de Samos, em que a medida da diagonal de um quadrado de lado *um* não pode ser escrita como a razão entre dois inteiros. Os números irracionais surgiram para resolver o problema das grandezas incomensuráveis, isto é, o problema teórico da medida, possibilitando a criação do número real, englobando os diferentes tipos de números (naturais, racionais e irracionais) em um sistema conceitual, em uma célula (ROSA, 2012).

Diante desse obstáculo epistemológico, a crise dos incomensuráveis foi resolvida pelo Eudoxo de Cnidos, discípulo de Platão (429-348 A.C.), com a sua teoria das proporções. Vale ressaltar que o termo obstáculo epistemológico é relativo às contradições ou aos obstáculos surgidos no conhecimento de uma teoria, causando uma estagnação ou até retrocesso no progresso da ciência. Tais obstáculos são causados por conhecimento passados, que resistem ou não aceitam novas concepções para manter a ordem vigente, sendo constituintes do conhecimento e isso pode ser constatado na descoberta das grandezas incomensuráveis (MOTTA, 2006 apud GOMES; INGAR, 2011).

A teoria das proporções resolveu os problemas dos incomensuráveis, utilizando somente a razão entre números naturais. O método de Eudoxo prevaleceu até o século XIX; nele, os irracionais não eram considerados números, e sim grandezas geométricas (ÁVILA, 2012). A partir do século XIX, houve a necessidade de uma fundamentação teórica referente a várias áreas da matemática moderna, tais como o cálculo, a física-matemática, a álgebra moderna etc. Isso porque estas áreas estavam fundamentadas sobre bases frágeis e era necessário rever os conceitos e colocá-las em bases sólidas. Portanto, era preciso estruturar minuciosamente cada ramo da matemática, preenchendo lacunas e corrigindo imperfeições formais, deixadas pelos seus predecessores (GARBI, 2010).

A fundamentação dos números reais era necessária, pois a teoria dos limites e a ideia de continuidade, conceitos fundamentais na teoria do cálculo, dependiam dessa estruturação. A fundamentação dos números reais, denominada de aritmetização da Análise, proporcionou um desenvolvimento consistente desse conceito, a partir de um modelo axiomático dedutivo que possibilitou a construção dos números reais, racionais e inteiros de maneira lógica, englobando todos os sistemas numéricos e suas propriedades estabelecidos pela Análise Matemática.

Diante dessas questões o presente capítulo tem como objetivo evidenciar mais detalhadamente esse movimento lógico-histórico dos números reais, desde a sua gênese até a sua formalização atual, desencadeada pela fundamentação teórica da matemática, baseadas em um sistema axiomático, postulacional e lógico-dedutivo. A importância de se efetuar o movimento lógico-histórico de um conceito é elucidar a sua gênese, seu desenvolvimento histórico, seus entrelaços, os motivos de sua criação e de sua permanência no mundo científico. E assim perceber os nexos conceituais do conteúdo em questão.

Richard Dedekind e George Cantor elaboraram teorias que fundamentaram em bases sólidas os números reais. Dedekind, com o seu conceito de corte (ÁVILA, 2006), construiu os números reais como sendo a reunião dos números racionais com os números irracionais, dando aos reais a mesma estrutura da reta numérica. A inspiração de Dedekind para a fundamentação dos números reais com a sua teoria de cortes foi a teoria da proporção de Eudoxo, idealizada quase vinte séculos antes (ÁVILA, 2006). Para esclarecermos um pouco mais, este capítulo vai percorrer a ideia de número, deste a pré-história, até a fundamentação teórica dos números reais na Análise Matemática, no século XIX.

3.1 NÚMEROS NATURAIS

A noção de quantidade e de número surgiu na sociedade como exercício dos processos de comparação e ordenação, sendo utilizada em todas as culturas, bem como da necessidade de organizar os fenômenos naturais e artificiais que envolvem a sociedade. Nesse sentido, sua representação ocorre por signos (símbolos) para diversos objetos, sendo possível atribuirmos um mesmo símbolo para aqueles que estão em correspondência biunívoca. A princípio, as noções primitivas de número podiam estar relacionadas com contrastes mais do que com semelhanças, como a diferença entre um lobo e uma matilha, entre um carneiro e um rebanho, entre uma árvore e uma floresta, sugerindo que um lobo, um carneiro e uma árvore têm algo em comum, sua unicidade (BOYER, 2012).

Número não é uma ideia fácil de conceituar, entretanto, como afirma Boyer:

> Boa parte do que hoje se chama matemática deriva de ideias que originalmente estavam centradas nos conceitos de número, grandeza e forma. Definições antiquadas da matemática como uma “ciência do número e grandeza” já não são válidas; mas sugerem as origens dos diversos ramos da Matemática (BOYER, 2012, p.1).

O conceito de número é essencial para o desenvolvimento de toda a matemática. “As possibilidades numéricas dos povos pré-históricos se resumiam em uma apreciação global do espaço ocupado pelos seres e pelos objetos próximos. Esses povos conseguiam no máximo estabelecer uma diferença entre unidade, o par e a pluralidade” (IFRAH, 2005, p 17). Ainda hoje, se percebe em povos que vivem como na pré-história, por exemplo, os zulus e pigmeus da África, dos aranda da Austrália e os botocudos do Brasil, a presença apenas dos conceitos de um, dois e muitos. As civilizações mais antigas tinham o hábito de anotar os nove primeiros números pela repetição de traços verticais, círculos, pontos, dispondo-os na mesma linha.

I	II	III	IIII	IIIII	IIIIII	IIIIIII	IIIIIIII	IIIIIIIII
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Os egípcios e os cretenses tiveram a ideia de reunir algarismos em agrupamento, segundo o princípio da decomposição.

I	II	III	IIII	III	III	IIII	IIII	IIIII
				II	III	III	IIII	IIII
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Como expõe Ifrah (2005, p. 16), os números não são concebidos pela abstração, e sim pelo sentido, de modo qualitativo. O mundo assume uma realidade concreta, que está associada com a natureza dos seres e das coisas em questão. Por exemplo, um grupo de 5 cavalos, 5 dedos, 5 pedras, contém esses componentes que estão associados por uma característica em comum, que é precisamente ser elementos com cinco unidades cada. Karlson (1961, p. 8) afirma “que o número concreto que está ligado a objetos, originou o número em si, que são entes abstratos como no exemplo do número 5”. Roque (2012) corrobora a afirmação de Karlson (1961), afirmando que o número, apesar de ser definido a partir de necessidades concretas, pode ser encarado como um ente abstrato.

> O desenvolvimento do conceito de número, apesar de ter sido impulsionado por necessidades concretas, implica um tipo de abstração. Quando dizemos abstrato é necessário tornar o significado desse termo, pois a dicotomia entre concreto e abstrato, evocada frequentemente em relação a ideia de número, dificulta a compreensão do que está em jogo. Contar é um concreto, mas usar um mesmo número para expressar quantidades de coisas distintas é um procedimento abstrato (ROQUE, 2012, p.39).

O primeiro procedimento aritmético para os homens efetuarem a contagem para resolver problemas práticos, a fim de atender a vida comunitária (número de gados em um rebanho, armazenamento de mercadorias), foi a correspondência um a um, que consistia em comparar duas coleções de seres ou de objetos, fazer uma equiparação entre elementos de um grupo com outro. “A partir deste princípio o homem pré-histórico pode praticar a aritmética antes mesmo de ter consciência e de saber o que é um número abstrato” (IFRAH, 2005, p. 30).

> Quando queremos equiparar termo a termo os elementos de uma primeira coleção com os de uma segunda, origina-se uma noção abstrata, inteiramente independente da natureza dos seres ou dos objetos presentes e que exprime uma característica comum a estas duas coleções. Desta forma, conjuntos como o dia e a noite, os gêmeos, um casal de animais, as asas de um pássaro ou ainda, os olhos, as orelhas, os braços, os seios, ou as pernas de um ser humano apresentam um caráter comum, totalmente abstrato, que é justamente ser dois. Ou seja, a propriedade de equiparação suprime a distinção existente entre dois conjuntos, em razão da natureza de seus elementos respectivos (IFRAH, 2005, p.30).

As técnicas corporais, utilizadas para contar, levaram nossos ancestrais a tomar consciência da noção de ordem, como cita Ifrah:

> Quando se considera um certo número de partes do corpo humano numa ordem previamente estabelecida, e sempre a mesma, sua sucessão, pela força da memória e do hábito, acaba mais cedo ou mais tarde por tornar-se numérica e abstratas. As referências correspondentes (sobretudo as primeiras, que são as mais comuns na prática) passam a evocar então cada vez menos as simples partes do corpo, para suscitar mais fortemente no espírito a ideia de uma certa série de números (IFRAH, 2005, p.43).

Quando consideramos um certo número de partes do corpo humano, numa ordem previamente estabelecida, essas partes acabam proporcionando uma ordem numérica. Dentre as técnicas corporais utilizadas na obtenção do número, o recurso dos dedos da mão desempenhou realmente um papel determinante. A humanidade inteira aprendeu a contar abstratamente até 5 com os dedos de uma mão, depois até dez por simetria. A mão do homem representa uma “máquina de contar” simples e natural. Com a mão, é possível a passagem do número cardinal para o ordinal.

Isto explica que as técnicas de contagem baseadas no corpo humano, como as mãos e os pés, por exemplo, levaram os nossos ancestrais a tomar consciência da noção de ordem, dando início a ideia de sucessão. Contar objetos de uma coleção é destinar a cada um deles um símbolo correspondente a um número da sequência natural de números inteiros, começando pela unidade e procedendo pela ordem até encerrar os elementos. Nesta coleção, assim transformada em sequência, cada um dos símbolos será, consequentemente, o número de ordem do elemento ao qual foi atribuído. E o número integrante desse conjunto será o número de ordem do último dos seus elementos (IFRAH, 2005).

Nesse caso, todo número natural, a partir de 1, é obtido pelo acréscimo de uma unidade ao número que o antecede nesta sucessão. O princípio obtido é o da recorrência[8] da ideia de sucessor de um número natural (IFRAH, 2005). Nesse processo, o nosso sistema numérico se baseia em dois aspectos complementares: o número cardinal, que é baseado na equiparação, e o número ordinal, que exige ao mesmo tempo o processo de agrupamento e o da sucessão. Quando queremos determinar uma quantidade de objetos, não se recorre mais ao princípio da equiparação com um conjunto de objeto padrão, mas simplesmente os contamos, utilizando o princípio da correspondência e da sucessão.

Quando o homem abstraiu os números e aprendeu a distinção sutil entre o número cardinal e ordinal, ele voltou a seus antigos “instrumentos”, mas agora considerando o aspecto de contagem. Foi, então, que ele se deparou com um problema de como representar números grandes. A partir do momento que o homem teve a necessidade de contar conjuntos cada vez mais extensos, os instrumentos concretos utilizados para contagem, como pedras, conchas, dedos, ficaram inviáveis, pois não podia contar indefinidamente tais objetos, ou mesmo não poderia repetir e criar nomes ou símbolos de números infinitamente.

A pergunta que se faz é como contar elementos tão elevados com o mínimo de símbolos possíveis? A partir disso, surgiu a ideia de agrupamento e, com isso, as bases numéricas. Alguns exemplos são: a base dez, que são agrupamentos por dezenas ou “feixes” de dez unidades; a base cinco, agrupamento por feixes de cinco; a base vintesimal, agrupar por vintenas e potências de 20 (baseada nos vinte

---

[8] É o princípio no qual todo número inteiro natural pressupõe os antecedentes como causa de sua existência, isto é, o homem é capaz de conceber um número sob o ângulo da abstração se já tiver assimilado os números precedentes (IFRAH, 2005, p. 47).

dedos, mão e pé); base sexagesimal (baseada em agrupamentos de 60). Foram utilizadas diversas bases nas sociedades antigas, podemos citar os Egípcios e os Chineses que utilizavam a base 10, os Maias a base 20 e os povos da Mesopotâmia que usaram a base 60. Acredita-se que a maioria das bases criadas pelas sociedades antigas tinham relação com as anatomias do nosso corpo, como os dedos das mãos e dos pés (IFRAH, 2005). Para Karlson (1961, p. 10), “o sistema de numeração alcança síntese (contagem) através da análise (agrupamento) ”.

Com a invenção da escrita pelos Fenícios, em meados do quarto milênio a. C., os povos antigos começaram a registrar as transações de compra e venda, realizar inventários e recenseamento das populações e, para isso, precisavam utilizar símbolos para representar as quantidades determinadas. A escrita foi o próximo passo para determinar um sistema de numeração que representasse uma infinidade de números, usando o mínimo de símbolos possíveis. Vários povos antigos, simultaneamente, desenvolveram simbologias distintas para representar números, que utilizavam basicamente o mesmo princípio. Como afirma Ifrah (2005), foram criados símbolos para a unidade, que geralmente era o traço vertical, repetindo esses traços até o número 9 e depois foram inventados símbolos para o 10, 100, e 1000 (no caso utilizando a base 10). “Na base sessenta, foram criados símbolos para a unidade, 10, 60, 600, 3.600 e 36.000, nas terras de Sumer e Elam, que são as antigas civilizações Suméria e Elamita, por volta de 3500 a.C. “ (IFRAH, 2005, p. 133).

A escrita desses números utiliza dois princípios: o agrupamento por base e a aditividade, isto é, repetia os algarismos até obter o número desejado. Por exemplo, os egípcios usavam a escrita hieroglífica e agrupavam os números usando a base 10. Para representar a unidade, utilizavam o traço vertical *I* e para o 10 o U invertido ∩. Logo, para representar o número 53, escreviam 5 vezes o algarismo 10 mais 3 unidades ficando assim a representação: ∩∩∩∩∩ **III**. Notamos que, para escrever o número 53, foram utilizados 8 algarismos, ficando muito carregada tal escrita. Os romanos, para facilitar a notação, criaram símbolos para o número 5, 50, 500, além de já terem uma representação da unidade, dezena, centena e milhar. Tal notação simplificava a escrita. O número 53 fica representado, neste sistema de numeração, como ***LIII***, na qual o ***L*** representa o número 50 e o traço uma unidade.

Mesmo com a criação de símbolos para simplificar a escrita dos números, eles ficaram ainda com a repetição dos algarismos de forma exagerada. O sistema de numeração desses povos tinha ainda outro inconveniente, que era a dificuldade de realizar as operações aritméticas básicas, como adição, subtração, divisão e multiplicação, sendo preciso usar recursos materiais, como o ábaco ou a tábua de contar. Outro problema do sistema de numeração das sociedades antigas era a falta de um sistema posicional e do conceito para representar o nada, neste caso o zero.

Por exemplo, no sistema romano, o símbolo *V* valia 5 onde quer que fosse escrito, enquanto no nosso sistema de numeração atual o valor do 5 é modificado de acordo com a posição do algarismo quando colocado na primeira, segunda ou terceira casas, ou seja, 5, 50 ou 500. Os povos da Mesopotâmia, para diferenciar o símbolo como unidade, dezena ou centena, utilizavam um espaço vazio entre os algarismos para designar a mudança de uma ordem para outra. Mas este método gerava ambiguidades, sendo muitas vezes resolvidas somente pelo contexto da situação no qual o número foi escrito.

Somente três povos da antiguidade conseguiram descobrir o princípio do sistema posicional que foram os babilônios, os chineses e os maias. Dois destes três povos, os babilônios e os maias, criaram o zero, ou seja, um símbolo para marcar a falta de uma unidade, conseguindo eliminar qualquer ambiguidade na escrita dos números. Os babilônios foram mais à frente, utilizando o zero também como um operador aritmético, mas eles nunca conceberam o zero como um número, não dando continuidade ao desenvolvimento do que viria a ser chamada de matemática (IFRAH, 2005).

Um dos sistemas de numeração que merece nossa atenção, na civilização grega, é o sistema jônico, que entrou em uso por volta do ano 200 a.C. É um sistema aditivo de base decimal, com vinte e sete símbolos, quatro letras do alfabeto grego e três do alfabeto fenício, no qual a cada número era atribuída uma letra do alfabeto. Ao longo do tempo, foi se unificando o sistema, até utilizar-se das letras do alfabeto grego para fazer a representação dos números, conforme o Quadro 7.

Quadro 7 – Sistema de numeração Jônico unificado

UNIDADES				DEZENAS				CENTENAS			
Α	α	alfa	1	Ι	ι	iota	10	Ρ	ρ	rô	100
Β	β	beta	2	Κ	κ	kapa	20	Σ	σ	sigma	200
Γ	γ	gama	3	Λ	λ	lambda	30	Τ	τ	tau	300
Δ	δ	delta	4	Μ	μ	mu	40	Υ	υ	upsilon	400
Ε	ϵ	epsilon	5	Ν	ν	nu	50	Φ	ϕ	phi	500
Ϛ	ϛ	digama	6	Ξ	ξ	ksi	60	Χ	χ	khi	600
Ζ	ζ	zeta	7	Ο	ο	ômicron	70	Ψ	ψ	psi	700
Η	η	eta	8	Π	π	pi	80	Ω	ω	ômega	800
Θ	θ	teta	9	Ϟ	ϙ	kopa	90	Ͳ	ϡ	san	900

Fonte: O sistema numérico grego – INVIVO – FIOCRUZ. [9]

Os Hindus atribuíram a cada número um símbolo arbitrário, chamado de algarismo, não possuindo nada em comum com as letras correntes do alfabeto. Este sistema tinha um inconveniente: como utilizar tantos símbolos a uma infinidade de números? Eles utilizavam símbolos para os nove primeiros números, a partir do décimo, o algarismo 1 poderia valer tanto 1, 10, 100 etc., dependendo da sua posição na casa da unidade, dezena, centena e assim por diante. O grande passo, que durou muito tempo, foi a representação de uma simbologia que mostrasse a ausência de uma casa, coluna de ordem que, no caso, é o zero, completando o sistema de numeração que é utilizado atualmente, posicional e decimal, que precisa de nove símbolos e o zero para representar uma infinidade de números.

O sistema de numeração, inventado pelos hindus, é conhecido como indo-arábico, devido aos indianos (hindus), que o inventaram, e aos árabes, que o transmitiram para a Europa Ocidental. Tal sistema de numeração pode ter surgido com base no instrumento de cálculo chamado ábaco, muito utilizado pelos povos antigos, principalmente os romanos. O ábaco utiliza fichas colocadas em colunas que representam a ordem como unidade, dezena, centena e assim por diante, onde o símbolo zero representa uma coluna sem nenhuma ficha. Nossos modelos de adição e subtração, por meio dos conceitos de transportar e emprestar podem ter

[9] Disponível em: www.invivo.fiocruz.br/cgi/cgilua.exe/sys/start.htm?infoid=985&sid=9. Acesso em 07 dez. 2017

surgido do ábaco. A utilização de tal sistema de numeração, atualmente, é devida também à facilidade de se realizar as operações aritméticas, não precisando recorrer a instrumentos de cálculos ou as tabelas de resultado de operações (como nas civilizações egípcias e babilônicas).

O sistema de numeração indo-arábico foi descrito de forma completa pelo matemático persa Al – Khowârizmî em um livro por volta de 850 d.C., que foi traduzido em latim no século XII, seguido de alguns trabalhos europeus referentes ao assunto, fazendo com que o sistema se disseminasse pela Europa (EVES, 2011). A utilização desses algarismos também foi levada à Europa por meio do comércio e do colonialismo europeu. O matemático italiano Leonardo Fibonacci (1175-1250), que teve contato com esses números no Norte da África, concluiu que o sistema de numeração indo-arábico era o melhor sistema para ser adotado nas notações e nos cálculos aritméticos. “Para ensiná-lo aos Europeus, Leonardo Fibonacci escreveu o livro *Liber Abbaci* (o livro do ábaco), que é umas das obras mais importantes na história da matemática” (GARBI, 2010, p. 148). Esta frase inicial do livro é um marco histórico: *“*Estes são os noves símbolos hindus 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1. Com estes nove símbolos e com o sinal 0, que os árabes chamam de zéfiro, qualquer número pode ser escrito” (GARBI, 2010). Porém, demoraram alguns séculos para que o sistema indo-arábico se estabilizasse na Europa, devido à batalha dos defensores do novo sistema (chamado algoristas) e dos abacistas (que usavam o ábaco), sendo somente no século XVII que o sistema de numeração hindu-arábico prevaleceu na Europa.

Podemos concluir que o sistema indo-arábico é resultado de uma simplificação na escrita em um momento de necessidade de diálogo numérico entre civilizações diferentes. Esse sistema será usado por tempo indeterminado como forma de unificação numérica, sendo o sistema numérico mais utilizado do mundo e o de mais fácil entendimento. Tal sistema de numeração possibilitou a compreensão das operações aritméticas, antes eram restritas aos calculadores profissionais, que realizavam as operações no ábaco.

Tal democratização do sistema indo-arábico facilitou a expansão da ciência, da matemática e das técnicas operatórias de cálculo. As frações, que eram utilizadas na Antiguidade, com o atual sistema de numeração, foram submetidas as mesmas regras aritméticas que os inteiros, fazendo com que novos conjuntos numéricos fossem surgindo, no caso os números racionais. A partir daí o homem aprendeu a avaliar e medir grandezas com mais precisão, conseguiu ter a ideia do infinito, inventou as máquinas de contar, levando a matemática a avanços inimagináveis pelos percursores de tal ciência.

3.2 LEIS FUNDAMENTAIS DA ARITMÉTICA E O SURGIMENTO DOS NÚMEROS RELATIVOS

A aritmética e o uso dos algarismos é uma aptidão inata do espírito humano. É uma invenção universal que é compreendida em toda e qualquer parte do mundo. Com o desenvolvimento do sistema de numeração, os números seguem regras que denominaremos as leis fundamentais da aritmética (KARSLSON, 1961). A primeiras leis se referem à ordenação e à igualdade de números naturais. Dados dois números naturais a e b, ocorre exatamente uma das alternativas: $a=b$, $a < b$ (a menor que b) ou $a > b$ (a maior que b). A propriedade é chamada de tricotomia.

A segunda lei da aritmética corresponde à operação de adição, que é a operação mais simples que existe. Dados os números x, y e z naturais, sempre existe a soma $x + y$ que satisfaz as seguintes propriedades

1) Associatividade: $(x + y) + z = x + (y + z)$.
2) Comutatividade: $x + y = y + x$.
3) Monotonia: Se $x < y$ temos então $x + z < y + z$ para todo número z.
4) Elemento neutro: existe um número, que é o zero, tal que $x + 0 = 0 + x = x$.

A operação inversa da adição, isto é, dado o resultado da soma e uma das parcelas, é possível determinar a outra parcela a partir da operação chamada subtração. A subtração é definida por $x – y = z$, ou seja, é a operação pela qual se determina um número z que, somado com y se obtém o número x, isto é, $y + z = x$. A operação de subtração só é possível quando o primeiro termo, no caso o x for maior que o segundo termo, o y, em se tratando dos números naturais.

As operações inversas apresentam casos de impossibilidades de realização, neste conjunto numérico, por exemplo, $7 – 15$. Para Caraça (2003), a impossibilidade das operações inversas, juntamente com as necessidades comerciais, levou à criação de outros campos numéricos, por meio do princípio da extensão e o princípio da economia[10]. Para isso, os estudiosos utilizaram a negação da negação para resolver a dificuldade de se realizar a operação inversa. Sobre o princípio da extensão e da economia, Caraça (2003) afirma que:

> O homem tem a tendência de generalizar e estender todas as aquisições do seu pensamento, seja qual for o caminho pelo qual essa aquisição do seu pensamento se obtém, e a procurar rendimento possível dessa generalização pela exploração metódica de todas as suas consequências. (CARAÇA, 2003, p.9).

Com a impossibilidade da subtração no campo dos números naturais, no qual o menor número não subtrai o maior, surge a necessidade de se criar os números negativos que, junto com o zero e os naturais, formam o campo numérico dos números inteiros, ou seja, pelo princípio da extensão, admite a existência de outro tipo de número (os negativos) para resolver a impossibilidade da subtração (neste caso a negação). Pela negação da negação, resolve-se o problema criando os números negativos.

Na antiguidade, os matemáticos não aceitaram a hipótese de se trabalhar com os números negativos. No entanto, nos cálculos de contabilidade, trabalhava-se normalmente com esses tipos de números, pois eles representam as dívidas e os prejuízos. Os chineses manipulavam os números negativos com toda desenvoltura por meio dos cálculos com varetas, em que os números positivos são expressos em vermelho e os negativos expressos na cor preta. Karlson (1961) diz que os números negativos é a negação do número, isto é, não número. Foram os hindus que foram os primeiros a admitir a existência dos números negativos. Dois matemáticos hindus, Aryabhata e Brahmagupta são responsáveis pelas leis que regem o zero e as regras aritméticas dos sinais (GARBI, 2010).

Para Ifrah (2003), a humanidade lutou durante milênios com sistemas inadequados de numeração, impossibilitando conceber os números negativos (-1, -2, -3, ...), dos quais nos servimos corretamente para exprimir temperaturas abaixo de zero, por exemplo. Com o sistema indo-arábico, foi permitida, de acordo com as regras dos sinais, a extensão das leis da aritmética dos naturais até aos números

[10] O princípio da extensão pretende criar novos números no quais se possam efetuar todas as operações de subtrações. O princípio da economia efetua a construções desses novos números de modo que sejam mantidas todas as propriedades operatórias dos números anteriores. Isto quer dizer que as novas definições sejam dadas de tal modo que as leis formais das operações lhe sejam ainda aplicáveis (CARAÇA, 2003, p. 27).

relativos[11]. Usando o princípio da economia, todas as leis fundamentais da adição com relação aos números naturais foram absorvidas para os números relativos, com o acréscimo de algumas propriedades, como a existência do elemento oposto. Para todo número relativo x não-nulo, tem-se $x + (- x) = (- x) +x =0$[12]. As leis da aritmética da adição e subtração, no campo dos números relativos, aparecem unificadas em uma só, a qual foi denominada adição algébrica.

A terceira lei fundamental da aritmética se refere à operação de multiplicação, que dados dois números naturais x e y, existe um terceiro número natural z, chamado de produto da operação *x vezes y* representado por $x \cdot y$ ou sinteticamente, por xy, cujo resultado é obtido adicionando y com o próprio y até que se obtenha x parcelas. Considerando os números x, y e z naturais, as regras da multiplicação satisfazem[13] (KARLSON, 1961):

1) Associatividade: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.
2) Comutatividade: $x \cdot y = y \cdot x$.
3) Elemento neutro: o número 1 é o elemento neutro da multiplicação, ou seja, qualquer que seja x, temos $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$.
4) Distributividade: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

A operação inversa da multiplicação, chamada de divisão, no qual o número x dividido pelo número y será igual a z, se o produto de $y \cdot z$ for igual a x, em que, simbolicamente, denota-se por $\frac{x}{y} = z$ se e somente se $yz = x$. Mas nem toda divisão de dois números naturais é exata, ou seja, foi preciso estender mais uma vez o campo numérico para efetuar a operação de divisão cujo resultado é não exato, dando origem aos números racionais, constituídos pelas frações que são trabalhadas desde as sociedades antigas para resolverem problemas práticos de medições, repartições de terras, de caças etc.

---

[11] Números relativos são os números formados pelos números naturais, também chamados de números positivos, o número zero e os números negativos.

[12] A adição no conjunto dos números relativos satisfaz as propriedades associativa, possui um único elemento neutro e todo número não-nulo possui um elemento oposto. Tal estrutura algébrica é chamada de grupo. Além disso, se satisfazer a propriedade comutativa, dizemos que essa estrutura é um grupo abeliano (GONÇALVES, 2003, p. 119).

[13] O conjunto dos números relativos munido das operações de adição e multiplicação, onde os inteiros com relação a adição é um grupo abeliano e com relação a multiplicação satisfaz as propriedades associativa, possui elemento neutro e a propriedade distributiva, dizemos que essa estrutura algébrica é chamada de anel (GONÇALVES, 2003, p.32).

3.3 NÚMEROS RACIONAIS

Caraça (1951) afirma que, com a repartição das terras do Egito antigo (por volta de 3.200 a.C.), nasceu a necessidade de uma medida para a terra; neste caso, essa necessidade gerou um novo campo de conhecimento chamado Geometria (medida da terra). E, na tentativa de distribuir a terra corretamente para que o Faraó fosse pago pelos respectivos proprietários das terras, criou-se uma medida adequada para quantificar a terra, que é o comprimento (CARAÇA, 2003). A geometria praticada na Sociedade Egípcia era de cunho mais prático, não se preocupando em demonstrar os resultados ou fórmulas na resolução de problemas. Já a geometria atual é uma criação grega, que virou uma ciência axiomática e dedutiva[14].

A história conta que o imperador Sesóstris dividiu as terras as margens do Nilo entre os cidadãos, que as utilizavam geralmente para a agricultura. Cada pessoa deveria repassar ao imperador uma quantia em impostos equivalente ao tamanho da terra recebida. No entanto, no período das cheias do Rio Nilo, muitas dessas terras acabavam por ser inundadas, de forma que seus donos se sentiam lesados e recorriam à Sesóstris, exigindo uma nova demarcação para recalcular o valor a ser pago (CARAÇA, 1951).

Cabia aos agrimensores à tarefa de medir o terreno e avaliar a redução sofrida por ele. Para isso, eles utilizavam cordas que possuíam um nó a cada um cúbito (medida que correspondia à medida do cotovelo ao dedo médio do Faraó) e comparavam o seu comprimento com o do terreno, aferindo quantos cúbitos cabiam no espaço a ser demarcado; por consequência, essa medida era expressa em cúbitos. Foi então que começaram a surgir alguns obstáculos que dificultavam a realização dessas medições, a partir do momento em que houve a percepção de que, quase sempre, o número de vezes que o cúbito cabia no comprimento a ser medido não era inteiro, pois acabava sobrando um "pedaço" cujo tamanho era menor que a unidade utilizada. Assim, foi preciso o desenvolvimento de uma nova grandeza numérica que fosse capaz de expressar o que eram esses "pedaços". Nesse contexto, a fração tem sua origem a partir da necessidade de representar

[14] É a geometria apresentada por Euclides, no qual poucas afirmações simples são admitidas verdadeiras sem demonstração (axiomas ou postulados) e então são utilizadas para provar outras afirmações mais complexas, chamados de teoremas (BARBOSA, 1997).

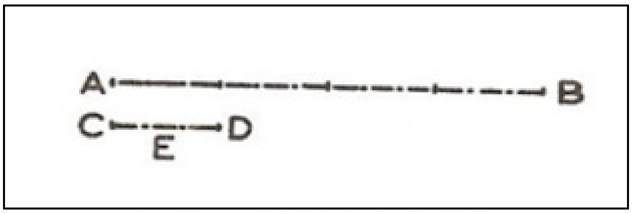
grandezas de medidas não inteiras, ou seja, números que indicassem partes menores que uma unidade.

Posteriormente, com a necessidade das relações métricas, também foi definida a ideia de unidade de medida, tendo-se um comprimento numérico *m*. O problema em questão era: podemos repartir este segmento de comprimento *m* em partes iguais de tamanho *n*? Assim, um segmento de tamanho 12 poderia ser repartido em 3 partes iguais a 4 e escrito na forma da fração $\frac{12}{3}$. Se este segmento, entretanto, fosse de tamanho 11, tinha-se um problema, pois 3 não divide 11 em uma forma adequada à época. Na procura para a solução do problema dado, deparou-se com um novo tipo de números, representados por uma divisão de números cujo resultado não é exato, escrito na forma $\frac{m}{n}$, ou seja, em forma de razão, conhecidos hoje como números racionais.

O problema da contagem simples foi resolvido pelo homem com os números naturais. Porém, com o tempo, perguntas do tipo: “quantas vezes uma grandeza cabe em outra” tornaram os números naturais insuficientes. Deste modo, os números racionais vieram como resposta. Mas o que seria medir? Medir é comparar duas grandezas de mesma espécie. E o que é grandeza? Relaciona-se com a quantidade em que uma determinada qualidade é comum aos elementos da natureza. No Egito, o conceito de medida surge do problema de não saber dividir a terra igualitariamente. Para medir, são necessários: a escolha da unidade, a comparação dessa unidade e a expressão dessa comparação por um número.

Na Figura 1, quantas vezes CD cabe em AB? A resposta prontamente seria quatro vezes.

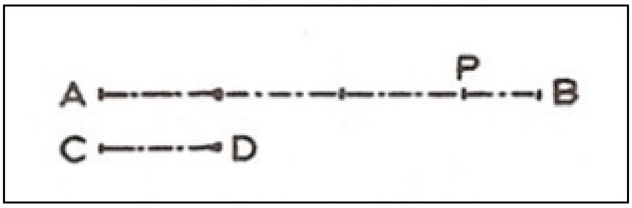
Figura 1 – Quantas vezes CD cabe em AB?



Fonte: Caraça (2005, p. 32).

Mas, na Figura 2, quantas vezes CD cabe em AB? A resposta seria 3 vezes e sobraria um pedacinho. Mas como expressar esse pedacinho?

Figura 2 – Quantas vezes CD cabe em AB?



Fonte: Caraça (2005, p. 33).

A razão dada por $\frac{m}{n}$, no caso da Figura 1, existe e é quatro. Já na Figura 2, seria impossível com os números naturais. Mas, é na negação dessa impossibilidade que se abre e constrói o novo número: o número fracionário. “Para a criação deste novo campo numérico foram utilizados: o princípio da extensão, levando a criar novos números por meio dos quais possam exprimir a medida dos segmentos conforme a figura 2 “ (CARAÇA, 2003, p. 34). Assim, realiza-se a análise da questão na qual reside a impossibilidade da divisão exata e supera-se essa impossibilidade com a inserção de novos números; e o princípio da economia, fazendo a construção de modo que os novos números contemplam as hipóteses da medição conforme a Figura 2 é que eles se reduzem aos números inteiros, caso a medição seja conforme a Figura 1 (CARAÇA, 2003).

Não se sabe realmente a origem dos números fracionários. Boyer (1996, p. 8) afirma que “possivelmente a necessidade de divisão não era característica do homem da pedra, mas ela apareceu devido a novos descobrimentos da humanidade”. Esta ideia de fração pode vir da necessidade prática de se dividir os peixes de igual forma. As frações serviam para medição, repartição (por exemplo, de uma caça) e comparação entre duas grandezas de mesma espécie, utilizando uma grandeza como unidade padrão. As frações foram conhecidas na Antiguidade, mas por falta de representação e notações adequadas e não homogêneas, se adaptavam à realidade de cada civilização.

O papiro de Ahmes foi encontrado no Egito antigo – nome dado em homenagem ao escriba que o copiou por volta de 1650 a.C. – trouxe informações sobre a Matemática do chamado Reino do Meio que, segundo Boyer (1996), existiu por volta de 2000 a 1800 a.C. Este papiro não apresentava o sistema de numeração natural do Egito daquela época, que era o hieróglifo, o sistema utilizado nos papiros era chamado de hierática. Este povo tinha um sistema de numeração próprio, decimal e, possivelmente, parte dele foi escrito pelo arquiteto e médico do faraó Zoser. Nele, a ordem do que chamamos atualmente de dezena e unidade era invertida, pois primeiro se escrevia o que corresponde a unidade e posteriormente a dezena. Mas o que mais chama a atenção é o conhecimento de uma espécie de número que não é muito falado por povos antes destes. Trata-se dos números fracionários que, não se sabe o real motivo, já eram utilizados para representar a solução de um possível problema.

"As inscrições hieroglíficas egípcias têm uma notação especial para frações unitárias, isto é, com numerador um" (Boyer 1996, p. 9). Apesar de os papiros mostrarem que o referido povo antigo tinha certa habilidade na manipulação de frações, os egípcios viam na fração um certo desafio. Sabe-se que eles tinham uma determinada afinidade com $\frac{2}{3}$, de modo que para encontrar um terço de um número, primeiro encontravam dois terços e dividiam este valor pela metade. Sabiam do fato de que dois terços da fração unitária $\frac{1}{p}$ era a soma de $\frac{1}{2p}$ com $\frac{1}{6p}$.

$$\frac{1}{2p}+\frac{1}{6p}=\frac{8p}{12p\cdot p}=\frac{2}{3p}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{p}$$

Tirando a fração $\frac{2}{3}$, eles consideravam as frações racionais da forma geral $\frac{m}{n}$ como parte de algo incompleto. No papiro de Ahmes, encontrou-se uma forma de facilitar as referidas somas por meio de uma tabela que começa com $\frac{2}{n}$ como a soma de frações unitárias de *n* que vai de *5* até *101*. Por exemplo:

$$\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$$

$$\frac{2}{11}=\frac{1}{6}+\frac{1}{66}$$

$$\frac{2}{15}=\frac{1}{10}+\frac{1}{30}$$

E no final da tabela tinha-se:

$$\frac{2}{101}=\frac{1}{101}+\frac{1}{202}+\frac{1}{303}+\frac{1}{606}$$

Boyer (1996, p. 9) sugere que alguns dos itens da tabela $\frac{2}{n}$ eram obtidos usando a fórmula equivalente:

$$\frac{2}{n}=\frac{1}{\frac{n+1}{2}}+\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}$$

ou de

$$\frac{2}{pq} = \frac{1}{p\left(\frac{p+q}{2}\right)} + \frac{1}{q\left(\frac{p+q}{2}\right)}$$

Entretanto, nenhum destes processos serve para a fração $\frac{2}{15}$, que é encontrada na tabela. Recentemente, foi sugerido que, na maioria dos casos, a escolha era por frações derivadas das frações naturais $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$ por sucessivas divisões ao meio. Com isso, para se chegar a um resultado da fração $\frac{2}{15}$, poderiam começar tomando a metade de $\frac{1}{15}$, cujo resultado é $\frac{1}{30}$ e depois verificar qual fração unitária se soma com $\frac{1}{30}$, para obter como resultado $\frac{2}{15}$, que, neste caso, é a fração $\frac{1}{10}$.

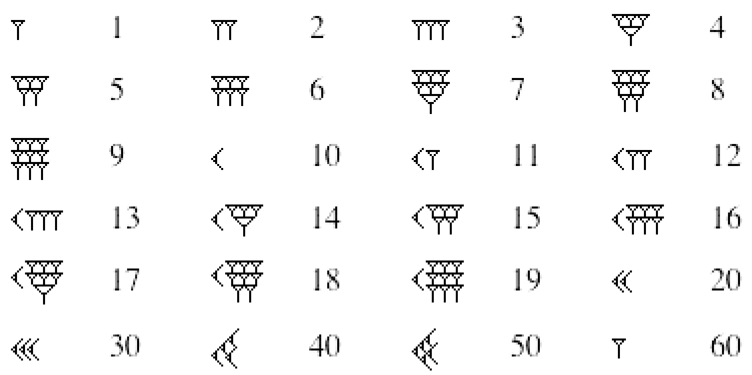
$$\frac{2}{15} = \frac{1}{10} + \frac{1}{30}$$

E, com isso, se chegaria ao mesmo resultado. Esta análise deixa a suspeita de que os egípcios já tentavam fazer uma construção formal das frações. E este pode ser definido como um importante passo para o desenvolvimento da Matemática.

Na Mesopotâmia, utilizavam a notação posicional, que é o mesmo princípio que utilizamos hoje em dia, em que eram utilizados somente dois símbolos na representação dos algarismos e a posição em que se encontram esses símbolos é que ditava seu valor numérico, conforme Quadro 8, a seguir:

Quadro 8 – Posição dos símbolos e o valor numérico

Quadro VIII



Fonte: O sistema numérico grego – INVIVO – FIOCRUZ[15]

[15] Disponível em http://www.invivo.fiocruz.br/cgi/cgilua.exe/sys/start.htm?infoid=976&sid=9.

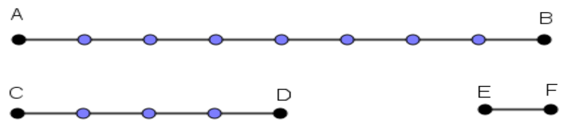
Esses povos utilizavam a base sexagesimal. Acreditamos que isso se deve à quantidade de divisores para o número sessenta e, portanto, às diversas possibilidades de ocupações numéricas. Os mesopotâmicos estenderam seu sistema posicional para as frações, mas sua forma de representação era a mesma para inteiros e fracionais, uma vez que não havia vírgulas ou separações. Desta forma, havia uma ambiguidade entre inteiros e frações, sendo solucionada somente de acordo com o contexto. Em consequência dessa similaridade entre inteiros e fracionários, não possuíam grandes diferenças entre trabalhar com operações entre inteiros ou racionais; desse modo, tinham muita precisão em cálculos e aproximações.

Os mesopotâmicos representavam as frações no seu sistema de base 60, fazendo os dígitos convenientes para escrever potências de $\frac{1}{60}$. Usando a notação moderna, na Mesopotâmia, *6;15* representa $6 + 15 \times \frac{1}{60}$, que resulta em *6,25* na nossa representação atual, na qual o ponto e vírgula é usada para separar a parte inteira da parte fracionaria. Essa civilização foi a primeira a atribuir às frações uma notação racional, convertendo-as em frações sexagesimais e representando-as mais ou menos como se exprimem as horas e os minutos. Através das frações, foi desenvolvida a representação de números não inteiros em termos de vírgula, pelo matemático belga Simon Stevin (1582). Com a invenção da vírgula, os benefícios foram incalculáveis, principalmente pela invenção do sistema métrico decimal. “As frações com a notação moderna utilizando a barra horizontal se deve aos hindus, cuja notação foi aperfeiçoada pelos árabes” (IFRAH, 2005, p. 327).

Enquanto as outras civilizações representavam suas frações conforme suas peculiaridades, os gregos se preocupavam com a padronização das frações, sendo os responsáveis pelas primeiras noções e ideias propriamente ditas científicas sobre a representação fracionária. Os gregos descobriram os racionais como aqueles que podem ser representados como razões entre inteiros. Todas as suas ideias eram fundamentadas em uma lógica de raciocínio e baseadas na tentativa de formar definições dos termos empregados.

Uma importante definição para números fracionários se deu a partir da ideia de razões entre grandezas. Ela mostra que uma razão não é o mesmo que divisão entre números, ela é uma comparação entre grandezas de mesma espécie. Por exemplo, no caso de dois segmentos retilíneos *AB* e *CD*, dizer que $\frac{AB}{CD}$ é o número racional $\frac{m}{n}$, significa que existe um terceiro segmento *EF* tal que *AB* é m vezes *EF* e *CD* é *n* vezes *EF.* Como mostra a Figura 3, sendo *m = 8* e *n = 4.*

Figura 3 – Terceiro segmento EF



Fonte: Elaborado pelo autor.

Nessas condições, dois segmentos são chamados comensuráveis, pois podem ser medidos ao mesmo tempo com a mesma unidade EF. Notemos que *AB* e *CD* são segmentos e não números. É por isso que razão não é o mesmo que fração. Os gregos não usavam frações, somente razões. O pensamento dos gregos nos tempos pitagóricos era de que, sempre, poderia se ter um segmento *EF* que caberia *n* vezes em *AB* e *m* vezes em CD. Porém, a descoberta de grandezas impossíveis de serem representadas por esta razão causou um grande desconforto no pensamento matemático da época.

Assim, apesar de sua importância, considerando sua aplicação, os estudos revelam que, durante muito tempo, as notações apresentadas eram mal fixadas e inadaptadas na prática. Além disso, acreditou-se, por um longo período, que elas expressavam apenas relações entre inteiros, de forma que só foram aceitas como sendo verdadeiramente um número a partir do desenvolvimento do cálculo e da aritmética, quando se comprovou que elas obedecem às mesmas regras que os números inteiros.

O conjunto dos números racionais, denotado por $\mathbb{Q}$, possui as operações de adição e multiplicação definidas por:

$$\frac{x}{y}+\frac{z}{w}=\frac{xw+yz}{yw} \text{ e } \frac{x}{y}\cdot\frac{z}{w}=\frac{xz}{yw}.$$

As operações de adição e multiplicação no conjunto $\mathbb{Q}$ satisfazem os seguintes axiomas (ELON, 2004):

A. Axiomas da adição

A_1. Associatividade – quaisquer que sejam *x, y, z* $\in \mathbb{Q}$, tem-se: $(x + y) + z = x + (y + z)$.

A_2. Comutatividade – quaisquer que sejam *x, y* $\epsilon\ \mathbb{Q}$, tem-se: $x + y = y + x$.

A_3. Elemento neutro – existe 0 $\epsilon\ \mathbb{Q}$ tal que, qualquer que seja *x* tem-se: $x + 0 = x$.

A_4. Elemento simétrico – todo elemento $x\ \epsilon\ \mathbb{Q}$ possui simétrico *-x*, tal que: $x + (-x) = 0$.

M. Axiomas da multiplicação

M_1. Associatividade – dados quaisquer *x, y, z* em $\mathbb{Q}$, tem-se; $(x\cdot y)\cdot z = x\cdot (y\cdot z)$.

M_2. Comutatividade – sejam quaisquer *x, y* $\epsilon\ \mathbb{Q}$, vale: $x\cdot y = y\cdot x$.

M_3. Elemento neutro – Existe $1\ \epsilon\ \mathbb{Q}$ tal que $1 \neq 0$ e $x\cdot 1 = x$, qualquer que seja $x\ \epsilon\ \mathbb{Q}$. O elemento 1 é chamado de “um”.

M_4. Inverso multiplicativo – todo $x \neq 0$ em $\mathbb{Q}$ possui um inverso x^{-1}, tal que, $x\cdot x^{-1}=1$

As operações de adição e multiplicação acham-se relacionadas por um axioma, o axioma da distributividade, no qual a definição de corpo fica completa: dados *x, y, z* $\epsilon\ \mathbb{Q}$, tem-se: $x\cdot (y + z) = x\cdot y + x\cdot z$. O conjunto $\mathbb{Q}$ munido das operações de adição e multiplicação que satisfazem os axiomas acima é chamado de corpo denotado por $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$

Por meio da história do desenvolvimento das frações, é possível notar que, para chegar aos conhecimentos atuais, foi necessária a conexão das noções tidas por diversas civilizações, cujos usos explicitam os contextos em que o conceito de fração está inserido. Tem-se que, principalmente, as concepções de frações no Egito, de decimais na Mesopotâmia e as demonstrações teóricas na Grécia se completam, sendo fundamentais para a construção da ideia que se tem hoje, pois, apesar de utilizarem representações diferentes, trabalhavam com o mesmo conceito.

3.4 O SURGIMENTO DAS GRANDEZAS INCOMENSURÁVEIS: OS NÚMEROS IRRACIONAIS

Para os Pitagóricos, todas as grandezas podiam ser expressas por números inteiros ou pela razão entre dois números inteiros. Nesse caso, dizemos que as grandezas são comensuráveis, isto é, dados dois segmentos AB e CD, existe um segmento *u* (chamado de unidade de medida) e dois inteiros m e n tais que $AB=m\cdot u$ e $CD=n\cdot u$. Portanto, a razão entre os segmentos *AB* e *CD* é dada por $\frac{m}{n}$. Os

Pitagóricos acreditavam que os alicerces do Universo eram os números inteiros ou racionais (razão entre inteiros).

Os números, na comunidade Pitagórica, eram constituídos de uma multiplicidade de pontos e que remetiam a elementos discretos, como uma coleção de pedrinhas organizadas segundo uma determinada configuração. Temos os chamados números figurados, como, por exemplo, os números triangulares, quadrados e pentagonais, nos quais os pontos que formam essas figuras são coleções de pedrinhas ou pontos, conforme Roque (2012). A autora contesta a versão que os Pitagóricos provaram o Teorema de Pitágoras, que afirma que o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos em todo triângulo retângulo.

Segundo Burkert (*apud* ROQUE, 2012, p. 112), "o teorema de Pitágoras era um resultado mais aritmético do que geométrico, ou seja, não existia um teorema relacionando os lados do triângulo retângulo, e sim um padrão numérico relacionado aos números figurados, conhecidos como triplas pitagóricas". Entretanto, essa afirmação pode ser contestada, pois desde os babilônios, existia a concepção de ternas[16] para triângulos retângulos. Os gregos viviam no reino da geometria e em Euclides está claro que a concepção é geométrica.

A matemática grega antiga é conhecida, em grande parte, nos escritos extraídos das ideias de Platão e Aristóteles e, principalmente, em Os Elementos de Euclides (2009), que apresenta duas ideias de razões e proporções:

> A que consta no livro VII é aplicada somente a razão entre os números inteiros e é atribuída a Pitágoras. A segunda versão de razão, atribuída ao matemático da escola de Platão, Eudoxo de Cnidos, conhecida como teoria das razões e proporções, são aplicadas as grandezas comensuráveis e as grandezas incomensuráveis (ROQUE, 2012, p. 115).

A noção de razão, nessa época, não estava ligada à fração entre dois números inteiros, pois eram utilizados métodos geométricos e lidavam com as grandezas envolvidas no problema, como comprimento e área.

Por ironia do destino, o próprio Teorema de Pitágoras foi uma das hipóteses prováveis da descoberta da existência de grandezas incomensuráveis, isto é, que não podem ser expressas pela razão entre dois números inteiros. No quadrado de

---

[16] Ternas pitagóricas são triplas de números tais que a soma de dois números quadrado é igual ao terceiro número quadrado, onde tais números podem ser associados as medidas dos lados de um triângulo retângulo (ROQUE, 2012).

lado 1, a diagonal *d* deste quadrado é calculada usando o teorema de Pitágoras e é dada por $\sqrt{2}$; esse resultado não pode ser expresso como a razão entre dois inteiros, ou seja, dado dois segmentos $AB = 1$ e $CD = \sqrt{2}$, não existe um terceiro segmento *EF* que cabe um número inteiro de vezes no segmento *AB* e *CD* ao mesmo tempo, por menor que seja o segmento *EF.* Este fato contradiz a noção intuitiva de que era possível sempre determinar uma unidade comum entre dois segmentos de reta. Surgiria, então, um novo número, não racional, que seria denominado posteriormente de número irracional. Eudoxo de Cnidos, que foi discípulo de Platão, foi o primeiro a resolver o problema das grandezas incomensuráveis construindo a teoria das proporções, que se encontra no livro V dos Elementos de Euclides (2009).

Para Roque (2012), os gregos tinham um procedimento para determinar se duas grandezas eram incomensuráveis, baseados no método chamado de *antifairese*, que significa subtração recíproca. O método é semelhante ao algoritmo de Euclides, utilizado para determinar o máximo divisor comum entre dois números inteiros. O procedimento da *antifairese* descreve uma série de comparações do seguinte tipo: dados dois inteiros (grandezas), em cada etapa subtrai-se, do maior, um múltiplo do menor, de modo que o resto seja menor do que o menor dos dois números considerados. Se o processo repetir para um número finito de passos, isto é, existe um resto que é um submúltiplo comum dos inteiros (grandezas), temos, nesse caso, que as grandezas são comensuráveis, pois se verifica que a semelhança entre figuras pode ser reduzida a uma proporção aritmética, sendo esta proporção definida por uma igualdade entre razões de números inteiros (medida das grandezas).

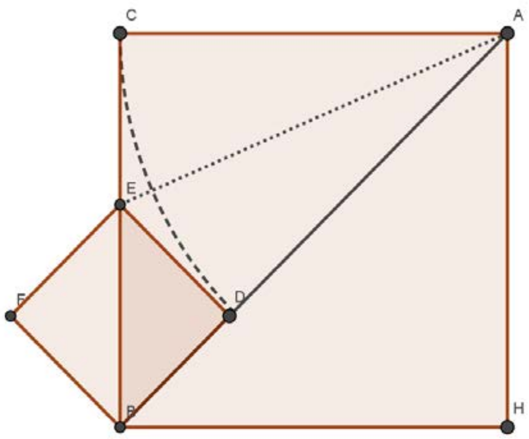
Nesse caso, reduz-se a geometria (comparação de grandezas) à aritmética (comparação entre suas medidas). Vejamos um exemplo para comparar dois segmentos *A* e *B* de medidas *17cm* e *5 cm,* respectivamente. Temos que $A > B$. Logo o segmento *B* cabe três vezes em *A,* restando um resto R_1. Fazendo a unidade de medida igual a *1 cm*, temos que $R_1 = 2$ *cm.* Esse cálculo equivale a $17 = 3 \times 5 + 2$. Repetimos o processo para os segmentos de medidas $B = 5$ *cm* e $R_1 = 2$ *cm*, no qual o segmento R_1 cabe *2* vezes em *B* e sobra *1cm,* chamado de R_2. Temos

$5 = 5 \times 2 + 1$. Nesse caso, temos os segmentos $R_1 = 2$ *cm* e $R_2 = 1$*cm*, no qual o segmento R_2 cabe duas vezes em R_1 e o processo se encerra, pois não sobra nenhum resto de segmento, mostrando que os segmentos *A* e *B* são comensuráveis.

Notamos que o processo acima é equivalente a fórmula *A = Q x D + R,* que equivale ao algoritmo de Euclides para determinar o máximo divisor comum entre os números *A* e *B,* dado em notação atual por *M.D.C. (A, B).* No exemplo acima, temos que *M.D.C. (17, 5) = 1,* isto é, os números *17* e *5* são primos[17] entre si. "Mas quando a antifairese não termina, tem-se um caso de grandezas incomensuráveis, pois as definições de razões e proporções não serão mais aceitáveis, sendo válidas somente para o caso de grandezas comensuráveis" (ROQUE, 2012, p. 121).

Vejamos um caso de uma *antifairese* entre a diagonal e o lado do quadrado, conforme Roque (2012) e Ávila (2003). Na figura 5, temos um quadrado com lado *AC* e diagonal *AB*. Vamos supor que *AB* e *AC* sejam comensuráveis. Então existirá um terceiro segmento *PQ* que seja submúltiplo comum de *AC* e *AB.* Por construção, traça-se o arco *CD* com centro em *A* e o segmento *ED* tangente a esse arco em *D*, de sorte que *AD = AC.* Então, nos triângulos retângulos *ACE* e *ADE*, os catetos *AC* e *AD* são iguais por construção e, como a hipotenusa *AE* é comum, conclui-se que os triângulos *ACE = ADE* são semelhantes, o que implica que os catetos *CE* e *DE* são iguais e *DE = BD.*

Figura 4 – Quadrado com lado *AC* e diagonal *AB*



Fonte: Elaborado pelo autor.

[17] Dizemos que um número inteiro é primo se ele é diferente de ±1 e os únicos divisores dele é ±1 ou ele mesmo. Dois números inteiros são primos entre si quando os únicos divisores comuns são ±1. (GONÇALVES, 2003).

Portanto, temos:

$$AB = AD + BD = AC + BD,$$

$$AC = BC = BE + EC = BE + BD,$$

ou seja,

$$AB = AC + BD \text{ e } AC = BE + BD.$$

Como o segmento *PQ* é submúltiplo comum de *AB* e *AC*, temos pela primeira igualdade acima que *PQ* também é submúltiplo de *BD*, pois $BD = AB - AC$. Na segunda igualdade, temos que *PQ* também é submúltiplo de *BE,* pois $BE = AC - BD$. Provamos que, se houver um segmento *PQ* que seja submúltiplo de *AC* e *AB,* então, o mesmo segmento será submúltiplo comum de *BE* e *BD*, segmentos esses que são a diagonal e o lado do quadrado *BDEF.* Portanto, a mesma construção que nos permitiu passar do quadrado *ACBH* ao quadrado *BDEF* pode ser repetida com este último quadrado para chegarmos a um quadrado menor ainda e, assim, sucessivamente; esses quadrados vão se tornando cada vez menores, pois as dimensões de cada quadrado diminuem em mais da metade quando passamos de um deles ao seu sucessor. Dessa maneira, o segmento inicial *PQ* deve ser submúltiplo comum do lado e da diagonal de um quadrado tão pequeno quanto desejamos, o que é uma contradição, uma vez que *PQ* é um segmento fixo, uma unidade de medida. Logo, somos levados a rejeitar a suposição inicial de que o lado *AC* e a diagonal *AB* do quadrado original sejam comensuráveis, portanto eles são incomensuráveis.

Na demonstração acima, para mostrar que o lado e a diagonal dos quadrados construídos podem ser tornados menores do que qualquer quantidade dada, decorre do lema de Euclides: “se duas quantidades são sempre menores do que a metade da quantidade inicial, elas podem ser tornadas menores do que qualquer quantidade dada” (ROQUE, 2012, p. 129). Isso nos garante que podemos tomar a *BE* e *BD* menores do que a diagonal e o lado do quadrado original *AB* e *AC.* Outra observação é que o procedimento da construção de quadrados cada vez menores não termina, permitindo concluir que a *antifairese* entre o lado e a diagonal de um quadrado continua indefinidamente, mostrando que as duas grandezas são incomensuráveis, isto é, não possuem uma unidade de medida comum.

Outra hipótese da prova sobre a incomensurabilidade da $\sqrt{2}$ se deve a Aristóteles, que utilizou a redução ao absurdo, dizendo que se o lado e a diagonal de um quadrado são comensuráveis, chega-se que um número é par e ímpar ao mesmo tempo, o que é uma contradição. Roque (2012) contesta essa afirmação, pois a demonstração faz uso de uma linguagem algébrica que não poderia ser usada pelos gregos. Essa demonstração é uma das mais utilizadas pelos livros de Cálculo, pois seu raciocínio é de fácil compreensão, como mostramos a seguir.

Para provarmos que $\sqrt{2}$ é irracional por contradição[18], suponha que $\sqrt{2}$ seja um número racional, isto é, existem dois inteiros positivos *a e b,* tais que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, sendo $\frac{a}{b}$ uma fração irredutível, isto é, *a* e *b* são primos entre si, não possuindo um divisor comum maior do que *1*. Elevando $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ ao quadrado, temos $a^2 = 2b^2$. Isto mostra que a^2 é par, o que implica que *a* também é um número par, isto é, *a = 2p*, para algum inteiro positivo *p.* Substituindo *a* na equação $a^2 = 2b^2$, obtemos $(2p)^2 = 2b^2$ implica que $4p^2 = 2b^2$ implica que $b^2 = 2p^2$. O que conclui que b^2 é par, concluindo que *b* é um número par. Isso é um absurdo, pois *a* e *b* são ambos divisíveis por *2,* contrariando a hipótese inicial de que $\frac{a}{b}$ é uma fração irredutível. Chegamos a esse absurdo porque na suposição inicial dissemos que $\sqrt{2}$ era racional. Portanto, somos forçados a afastar essa hipótese e concluímos que $\sqrt{2}$ é um número irracional.

A descoberta dos incomensuráveis levou os gregos a organizar e sistematizar a Matemática, formalizando-a, pois, as grandezas incomensuráveis contradiziam a intuição e problemas envolvendo tais grandezas não eram acessíveis, utilizando cálculos aritméticos. Roque afirma que:

> Presume-se que a possibilidade de dois segmentos serem incomensuráveis esteja relacionada ao fato de a geometria passar a tratar de formas abstratas, o que remete a necessidade de demonstração. A descoberta dos incomensuráveis levou a que se desconfiasse dos sentidos, uma vez que estes não permitem “enxergar “que dois segmentos podem não ser comensuráveis. É necessário, portanto, mostrar que isso pode ocorrer, ou seja, praticar geometria sobre bases sólidas do que as fornecidas somente pela intuição (ROQUE, 2012, p.140).

---

[18] Para provar que a afirmação P implica Q por contradição, supõe inicialmente que P é verdade e que Q é falsa, acaba chegando à conclusão que P é falsa, o que é uma contradição, pois P não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo. Logo Q só pode ser verdadeira (http://www.inf.ufsc.br/grafos/teo-prov/teorema.htm).

A teoria das proporções, envolvendo números comensuráveis e incomensuráveis, foi tratada pelo geômetra Eudoxo, discípulo de Platão. Tal teoria foi descrita por Euclides no livro *V* dos Elementos, aplicando-a na geometria no livro *VI*. “Nos Elementos, as grandezas são tratadas enquanto tais (comprimento, áreas) e jamais são associadas a números” (ROQUE, 2012, p. 165). Do livro *VII* ao livro *IX*, que trata sobre números, eles são associados a segmentos de reta. Para os gregos, os números são agrupamentos de unidades que não são divisíveis. No entanto, as grandezas geométricas são divisíveis em parte de mesma natureza, isto é, linha é dividida por linha, área é dividida por área etc.

> Os números servem para contar, mas antes de contar é preciso saber qual a unidade de contagem. No caso de grandezas, a unidade de medida deve ser também uma grandeza. Aqui a unidade não é número nem grandeza. A “unidade”, na definição de Euclides, é o que possibilita a medida, mas não é um número. Sendo assim, é inconcebível que a unidade possa ser subdividida (ROQUE, 2012, p.189).

Como não associavam as grandezas a números, naquela época, como operavam os gregos com as grandezas, tais como comprimentos e áreas? A resposta era associar as figuras mais complicadas àquelas que possuem as formas mais simples, conhecidas como equivalência de áreas. Esse processo é semelhante a quadratura do círculo, ou seja, construir um quadrado cuja área fosse igual a de uma figura plana dada. Por exemplo, para comparar as áreas de dois retângulos dados, construíam-se quadrados com áreas equivalentes às áreas dos retângulos dados e comparava-se o comprimento dos seus lados. Esse processo permite comparar, associar e operar com áreas de figuras planas sem usar medidas, isto é, sem utilizar números.

Nos Elementos não há significação para razões, que só fazem sentido para números. A razão é um tipo de relação que diz respeito à comparação de duas grandezas de mesma espécie. “No livro *V,* os enunciados das proposições não fornecem nenhum significado as razões $\frac{A}{B}$ e $\frac{C}{D}$ separadamente, mas apenas ao fato de estarem em uma relação de proporcionalidade” (ROQUE, 2012, p. 192). Na definição do livro *V* dos Elementos, Eudoxo fornece um critério para que duas grandezas *A* e *B* de mesma espécie possuíssem uma razão: “Dado *duas grandezas A e B, existe uma relação A:B entre elas sempre que houver um par de inteiros m e n tais que* $mA > B$ e $nB > A$" (GARBI, 2010, p. 50), o que equivale a dizer que duas grandezas podem ser comparadas, se uma se tornar maior que a outra ao ser multiplicada por um número inteiro.

Se duas grandezas são incomensuráveis, não podemos expressá-las como uma razão entre suas medidas, logo, a definição de proporção como igualdade entre duas razões não é aceitável para tais grandezas. Por isso, há a necessidade de se trabalhar com uma ideia mais geral sobre proporções, que valha para quaisquer espécies de grandezas (comensuráveis e incomensuráveis). “Ao invés de se empenhar em resolver o problema da incomensurabilidade, os gregos criaram uma teoria para explicar a comensurabilidade que ‘ocultou’ a problemática ao invés de resolvê-la” (ÁVILA, 2006, p. 56). Eudoxo de Cnidos criou a teoria das proporções, que é discutida a seguir, utilizando uma linguagem moderna, como no livro de Ávila (2006, p. 54).

Consideramos quatro grandezas da mesma espécie, A, B, C e D (segmentos, áreas ou volumes), diz-se que A está para B assim como C está para D se, quaisquer que sejam os números naturais m e n, se tenha:

i) $nA > mB \Leftrightarrow nC > mD$;

ii) $nA = mB \Leftrightarrow nC = mD$;

iii) $nA < mB \Leftrightarrow nC < mD$.

Dessa forma, sendo A e B comensuráveis, tem-se que A: B = m: n, que equivale a dizer que nA = mB. Então, de acordo com a definição de Eudoxo, no caso comensurável, dizer que A: B = C: D equivale a dizer que $nA = mB \Leftrightarrow nC = mD$. Entretanto, no caso dos incomensuráveis, a parte da igualdade é ignorada. Eudoxo continua definindo a igualdade A: B = C: D desde que, para todos os números naturais m e n ocorram,

$$nA > mB \Leftrightarrow nC > mD \text{ e } nA < mB \Leftrightarrow nC < mD.$$

Roque (2012) exemplifica, no caso dos números irracionais, a definição acima. Suponha as grandezas $A = 1, B = \sqrt{2}, C = \frac{1}{2}$ e $D = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Como foi provado anteriormente, as grandezas $\frac{A}{B}$ e $\frac{C}{D}$ são incomensuráveis (foi provado que $\sqrt{2}$ é irracional ou que a razão entre *1* e $\sqrt{2}$, que equivale a relação entre o lado e a diagonal do quadrado são incomensuráveis). Logo, pela definição de Eudoxo, para todos os inteiros *m* e *n*, ocorre $nA > mB \Leftrightarrow nC > mD$ *ou* $nA < mB \Leftrightarrow nC < mD$. Então, para inteiros $n = 3$ e $m = 2$ temos:

$$nA = 3 \cdot 1 = 3 > mB = 2\sqrt{2} = 2{,}828427 \ldots \Leftrightarrow 3 \cdot \frac{1}{2} = 1{,}5 > 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} = 1{,}414213562 \ldots$$

Que satisfaz a condição *i)* da definição de Eudoxo.

Para os inteiros *n = 7* e *m =5*, temos:

$$nA = 7 \cdot 1 = 7 < mB = 5\sqrt{2} = 7{,}071067812 \ldots \Leftrightarrow 7 \cdot \frac{1}{2} = 3{,}5 < 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3{,}535533906 \ldots$$

Que satisfaz a condição *iii)* da definição de Eudoxo. Portanto, Roque explica o que significa a teoria das proporções:

> A ideia por trás da afirmação de que os quatros segmentos *A, B, C* e *D* são proporcionais é a de que expandindo (ou contraindo) os dois primeiros de certa quantidade, os dois outros também serão expandidos (ou contraídos) da mesma quantidade. Ou seja, tudo que acontecer com os dois primeiros deve acontecer com os outros dois. Se multiplico, *A*, por *n*, e o segundo *B*, por *m*, tudo pode acontecer (os segmentos obtidos podem ser iguais, *nA* pode ser maior ou menor que *mB*). O que importa é que o mesmo aconteça para *nC* e *mD*. E isso para quaisquer números inteiros *m* e *n* (ROQUE, 2012, p.197).

A teoria das proporções de Eudoxo evitou a discussão sobre a natureza dos números irracionais. A genialidade é que, na sua construção, a teoria é constituída apenas de números inteiros positivos e esta definição foi extremamente importante para demonstrar e descobrir muitos conceitos matemáticos.

A consequência principal foi a separação entre o universo das grandezas e o universo dos números, fazendo com que a matemática grega se tornasse estritamente geométrica. Ávila chega a afirmar que “embora tenha sido uma solução genial da crise dos incomensuráveis, ela atrasou por mais de mil anos o desenvolvimento da Aritmética e da Álgebra, pois a Matemática ficou subordinada somente aos estudos de geometria” (ÁVILA, 2006, p. 54). Assim:

> A abordagem de Eudoxo para definir a proporcionalidade considerando a existência dos números irracionais recebeu pouca atenção durante muito tempo, até que no século *XIX*, os matemáticos Dedekind, Cantor e Weierstrass utilizaram as ideias eudoxianas para colocar em bases sólidas a teoria dos números reais (GARBI, 2010. p. 50).

A teoria dos números reais será analisada no próximo tópico.

3.5 O CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS

O objetivo do tópico é investigar por que os números racionais não são suficientes para termos uma construção numérica satisfatória, precisando ampliar o campo numérico, que será denominado conjunto dos números reais. Como já foi definido anteriormente, dois segmentos de reta que não têm medida em comum são definidos como incomensuráveis. Temos então uma interferência no conjunto dos racionais. E para avaliar esta influência, analisaremos se existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ e o conjunto dos pontos da reta que indicaremos por *P*, ou seja, se todos os racionais representam um ponto da reta e se todos os pontos da reta correspondem a um número racional. Uma correspondência entre dois conjuntos é quando um elemento de um conjunto é associado a um elemento do outro conjunto, por meio de uma lei de correspondência. A correspondência biunívoca ocorre se cada elemento de um conjunto se associa de maneira única a um elemento do outro conjunto e vice-versa.

Analisamos primeiro a correspondência do conjunto $\mathbb{Q}$ ao conjunto *P,* isto é, se todo número racional corresponde a um único ponto da reta, que chamaremos de *r*. Esse fato é verdadeiro. Consideremos a reta *r* e sobre ela um ponto *O*, no qual chamaremos de origem. A partir de *O*, temos dois sentidos, em que a esquerda de *O* o sentido é negativo e a direita o sentido é positivo. Utilizaremos a correspondência à direita de *O* com o conjunto dos números racionais positivos, sendo o raciocínio análogo da correspondência à esquerda de *O* com os números racionais negativos. Estabelecemos, arbitrariamente, o segmento *OA* como sendo a unidade, ou seja, *OA = 1*, onde *OA* é o comprimento do segmento de reta que vai do ponto *O* até o ponto *A*, conforme a Figura 5:

Figura 5 – Segmento de reta *OA*

Fonte: Elaborado pelo autor.

Para todo número racional positivo $\frac{m}{n}$, podemos fazer corresponder um ponto da reta *r*, dividimos o ponto *OA* em *n* partes iguais e marcarmos *m* destas partes a partir do *O* para a direita. Por exemplo, tome o número $\frac{32}{5}$. Tome *OA = 1* dividido em *5* partes, obtendo *0,2.* Depois multiplique *32* por *0,2,* obtendo o número *6,4* que corresponde ao ponto *B* da figura acima. Esse procedimento pode efetuar-se sempre qualquer que seja a reta *r*, e o ponto *B* é único, logo a correspondência $\mathbb{Q} \rightarrow P$ é completa e unívoca.

Agora argumentamos inversamente de modo a mostrarmos que todos os pontos *B* da reta *r* correspondem a um único número racional *s* que mede o segmento *OB* com a unidade de medida *AO.* Tomamos *B* um ponto qualquer da reta, procuramos a medida *OB* com unidade *AO*. Se esta medida existir e for um número racional $s = \frac{m}{n}$, o qual é então único, façamos corresponder o ponto *B* ao número *s*. Mas o número *s* pode não existir, basta para isto que *AO* e *OB* sejam respectivamente o cateto e a hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles.

Consideramos um triângulo retângulo *OBA* isósceles, onde *OA* = *AB*, propomos achar a medida da hipotenusa OB. Existindo essa medida, como a indução manda, existe um número racional $s = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}$ irredutível, ou seja, m, n são primos entre si, tal que:

$$OB = s \cdot OA$$

$$OB = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}} \cdot OA \qquad (I)$$

Utilizando o teorema de Pitágoras em um triângulo retângulo temos:

$$(OB)^2 = (OA)^2 + (AB)^2 = 2(OA)^2 \qquad (II)$$

Onde *OA* = *AB.* Elevando a igualdade *(I)* ao quadrado, temos:

$$(OB)^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 \cdot (OA)^2$$

e igualando a igualdade *(II)*, obtemos:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 \cdot (OA)^2 = (OA)^2$$

Na qual, obtemos

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2.$$

A igualdade acima é impossível, como mostrado no tópico anterior.

Todo número racional corresponde a um ponto da reta. Existe uma correspondência de $\mathbb{Q}$ em *P* que é completa e unívoca, mas nem todo ponto da reta é um número racional. A correspondência P em Q não é completa, isto é, não há correspondência biunívoca entre *P* e $\mathbb{Q}$. Portanto a não correspondência entre *P* e $\mathbb{Q}$ é devido a existência revelada na incomensurabilidade, ou seja, os números racionais não bastam para exprimir, sempre o resultado da medição de segmento de reta, pois a igualdade *OB* = *s* . OA não é universalmente válida (CARAÇA, 1959). O exemplo $\sqrt{2}$ não é o único, pois existem uma infinidade de números em que a igualdade *OB* = *s* . OA não é válida, como argumentaremos no próximo capítulo.

Dedekind, em seu livro "Continuidade e irracionais", escrito em 1872, conclui que os conjuntos dos pontos da reta é infinitamente mais rico do que os conjuntos $\mathbb{Q}$ dos números racionais. Portanto, é indispensável aperfeiçoar o conjunto $\mathbb{Q}$, criando campos numéricos, de modo que o novo campo numérico, assim obtido seja tão completo e contínuo como a reta. Para isso, vamos analisar as propriedades dos conjuntos $\mathbb{Q}$ e *P* para compará-las e estabelecer as analogias e diferenças para investigar onde falha a correspondência biunívoca entre *P* e $\mathbb{Q}$. Para negar a relação biunívoca entre os conjuntos, podemos analisar as propriedades características do conjunto dos pontos da reta numérica, que são: infinidade, ordenação, densidade e continuidade, e compará-las se com o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais, conforme feito por Caraça (1959). Caso haja alguma propriedade do conjunto *P* que não seja válida no conjunto Q, teremos a negação da correspondência biunívoca.

1) Infinidade: o conjunto de pontos da reta é infinito. De fato, seja a reta *r* e dois pontos *A* e B de r. Se o segmento AB possui infinitos pontos, então a reta r terá infinitos pontos. Vamos dividir o segmento *AB* ao meio, repetindo a operação apenas em uma das metades de *AB*, e realizando o mesmo processo indefinidamente. O questionamento é se o processo realizado tem fim ou não, ou seja, se existem infinitos pontos entre *A* e *B.* A resposta depende de como é formada a reta:

i) Se a reta é formada por pontos, todos de dimensões iguais a $d \neq 0$, alinhados;

ii) ou se considerarmos a reta formada por uma entidade geométrica abstrata, os pontos, tomados como tendo dimensões nulas.

Na primeira hipótese, a operação termina quando obtemos um segmento A_nB de comprimento igual a *d*, aí teríamos um número finito de pontos. Na outra hipótese, por menor que seja o comprimento A_nB, ainda é possível dividi-lo ao meio e a operação de determinar o ponto médio se repete indefinidamente, obtendo a sequência de pontos $A, A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ que é infinita. Pela compatibilidade lógica, devemos rejeitar a primeira.

Se admitimos a primeira, o segmento *AB* teria um número finito e inteiro de pontos *a* satisfazendo a igualdade *m (AB) = a·d.* Considere um outro segmento *CD*, no qual existiria *b e* d tal que *m (CD) = b·d,* em que teríamos $m(AB) = \frac{a}{b} m(CD)$. A igualdade seria válida para qualquer par de segmentos *AB* e *CD*, dizendo que a medida de *AB*, tomada como unidade de medida *CD*, é o número racional $\frac{a}{b}$. Mas mostramos que para segmentos *AO* e *OB* como sendo o cateto e a hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles respectivamente, não existe número racional que satisfaça a igualdade $m(OB) = \frac{a}{b} m(OA)$. Portanto, temos uma contradição, por admitir a primeira hipótese. Logo há uma infinidade de pontos em uma reta, isto é, o conjunto de pontos é infinito e que entre dois pontos quaisquer da reta existe uma infinidade de pontos, mostrando que o conjunto *P* dos pontos de uma reta é infinito.

O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é infinito, pois os números naturais são infinitos e estão contidos no conjunto dos números racionais.

2) Ordenação: o conjunto dos pontos da reta *P* é ordenado, pois dado dois pontos *A* e *B*, diz-se que *A* precede *B* se o ponto *A* estiver à esquerda do ponto *B*. Este critério de ordenação satisfaz à propriedade transitiva, pois se *A* precede *B*, e *B* precede *C*, então *A* precede *C*. Todo conjunto que satisfaz a propriedade transitiva é ordenado. Os números racionais *Q* são ordenados, pois dados $r = \frac{a}{b}$ e $s = \frac{c}{d}$, onde a, b, c e d são números inteiros, onde $b \neq 0$ e $d \neq 0$, temos que $r < s \Leftrightarrow \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad < bc$ (CARAÇA, 1959). A desigualdade goza da propriedade transitiva, ou seja, considere os números racionais $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ e $\frac{e}{f}$, onde *b, c* e *f* são não nulos. Temos $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ e $\frac{c}{d} < \frac{e}{f}$ e queremos provar que $\frac{a}{b} < \frac{e}{f}$. Por hipótese temos $ad < bc$ e $cf < de$. Multiplicando *cf* na primeira desigualdade e *bc* na segunda desigualdade, obtemos

$$ad \cdot cf < bc \cdot cf \text{ e } bc \cdot cf < bc \cdot de$$

Onde pela transitividade dos números naturais temos $adcf < bcde$, que dividindo a desigualdade por *dc* obtemos $af < be \Leftrightarrow \frac{a}{b} < \frac{e}{f}$, mostramos a validade da propriedade. Concluímos que o conjunto $\mathbb{Q}$ é um conjunto ordenado.

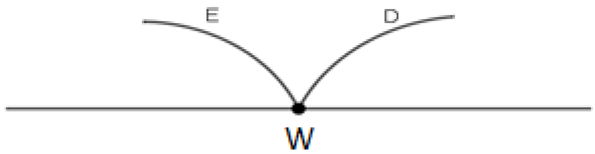
3) Densidade: próximos a um número da reta existem infinitos outros números. Mostramos, na propriedade 1, que a suposição de que o ponto geométrico não tem dimensões leva imediatamente a admitir que entre dois pontos, *A* e *B*, sempre existe uma infinidade de pontos, isto por mais próximos que eles estejam. Todo conjunto que apresenta esta propriedade é denso. Concluímos que o conjunto dos pontos da reta *P* é denso. Quanto ao conjunto dos números racionais, sejam *r* e

s racionais quaisquer com $s > r$ e seja $d = s - r = \frac{m}{n}, d > 0$. Se somarmos a *r* um número $d' < d$, obtermos um número $r' = r + d' < s$, logo haverá tanto números racionais r' entre *r* e *s* quanto forem os números d' satisfazendo $0 < d' < d$. Quantos são estes números? Todo os números do tipo $\frac{m}{m+1}, \frac{m}{m+2}, \ldots, \frac{m}{m+p}, \ldots$, são evidentemente números d' nessas condições, um conjunto infinito, porque o conjunto dos números naturais é infinito. Concluímos que entre dois números racionais distintos quaisquer, há uma infinidade de números racionais. Portanto, o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é denso. Desse modo, as três propriedades acima não são a razão da não biunivocidade de $\mathbb{Q}$ e *P.* Para compreendermos melhor discutiremos a continuidade da reta, propriedade citada na obra de Dedekind.

4) Continuidade. "Como caracterizar a continuidade em termos de rigor que ponham a parte a vaga e imprecisa ideia de continuidade, como ausência de saltos, de variações bruscas e interrupções num dado movimento? " (CARAÇA, 1959, p.83). Primeiro será apresentado o conceito de corte.

Consideremos um ponto *W* sobre uma reta *r*. Em relação ao ponto *W*, todos os pontos da reta estão separados em duas classes; a classe *E* dos pontos a esquerda de *W*, e a classe *D* dos pontos a direita de *W*.

Figura 6 – Ponto *W* sobre uma reta *r*



Fonte: Elaborado pelo autor.

Sempre que a reta tem esta repartição, ela satisfaz duas condições: a) nenhum ponto escapa da repartição e todos os outros pontos da reta estão na classe *E* ou na classe *D;* b) todo ponto da classe *E* está à esquerda de todo ponto da classe *D*. Por isso todo ponto na reta *r* produz um corte (CARAÇA, 1959).

Agora, a recíproca da afirmação *"todo ponto na reta r produz um corte"* é verdadeira? Ou seja, todo corte na reta será sempre produzido por um ponto? Equivalentemente sempre que dividir uma reta em dois conjuntos de pontos da classe *E* e *D,* em que todo ponto de *E* esteja à direita de todo ponto de *D,* existe, ou não, um único ponto *W* tal que ele esteja à esquerda de todos os pontos de *D* e a direita de todos os pontos de *E?* Intuitivamente, a resposta é sim. Dedekind, depois de muito tempo tentando encontrar uma explicação, chega à conclusão de que não é possível prová-la. E é nessa propriedade que está a essência da continuidade, que Dedekind a toma como um axioma, conhecido como axioma de Dedekind-Cantor.

> Se uma repartição de todos os pontos da reta em duas classes é de tal natureza que todo ponto de uma das classes está à esquerda de todo ponto da outra, então existe um e um só ponto pelo qual é produzida esta repartição de todos os pontos em duas classes, ou esta composição da reta em duas partes (CARAÇA; 1951, p.60).

Quase na mesma época, o matemático alemão George Cantor formulou a caracterização da continuidade por uma maneira semelhante; por isso, esse enunciado se chama axioma de Dedekind – Cantor. O axioma de Dedekind–Cantor afirma que todo corte da reta é produzido por um ponto dela, isto é, qualquer que seja o corte (*E, D*), existe sempre um ponto da reta que separa as duas classes *E* e *D.*

E é esse axioma que revela a carência do conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ em relação ao conjunto de pontos *P.* Dedekind expõe em seu livro "Continuidade e irracionais", de 1872, que a linha reta é infinitamente mais rica em pontos do que o conjunto dos números racionais o é em números, sendo inadequado seguir aritmeticamente o fenômeno que governa a reta por meio dos números racionais. Assim, torna-se necessário melhorar esse instrumento com a criação de novos números para que o conjunto numérico seja igualmente completo, ou seja, para que possua a mesma propriedade da continuidade da reta (DANTZIG *apud* MOURA; LIMA; MOURA; MOISÉS, 2016, p. 352).

Se um número racional *r* separa todos os números racionais em dois conjuntos ou classe, *E* (a dos números menores do que *r*) e *D* (a dos números maiores do que *r*), de modo que: a) todos os números racionais diferentes de *r* estão incluindo em *E* ou em *D*; b) Todo número de *E* está à esquerda de todo número de *D* (CARAÇA, 1959). O número *r* pode estar incluído em *E* (elemento máximo) ou em *D* (elemento mínimo).

Sempre que no conjunto *Q* dos números racionais se tenha uma repartição em duas classes *E* e *D*, com as propriedades discutidas acima, dizemos que se tem um corte em *Q.* Resumindo, todo número racional produz um corte no conjunto *Q.* Vejamos agora, a recíproca, isto é, o axioma de Dedekind-Cantor para os números racionais. “Todo corte no conjunto Q é produzido por um número racional”*.* Vamos ver que não é satisfeito o axioma.

De fato, Bongiovanni (2005) mostra o seguinte exemplo: considere no conjunto dos números racionais com repartição assim definida: colocamos numa classe o conjunto $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^3 < 2\}$ e em outra classe o conjunto $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^3 > 2\}$. Temos que essa repartição constitui um corte nos números racionais. Mas o número que separa as classes *A* e *B* é o número *x* tal que $x = \sqrt[3]{2}$, que não existe em $\mathbb{Q}$. Portanto o corte não é produzido por um número racional; logo o conjunto $\mathbb{Q}$ não satisfaz o axioma de Dedekind-Cantor. Agora que mostramos a existência de lacunas no conjunto dos números racionais, pode-se construir um conjunto com estes elementos de separação.

Chamamos de número real ao elemento de separação das duas classes de um corte qualquer no conjunto dos números racionais; “se existe um número racional a separar as duas classes, o número real coincidirá com este número racional; se não existe tal número o número real dir-se-á irracional. ” (CARAÇA, 1951, p. 62).

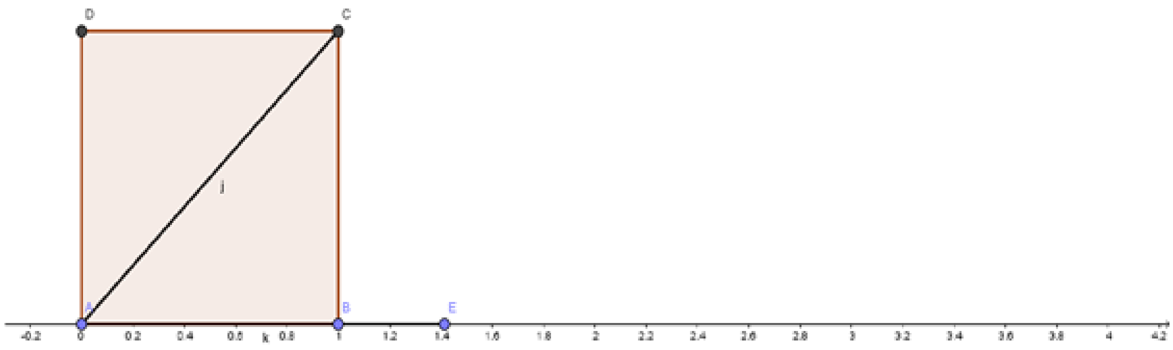
Enquanto que para se construir um número racional precisamos de dois números naturais – o numerador e o denominador –, para se construir um número real precisamos de duas infinidades de números, racionais e irracionais. O corte que apresentamos no exemplo anterior é o número irracional $\sqrt[3]{2}$. O corte que define o zero é aquele que reparte a classe dos números reais negativos (*E*) com a classe dos números reais positivos (*D*). A ampliação do campo numérico se faz reunindo os números racionais a uma nova categoria de números, que são os irracionais, que vêm preencher a lacuna, compreendida a partir do axioma de Dedekind-Cantor. Assim, a qualquer corte em *Q* corresponde um número real que se diz, ainda, que produz esse corte (CARAÇA, 1959). Designaremos por $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais.

> Dedekind observa que a existência de cortes sem elementos de separação no conjunto *Q* dos números racionais é a expressão da aritmética da descontinuidade de *Q*, ao passo que, com a adjunção dos novos elementos – os números irracionais – obtemos o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, que, ao contrário de *Q*, é agora um “contínuo numérico”, pois os irracionais vêm preencher as lacunas de descontinuidade então existentes em *Q* (ÁVILA, 2011, p. 58).

O interessante é que o corte de Dedekind foi inspirando na teoria das proporções de Eudoxio de Cnidos, enunciada na Grécia Antiga para resolver o problema dos números incomensuráveis.

Como existem segmentos que não são mensuráveis, portanto temos a insuficiência de representar segmentos pelos números racionais. Mas a diagonal de um quadrado existe geometricamente e pode ser representada na reta numérica como na Figura 7, a seguir:

Figura 7 – Diagonal de um quadrado



Fonte: Elaborado pelo autor.

Notamos que a diagonal de um quadrado de lado 1 mede $\sqrt{2}$ e está marcada na reta numérica no ponto *E.* Logo, conclui-se que a reta numérica formada pelos números racionais possui espaços vazios, ou seja, os números racionais não preenchem plenamente a reta numérica. Os espaços vazios na reta deverão sem completados por um novo tipo de número, que são os números irracionais, provados por Dedekind com o conceito de corte.

Com o conceito de corte, a reta fica totalmente preenchida e qualquer ponto divide a reta em duas classes, este ponto corresponde a um número racional ou a um número irracional. Portanto, a reta não é formada por pontos indivisíveis, pois para se ter a reta totalmente preenchida, tais pontos são entidades geométricas sem dimensão, existindo somente na abstração. Com a união do conjunto dos números racionais com os irracionais, tem-se o total preenchimento da reta numérica, em que cada ponto da reta corresponde a um número e cada número corresponde a um ponto da reta, ficando estabelecido o novo conjunto numérico, que é chamado de o conjunto dos números reais (MOURA; LIMA; MOURA; MOISÉS, 2016).

Assim, “A reta é uma entidade geométrica contínua, formada por pontos que não tem dimensão denominados cortes. O número real é a linguagem matemática que representa a continuidade da reta, a representação matemática para grandezas contínuas” (MOURA; LIMA; MOURA; MOISÉS, 2016, p. 355). Os números racionais são a extensão da contagem para representar medidas; os números irracionais são a negação da medição, cuja contradição é superada pelos números reais, com a ideia da continuidade da reta, estabelecida por Cantor e Dedekind. No próximo capítulo, mostraremos como se deu a fundamentação teórica dos números reais por meio da Análise Real.

4 CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS E CONJUNTO DOS NÚMEROS IRRACIONAIS NA ANÁLISE MATEMÁTICA

Após o declínio da matemática grega, os trabalhos produzidos pela civilização chinesa e indiana, no campo numérico, foram repassados aos Europeus por intermédio dos árabes. Isto se deu em consequência da expansão comercial destes povos que, devido a suas práticas comerciais, se empenharam em construir métodos matemáticos de grande eficácia. No século XVII, o desenvolvimento da álgebra preparou o terreno para o cálculo e a geometria analítica. Apesar de não se ter uma fundamentação teórica, os matemáticos retomaram a pesquisa sistemática e, com isso, o curso do desenvolvimento matemático teve continuidade. Até o século XIX, a Matemática se desenvolveu extensamente, mesmo sem uma fundamentação teórica. Trabalhavam-se livremente com números racionais e irracionais sem que houvesse uma teoria que embasasse esse desenvolvimento. Foi neste mesmo século que se começou a perceber a necessidade de uma fundamentação rigorosa dos diferentes sistemas numéricos.

No capítulo anterior, foi descrita a primeira fundamentação rigorosa dos números reais, por meio dos cortes de Dedekind (1872), nos quais os números irracionais podem ser definidos a partir dos números racionais. Este capítulo tem como um dos objetivos descrever os números reais de outra maneira, que é pelo método axiomático ou dedutivo, à luz da Análise Matemática. Nesse método, alguns fatos serão admitidos como verdadeiros, isto é, são axiomas, mostrando posteriormente que todas as propriedades dos números reais serão decorrentes de tais axiomas (LIMA, 2004).

O mais importante para Lima (2004) é que os números reais formam um corpo ordenado completo, no qual o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ não satisfaz o axioma da completude, tendo a necessidade de criação de um novo conjunto numérico, o conjunto dos números reais, que será denotado por $\mathbb{R}$. Além disso, mostraremos que o conjunto $\mathbb{Q}$ é um conjunto enumerável, enquanto o conjunto dos números reais é não enumerável, ou seja, que o conjunto $\mathbb{R}$ possui infinitamente mais elementos do que o conjunto $\mathbb{Q}$. Para tratar dessas questões, iniciaremos o capítulo com as definições de conjuntos finitos, infinitos, enumeráveis e não enumeráveis, para depois tratarmos do conjunto $\mathbb{R}$ como um corpo ordenado completo.

Serão discutidas, também, neste capítulo, as principais categorias dos números irracionais, como as raízes quadradas e enésimas de números positivos não exatas. A irracionalidade dos números chamados trigonométricos e logarítmicos será analisada, de modo que esses números são dados aproximadamente pelas funções trigonométricas e pelas tábuas dos logaritmos. Para abordar esses tipos de números irracionais, será realizada outra classificação dos números reais, além dos números racionais e irracionais, em duas categorias que são os números algébricos e os números transcendentes.

No ensino fundamental e médio, os alunos são familiarizados com alguns desses números, como as raízes quadradas não exatas de números naturais, no estudo de cálculo com radicais e que a razão entre o comprimento do círculo com seu diâmetro, o número π, é um número irracional. Além disso, algumas vezes, eles têm a informação de que o número de Euler, denotado por *e*, é uma constante dada por um número irracional, no estudo de funções exponenciais e logarítmicas. Entretanto, a prova da irracionalidade desses números não é verificada, pois são fornecidas apenas informações de que tal demonstração está fora de alcance do nível dos alunos. A única justificativa repassada aos alunos é que estes números possuem uma expansão decimal infinita e não periódica, mas tal informação é imprecisa e não define corretamente os números irracionais.

A forma de definir os irracionais, dessa maneira, deixa a impressão de que só existe uma quantidade restrita de tais números, ou seja, os alunos formam uma ideia errônea de que a quantidade dos números irracionais não seja maior do que a quantidade dos números racionais. Será abordado que o conjunto dos irracionais é não enumerável, possuindo infinitamente mais elementos do que o conjunto dos números racionais, que é enumerável. Este capítulo enumera os tipos de números irracionais, bem como dá um critério de como demonstrar se um número é racional ou irracional por meio da resolução de equações polinomiais, sendo tais métodos acessíveis ao aluno que cursa o ensino médio.

4.1 CONJUNTOS FINITOS, CONJUNTOS INFINITOS, CONJUNTO ENUMERÁVEIS E CONJUNTO NÃO ENUMERÁVEIS

Bernhard Bolzano foi o primeiro a tratar a ideia de conjuntos em seu livro Paradoxo do Infinito. Richard Dedekind foi mais longe que Bolzano, quando utilizou a noção de conjunto na definição de números reais. Mas quem esclareceu, sistematicamente, a teoria dos conjuntos foi George Cantor, que começou o estudo axiomático dos conjuntos em 1872. A partir do estudo de representação de funções por meio de séries trigonométricas, começou a estudar os pontos de descontinuidades de funções. Relacionando a descontinuidade nos conjuntos de pontos, ele descobriu que os conjuntos mais simples eram os que tinham um número finito de pontos. Com isso, começou a ver a importância de se estudar os conjuntos infinitos e introduziu um conceito simples que logo se mostraria de grande importância – o conceito de Equivalência entre Conjuntos (LIMA, 2004).

Consideremos I_n o conjunto de todos os números naturais que vão de *1* a *n.* $I_n = \{1, \dots, n\}$. Um conjunto *X* é finito quando existe uma bijeção[19] $f: I_n \to X$, para algum $n \in \mathbb{N}$, onde $\mathbb{N}$ denota o conjunto dos números naturais. Dizemos que o conjunto *X* possui *n* elementos, onde a função *f* é a contagem dos elementos de *X.* Seja $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, onde $f(1) = x_1; f(2) = x_2; \dots; f(n) = x_n$. O principal resultado de conjunto finito é o seguinte: Seja $A \subset I_n$ um subconjunto próprio de I_n, não pode haver uma bijeção entre *A* e I_n. Isto significa que não pode existir uma bijeção entre um conjunto finito e um subconjunto próprio dele. Como consequência, temos que se existe uma bijeção entre I_n e I_m, então *m* = *n.* De fato, supondo $m \leq n \Rightarrow I_m \subset I_n$, o que é um absurdo, pois não existe bijeção entre um conjunto finito e sua parte própria (LIMA, 2004).

Um conjunto $X \subset \mathbb{N}$ é limitado quando existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $x \leq p \; \forall \, x \in X$. Temos o seguinte resultado desta definição: $X \, C \, \mathbb{N}$ é finito, se e, somente se, é limitado. Com efeito, suponha *X* finito, logo $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Tomando $p = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, vemos que $x \leq p \; \forall \, x \in X$. Logo *X* é finito. Provando a volta, temos que *X* é limitado, isto é, $X \subset I_p$ para algum *p* em $\mathbb{N}$. Segue que *X* é finito, pois o subconjunto de um conjunto finito é finito.

---

[19] Uma função $f: A \to B$ é uma bijeção quando existe uma correspondência biunívoca entre os conjunto *A* e *B*, onde cada elemento de *A* corresponde a um único elemento de *B* e vice-versa.

Um conjunto infinito é um conjunto que não é finito, logo não existe bijeção entre o conjunto infinito e o conjunto I_n, qualquer que seja *n* em $\mathbb{N}$. Uma maneira de provar que um conjunto *X* é infinito é mostrar que existe uma bijeção entre o conjunto *X* e uma parte própria de *X.* Por exemplo, o conjunto $\mathbb{N}$ é infinito, pois existe uma bijeção $f: \mathbb{N} \rightarrow P$, entre o conjunto $\mathbb{N}$ e o conjunto dos números pares *P*, definido por *f(n) = 2n.* Como *P* é uma parte própria de $\mathbb{N}$, segue que $\mathbb{N}$ é infinito (LIMA, 2004). Outra maneira de provar que um conjunto é infinito é mostrar que tal conjunto é ilimitado. Aqui, nos deparamos com o primeiro fato surpreendente da Análise Real, que é a possibilidade de compararmos o tamanho de um conjunto infinito com seu subconjunto, a fim de verificarmos a bijeção entre ambos.

Um conjunto *X* é enumerável quando ele é finito ou existe uma bijeção $f: \mathbb{N} \rightarrow X$. Dizemos, no segundo caso, que *X* é infinito enumerável, onde a função *f* é uma enumeração dos elementos de *X,* ou seja, dado $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$, temos que $f(1) = x_1; f(2) = x_2; \dots; f(n) = x_n, \dots$, indefinidamente. Como existe uma bijeção entre *P* e $\mathbb{N}$, temos que *P* é enumerável (LIMA, 2004). O conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ é enumerável. Basta criamos uma bijeção $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por:

$$f(n) = \begin{cases} 0, se\ n = 1 \\ k, se\ n = 2k \\ -k, se\ n = 2k+1 \end{cases}, \text{ para } k \in \mathbb{N}.$$

Temos uma bijeção, pois *f (0) =1* e os números naturais pares corresponde aos positivos e os números ímpares aos números negativos. Logo $\mathbb{Z}$ é enumerável.

Temos um resultado importante que diz que todo subconjunto de $\mathbb{N}$ é enumerável. Um enunciado equivalente é que todo subconjunto de um conjunto enumerável é enumerável. Todos os conjuntos enumeráveis podem ser colocados sob a forma $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, logo, eles possuem uma ordenação como os números naturais (LIMA, 2004).

Intuitivamente, poderia se questionar que o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ possui mais elementos que o conjunto $\mathbb{N}$ e que não seria possível ter uma bijeção entre esses dois conjuntos, mas tal fato foi provado por Cantor, deixando perplexa a comunidade matemática. Para mostrar a veracidade desse fato, iremos enumerar os elementos de $\mathbb{Q}$ do seguinte modo: agrupar o número da forma $\frac{m}{n}$ irredutível em subconjuntos de modo que cada subconjunto tenha a soma *m + n* constante, colocando-os em ordem crescente da soma.

Tem-se: $\left(\frac{1}{1}\right)$ a fração cuja soma é 2; $\left(\frac{1}{2},\frac{2}{1}\right)$ as frações cuja soma é 3; $\left(\frac{1}{3},\frac{3}{1}\right)$ as frações cuja soma é 4 (lembrando que $\frac{2}{2}$ não conta, pois é equivalente a $\frac{1}{1}$); $\left(\frac{1}{4},\frac{2}{3},\frac{3}{2},\frac{4}{1}\right)$ as frações cuja soma é 5 e assim por diante. Agora, vamos dispor os números de cada subconjunto em ordem crescente dos numeradores, em que nenhum racional falte e que cada um ocupe um lugar determinado, ou seja, $\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{2}{1},\frac{1}{3},\frac{3}{1},\frac{1}{4},\frac{2}{3},\frac{3}{2},\frac{4}{1}$, ..., enumerando os racionais. Portanto, basta fazer a bijeção dada por:

$$f(1)=\frac{1}{1};\ f(2)=\frac{1}{2};\ f(3)=\frac{2}{1};\ f(4)=\frac{1}{3};f(5)=\frac{3}{1},\dots$$

Concluímos que os racionais são enumeráveis. Para comparar conjuntos infinitos, usamos o termo cardinalidade para expressarmos os conjuntos que são equivalentes[20], fazendo analogia com a comparação de conjuntos finitos, que são equipotentes quando possuem o mesmo número de elementos. Logo, a cardinalidade dos racionais $\mathbb{Q}$ é a mesma cardinalidade dos números inteiros $\mathbb{Z}$ e dos números naturais $\mathbb{N}$. Eis uma das diferenças entre o conjunto dos números racionais e o conjunto dos números reais. Mostraremos adiante que o conjunto $\mathbb{R}$ é não enumerável.

4.2 OS NÚMEROS REAIS É UM CORPO ORDENADO COMPLETO

Os principais desenvolvimentos na Geometria, na Álgebra e na Análise, no século XIX, levaram os matemáticos a uma preocupação quanto à fundamentação de toda a matemática. Mostraremos que o conjunto dos reais é um corpo ordenado completo. Vimos, no terceiro capítulo, que os números racionais, munidos das operações de adição e multiplicação, que satisfazem a certas condições, chamadas de axiomas, descritas na seção 3.3, são um corpo.

Podemos generalizar a definição de corpo para um conjunto *K,* munido de duas operações, chamadas de adição e de multiplicação, que satisfazem a condições citadas no terceiro capítulo. A adição faz corresponder a cada par de elementos $x,\ y \in K$ sua soma $x + y \in K$, enquanto a multiplicação associa os

[20] Dois conjuntos A e B são equivalentes se existe uma bijeção entre eles. Neste caso dizemos que A e B tem o mesmo número de elementos ou a mesma cardinalidade (LEMOS, 2013).

elementos *x, y ϵ K* ao produto *x·y ϵ K.* O corpo *K,* munido das operações de adição e multiplicação que satisfazem os axiomas, é denotado por $(K, +, \ \cdot)$

O conjunto dos números reais satisfaz os axiomas de um corpo (LIMA, 2004). Várias propriedades dos números reais decorrem do conjunto $\mathbb{R}$ ser um corpo. Vamos enunciar algumas, cujas demonstrações podem ser consultadas no livro de análise de Lima (2004):

P_1: Lei do corte – quaisquer que sejam *x, y, z* ϵ $\mathbb{R}$, tem-se $x + z = y + z \Rightarrow x = y$ e $xz = yz \Rightarrow x = y$.

P_2: Tem-se $x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0 \ ou \ y = 0, \forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

P_3: Pela propriedade anterior, prova-se que $x^2 = y^2 \Rightarrow x = \pm y, \forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

O conjunto $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado, no qual se destaca um subconjunto $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$, chamado o conjunto dos elementos positivos de $\mathbb{R}$, tal que as seguintes condições (axiomas) são satisfeitas:

O_1: Dados $x, y \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x + y \in \mathbb{R}^+$ e $x \cdot y \in \mathbb{R}^+$, ou seja, a soma e o produto de números positivos são positivos.

O_2: Dado $x \in \mathbb{R}$, ocorre somente uma das alternativas: $x = 0$ ou $x \in \mathbb{R}^+$ ou $-x \in \mathbb{R}^+$. Temos que $\mathbb{R} = \mathbb{R}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^+$, onde $\mathbb{R}^-$ é o conjunto dos números reais negativos. Neste caso $-x \in \mathbb{R}^+$ equivale a $x \in \mathbb{R}^-$.

Os axiomas acima são chamadas axiomas de ordem (LIMA, 2004). Como consequência destes axiomas, temos que $x^2 \in \mathbb{R}^+, \forall\, x \in \mathbb{R},\ x \neq 0$. Com efeito, se $x \neq 0$ então $x \in \mathbb{R}^+$ ou $x \in \mathbb{R}^-$. Se $x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x \cdot x = x^2 \in \mathbb{R}^+$(o produto de dois números positivos é positivo). Se $x \in \mathbb{R}^- \Rightarrow -x \in \mathbb{R}^+$, logo $(-x) \cdot (-x) = x^2 \in \mathbb{R}^+$.

Os axiomas de ordem permitem definir uma relação de ordem no conjunto dos números reais ou em qualquer corpo ordenado (LEMOS, 2013). Dizemos que $x < y$ (x é menor que y) quando $y - x \in \mathbb{R}^+$, ou seja, a relação de ordem decorre da existência dos números positivos. O corpo dos reais é chamado ordenado porque a relação de ordem, definida acima, respeita as operações de adição e multiplicação de um número real positivo (LIMA, 2004). Logo, valem as propriedades:

1) Monotonicidade da adição: $x < y \Rightarrow x + z < y + z$, onde x, y, z são números reais.

Prova: Se $x < y$ temos $y - x \in \mathbb{R}^+$, onde somando o número real z em ambos os lados da igualdade, obtemos $(y + z) - (x + z) = y - x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow (y + z) - (x + z) \in \mathbb{R}^+$, ou seja, $x + z < y + z$.

2) Monotonicidade da multiplicação:

1° caso) Se $z > 0$, temos que $x < y \Rightarrow x \cdot z < y \cdot z$. De fato, Se $x < y$ temos $y - x \in \mathbb{R}^+$, e $(y - x) \cdot z \in \mathbb{R}^+$, pelo axioma O$_1$, donde $(yz - xz) \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x \cdot z < y \cdot z$.

2° caso) Se $z < 0$, temos que $x < y \Rightarrow x \cdot z > y \cdot z$. De fato, por hipótese $-z \in \mathbb{R}^+$ e de $x < y$ temos $y - x \in \mathbb{R}^+$, e $(y - x) \cdot (-z) \in \mathbb{R}^+$, pelo axioma O$_1$, donde $(xz - yz) \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x \cdot z > y \cdot z$.

3) Transitividade: Se $x < y$ e $y < z$ então $x < z$. De fato, temos que $y - x \in \mathbb{R}^+$ e $z - y \in \mathbb{R}^+$, e pelo axioma O$_1$ temos que $(y - x) + (z - y) = z - x \in \mathbb{R}^+$, ou seja, $x < z$.

4) Tricotomia: dados $x, y \in \mathbb{R}$, ocorre exatamente uma das três alternativas: $x = y$ ou $x < y$ ou $x > y$. Usando o axioma O$_2$, temos $y - x \in \mathbb{R}^+$ ou $y - x = 0$ ou $y - x \in \mathbb{R}^-$, no 1º caso temos $x < y$, no 2º $y = x$ e no 3º caso $y < x$.

Como $1^2 = 1 \in \mathbb{R}^+$, temos $1 < 1 + 1 < 1 + 1 + 1 < \cdots$, no qual podemos considerar $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$. Segue que $0 \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{R}$, onde n é natural implica que $-n \in \mathbb{R}$, logo $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$. Sejam m, n inteiros com $n \neq 0$, então $\frac{m}{n} = m \cdot n^{-1} \in \mathbb{R}$, concluindo que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Assim, temos $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ (LIMA, 2004).

Definimos intervalos como tipos especiais de conjunto de números reais, tais como: o intervalo fechado $[a, b]$, no qual compreendem todos os números entre *a* e *b*, incluindo os extremos *a* e *b;* o intervalo aberto (a, b)*,* no qual compreendem todos os números entre *a* e *b*, não incluindo os extremos *a* e *b*; os intervalos semiabertos (semifechados) $(a, b]$ e $[a, b)$ que compreendem todos os números entre *a* e *b*, incluindo somente um dos extremos; o intervalo $(-\infty, b)$ corresponde a todos os números menores do que *b*; o intervalo $(a, +\infty)$ corresponde a todos os números maiores do que *a* e o intervalo $(-\infty, +\infty)$ que corresponde ao conjunto $\mathbb{R}$.

Uma primeira ideia, que se pode tratar na explicação de corpo ordenado completo, é a definição de supremo e ínfimo de um subconjunto de $\mathbb{R}$, mas antes serão definidos conjuntos limitados. Dizemos que um subconjunto *X* de números reais é limitado à direita ou superiormente, quando ele possui um número *d* que é o maior elemento deste conjunto, ou seja, existe um *d* tal que, para todo *x* pertencente ao conjunto *X, x* $\leq$ *d*. Neste caso, *d* é chamado de cota superior do conjunto *X.* Analogamente, dizemos que um subconjunto de números reais *X* é limitado inferiormente, ou limitado a esquerda, se existe um número *c* tal que, para todo *x* pertencente a *X, c* $\leq$ *x.* O número *c* é chamado cota inferior de *X.* Os conjuntos que são limitados superiormente e inferiormente são chamados simplesmente de conjuntos limitados (LIMA, 2004).

Se um conjunto é limitado superiormente, este fato não quer dizer que seu limitante superior pertença a este conjunto. Neste caso, o conjunto não tem máximo, embora seja limitado superiormente. Como, por exemplo, o conjunto *A* dado a seguir:

$$A = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots\}$$

Os elementos deste conjunto não têm máximo, mas são limitados superiormente, estas frações são dispostas da seguinte forma:

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \ldots < \frac{n}{n+1} < \ldots$$

E nenhuma destas frações é maior do que todas as outras. Qualquer uma delas é superada pela que vem a seguir. Sendo a fórmula geral deste conjunto definida por:

$$\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2}$$

Assim, qualquer um dos elementos deste conjunto é menor do que *1*, que é chamado de cota superior do conjunto *A*, no qual o número *1* é o valor máximo desse conjunto*,* mas $1 \notin A$. Então, dizemos que *1* é a menor de suas cotas superiores. Esse fato motivou a definição de supremo de um subconjunto dos números reais (LIMA, 2004).

Seja $X \subset \mathbb{R}$ limitado superiormente. O número $s \in \mathbb{R}$ chama-se supremo de *X,* denotado por *s* = *sup X*, quando *s* é a menor das cotas superiores de *X*. o supremo *s* cumpre duas condições:

1) Para todo $x \in X$, tem-se $x \leq s$. Quer dizer que *s* é cota superior.
2) Seja $c \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq c$ para todo $x \in X$, então $s \leq c$. Equivale a dizer que se *c* for cota superior de *X*, ela será maior do que *s.* Agora, se existir $c \in \mathbb{R}$ tal que $c \leq s$, então existe $x \in X$ tal que *c* < *x*, ou seja, *c* não é cota superior de *X*, pois *s* é o supremo, que é a menor das cotas superiores.

Do mesmo modo, para o conjunto limitado inferiormente, definimos o ínfimo de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$. O número $c \in \mathbb{R}$ chama-se ínfimo de *X,* denotado por *c* = *inf X*, quando *c* é a maior das cotas inferiores de *X*. o ínfimo *c* cumpre duas condições:

1) Para todo $x \in X$, tem-se $c \leq x$. Quer dizer que *c* é cota inferior.
2) Seja $d \in \mathbb{R}$ tal que $d \leq x$ para todo $x \in X$, então $d \leq c$. Equivale a dizer que se *d* for cota inferior de *X*, ela será menor do que *c.* Agora, se existir $d \in \mathbb{R}$ tal que $d \leq c$, então existe $x \in X$ tal que *x* < *d*, ou seja, d não é cota inferior de *X*, pois *c* é o ínfimo, que é a maior das cotas inferiores.

Por exemplo, o intervalo aberto *X* = *(a, b)* tem *sup X* = *b* e *inf X* = *a.* Vamos provar que *sup X* = *b,* isto é, não existe $c \in \mathbb{R}$, tal que *b* > *c, c* seja cota superior de *X.* Isto é claro para *c* ≤ *a.* Agora seja *a* <*c* < *b* então $x = \frac{b+c}{2}$ é um elemento de *X,* com *c* < *x* < *b,* o que mostra que *c* não é cota superior de *X.* Assim *b* = *sup X.* Analogamente mostra-se que *inf X* = *a.* Neste caso, temos que *inf X* e *sup X* não pertencem a *X.* Iremos definir o que é um corpo ordenado completo.

Diz-se que um corpo ordenado *K* chama-se completo quando todo subconjunto não vazio, limitado superiormente, $X\, C\, K$, possui supremo em *K.* Analogamente, um corpo ordenado *K* chama-se completo quando todo subconjunto não vazio, limitado inferiormente, $Y\, C\, K$, possui ínfimo em *K.* Agora, será enunciado o axioma fundamental da Análise Matemática, chamado de axioma da completude. "Existe um corpo ordenado completo, $\mathbb{R}$, chamado o corpo dos números reais" (LIMA, 2004, p.80). Esse axioma distingue os números racionais dos números reais.

O que significa o Axioma acima? O conjunto dos números racionais tem buracos, ao passo que o conjunto dos números reais é completo, ou seja, se houvesse um buraco na reta real, o conjunto de pontos à esquerda do buraco não teria supremo (LEMOS, 2013).

Seja o conjunto *A* = *{x ϵ* $\mathbb{Q}$ | *x* ≥ *0 e* x^2 < *2}.* O supremo do conjunto *A* é $\sqrt{2}$. Seja os valores de *x* que se aproximam de $\sqrt{2}$, no qual temos $x_1 = 1$; $x_2 = 1{,}4$; $x_3 = 1{,}41$; ..., que neste caso os valores de x_n se aproxima de $\sqrt{2}$ quando os índices de *x* crescem indefinidamente, isto é, quando n tende ao infinito. Vamos provar que $\sqrt{2}$ é o supremo de *A*, isto é, que $\sqrt{2}$ é a menor das cotas superiores. Suponha que *c* seja cota superior de *A,* isto é, $x_n < c, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Temos que $x_n < c \Leftrightarrow c - x_n > 0$. Determinando o limite na desigualdade, obtém-se $\lim_{n\to\infty}(c - x_n) = \lim_{n\to\infty}(c) - \lim_{n\to\infty}(x_n) = c - \sqrt{2} > 0 \Rightarrow c > \sqrt{2}$. O argumento vale para toda cota superior *c*. Logo $\sqrt{2}$ é a menor das cotas superiores de *A*, portanto $\sqrt{2} = \sup A$ e $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, como provamos no capítulo 3. Portanto o conjunto $\mathbb{Q}$ não é completo. Nas palavras de LIMA (2004):

> A insuficiência mais grave dos números racionais, para efeitos da Análise Matemática, é o fato de que alguns conjuntos limitados de números racionais não possui (sic.) Supremo (ou ínfimo). Este fato está ligado a inexistência de raízes quadradas racionais de certos números inteiros, mas é uma dificuldade que vai muito além dessa falta (Lima, 2004, p. 78).

No exemplo anterior, o conjunto $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 0 \text{ e } x^2 < 2\}$, tem a $\sqrt{2}$ como supremo, que pelo axioma da completude, existe um número real positivo a tal que $a^2 = 2$. Esse número é representado pela $\sqrt{2}$. Além disso, existe um único número positivo tal que $a^2 = 2$, pois se houvesse outro número positivo b, teríamos $a^2 = b^2 = 2 \Rightarrow a^2 - b^2 = 0 \Rightarrow (a - b)(a + b) = 0 \Rightarrow a + b = 0$ ou $a - b = 0$. No primeiro caso, teríamos $a = -b$, absurdo, pois a e b são ambos positivos, e no segundo caso $a = b$. Assim, como $\sqrt{2}$ não é racional, existe elementos pertencentes ao conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$, denotados por números irracionais. Assim $\sqrt{2}$ é um número irracional. Representando os números irracionais por $\mathbb{I}$, temos que $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

4.3 SEQUÊNCIAS CONVERGENTES: UMA NOVA CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS REAIS

Não existe uma única forma de construir o conjunto dos números reais. Aqui apresentamos a construção feita por Lima (2004) utilizando intervalos encaixados, que nada mais é que um intervalo contido em outro intervalo e assim infinitamente. O autor denomina essa construção de Teorema dos intervalos encaixados e o caracteriza como: "Dada uma sequência decrescente de intervalos limitados e fechados $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$ da forma $I_n = [a_n, b_n]$, existe pelo menos um número real c tal que $c \in I_n, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Mais precisamente, $c \in \cap I_n \neq \emptyset$ " (LIMA, 2004, p. 85).

A demonstração deste teorema é a seguinte: Para cada $n \in \mathbb{N}$, temos $I_n \supset I_{n+1}$, o que significa $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1$. Chame de *A* o conjunto dos a_n.O conjunto *A* é limitado superiormente, pois os elementos representados por b_n são cota superior de *A.* Seja $c = supA$, logo $c \geq a_n$. Como $b_n \geq a_n, \forall\, n \in \mathbb{N}$, temos que $c \leq b_n$, pois cada b_n é cota superior de *A,* sendo c a menor das cotas superiores, portanto vale a desigualdade $a_n \leq c \leq b_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Isto acarreta que $c \in I_n = [a_n, b_n]$, para algum n natural.

Para definir o conjunto dos números reais, o Matemático Cauchy definiu um par de sequências convergentes da seguinte forma: sejam (a_n) e (b_n) duas sequências convergentes que satisfazem as seguintes condições:

1) A sequência (a_n) é crescente ou não decrescente, isto é, $a_n < a_{n+1}$ ou $a_n \leq a_{n+1}$.
2) A sequência (b_n) é decrescente ou não crescente, isto é, $b_n > b_{n+1}$ ou $b_n \geq b_{n+1}$.
3) Qualquer elemento de (a_n) é menor que qualquer elemento de (b_n), isto é, $a_n < b_n$.
4) Qualquer que seja o número real positivo *c*, existe um número inteiro n_1 tal que $b_n - a_n < c$, para todo $n_1 > n$. Isto quer dizer que há um número real *c* nestas condições: $a_n \leq c \leq b_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, onde o número real *c* é definido pelo par de sequências convergentes (a_n) e (b_n).

Tal definição de pares de sequências convergentes é equivalente ao teorema dos Intervalos Encaixados.

Entretanto, o referido teorema não vale para o conjunto dos números racionais. Vejamos uma prova desta afirmação: Tome as sequências convergentes $(a_n) = (1; 1{,}4; 1{,}41; 1{,}414; \dots)$ e $(b_n) = (2; 1{,}5; 1{,}42; 1{,}415; \dots)$ que convergem para o número $\sqrt{2}$ que não é racional, logo temos que $a_n \leq \sqrt{2} \leq b_n$, ou seja, a condição 4) não é satisfeita nos números racionais, pois em $\mathbb{Q}$, não existe *c* tal que $a_n \leq c \leq b_n$, para algum $n_1 > n$. Como se vê, alguns pares de sequências não convergem para números racionais, sendo estes números chamados de irracionais. A condição 4), que o par de sequências convergentes sempre corresponde a um número real, é equivalente ao axioma da completude.

O conjunto dos números reais definido pelo par de sequências convergentes tem a estrutura de corpo ordenado completo. Seja o número real *a* definido pelo par de sequências convergentes (a_n) e (b_n) e *c* o número real definido pelas sequências convergentes (c_n) e (d_n). Temos que a soma *(a + c)* é definido pelos pares de sequência $(a_n + c_n)$ e $(b_n + d_n)$ que são convergentes, no qual a soma satisfaz as propriedades associativa, comutativa, o elemento nulo é a sequência *(0, 0, ...)* e o elemento oposto de *c* é *(-c)* cuja sequência é definida pelos pares $(-c_n)$ e $(-d_n)$.

Do mesmo modo, a multiplicação *(a·c)* é definida pelos pares $(a_n \cdot c_n)$ e $(b_n \cdot d_n)$, no qual o elemento inverso de *a* é o par de sequências convergentes *a*$^{-1}$ dadas por $(\frac{1}{a_n}, \frac{1}{b_n})$. É dado que o par de sequências convergentes (a_n) e (b_n) que definem o número real *à* é positivo ou negativo, levando a definir *a > 0* ou *a < 0*, no qual temos a relação de ordem dada por *a < c* se e somente se *a – c < 0*, que satisfazem as propriedades de um corpo ordenado. A prova dessas propriedades está em Caraça (1951) e estão fora do objetivo da tese.

Em Caraça (1951), demonstra-se um teorema que relacionam o par de sequências convergentes e os cortes de Dedekind: de todo corte *(E, D)* de Dedekind se pode extrair um par de sequências convergentes. A recíproca também é válida, ou seja, todo par de sequências convergentes determina no conjunto dos números reais um corte de Dedekind. A demonstração será omitida e pode ser consultada em Caraça (1951). Esse fato mostra que a natureza dos números reais pode ser distinta, mas eles possuem o mesmo comportamento referente às propriedades intrínsecas entre esses objetos, comprovando a afirmação que existe somente um corpo ordenado completo, que é o conjunto dos números reais, a menos de um isomorfismo.

Para encerrar, a condição 4) dos pares de sequências convergentes nos diz que dado qualquer número real *c*, existe um número inteiro n_1 tal que $b_n - a_n < c$, para todo $n_1 > n$. Além disso, existe um inteiro positivo *p* tal que $\frac{1}{10^p} < c$, basta para isso, tomar *p* tal que $10^p > \frac{1}{c}$, pela propriedade arquimediana[21] dos números reais. Logo, para *n > p*, $b_n - a_n \leq \frac{1}{10^p} < \frac{1}{10^n}$, onde *n* representa a diferença da enésima casa decimal da precisão do número real *c*. A escrita dos números irracionais, sob a forma decimal, é uma reprodução abreviada dos pares de sequências convergentes que o definem, quando as diferenças dos elementos correspondentes são $\frac{1}{10^n}$. Tome por exemplo o número $\sqrt{5}$. Temos que:

$$2 < \sqrt{5} < 3;$$

$$2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3;$$

[21] Um corpo ordenado *K* é arquimediano quando nele é válida qualquer das três afirmações equivalentes abaixo:

i) $\mathbb{N} \subset K$ é ilimitado superiormente;

ii) Dados $a, b \in k, a > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \cdot a > b$;

iii) Dado qualquer $a > 0$ em *K*, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < a$.

$$2{,}23 < \sqrt{5} < 2{,}24;$$
$$2{,}236 < \sqrt{5} < 2{,}237;$$
$$2{,}2360 < \sqrt{5} < 2{,}2361; etc.$$

Neste caso, os pares de sequências convergentes possuem diferenças de 1 unidade, 1 décimo, 1 centésimo, 1 milésimo e assim sucessivamente. Para os números racionais infinitos com dízimas periódicas, o raciocínio é análogo. Tome o valor $\frac{1}{3}$.

$$0 < \frac{1}{3} < 1;$$
$$0{,}3 < \frac{1}{3} < 0{,}4;$$
$$0{,}33 < \frac{1}{3} < 0{,}34;$$
$$0{,}333 < \frac{1}{3} < 0{,}334;$$
$$0{,}3333 < \frac{1}{3} < 0{,}3334; etc.$$

Um fato importante é que os números racionais finitos podem ser escritos de maneira infinita, que a partir da última casa, todas as seguintes são iguais a 9. Por exemplo o número *0,473.*

$$0{,}473 = 0{,}472 + 0{,}001 = 0{,}472 + 0{,}000999\ldots = 0{,}472999\ldots$$

Todo o número real admite uma representação decimal infinita, na qual o número racional é sempre periódico e o número irracional é não periódico. Mais detalhes sobre essas informações podem ser vistos em Niven (2012).

Agora iremos mostrar que o conjunto dos números reais é não enumerável, utilizando o teorema dos intervalos encaixados. De fato, suponhamos que exista um subconjunto enumerável $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} \subset \mathbb{R}$. Vamos encontrar um número real $x \notin X$, mostrando que *X* é não enumerável e consequentemente $\mathbb{R}$, pois todo subconjunto de um conjunto enumerável é enumerável. Com efeito, sejam I_1 um intervalo fechado e limitado tal que $x_1 \notin I_1$ e tome outro intervalo $I_2 \subset I_1$, no qual $x_2 \notin I_2$ e assim obtemos uma sequência de intervalos limitados e fechados tal $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_n$, com $x_i \notin I_i$ $(1 \leq i \leq n)$. Podemos obter $I_{n+1} \subset I_n$ com $x_{n+1} \notin I_{n+1}$, que nos fornece uma sequência de intervalos limitados e fechados $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_n \ldots$. Pelo teorema dos intervalos encaixados, existe um número real *x* que pertence a todos os I_n. Como $x_n \notin I_n$, segue que *x* não é nenhum dos x_n, e, portanto, $x \notin X$. Logo nenhum conjunto enumerável pode conter todos os números reais.

O fato provado acima resulta que $\mathbb{R}$ é não enumerável. Como $\mathbb{Q}$ é enumerável, resulta do teorema que existem números reais que não são racionais, estes são os números irracionais. Além disso, os números irracionais formam a maioria dos números reais (os conjuntos enumeráveis são os menores dos conjuntos infinitos). Assim podemos escrever que $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$, onde $\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

O conjunto $\mathbb{I}$ dos números irracionais também é não enumerável, pois se $\mathbb{I}$ fosse enumerável, o conjunto $\mathbb{R}$ seria enumerável, visto que a reunião de dois conjuntos enumeráveis é enumerável (LIMA, 2004), pois $\mathbb{Q}$ é enumerável, chegando a uma contradição. Logo, $\mathbb{I}$ é não enumerável.

. Um intervalo *(a, b)* é não degenerado quando *a ≠ b.* vamos dividir a demonstração em duas partes (CARAÇA, 1951). Um resultado importante é que qualquer intervalo não degenerado de números reais é não enumerável

1ª parte da demonstração: O intervalo *(0, 1)* é não enumerável.

Para provar esse fato, primeiro será adotado que todos os números reais têm representação decimal infinita, como visto anteriormente. Por exemplo, *0,052 = 0,0519999...*. Suponha, que *(0, 1)* seja enumerável, ou seja, ele pode ser colocado em correspondência biunívoca com os elementos dos números naturais. Tem-se:

$$1 \to 0, a_{11}a_{12}a_{13}, \dots, a_{1n}, \dots$$

$$2 \to 0, a_{21}a_{22}a_{23}, \dots, a_{2n}, \dots$$

$$n \to 0, a_{n1}a_{n2}a_{n3}, \dots, a_{nn}, \dots$$

E assim sucessivamente, onde a_{ij} são algarismos de *0* a *9.* O próximo passo levará a uma contradição, construindo um número real que não está na lista acima. Tome o algarismo *b* da forma $b = 0, b_1 b_2, \dots, b_n$, cujos algarismos são o seguinte: Se $a_{nn} \neq 0$, então $b_n = a_{nn} - 1$ ou se $a_{nn} = 0$, então $b_n = 1$. Temos que o número $b \in (0{,}1)$, pois *b* é positivo e menor que *1*. Além disso, *b* não pertence a lista acima, pois ele difere pelo menos um algarismo da sua dízima – do primeiro, pelo seu 1º algarismo; do segundo, pelo seu 2º algarismo e assim por diante, pois $b_n \neq a_{nn}$. Assim, o número *b* não está na lista e chegamos a um absurdo, provando que *(0, 1)* é não enumerável.

2ª parte da demonstração: Existe uma bijeção entre o intervalo *(0, 1)* e o intervalo *(a, b),* quaisquer que sejam *a* e *b* números reais.

Defina a função $f: (0,1) \to (a,b)$ dada por $f(x) = (b-a)x + a$. Vamos mostrar que *f* é bijetora. Temos que *f* é injetora, pois se $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2, \forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Basta igualar $(b-a)x_2 + \cancel{a} = (b-a)x_1 + \cancel{a} \Rightarrow \cancel{(b-a)}x_2 = \cancel{(b-a)}x_1 \Rightarrow x_1 = x_2$.

A função *f* é sobrejetora, pois dado $y \in (a,b)$, existe um $x \in (0,1)$ tal que *f(x)=y.* De fato, basta tomar $x = \frac{y-a}{b-a}$ para temos que a cada $y \in (a,b)$ existe um $x \in (0,1)$. Logo, a função para $b \neq a$ é sobrejetora, como o intervalo é não-degenerado, temos que *f* é sobrejetora. Portanto, *f* é bijetora.

Como existe uma bijeção entre *(0, 1)* e *(a, b)*, e *(0, 1)* é não enumerável, temos que o intervalo *(a, b)* é não enumerável. Como consequência da não enumerabilidade de *(a, b)*, temos o seguinte resultado: Todo intervalo não degenerado contém números racionais e números irracionais. Foi provado no terceiro capítulo que os números racionais são densos, ou seja, entre dois números quaisquer, existem infinitos números racionais. Como o conjunto dos racionais é enumerável e qualquer intervalo *(a, b)* é não enumerável, temos que o intervalo *(a, b)* contém números irracionais, pois, caso contrário, o intervalo *(a, b)* seria enumerável.

4.4 REPRESENTAÇÃO DECIMAIS DOS NÚMEROS REAIS

Nos *Elementos de Euclides*, livro X, estão listadas as construções geométricas cujas soluções são dadas por segmentos comensuráveis e incomensuráveis, relacionadas aos números racionais e irracionais. Nas resoluções de equações quadráticas de Al-Khowârizmî, as soluções irracionais eram admitidas e eram aproximadas por métodos numéricos pela operação inversa da potenciação (EVES, 2008). Por exemplo, para calcular $\sqrt{n}$, o valor de g_1 deveria ser o valor mais aproximado possível de $\sqrt{n}$, para se obter uma aproximação satisfatória. Depois efetua-se a divisão $\frac{n}{g_1} = a_1$ e se calcularia a média aritmética entre a_1 e g_1, obtendo $g_2 = \left[\frac{a_1+g_1}{2}\right]$ uma nova aproximação mais precisa da raiz (EVES, 2008).

Por exemplo, para calcular $\sqrt{8}$, tome o número $g_1 = 3$ como um valor próximo da raiz. Depois faça a divisão $\frac{8}{3} = 2{,}667 = a_1$. Por último, a média aritmética $\left[\frac{3+2{,}667}{2}\right] = 2{,}833 = g_2$, que é a nova aproximação da $\sqrt{8}$. Repete-se o processo novamente, obtendo $a_2 = \frac{n}{g_2} = \frac{8}{2{,}833} = 2{,}824$. Novamente, determine a média aritmética entre a_2 e g_2, dada por $\left[\frac{2{,}833+2{,}824}{2}\right] = 2{,}8285 = g_3$. Continua o procedimento até obtemos a raiz com a precisão desejada. Nesse caso, o resultado $g_3 = 2{,}8285$ se aproxima da $\sqrt{8} = 2{,}828427\ldots$ com uma precisão de 3 casas decimais.

Mesmo os irracionais sendo considerados como soluções de problemas geométricos e algébricos, como no caso grego e árabe, esses resultados não eram associados a números e, sim, as grandezas. A partir do século XVII, os irracionais apareciam como raízes de equações algébricas e eles eram, muitas vezes, aproximados por soma de séries infinitas, nas quais as curvas associadas a equações algébricas podiam ser representadas por tais séries, que se tornou o meio mais geral para se estudar relações (funções) entre variáveis. Porém, os irracionais ainda não tinham estatuto de número (ROQUE, 2012).

O matemático Holandês Simon Stevin, em 1585, defendeu uma aproximação decimal para os números fracionários, mostrando como estender os princípios da aritmética com algarismos indo-arábicos para realizar cálculos com esses números. Com tais notações, ficou evidente que o número irracional está imerso numa infinidade de casas decimais, em que a sua escrita numérica escapa da representação decimal finita, tornando necessário aumentar o número de casas decimais para se ter uma aproximação entre o número irracional e o número racional. Nas palavras de Roque (2012, p. 425):

> A representação decimal com vírgulas foi um passo importante na legitimação dos irracionais, uma vez que fornecia uma intuição de que entre dois números quaisquer é sempre viável encontrar um terceiro, aumentando o número de casas decimais. Note –se, por meio dessa representação que, apesar de os irracionais escaparem, é possível que racionais chegam muito perto. Não por acaso, Stevin foi um dos primeiros matemáticos do século XVI a dizer que o irracional deve ser admitido como número, uma vez que pode ser aproximado por racionais.

A representação decimal infinita, que se aproxima do número irracional de acordo com o aumento de números de casas decimais, mostrava uma pista da natureza aritmética dos irracionais. Entretanto, a natureza dos números irracionais continuava como grandeza geométrica e não como números no século XVII e XVIII. Por exemplo, a $\sqrt{3}$, para o matemático Blaise Pascal, devia ser entendido como símbolo, como uma grandeza geométrica, não possuindo estatuto de grandezas contínuas, como na notação decimal. Newton considerava os irracionais como uma grandeza em movimento e Euler fornecia aproximações de diversos números irracionais por meio de séries infinitas, mas percebia que, ao invés de buscar os valores exatos para esses números, poderia provar que esses valores exatos não existiam ou eram impossíveis de calcular (ROQUE, 2012).

A associação de curvas e equações algébricas, feitas na época de Descartes, assumia a equivalência da reta numérica com os conjuntos dos números existentes na época, como os racionais, mas também as grandezas irracionais eram associadas a pontos da reta, sem se preocupar com a sua natureza.

> A completude dos números reais provada por Dedekind no século XIX, era assumida implicitamente no Século XVIII, pois o conjunto dos números reais era assumido como o conjunto dos números racionais e as grandezas geométricas dadas pelos números irracionais (ROQUE, 2012, p. 436).

“Muitos livros didáticos caracterizam os números irracionais como números decimais não periódicos, o que vai na contramão da sua construção lógica-histórica” (PINTO; HEITMANN; GIRALDO, 2013, p. 189). O correto seria afirmar que $\sqrt{2}$ é um número irracional, então $\sqrt{2}$ não tem representação decimal infinita e periódica. Como seria então, a justificativa para esse fato? Primeiro, vamos descrever as várias representações decimais dos números reais, nas quais será demonstrado que toda representação decimal finita e infinita periódica pode ser escrita na forma de uma fração ordinária $\frac{a}{b}, a\ e\ b\ \in \mathbb{Z}$,ou seja, é um número racional. Logo, conclui-se que as representações decimais infinitas e não periódicas são números irracionais.

4.4.1 Representação decimal finita

As representações decimais são obtidas, dividindo o numerador pelo denominador quando a divisão é não exata. Algumas representações são finitas e outras infinitas, não terminam. Por exemplo:

$$\frac{1}{2} = 0{,}5; \quad \frac{2}{5} = 0{,}4; \quad \frac{1}{80} = 0{,}0125; \quad \frac{1}{3} = 0{,}333..; \quad \frac{5}{11} = 0{,}4545\ ...$$

Os números decimais finitos podem ser escritos na forma de fração ordinária com o denominador igual a uma potência de *10*. Por exemplo:

$$0{,}625 = \frac{625}{1000} = \frac{125}{200} = \frac{25}{40} = \frac{5}{8}$$

Nota-se que fizemos várias simplificações por *5* na fração ordinária original, para verificar que todos os números obtidos no denominador podem ser decompostos somente por fatores primos 2 e (ou) 5.

$$1000 = 2^3 5^3; \quad 200 = 2^3 5^2; \quad 40 = 2^3 5; \quad 8 = 2^3$$

Isto é, todo número decimal finito pode ser escrito como sendo uma fração ordinária de denominador igual a uma potência de 10, cuja simplificação destas frações resulta em denominadores somente com fatores primos 2 ou 5, nenhum outro, pois todos são potência de 10. Isso resulta do seguinte resultado: "Um número racional na forma irredutível $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}, \mathrm{a\ e\ b} \in \mathbb{Z}$, tem uma representação decimal finita se e somente, b não tiver outros fatores primos além de 2 ou 5" (NIVEN, 2012, p. 29).

Na observação anterior, foi mostrado que todo número decimal finito tem uma representação fracionária da forma $\frac{a}{b}, a\ e\ b \in \mathbb{Z}$, onde *b* não possui fatores primos diferente de *2* ou *5*. Agora, será mostrado a recíproca: se *b* não tiver fatores primos além de *2* e *5*, então o número racional $\frac{a}{b}, a\ e\ b \in \mathbb{Z}$, *a* e *b* irredutíveis, terá uma representação decimal finita.

De fato, suponha que $b = 2^m 5^n$, com *m* e *n* números inteiros positivos e $n \leq m$. Multiplicando o denominador da fração por 5^{m-n}, teremos

$$\frac{a}{2^m 5^n} = \frac{a5^{m-n}}{2^m 5^n 5^{m-n}} = \frac{a5^{m-n}}{2^m 5^m} = \frac{a5^{m-n}}{10^m}$$

Como $n \leq m$, temos que 5^{m-n} é inteiro e, portanto, $a5^{m-n}$ também é um número inteiro. Para efetuar a divisão $\frac{a5^{m-n}}{10^m}$, basta colocar a vírgula na posição correta para obtermos a representação decimal finita com *m* casas decimais. O caso $m \leq n$ prova-se de maneira análoga e pode ser encontrado em Niven (2012).

4.4.2 Representação decimal infinita e periódica

Os números decimais infinitos e periódicos possuem, em sua representação decimal, um grupo de algarismos que se repetem indefinidamente. Por exemplo:

$$\frac{5}{9} = 0{,}5555 = 0,\overline{5}\ldots; \quad \frac{2}{7} = 0{,}285714285714\ldots = 0,\overline{285714}$$

Essa repetição ocorre, porque ao dividir o numerador pelo denominador, o conjunto de restos possíveis é finito, logo, ao proceder a divisão indefinidamente, o resto irá aparecer mais de uma vez, no qual o quociente irá se repetir, formando novamente o ciclo com os mesmos algarismos. No exemplo $\frac{2}{7}$, para dividir *2* por 7, acrescente o zero no 2 e efetua-se a divisão *20: 7 = 2* com resto *6*; e repetindo o processo de divisão acrescentando o zero em cada resto obtido e dividindo-o por 7, temos o seguinte:

$60{:}\,7 = 8$ *com resto 4*

$40{:}\,7 = 5$ *com resto 5*

$50{:}\,7 = 7$ *com resto 1*

$10{:}\,7 = 1$ *com resto 3*

$30{:}\,7 = 4$ *com resto 2.*

Assim, o resto *2* aparece de novo para dividir por 7 e o ciclo se repete novamente formando a dízima periódica 2/7 =0,285714.... com seis algarismos repetidos, ou de outra maneira, uma dízima periódica de período igual a *6*, que irão se repetir na continuação da divisão de *20: 7.* Temos que $\frac{2}{7} = 0{,}285714285714\ldots = 0{,}\overline{285714}$, onde 285714 é chamado de período da dízima periódica.

No caso geral de $\frac{a}{b}$, se o inteiro a dividir por *b*, os únicos restos possíveis serão: *1, 2, 3, ..., b-1* e portanto, haverá uma repetição de um resto no procedimento da divisão. Quando isto ocorrer, um novo ciclo se iniciará e o resultado será uma dízima periódica (NIVEN, 2012, p. 39). Portanto, podemos enunciar o seguinte resultado geral acerca da representação decimal de uma fração ordinária: “Todo número racional $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}, \mathrm{a\ e\ b} \in \mathbb{Z}$ pode ser representado por um número decimal finito ou um número decimal infinito periódico. Reciprocamente, todo número decimal finito ou infinito periódico, é representado por um número racional” (NIVEN, 2012, p. 39).

As representações decimais finitas foram verificadas anteriormente. A primeira parte do resultado foi provada, usando argumentos acima do enunciado do resultado. Basta mostrar a recíproca do enunciado, que diz que os números decimais infinitos e periódicos representam um número racional. Antes da demonstração deste fato, vamos fazer um exemplo para compreender a técnica de transformar uma dízima periódica em uma fração ordinária.

Seja a dízima $x = 0{,}9987987\ldots = 0{,}9\overline{987}$. Note que ela tem um algarismo que não repete seguido dos algarismos que formam a dízima periódica que, no caso, possui período igual 3. Primeiro multiplica-se a dízima por 10^4, pois no expoente da potência de 10 se junta o número de algarismos que não se repetem, no caso, um algarismo, com o período da dízima que é três. Nesta multiplicação, obtemos $10^4x = 9987,\overline{987}$. Depois se multiplica a dízima original por *10*, em que o expoente obtido pela potência de 10 decorre do número do algarismo que não se repete na dízima. Obtemos $10x = 9,\overline{987}$. Subtraindo as duas expressões obtidas, temos:

$$10^4x = 9987,\overline{987}$$
$$-(10x = 9,\overline{987}).$$

Que resulta em $9990x = 9978$, cujo valor de *x é:*

$$x = \frac{9978}{9990} = \frac{1663}{1665}$$

que é um número racional.

Generalizando o processo, defina a dízima $x = 0, a_1a_2 \ldots a_s\overline{b_1b_2 \ldots b_t}$, onde $a_1a_2 \ldots a_s$ representam os algarismos consecutivos não periódicos e $b_1b_2 \ldots b_t$ os algarismo de período *t.* Multiplica-se a dízima por 10^{s+t} e depois por multiplica-se a dízima novamente por 10^s, obtendo:

$$x10^{s+t} = a_1a_2 \ldots a_sb_1b_2 \ldots b_t + 0,\overline{b_1b_2 \ldots b_t} \qquad \text{(I)}$$
$$x10^s = a_1a_2 \ldots a_s + 0,\overline{b_1b_2 \ldots b_t} \qquad \text{(II)}$$

Subtraindo as expressões I e II Acima, temos:

$$x10^{s+t} - \ x10^s = a_1a_2 \ldots a_sb_1b_2 \ldots b_t - a_1a_2 \ldots a_s$$

Na qual a parte periódica é cancelada. Temos que:

$$x = \frac{a_1a_2 \ldots a_sb_1b_2 \ldots b_t - a_1a_2 \ldots a_s}{10^{s+t} - \ 10^s}$$

Onde $x10^{s+t} - \ x10^s$ e $a_1a_2 \ldots a_sb_1b_2 \ldots b_t - a_1a_2 \ldots a_s$ são números inteiros. Portanto, *x* é um número racional como queríamos demonstrar. O que podemos concluir é que os números racionais são aqueles que possuem representação decimal finita ou infinita periódica.

Vamos encerrar a seção mostrando o seguinte resultado: “todo número racional com representação decimal finita, pode ser representado por dízima periódica” (NIVEN, 2012, p. 41). Por exemplo, vamos mostrar que *0,999...=1*. Seja

$x = 0{,}999\ldots = 0,\overline{9}$. Multiplicando a equação por *10*, temos como resultado $10x = 9{,}99\ldots = 9,\overline{9}$. Subtraindo a equação obtida da equação anterior $x = 0{,}999\ldots = 0,\overline{9}$ obtém-se $9x = 9$, cujo resultado é $x = 1$. Logo *0,999...=1.* A partir desta igualdade, pode-se obter os seguintes resultados:

$$1 = 0{,}999\ldots$$

$$0{,}1 = 0{,}0999\ldots$$

$$0{,}01 = 0{,}00999\ldots$$

Que podem ser utilizados para obter qualquer representação decimal finita em infinita, como pode-se ver no exemplo abaixo.

$$5{,}7 = 5{,}6 + 0{,}1 = 5{,}6 + 0{,}0999 = 5{,}6999\ldots = 5{,}6\overline{9}.$$

Portanto, utilizando o mesmo processo do caso particular acima, prova-se o resultado desejado para o caso geral.

4.4.3 Representação decimal infinita e não periódica

Pelas conclusões tiradas acima, o número irracional não possui representação decimal finita ou infinita periódica; logo, sua representação decimal é infinita e não periódica. O problema é que os livros didáticos definem os números irracionais fundamentados na lógica invertida, ou seja, definem-se os números irracionais como sendo os números que possuem representação decimal infinita e não periódica. O correto seria assim: “O número irracional é um número não racional, logo não possui representação decimal finita ou infinita periódica, portanto o número irracional só pode ter a representação decimal infinita e não periódica” (NIVEN, 2012, p. 49). A definição dada segue a lógica da construção do conhecimento sobre o objeto de estudo e a cadeia de conceitos fazem sentido, pois muitas das demonstrações feitas podem ser explicadas intuitivamente, sem a formalidade para os alunos da última etapa do ensino fundamental.

A representação decimal para um número irracional tem necessariamente que ser uma dízima não periódica. Afirmamos que essa representação é *única.*

De fato, suponhamos, sem perda de generalidade, que um irracional *x* entre 0 e 1 possua duas representações decimais distintas:

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots, \qquad (3)$$

$$x = 0, b_1 b_2 b_3 \ldots, \qquad (4)$$

Se essas representações são distintas, certamente existe um número natural *p* tal que $a_k = b_k$, para $k = 0,1, \dots, p-1$, e $a_p \neq b_p$. Vamos supor que $a_p \geq b_p + 1$ e por (3) e (4) temos:

$$x \geq 0, a_1 a_2 a_3 \dots a_p \qquad (5)$$

$$x \leq 0, a_1 a_2 \dots b_p 999 \dots = 0, a_1 a_2 \dots (b_p + 1) \qquad (6)$$

Já que $a_k = b_k$, para $k = 0,1, \dots, p-1$ e b_k é sempre menor ou igual que *9*. Mas (5) e (6) implicam que $a_p = b_p + 1$ e $x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots a_p$. O que é uma contradição, pois neste caso *x* seria racional. Logo, a contradição surgiu do fato de termos suposto que havia duas representações decimais distintas para o mesmo número irracional *x*. Logo, essa possibilidade tem de ser descartada e, assim, concluímos que todo irracional possui uma representação decimal única infinita e não periódica. A demonstração do caso $b_p \geq a_p + 1$ é analoga (FRID, 2001).

Como os números reais constituem o conjunto numérico formado pela união dos números racionais e irracionais, podemos afirmar que a sua representação decimal infinita é única. De fato, foi provado que, nos números racionais, toda representação decimal finita possui uma representação decimal infinita. No caso dos números irracionais, toda representação decimal infinita e não periódica é única. Como os reais é a união dos racionais com os irracionais, conclui-se que sua representação decimal infinita também é única.

4.5 A IRRACIONALIDADE DAS RAÍZES QUADRADAS NÃO EXATAS

Foi demonstrado na seção 3.4 do terceiro capítulo que o número $\sqrt{2}$ é irracional. Nesse tópico, iremos estender esse resultado para raízes quadradas não exatas de números inteiros positivos. O primeiro resultado é que a raiz quadrada de um número primo é irracional. Suponhamos que $\sqrt{p}$, com *p* primo, seja um número racional, ou seja, $\sqrt{p}$ pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, em que a fração é irredutível, isto é, *a* e *b* não possuem fatores comuns, exceto o número *1*. Temos $\sqrt{p} = \frac{a}{b} \Rightarrow p = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \Rightarrow a^2 = pb^2$. Portanto a^2 é divisível por *p,* o que acarreta que *a* é divisível por *p*, isto é, existe um número inteiro *r* tal que $a = pr$. Então, obtemos $a^2 = pb^2 \Rightarrow (pr)^2 = pb^2 \Rightarrow b^2 = pr^2$, onde b^2 é divisível por *p,* o que implica que *b* é divisível por *p*, o que é um absurdo, pois *a* e *b* seriam divisíveis por *p*, mas por hipótese, eles são primos entre si. Logo, $\sqrt{p}$ é irracional.

O resultado que acabamos de provar mostra a irracionalidade das raízes $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, ... Além disso, seja *p* e *q* números primos distintos, então $\sqrt{pq}$ é irracional. A demonstração utiliza a mesma ideia da anterior. Primeiro suponha que $\sqrt{pq}$ seja um número racional, ou seja, $\sqrt{pq}$ pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, na qual a fração é irredutível, isto é, *a* e *b* não possuem fatores comuns, exceto o número *1*. Temos $\sqrt{pq} = \frac{a}{b} \Rightarrow pq = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \Rightarrow a^2 = pqb^2 \Rightarrow a^2 = p(qb^2)$. Logo a^2 é divisível por *p,* o que acarreta que *a* é divisível por *p*, isto é, existe um número inteiro *r* tal que $a = pr$. Então, obtemos $a^2 = pqb^2 \Rightarrow (pr)^2 = pqb^2 \Rightarrow qb^2 = pr^2$, onde temos que qb^2 é divisível por *p,* mas como *p* e *q* são primos entre si, temos que b^2 é divisível por *p,* o que implica que *b* é divisível por *p*, chegando a uma contradição, pois *a* e *b* seriam divisíveis por *p*, mas por hipótese, eles são primos entre si. Logo, $\sqrt{pq}$ é irracional.

Pelo argumento acima, temos que as raízes quadradas de $\sqrt{6}, \sqrt{10}, \sqrt{14}$,... são irracionais. Usando o mesmo argumento, pode-se generalizar o resultado, no qual $\sqrt{p_1 p_2 \dots p_n}$ é um número irracional, onde $p_1, p_2, \dots, p_n$ são números primos distintos.

Mostraremos, agora, que dados $p_1, p_2, \dots, p_n$, números primos distintos, então $\sqrt{p_1^{s_1} p_2^{s_2} \dots p_n^{s_n}}$ é irracional, se algum dos expoentes $s_1, s_2, \dots, s_n$ for ímpar. Suponhamos que $\sqrt{p_1^{s_1} p_2^{s_2} \dots p_n^{s_n}}$ seja um número racional, ou seja, $\sqrt{p_1^{s_1} p_2^{s_2} \dots p_n^{s_n}}$ pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, uma fração é irredutível, isto é, *a* e *b* são números primos entre si. Logo, temos $\sqrt{p_1^{s_1} p_2^{s_2} \dots p_n^{s_n}} = \frac{a}{b} \Rightarrow a^2 = b^2 p_1^{s_1} p_2^{s_2} \dots p_n^{s_n}$. Por hipótese, um dos expoentes tem de ser ímpar, logo considere s_1 ímpar (poderia ser outro expoente), então $a^2 = p_1(b^2 p_1^{s_1 - 1} p_2^{s_2} \dots p_n^{s_n})$. Temos que a^2 é divisível por p_1 (pelo fato de *a* e *b* serem primos entre si), o que acarreta que *a* é divisível por p_1, isto é, existe um número inteiro *r* tal que $a = p_1 r$. Por outro lado, $a^2 = b^2 p_1^{s_1} p_2^{s_2} \dots p_n^{s_n} \Rightarrow p_1^2 r^2 = p_1\left(b^2 p_1^{s_1 - 1} p_2^{s_2} \dots p_n^{s_n}\right) \Rightarrow p_1 r^2 = b^2 p_1^{s_1 - 1} p_2^{s_2} \dots p_n^{s_n}$, o que implica que b^2 é divisível por p_1, concluímos que *b* é divisível por p_1, obtendo que os números *a* e *b* são ambos divisíveis por p_1, o que é um absurdo, pois *a* e *b* são primos entre si.

Concluímos que $\sqrt{p_1^{s_1}p_2^{s_2}\dots p_n^{s_n}}$ é irracional, se um dos expoentes $s_1, s_2, \dots, s_n$ for ímpar.

Agora, se todos os expoentes de $p_1, p_2, \dots, p_n$ forem pares, a raiz quadrada será exata, pelo fato dos números reais ser um corpo ordenado, pois se tivermos: $\sqrt{p^4} = \sqrt{p^2p^2} = \sqrt{p^2}\sqrt{p^2} = p \cdot p = p^2$. O caso pode ser generalizado com um número maior de fatores primos com expoentes pares, ou seja, podemos reescrever o produto de fatores primos de modo que todos eles tenham expoentes iguais a 2, e usando a propriedade da radiciação, obtemos as raízes quadradas de todos os fatores primos com expoente igual a 2, que são exatas. Portanto, temos a seguinte conclusão: todo número natural *n* que não seja quadrado perfeito (quando todos os fatores primos de *n* possuem expoentes pares) não terá raiz quadrada racional. A demonstração de tal conclusão será mostrada no próximo tópico, através das operações aritméticas entre os números racionais e irracionais.

Para terminarmos esta parte, provaremos que a raiz quadrada de um número irracional é irracional, ou seja, se α é irracional, então $\sqrt{\alpha}$ é irracional. De fato, provaremos pelo método da redução ao absurdo, como fizemos anteriormente. Suponhamos que $\sqrt{\alpha}$ seja racional, ou seja, $\sqrt{\alpha} = \frac{a}{b}$, primos entre si. Elevando ambos os lados ao quadrado, temos $\alpha = \frac{a^2}{b^2}$, onde a^2 e b^2 são inteiros, logo a fração $\alpha = \frac{a^2}{b^2}$ é racional, o que é um absurdo, pois por hipótese α é irracional. Portanto, $\sqrt{\alpha}$ é irracional.

4.6 OPERAÇÕES ARITMÉTICAS COM NÚMEROS RACIONAIS E IRRACIONAIS

Os números racionais, munidos das operações de adição e multiplicação, são um corpo. O conjunto dos números irracionais não satisfaz tais axiomas de corpo, conforme será visto no final deste tópico. Vamos demonstrar, primeiro, um resultado que permitirá definir uma infinidade de números irracionais a partir dos números racionais, no que diz respeito à adição, subtração, multiplicação e divisão de um número racional por um irracional (NIVEN, 2012).

Consideremos *r* um número racional e α um número irracional. Então ocorrem as seguintes situações: i*)* $\alpha + r$ *e* $\alpha - r$ são números irracionais*, ii)* $\alpha \cdot r$ é irracional *e iii)* $\frac{1}{\alpha}$ é irracional.

Para mostrarmos esses fatos, argumentamos da seguinte forma:

i) Suponha que $\alpha + r$ seja racional. Seja $s = \alpha + r$, onde $s \in \mathbb{Q}$. Temos que $\alpha = s - r$ e como s e r são racionais e $\mathbb{Q}$ é um corpo, a diferença $s - r$ é racional, o que é uma contradição, pois α é irracional. Logo, $\alpha + r$ é irracional. Do mesmo modo, mostra-se que $\alpha - r$ é irracional. Além disso, – α é irracional, pois é a diferença dada por $0 - \alpha$.

ii) Suponha que $\alpha \cdot r$ é racional, então $\alpha r = \frac{a}{b} \Rightarrow \alpha r r^{-1} = \frac{a}{b} r^{-1} \Rightarrow \alpha = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{r}$*,*como $\frac{a}{b}$ e $\frac{1}{r}$ são racionais e $\mathbb{Q}$ é fechado em relação a multiplicação; então, temos que $\alpha = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{r}$ é racional, que é um absurdo, pois α é irracional. Logo $\alpha \cdot r$ é irracional.

iii) Suponha $\frac{1}{\alpha} \in \mathbb{Q}$, então $\frac{1}{\alpha} = \frac{a}{b}$, onde *a* e *b* são racionais, *b*$\neq 0$*.* Logo $\frac{1}{\alpha} = \frac{a}{b} \Rightarrow a\alpha = b$ é racional, o que acarreta que $a\alpha$ é racional, absurdo, pois pelo item *ii)* o produto $a\alpha$ é irracional. Portanto, $\frac{1}{\alpha}$ é irracional. Além disso, concluímos que a divisão de $r \in \mathbb{Q}$ por $\alpha \in \mathbb{I}$, é irracional, pois $\frac{r}{\alpha} = r\alpha^{-1}$ é irracional.

O resultado acima mostra que, a partir de um número irracional, podemos construir uma infinidade de números irracionais, por exemplo: dado $\sqrt{2}$ irracional, então, $-\sqrt{2}$ e $\frac{1}{\sqrt{2}}$ são irracionais e dado qualquer racional *r*, temos que $r\sqrt{2}$, $r + \sqrt{2}$ e $\frac{r}{\sqrt{2}}$, são irracionais e são infinitos, pois o conjunto $\mathbb{Q}$ é infinito. Uma consequência é que números da forma $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ e $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ são irracionais. A generalização deste fato é dada pela seguinte afirmação. Se os números *x* e *y* forem irracionais tais que $x^2 - y^2$ seja racional não nulo, então $x + y$ e $x - y$ são ambos irracionais. Para explicarmos isso, suponha que $x + y$ é racional. Temos $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) \Rightarrow x - y = \frac{x^2 - y^2}{x + y}$. Como $x^2 - y^2 \in \mathbb{Q}$ e $x + y \in \mathbb{Q}$ temos que $x - y$ é racional. Portanto, teríamos

$$x = \frac{(x+y)+(x-y)}{2} \text{ e } y = \frac{(x+y)-(x-y)}{2}$$

Seriam ambos racionais, o que contraria a hipótese. Logo, $x + y$ é irracional. O mesmo argumento vale para $x - y$.

Agora, teremos condição de mostrar o seguinte fato: todo número natural *n* que não seja quadrado perfeito, tampouco terá raiz quadrada racional. De fato, um número que não é quadrado perfeito possui decomposição em fatores primos, de modo que um dos fatores primos que o compõe tem expoente ímpar. Logo, suponhamos que *n* não seja quadrado perfeito, então, em algum dos seus fatores primos temos um expoente ímpar. Seja $n = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \dots p_n^{s_n}$, logo $\sqrt{n} = \sqrt{p_1^{s_1} p_2^{s_2} \dots p_n^{s_n}}$. Caso p_1 tenha expoente ímpar (poderia ser qualquer outro expoente), podemos escrever a igualdade da seguinte forma: $\sqrt{n} = \sqrt{p_1^{s_1}}\sqrt{p_2^{s_2} \dots p_n^{s_n}}$, onde $\sqrt{p_1^{s_1}}$ é irracional e $\sqrt{p_2^{s_2} \dots p_n^{s_n}}$ é racional que implica que $\sqrt{n}$ é irracional, pois é um produto de um número racional por um número irracional.

O conjunto $\mathbb{I}$ dos números irracionais não é fechado com relação à operação de adição. Para provar tal fato, basta exibir dois números irracionais cuja soma dá um número racional, por exemplo, adicionando os números $2 + \sqrt{3}$ e $2 - \sqrt{3}$, que são irracionais (pois é soma de um número racional com um número irracional), dá como resultado 4, que é racional. Isso vale para a soma de dois números irracionais opostos cuja soma dá *0*, que é racional.

Os números irracionais não são fechados também com relação à operação de multiplicação e divisão. Com efeito, sejam $\sqrt{2}$ e $\sqrt{8}$ números irracionais, em que o produto $\sqrt{2}\sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$, que é racional. Para exibir que a divisão não é fechada no conjunto $\mathbb{I}$, tome os números irracionais $\sqrt{2}$ e $\sqrt{8}$, em que a divisão $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{4} = 2$, que é racional. Portanto, concluímos que os números irracionais, munidos das operações de adição e multiplicação, não formam nenhuma estrutura algébrica, como grupo, anel ou corpo. No próximo tópico, mostraremos a irracionalidade das raízes enésimas não exatas.

4.7 IRRACIONALIDADE DAS RAÍZES ENÉSIMAS NÃO EXATAS

Nas seções anteriores, foi provado que as raízes quadradas não exatas de números naturais são irracionais, bem como a combinação desses números com os números racionais, por meio das operações fundamentais de adição, subtração, multiplicação e divisão. Vamos ampliar o leque de números irracionais, mostrando a irracionalidade das raízes enésimas não exatas de números inteiros. Para isso, será detalhada outra classificação dos números reais, que são os números algébricos e transcendentes. Apresentamos uma equação polinomial de coeficientes inteiros.

Um polinômio de grau $n \in \mathbb{Z}_+$tem a forma de $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, com $a_n \neq 0$ e $a_i \in \mathbb{Z},\ 0 \leq i \leq n$. Uma equação polinomial de grau $n \in \mathbb{Z}_+$ é uma igualdade da forma $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$, onde $a_0, a_2, \dots, a_n$ são chamados coeficientes. Considerando os coeficientes como sendo números inteiros, pois se eles forem racionais, pelo processo de redução ao denominador comum e multiplicando-o esse denominador comum em ambos os lados da equação, vamos obter uma equação equivalente a primeira, com coeficientes inteiros.

O número real *a* é dito algébrico se existe um polinômio com coeficientes inteiros tais que *a* é raiz deste polinômio. Isto quer dizer que se o número real *a* satisfizer uma equação polinomial com coeficientes inteiros, ou seja, existem inteiros $a_0, a_2, \dots, a_n$ tais que se $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ e $p(a) = 0$, então *a* é número algébrico. Se nenhum número real satisfizer uma equação deste tipo, dizemos que ele é transcendente, como é o caso do π e do número de Euler e. Nesse caso, temos outra classificação dos números reais como algébricos ou transcendentes.

Temos que todo número racional é algébrico. Com efeito, o número racional da forma $\frac{a}{b}$ é raiz da equação do primeiro grau $bx - a = 0,\ \forall\, a,\ b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$. Os números irracionais podem ser algébricos ou transcendentes. Os números irracionais algébricos são soluções de equações de grau maior que 1. Por exemplo, o número irracional $\sqrt{2}$ é algébrico, pois é solução da equação $x^2 - 2 = 0$. Agora, os números π e e são transcendentes; a explicação para este fato é um problema difícil, que não está no objetivo deste trabalho. Os números algébricos englobam os números racionais (todos) e os números irracionais que são soluções de uma equação polinomial, enquanto os números transcendentes englobam somente os números irracionais.

Temos o seguinte resultado que será de grande importância para provamos a existência de outros números irracionais: “Considere uma equação polinomial qualquer com coeficientes inteiros $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$. Se essa equação tiver uma raiz racional $\frac{a}{b}$, irredutível, então *a* será um divisor de a_0 e *b* um divisor de a_n" (NIVEN, 2012, p.70). A explicação desse resultado será omitida e pode ser encontrada em Niven (2012).

Como exemplo, considere a equação $3x^3 + 4x^2 - 5x - 2 = 0$. Temos que a equação terá solução racional $\frac{a}{b}$, se *a* for divisor de *-2* e *b* for divisor de *3*. Portanto, os divisores de *a* são *1,1, -2* e *2* e os divisores de *b* são *-1, 1, -3* e *3.* Então, as possíveis raízes racionais são: $1, -1, 2, -2, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}$.

Dos números acima, somente os números $1, -2\ e -\frac{1}{3}$ são as raízes da equação.

Uma consequência do teorema é que a equação da forma $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$ com coeficientes inteiros se tiver uma raiz racional, ela será um número inteiro, além disso, essa raiz inteira será um divisor de a_0 (NIVEN, 2012). De fato, sendo *a* divisor de *-1* e *-1* e *b* divisor de a_0, temos que as possíveis raízes são a_0 e $-a_0$, que são números inteiros.

Então, vamos mostrar que $\sqrt[3]{2}$ é um número irracional. $\sqrt[3]{2}$ é solução da equação algébrica $x^3 - 2 = 0$. De acordo com a explicação dada acima, as possíveis raízes racionais da equação são *1, -1, 2* e *-2.* Verifica-se que nenhuma delas é raiz da equação $x^3 - 2 = 0$. Portanto, a equação não possui raízes racionais. Daí concluímos que $\sqrt[3]{2}$ é não racional, ou seja, é um número irracional.

Agora, generalizando, vamos mostrar que a raiz da forma $\sqrt[n]{a}$, com *a* e *n* inteiros positivos, é irracional ou é inteiro (nesse caso existe um número *r* tal que $r^n = a$). Temos que $\sqrt[n]{a}$ é a raiz da equação $x^n - a = 0$. Se essa equação tiver raízes racionais, elas serão inteiras, que possuem como candidatos os números $1, -1, a$ e $-a$, que não são raízes da equação, no caso em que $a \neq \pm 1$, como se verifica facilmente. Logo, $\sqrt[n]{a}$ é irracional se ela não for exata, isto é, quando não existe um inteiro *r* tal que $r^n = a$. Portanto, temos mais uma infinidade de números irracionais que são da forma $\sqrt[n]{a},\ s + \sqrt[n]{a},\ s\sqrt[n]{a}$ e $\frac{s}{\sqrt[n]{a}}$, onde s é um número racional, com *a* e *n* números inteiros positivos.

Para exemplificar, seja o número $\frac{4\sqrt{13}-3}{5}$. Sabemos que $\sqrt{13}$ é irracional, pois é raiz quadrada de um número primo. O produto $\frac{4}{5}\sqrt{13}$ é irracional, pois $\sqrt{13} \in \mathbb{I}$ e $\frac{4}{5} \in \mathbb{Q}$. A diferença entre $\frac{4}{5}\sqrt{13}$ (irracional) com $\frac{3}{5}$ (racional) é irracional. Logo, $\frac{4\sqrt{13}-3}{5}$ é um número irracional.

Podemos usar a solução de equações polinomiais para verificar se um dado número é irracional. Por exemplo, seja o número $\sqrt{1+\sqrt{2}}$. Como se demonstra que esse número é irracional? Basta igualar tal número a *x* e elevar ambos os lados ao quadrado, assim:

$$x = \sqrt{1+\sqrt{2}} \Leftrightarrow x^2 = 1+\sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 - 1 = \sqrt{2}.$$

Elevando o último termo ao quadrado, obtemos:

$$x^4 - x^2 + 1 = 2 \Leftrightarrow x^4 - x^2 - 1 = 0.$$

Portanto, basta verificar as possíveis raízes racionais da equação $x^4 - x^2 - 1 = 0$. Temos que as possíveis raízes racionais são *-1* e *1*, que não são soluções da equação. Logo, a equação não possui raízes racionais e podemos concluir que $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ é irracional, pois a forma como foi construída a equação mostra que $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ é uma de suas raízes.

Do mesmo modo que foi provada a irracionalidade da raiz enésima do número inteiro positivo, demonstra-se que a raiz enésima de um número racional positivo $r = \frac{a}{b}, b \neq 0$ é irracional ou racional (nesse caso existe um número s tal que $s^n = r$), pois $\sqrt[n]{r} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ é a raiz da equação $bx^n - a = 0$ (NIVEN, 2012). Se essa equação tiver raízes racionais, ela possui como candidatos os números $1, -1,\ \frac{1}{b}, -\frac{1}{b},\ \frac{a}{b}\ e -\frac{a}{b}$, que não são raízes da equação, no caso em que $a \neq \pm b$. Logo, $\sqrt[n]{r}$ é irracional se ela não for exata. Agora será demonstrado a irracionalidade dos números trigonométricos e logarítmicos.

4.8 A IRRACIONALIDADE DOS NÚMEROS TRIGONOMÉTRICOS E LOGARÍTMICOS

Vamos provar que o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo θ são irracionais, exceto para alguns valores notáveis como, *0º, 30º, 60º, 90º, 180º, 270º e 360º.* A irracionalidade das funções trigonométricas será baseada em Niven (1990, p.79). Para isso, vamos utilizar a identidade trigonométrica $cos3\theta = 4cos^3\theta - 3cos\theta$, cuja demonstração pode ser encontrada em Niven (2012, p. 80).

Vamos provar a irracionalidade de *cos 20º.* Substituindo $\theta = 20°$ na identidade $cos3\theta = 4cos^3\theta - 3cos\theta$, obtemos $cos60° = 4cos^3(v) - 3\cos(20°)$. Sendo $cos60° = \frac{1}{2}$

e $\cos(20°) = x$, obtemos a equação $\frac{1}{2} = 4x^3 - 3x \Rightarrow 8x^3 - 6x - 1 = 0$. As possíveis raízes racionais da equação são: $1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{8}$. Quando substituídas na variável *x*, temos que nenhum desses valores são raízes da equação. Verifica-se que nenhuma raiz é racional e como $\cos(20°)$ é raiz da equação, temos que $\cos(20°)$ é irracional.

Para mostrar que $sen10^0$ é irracional, vamos utilizar a identidade para $sen3\theta$ dada por $sen3\theta = 3sen\theta - 4sen^3\theta$, cuja demonstração pode ser encontrada em Niven (2012). Fazendo $\theta = 30^0$, temos $sen30^0 = 3sen10^0 - 4sen^3(10^0)$, em que $sen30^0 = \frac{1}{2}$ e chamando $x = sen10^0$, obtemos a equação: $\frac{1}{2} = 3x - 4x^3 \Rightarrow 8x^3 - 6x + 1 = 0$. As possíveis raízes racionais da equação são: $1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{8}$. Quando substituídas na variável *x*, temos que nenhum desses valores são raízes da equação. Verifica-se que nenhuma raiz é racional e como $\mathrm{sen}10^0$ é raiz da equação, temos que $\mathrm{sen}10^0$ é irracional.

Outra maneira, de mostrar que $\mathrm{sen}10^0$é irracional é por meio da identidade

$$cos2\theta = cos^2\theta - sen^2\theta = 1 - sen^2\theta - sen^2\theta = 1 - 2sen^2\theta.$$

Fazendo $\theta = 10^0$ na igualdade acima, temos que $cos20^0 = 1 - 2sen^2 10^0$. Suponha que $sen10^0$ racional. Então, $sen^2 10^0$ seria racional, o que implicaria que $1 - 2sen^2 10^0$ seria racional, logo $cos20^0$ seria racional, o que é um absurdo, pois foi mostrado que $cos20^0$é irracional. Logo, $sen10^0$é irracional.

Vamos estender o método para o seguinte resultado, que se encontra em Niven (2012, p. 83). “Se θ for um ângulo tal que $\cos 2\theta$ é irracional, então $\cos\theta$, $\mathrm{sen}\theta$ e $\mathrm{tg}\theta$ também são irracionais”. Para provar este fato, tomamos $cos2\theta = cos^2\theta - sen^2\theta = cos^2\theta - (1 - cos^2\theta) = 2cos^2\theta - 1$. Logo, temos $cos2\theta = 2cos^2\theta - 1$. Suponhamos $cos\theta$ racional, então $cos^2\theta$ e $2cos^2\theta - 1$ também seriam racionais, mas $2cos^2\theta - 1$ é igual a $cos2\theta$, que é irracional; logo, temos uma contradição. Concluímos que $cos\theta$ é irracional. Do mesmo modo, $sen\theta$ é irracional, utilizando a identidade $cos\theta = 1 - 2sen^2\theta$. Finalmente a $tg\theta$. Suponha $tg\theta$ racional, logo $tg\theta^2 + 1$ seria racional, mas $tg\theta^2 + 1 = sec^2\theta = \frac{1}{cos^2\theta}$, em que $cos^2\theta$ seria racional, mas se isso fosse verdade, $cos\theta$ seria racional, obtendo uma contradição. Concluímos que $tg\theta$ é irracional.

Por meio do resultado acima, podemos obter uma infinidade de números irracionais que são trigonométricos. Como $cos20^0$ é irracional, temos por consequência os seguintes números trigonométricos que são irracionais:

$$cos10º, cos5º, cos2º30', cos1º15', ...$$

$$sen10º, sen5º, sen2º30', sen1º15', ...$$

$$tg10º, tg5º, tg2º30', tg1º15', ...$$

Outro exemplo é o $cos30º = \frac{\sqrt{2}}{2}$, que é irracional. Logo, temos a seguinte lista de números irracionais trigonométricos:

$$cos15º, cos7º30', cos3º45', ...$$

$$sen15º, sen7º30, sen3º45', ...$$

$$tg15º, tg7º30', tg3º45', ...$$

Mostraremos que os valores logaritmos não exatos são irracionais. Primeiro, vamos mostrar que $\log 2$ é irracional. Por definição de logaritmo, $\log 2 = x \Leftrightarrow 10^x = 2$. Vamos supor que $\log 2$ é racional, ou seja, $\log 2 = \frac{a}{b} \Leftrightarrow 2 = 10^{\frac{a}{b}}$, sendo *a* e *b* inteiros positivos, pois $\log 2$ é positivo. Elevando ambos os lados da igualdade ao expoente *b*, obtém-se: $2^b = 10^a \Leftrightarrow 2^b = 2^a 5^a$. Essa igualdade de números inteiros positivos não pode ser verdadeira, pois 2^b é um inteiro não divisível por *5*, $\forall\, b \in \mathbb{Z}_+$, enquanto $2^a 5^a$ é divisível por *5*, pois $a \in \mathbb{Z}_+$. Logo, $\log 2$ não pode ser racional, portanto, ele é irracional.

A demonstração acima utiliza o Teorema Fundamental da Aritmética (TFA) para mostrar a contradição, pois o teorema diz que todo número natural diferente de *1*, ou é primo, ou ele pode ser decomposto em fatores primos de modo único, a menos da ordem dos fatores (NIVEN, 2012). Na igualdade dada por $2^b = 2^a 5^a$, os dois membros representam números naturais que possuem a decomposição em fatores primos que não são de maneira única, o que contraria o TFA. Podemos generalizar e provar que $\log a$ é irracional, onde *a* é um inteiro positivo e $a \neq 10^n$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Suponhamos que $\log a$ seja racional, isto é, $\log a = \frac{x}{y} \Leftrightarrow a = 10^{\frac{x}{y}}$, sendo *x* e *y* inteiros positivos, sem perda de generalidade. Multiplicando ambos os lados por *y*, temos $a^y = 10^x \Leftrightarrow a^y = 2^x 5^x$. Como $a \neq 10^n$, temos que *a* não é divisível por 2 ou por 5, diferentemente do número $2^x 5^x$ que são divisíveis por 2 e 5 ao mesmo tempo, por x ser número inteiro. Como temos uma igualdade entre dois inteiros cuja decomposição em fatores primos não é única, este fato contraria o Teorema

Fundamental da Aritmética. Logo, temos que $\log a$ não pode ser racional, portanto, ele é irracional. Agora, no próximo tópico, discutiremos sobre o conjunto dos números algébricos e transcendentes.

4.9 CLASSIFICAÇÃO DOS NÚMEROS REAIS

Os números reais que não são algébricos são chamados de transcendentes. Vimos que os números algébricos englobam todos os racionais e que os irracionais da forma $\sqrt[n]{a}$ não exata também são algébricos. Mas quais números, na prática, são os transcendentes? Primeiramente, todos os números transcendentes são irracionais. De fato, foi provado que todo número racional é algébrico, logo o número que não é algébrico não pode ser racional, portanto, ele será irracional.

Temos como exemplo de números transcendentes π e e. Outro exemplo de número transcendente é o número α^{β}, sendo α e β números algébricos com β irracional (excluindo os casos em que $\alpha = 0, \alpha = 1$ e β racional, pois se prova que α^{β} é algébrico), provado por Gelfond e Schneider independentemente em 1934.

Como caso particular, temos que $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ é transcendente (NIVEN, 2012, p. 88). Um outro caso particular é que $\log 2$ é transcendente. De fato, tomando $\alpha = 10 \; e \; \beta = \log 2$ e usando a propriedade do logaritmo dada por $a^{\log_a x} = x$, temos que $\alpha^{\beta} = 10^{\log 2} = 2$. Se β fosse algébrico e irracional, pela prova de Gelfond e Schneider, *2* seria transcendente. Mas *2* é algébrico, portanto, $\beta = \log 2$ é racional ou transcendente. “Como foi provado que $\log 2$ é irracional, resta-nos dizer que $\log 2$ é transcendente” (NIVEN, 2012, p. 89).

Fazendo uma generalização do resultado anterior, o logaritmo dado por $\log a$ é transcendente, desde que $a \neq 10^n$, $n \in \mathbb{Z}$. Os números trigonométricos, como $cos 20°$ e $sen 10°$ vistos anteriormente, são irracionais e algébricos, pois foram obtidos por meio de uma equação polinomial de coeficientes inteiros. O conjunto dos números algébricos é enumerável, enquanto o conjunto dos números transcendentes é não enumerável, cuja demonstração destes fatos pode ser encontrada em Lima (2004, p. 99).

Portanto, temos a classificação dos números reais de maneira mais completa por meio do estudo dos números algébricos e transcendentes. Tal classificação possui como referências o trabalho de Niven (2012), que listou as categorias dos números irracionais vistas neste capítulo e o livro de análise do Caraça (1959), que agrupou os tipos de números em algébricos, transcendentes, enumeráveis e não enumeráveis. Portanto, os números se dividem em:

1) Algébricos, que abrangem as seguintes classes de números:

1.1) Todos os números racionais.

1.2) Todas as raízes enésimas dos números racionais r que não são exatas.

1.3) Números que são combinações de operações entre os racionais e radiciações sobre números inteiros, tais como: $\sqrt[n]{a}, s + \sqrt[n]{a}, s\sqrt[n]{a}$ e $\frac{s}{\sqrt[n]{a}}$, onde $s \in \mathbb{Q}$ e $a \in \mathbb{Z}_{+}$.

1.4) Números irracionais, que são obtidos como soluções de equações polinomiais com coeficientes inteiros tais como $\sqrt{a + \sqrt{b}}$.

1.5) Os números obtidos pelas funções trigonométricas, que são originárias de soluções de equações polinomiais com coeficientes inteiros.

2) Os números transcendentes, que são os números não algébricos e irracionais, tais como π, e e os números logarítmicos não exatos.

Como ilustração, pode-se perguntar o que cabe no intervalo *(0, 1)*, no qual obtemos as seguintes respostas em Caraça (1951):

1) O conjunto dos números racionais (enumerável).

2) Raízes quadradas, cúbicas, ..., enésimas de números racionais menores do que 1 (enumerável).

3) A combinação de todos os números racionais com os números anteriores e que tenham como resultado números entre *0* e *1* (enumerável).

4) Os números algébricos entre *0* e *1* que não são compreendidos nos itens anteriores, como os números trigonométricos (enumerável).

5) Todos os itens anteriores não passam sequer do enumerável. Ainda cabe uma infinidade não enumerável de números transcendentes entre *0* e *1.*

O percurso da história dos números reais, desde os homens primitivos até a sua formalização dada pela Análise Matemática no século XIX, surgiu de determinadas necessidades, umas de ordens práticas e outras de ordem teórica, levando a uma epopeia que durou 25 séculos. Viu-se que a contagem repetida, por muitos anos, acabou por levar à criação dos números naturais e que a extensão desses números depende do grau de desenvolvimento da vida social do homem (CARAÇA, 1951, p. 9).

O campo dos números racionais foi criado a partir da necessidade de exprimir a medida de duas grandezas da mesma espécie, na qual a dificuldade reside na impossibilidade da divisão exata entre dois números inteiros, que nem sempre ocorria. Portanto, o novo conjunto é formado pelos números inteiros e pelas frações, que são dadas pela razão entre dois inteiros.

Os pitagóricos acreditavam que tudo no universo podia ser representado pelo número inteiro ou razão entre esses números. Mas a descoberta das grandezas incomensuráveis destruiu a harmonia do universo pitagórico. A irracionalidade, que no começo era refutada, acabou sendo aceita como entidade numérica, depois de um cuidadoso estudo do problema envolvendo o infinito, o movimento e a ideia da continuidade da reta numérica.

Para os números irracionais serem aceitos como números, foram necessários um percurso de 20 séculos pela grandeza da dificuldade epistemológica. Para isso, foi necessário passar pela teoria da proporção de Eudoxo na geometria, pela álgebra na teoria da equação algébrica a partir do século XVI, até chegar na aritmetização da Análise no século XIX, com Dedekind e Cantor, criando o campo numérico dos números reais que abrange os números racionais e os irracionais.

5 O ENSINO DOS NÚMEROS REAIS PROPOSTOS PELOS LIVROS DIDÁTICOS NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Neste capítulo, será discutido o ensino do conceito dos números reais propostos pelos livros didáticos na Educação Básica, que corresponde ao ensino fundamental e médio. Ressalta-se que a compreensão desse conceito passa pelo estudo do conceito dos números irracionais, fundamentais na construção dos números reais.

Leviathan (2004), citado por Pommer (2012), afirma que os números racionais são estudados de forma detalhada no ensino fundamental II, no qual estes números são usualmente expressos como uma razão entre dois inteiros ou representados na formal decimal exata ou decimal periódica. Em compensação, os números irracionais são trabalhados de forma abreviada, apresentados como números com representação decimal infinita não periódica ou que não podem ser escritos na razão entre dois inteiros (POMMER, 2012).

Esse fato é ressaltado no manual do Plano Nacional do Livro Didático (PNLD), o qual destaca que algumas obras, mesmo aprovadas pelo PNLD/2020, apresentam fragilidades com relação ao tratamento dado ao conteúdo dos números irracionais, que são abordados com certa superficialidade e não relacionam tal conteúdo com os problemas geométricos, que é a gênese do seu conceito.

Para discutir essa problemática, no primeiro momento do capítulo, analisaremos os trabalhos de pesquisadores que estudaram o conteúdo de números racionais, irracionais e reais nos livros didáticos aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) no Ensino Fundamental II e no Ensino Médio. A escolha de se analisar os livros didáticos é porque eles exercem uma influência muito forte no ensino de matemática na educação brasileira (POMMER, 2012).

Também será feita uma análise do ensino de números reais, proposto na Base Nacional Curricular Comum (BNCC), na qual serão analisados dois livros didáticos da segunda Etapa do Ensino Fundamental do 8º e 9º ano aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD/2020). No final, será realizada uma síntese dessas análises, comparando-as com a proposta de ensino na teoria desenvolvimental.

5.1 ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS APROVADOS PELO PNLD

Trindade (2017) fez um levantamento da coleção dos livros didáticos de Matemática aprovados pelo PNLD/2016, que são os mais utilizados pelas escolas, para avaliar como são abordados os conjuntos numéricos nos referidos livros de 4º, 5º, 6º, 7º, 8º e 9º anos do Ensino Fundamental. Considera-se, aqui, que o livro didático é o material que a maioria dos professores usa como base teórica para ministrar suas aulas.

Referente ao conteúdo dos números racionais, a autora conclui que as coleções deixam de abordar o problema da medida como marco inicial para se entender o conceito deste número. Apesar dos livros fazerem aplicações cotidianas de grandezas e medidas, eles não as relacionam com a questão da comensurabilidade de duas grandezas de mesmas espécies. Erros consideráveis são notados a partir da análise destes livros, como, por exemplo, que um dos livros afirma que o conjunto dos números racionais não pode ser enumerado. Esse tipo de erro induz os alunos a concluírem que os números inteiros e racionais possuem uma natureza distinta, ao contrário do que foi constatado nos capítulos 3 e 4, em que vimos que tais números possuem as mesmas características epistemológicas, como grandezas comensuráveis e serem conjuntos numéricos enumeráveis.

Ainda segundo Trindade (2017), a correspondência dos números racionais com a reta numérica é apresentada de maneira direta, com conclusões prontas, sem que haja espaço para discussões de como isso acontece, não estimulando o desenvolvimento do pensamento crítico do estudante. Isso porque, quando ocorre esta correspondência, a reta numérica passa a ter uma relação lógica com os números racionais, pois se relaciona com o conceito nuclear destes números, que é obtido por meio da relação entre grandezas, que são originadas a partir de problemas geométricos.

Na análise dos livros didáticos realizada por Trindade (2017), verificou-se que a maioria deles não comtempla as propriedades operatórias dos números, como a inversa da operação da multiplicação, prejudicando a compreensão da estrutura numérica dos números racionais. Além disso, os números racionais surgem da impossibilidade da divisão entre dois números inteiros cujo resultado é não exato, por isso a importância de se trabalhar as propriedades operatórias, pois na impossibilidade do inverso multiplicativo no conjunto dos números inteiros é que surgiu a necessidade de se trabalhar com um novo tipo de número (os números racionais). Somente um livro analisado por Trindade (2017) apresenta uma observação sobre a existência do elemento inverso.

As conclusões de Trindade (2017), em relação a construção e o desenvolvimento dos números racionais, sugerem que tais conceitos precisam ser trabalhados com uma lógica diferente para que o aluno compreenda os seus fundamentos, desde o problema da medição até a parte formal, utilizando representações fracionárias e decimais

Com relação aos números irracionais, nas coleções analisadas pela autora, eles se diferem dos racionais por meio de sua representação decimal. Definem que as raízes quadradas não exatas de números naturais não são racionais e que eles são números decimais infinitos que não têm dízima periódica. As propriedades das operações não são comentadas. Ao falar sobre a correspondência dos pontos na reta, as coleções tratam os irracionais como pontos que faltam na reta que possuem os números racionais, os quais se reúnem a estes pontos, formando o conjunto dos números reais, que tem como característica a completude da reta.

Pommer (2012), em sua tese, analisou quatro coleções de livros didáticos aprovados pelo PNLD, sendo duas coleções do ensino fundamental 2 e duas coleções do ensino médio, para verificar como estava sendo desenvolvido o conteúdo dos números irracionais. Ele afirma que abordar os números irracionais, definidos nos livros didáticos do 9º ano do ensino fundamental, como números reais que são não racionais, reforça uma concepção simplista e incompleta destes números, “incorporando uma concepção negativa, colocando os números irracionais como não racionais, um ponto de vista insuficiente para caracterizar este tema” (POMMER, 2012, p. 25).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs, 1998) corroboram essa afirmação, acrescentando que, no ensino dos números irracionais, são abordadas somente as raízes enésimas, no cálculo com radicais, e o número π, como exemplos de números irracionais (POMMER, 2012). Além disso, o conceito dos números irracionais, tratado dessa maneira, além de limitar sua compreensão, não mostra a importância destes números na construção dos reais. Este tipo de ensino, conforme Pommer (2012), faz com que os alunos não diferenciem os números racionais e os números irracionais. Uma consequência nefasta disso é que os alunos, ao terminarem o ensino fundamental e médio, não compreendem o conceito de número, que é o conceito fundamental da matemática.

Com relação ao estudo das raízes enésimas, introduzidas no 9º do ensino fundamental, a abordagem dos livros didáticos recorre ao cálculo numérico aproximado quando essas raízes são irracionais, mostrando a dificuldade de se trabalhar com esse tipo de número pelo viés teórico, pois a sua representação teórica tem sua natureza ligada ao infinito (POMMER, 2012). O recurso didático para calcular raízes irracionais é o uso das calculadoras, que possuem limitação, pois representam o resultado na sua representação decimal finita. Uma possibilidade é trabalhar o número irracional com aproximação ao número racional, mas isso as obras didáticas analisadas não aprofundam (POMMER, 2012).

Quanto ao aspecto conceitual, os livros analisados por Pommer (2012) iniciam um percurso geométrico para introduzir os números irracionais, vinculados principalmente às raízes enésimas e ao número π, não introduzindo outros tipos de números irracionais. Após a introdução dos números irracionais, eles são trabalhados pelo viés empírico, através de situações cotidianas, mostrando somente os aspectos externos do conceito como a sua representação numérica e a diferença com os números racionais. Os alunos não compreendem a sua essência, o núcleo conceitual, que é a impossibilidade de comparar duas grandezas de mesma espécie que são incomensuráveis.

Almeida (2015) faz uma análise de quatro livros didáticos aprovados para o Ensino Médio pelo PNLD/2015, e os compara com o livro “Exame de Textos”, editado por Elon Lages Lima (2001), em que é feita uma análise de doze coleções dos livros do PNDL/2001 para o ensino médio. Porém, Almeida (2015) se restringiu apenas aos livros do primeiro ano do ensino médio, analisando o ensino de conjuntos numéricos. O autor chama a atenção para o fato de que em apenas uma obra os racionais são citados como razão entre grandezas. Porém, isto só ocorre uma vez, sem detalhamento ou melhores explicações. Nos demais casos, os racionais são tratados como uma divisão entre dois números. Além disso, foram identificadas definições incorretas, como, por exemplo, um dos livros afirma que os números racionais podem definir qualquer medida de maneira precisa. O que não é verdade, pois já demonstramos anteriormente que a crise que ocorreu na escola pitagórica foi gerada pela existência de grandezas incomensuráveis.

Várias definições de números racionais foram encontradas nos livros analisados por Almeida (2015), dificultando a compreensão do aluno diante destes números, pois, em algumas seções de uma mesma obra, afirmam que os racionais ou são uma fração, ou uma divisão, ou uma representação entre dois inteiros. Por não se ter abordado o tema por meio da razão entre grandezas, o estudante pode não compreender o que é realmente um número racional. Na conversão de uma fração para um número decimal, a explicação de um dos livros usa a expressão “para expressar uma fração por meio de um número decimal”, o que, segundo Almeida (2015), dá a entender que se trata de outro número e não do mesmo número representado de outra forma. Em nenhuma das obras o autor encontrou a transformação da dízima periódica em sua fração geratriz de maneira satisfatória. Somente em uma delas havia um algoritmo de três etapas para se encontrar a referida fração, deixando, mais uma vez, o estudante com dúvidas quanto à conversão dos racionais para decimais e vice-versa.

Todos os livros analisados por Almeida (2015) seguem a ordem de construção dos números racionais, em seguida, dos irracionais e finalmente dos reais. Dá-se a impressão de que, ao fazer-se a ampliação dos racionais para os irracionais, muito será dito sobre este novo conjunto numérico, mas isto não acontece. Para o autor, todos os livros analisados começam a explicação de números irracionais com o teorema de Pitágoras para calcular a diagonal de um quadrado de lado um, chegando ao valor correspondente a $\sqrt{2}$. O problema aqui é que o número irracional não é construído a partir da ideia de que este não pode ser escrito na forma racional por redução ao absurdo, como foi descrito no terceiro capítulo deste trabalho. Os irracionais já são definidos na sua forma final, sistematizada, sem que haja um percurso, ou uma situação problema, para se chegar à sua existência. Muito poderia ser discutido sobre o porquê de os números racionais não serem um conjunto suficiente para representar todos os pontos da reta. Apenas um autor cita que não se pode escrever $\sqrt{2}$ da forma $\frac{p}{q}$.

Outro ponto elencado por Almeida (2015) é a utilização do diagrama de Venn nos livros didáticos analisados. Pela figura do diagrama, dá-se a impressão de que os tamanhos dos conjuntos racionais e irracionais são iguais ou aproximados, o que não é verdade, pois levando em consideração a cardinalidade dos conjuntos, não há um diagrama de Venn que possa representar os conjuntos infinitos. Os problemas encontrados, na maioria dos livros, demonstram erros na construção dos números racionais, irracionais e, consequentemente, no conjunto dos números reais. Em uma comparação com a análise dos livros didáticos do ensino médio, editada por Lima (2001), Almeida (2015) detecta que muitos erros não foram solucionados. Com isso, a possibilidade de o professor fazer definições erroneamente, na construção do número real, se torna maior. Por isso, será sempre importante que os pesquisadores matemáticos analisem o material didático para apresentar uma proposta de ensino que auxilie o professor.

De acordo com os estudos realizados pelos pesquisadores em relação à análise dos livros didáticos, podemos dizer que com relação ao conteúdo dos números irracionais, e consequentemente dos números reais, não se contextualiza o problema da medida entre duas grandezas que não são comensuráveis, sendo renegada, na maioria das vezes, à curiosidade histórica, mas que poderia ser um ponto inicial para se tratar dos números irracionais, pois estes números sempre apareceram com frequência em situações problemas. Visto que duas grandezas incomensuráveis não podem ser representadas por uma fração ordinária $\frac{a}{b}, a \text{ e } b \in \mathbb{Z}$, então essas grandezas possuem um outro estatuto de número, que hoje chamamos de irracionais. Na maioria dos livros didáticos, está escrito que a grandeza incomensurável dada por $\sqrt{2}$ não é um número racional por que ela tem uma representação decimal infinita e não periódica, e não pela negação da sua representação por uma divisão entre dois números inteiros.

5.2 ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS 2018 BASEADOS NA BNCC

As competências específicas referentes a temática números reais propostas na BNCC (2017), cujas habilidades descritas para as séries do 8º e 9º da 2ª etapa do ensino fundamental são:

> A ampliação e o aprofundamento dos números reais, tendo em vista que o conhecimento dos números naturais e racionais positivos foram trabalhados nos anos iniciais, que passa a contemplar os conhecimentos acerca dos números reais, sua leitura, escrita, comparação e ordenação, incluindo a representação numérica e a notação científica (BRASIL, 2019, p. 4).

Os alunos devem ser motivados com situações problemas que possam ser representadas somente por meio dos números irracionais, sendo utilizados, por exemplos, problemas geométricos. O estudo das grandezas e medidas também contribui para ampliar o conceito de números por meio de situações problemas, nas quais é importante ressaltar que medir é comparar uma grandeza com uma unidade de medida, expressando o resultado dessa comparação por meio de um número.

No 8º e 9º ano, da 2ª etapa do ensino fundamental, com relação ao estudo de números racionais, irracionais e reais, são exigidos o objeto de conhecimento e as habilidades, descritas a seguir:

Quadro 9 – Objetos de conhecimento e habilidades

Unidade temática	**Série**	**Objeto do conhecimento**	**Habilidades**
Números	8º	Notação Científica	Representar números em notação científica e calcular com potências de expoentes inteiros.
Números	8º	Potenciação e radiciação	Resolver e elaborar problemas usando a relação entre potência e radiciação.
Números	8º	Dízimas periódicas- fração geratriz	Utilizar procedimentos para a obtenção de uma fração geratriz para a dízima periódica.
Números	9º	Necessidade de números reais para medir qualquer segmento de reta	Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta que cujo comprimento não é expresso por número racional.
Números	9º	Números irracionais	Reconhecer que o número irracional é um número real cuja representação decimal é infinita e não-periódica, estimando sua posição na reta numérica.
Números	9º	Números reais e notação científica	Resolver e elaborar problemas com números reais, inclusive em notação científica.
Números	9º	Potência com	Efetuar cálculos com números reais,

Unidade temática	Série	Objeto do conhecimento	Habilidades
		expoente negativo e fracionários	inclusive potências com expoentes racionais.

Fonte: Brasil (2017).

As obras aprovadas pelo PNLD/2020, na temática números, buscam desenvolver o pensamento numérico, que implica na capacidade de contar, quantificar, julgar e interpretar argumentos baseados em quantidades, a noção de aproximação, proporcionalidade, equivalência e ordenação. “Algumas obras recorrem à história da matemática para o desenvolvimento dos conjuntos numéricos” (BRASIL, 2019, p. 22).

Foram escolhidas duas obras aprovadas pelo PNLD/2020 para análise em relação à temática “números”, na 2ª etapa do ensino fundamental, no 8º e 9º ano. Uma coleção será denominada de livro 1 e a outra coleção de livro 2. Tais obras são tradicionais e utilizadas há muitos anos nas escolas, tanto públicas, como particulares. O livro 1 é a Conquista da Matemática de José Ruy Giovanni Junior e Benedicto Castrucci, 8º e 9º ano, editora FTD, 4º edição, 2018. O livro 2 é o Teláris Matemática de Luiz Roberto Dante, 8º e 9º ano, editora Ática S.A. 3º edição, 2018. Primeiro, analisamos as obras 1 e 2 no geral e posterirormente as analisamos no que diz respeito a temática números, comparando-as com a fundamentação teórica desenvolvida nos capítulos anteriores, para verificar se elas abordam os conceitos de maneira adequada, contribuindo para o desenvolvimento cognitivo dos alunos.

5.2.1 Análise do livro didático 1

O livro apresenta uma linguagem direta, de fácil compreensão dos conceitos e exemplos matemáticos. A obra apresenta situações contextualizadas em cada unidade apresentada, fazendo a relação entre o conhecimento matemático e as situações cotidianas vividas pelos alunos. O Manual do Professor incentiva o uso de tecnologias no ensino, apresentando diversos *softwares*, além disso, descreve as orientações dadas pela BNCC e apresenta orientações didáticas que visam auxiliar o professor na sua tarefa docente, como resolução de problemas, interdisciplinaridade, modelagem matemática etc. O livro ainda traz referência a materiais complementares para o aluno obter um conhecimento mais profundo da matéria e sempre busca relacionar o conteúdo com os temas da atualidade e situações cotidianas vividas pelos alunos. Os elementos visuais do livro buscam explorar diversas linguagens, tais como: verbal, gráfica, corporal e matemática, interpretando os conceitos matemáticos por meio de tais linguagens, sempre as relacionando com a realidade dos estudantes.

No livro do 8º ano, a temática números é trabalhada em duas unidades. Na unidade 1, são trabalhados os números racionais e na unidade 2 são desenvolvidas as operações de potenciação e radiciação e é apresentado o conjunto dos números reais. O conceito do conjunto dos números racionais é apresentado no capítulo 1 da unidade 1 com uma situação problema sobre educação financeira e, em seguida, apresenta diversos números, tais como: 3; 2005; -3,5; $\frac{2}{3}$, 20% etc., como sendo pertencentes ao conjunto dos números racionais, que é definido como sendo o conjunto dos números que pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$.

A localização dos números racionais na reta numérica também é discutida por meio de dois exemplos. No primeiro exemplo, a fração $\frac{1}{4}$ está localizada entre *0* e *1*, dividindo este intervalo em 4 partes iguais, tomando a primeira parte deste intervalo, obtendo o número decimal 0,25 e sua localização na reta numérica. No exemplo 2, tem-se a fração $\frac{11}{3}$, transformada na fração mista $3\frac{2}{3}$, localizada entre *3* e *4* e depois toma a fração $\frac{2}{3}$ e divide o intervalo *[3,4]* em três partes iguais e toma as duas primeiras destas partes iguais, localizando a fração na reta numérica.

As dízimas periódicas são apresentadas no capítulo 4, no qual a divisão entre o numerador e o denominador de uma fração ordinária não chega ao fim, cuja representação decimal é infinita, mas com termos que se repetem periodicamente na parte decimal. O autor classifica dois tipos de dízima periódica: 1) A dízima periódica simples, na qual a parte que fica à direita da vírgula é formada somente pela parte periódica, como, por exemplo, as dízimas $0{,}555\ldots$ e $0{,}6363\ldots$ cujos períodos são respectivamente *5* e *63*. 2) A dízima periódica composta é aquela em que a parte que fica à direita da vírgula é formada por números que não se repetem e pela parte periódica, como, por exemplo, a dízima $12{,}14545\ldots$, na qual os números que aparecem à direita da vírgula são formados pelo algarismo 1 que não faz parte do período, junto com a parte periódica 45. Essa diferenciação é ressaltada pelo autor para obter a fração geratriz que origina a dízima periódica dada, dividindo-a em dois casos: obter a fração para as dízimas periódicas simples e compostas (GIOVANNI JUNIOR; CASTRUCCI, 2018).

A última seção do capítulo 4 investiga, utilizando a calculadora, se uma fração ordinária possui representação decimal exata ou representação decimal infinita e periódica sem efetuar a divisão do numerador pelo denominador. São dadas diversas frações para os alunos obterem as representações decimais, utilizando a calculadora, para depois discutirem e levantar hipóteses sobre quais valores dos denominadores geram números decimais exatos, sendo uma das conclusões que as potências de 10 no denominador sempre geram números decimais finitos, pois têm como fatores o número 2 e 5.

O estudo da raiz quadrada não exata de um número racional é abordado no capítulo 5 da unidade 2. Para calcular a $\sqrt{30}$ sem a ajuda de uma calculadora, pede-se para estimar o valor da raiz quadrada tomando valores mais próximos possíveis cujo quadrado seja 30. Neste exemplo, $\sqrt{30}$ está entre $\sqrt{25}$ e $\sqrt{36}$, logo $\sqrt{30}$ está entre *5* e *6.* Fazendo a estimativa novamente, descobre-se que $\sqrt{30}$ está entre *5,4* e *5,5*. Tomando *5,4* como valor aproximado de $\sqrt{30}$, temos o resultado da raiz com uma casa decimal. Para obter uma aproximação com duas casas decimais, faz-se uma estimativa da $\sqrt{30}$ de *5,41* até *5,49*, obtendo um valor de *5,47* para $\sqrt{30}$. Continuando o processo, que não termina, ou seja, não se chega a um resultado exato da $\sqrt{30}$. No fim do capítulo, usando a calculadora, os alunos aprendem a manusear cálculos de potências e raízes e observam que o cálculo da raiz quadrada é o mesmo que elevar o número ao expoente $\frac{1}{2}$.

No último capítulo da unidade 2, o assunto é números reais, que se inicia com os números irracionais, que são definidos como números que não podem ser escritos na forma $\frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}$, logo, não são números racionais. Mas os autores os definem como sendo os números que possuem representação decimal infinita e não periódica, cujos exemplos são $\sqrt{2}$ e o π. Sobre os números irracionais, a seção se encerra não explicando por que os irracionais não podem ser escritos na forma $\frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}$, na qual a definição é dada de maneira direta, de modo que o aluno não compreende seu núcleo conceitual e sua origem relacionada à história da Matemática.

Na seção referente ao conjunto dos números reais, ele é definido no primeiro parágrafo como a reunião dos números racionais com os irracionais. Depois, a obra ressalta os conjuntos numéricos que são subconjuntos dos números reais, tais como os naturais, os inteiros, os racionais e os irracionais. Também relaciona a correspondência biunívoca da reta numérica com o conjunto dos números reais. No final do capítulo, é ressaltado que, no conjunto dos números reais, é possível efetuar qualquer operação de adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e raiz quadrada de número positivo, pois, como foi visto na parte teórica dos números reais, o conjunto $\mathbb{R}$ é um corpo com relação à operação de adição e multiplicação.

No livro do 9º ano, a unidade 1 trata dos números que não podem ser escritos na forma $\frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}$, ou seja, não são números racionais e cita como exemplo o número π, contando uma breve história do cálculo deste número. O capítulo 1 não define os números irracionais, mas faz uma contextualização histórica do surgimento desses números, mostrando sua existência como as raízes não exatas, surgidas no cálculo da diagonal de um quadrado, e o número π, que são importantes em aplicações práticas do cotidiano. Nesse caso, a formalização conceitual dos irracionais será feita no capítulo 2.

As orientações didáticas, propostas pelos autores do livro, orientam o aluno a pesquisar sobre Pitágoras e a crise dos incomensuráveis a partir do cálculo da diagonal do quadrado de lado 1, fazendo a comparação das grandezas incomensuráveis com os números irracionais. Nesse contexto, o autor utiliza da história da matemática para relacionar o conteúdo estudado com o seu surgimento na Geometria, mostrando que existem grandezas (números) que não podem ser escritas na forma $\frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}$. O livro ainda mostra que a notação decimal, desenvolvida pelos matemáticos europeus no século XVIII, é que permitiu descobrir que as aproximações decimais dos números irracionais produzem representações infinitas, sem ter um período que se repete. Nesse caso, os números decimais infinitos e não periódicos correspondem aos números irracionais.

O capítulo 2 trabalha os conjuntos numéricos, com a formação do conjunto dos números reais. Nesse caso, a reunião do conjunto dos números racionais (que abrange os naturais e os inteiros) e o conjunto dos números irracionais forma o conjunto numérico dos números reais, em que o número que não é racional é definido como um número irracional. É enfatizado que, na reta numérica, podem ser representados todos os números racionais e irracionais, isto é, todos os números reais. Nas atividades, os alunos são convidados a explorar quais números pertencem a determinado conjunto numérico, por exemplo, a raiz quadrada não exata pertence ao conjunto dos números irracionais.

5.2.2 Análise do livro didático 2

A obra se baseia no referencial teórico relativo aos avanços conquistados pela Educação Matemática, tais como: trabalhar as ideias dos conteúdos intuitivamente antes da sua formalização; trabalhar situações problemas, dando significado ao conteúdo; utilizar o uso de calculadoras e computadores; utilizar a história da matemática como recurso didático; valorizar o conhecimento que o aluno traz da sua experiência de vida e trabalhar a interdisciplinaridade com outras áreas do conhecimento e com os temas contemporâneos (meio ambiente, ética, saúde, etc.), de forma que todas tendências metodológicas estão alinhadas com o que sugere a BNCC.

Na temática números, o livro procura estabelecer sempre a relação destes com a reta numérica, a noção de número racional é dada pela negação da divisão entre dois números inteiros, mostrando a necessidade de ampliação de tal conjunto numérico e mantendo todas as propriedades das operações aritméticas. Além disso, a obra traz a propriedade de densidade dos números racionais, utilizando a reta numérica, mostrando que entre dois números racionais é possível encontrar outro número racional. O conjunto dos números reais é trabalhado como a união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais.

O livro é dividido por capítulos e cada capítulo é dividido por seções. No livro do 8º ano, a temática números é trabalhada no capítulo 1, denominado “Números, dos naturais aos racionais e sequências”, dividido em 4 seções. O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é obtido pela divisão entre dois números inteiros, dando como resultando um número inteiro ou um número decimal exato ou uma dízima periódica. Nas atividades, aplica o conjunto $\mathbb{Q}$ no cálculo do Índice de Massa Corporal (IMC). A dízima periódica é trabalhada, sendo explorado o procedimento para determinar a sua fração geratriz. O livro classifica as dízimas periódicas em simples e compostas.

O autor explora a localização dos números racionais na reta numérica, obedecendo às mesmas regras desenvolvidas no livro 1. Outra propriedade do conjunto $\mathbb{Q}$ é a sua densidade, isto é, entre dois números racionais quaisquer, existem outros inúmeros números racionais. Esta propriedade não ocorre nos conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$, em que, entre os números 2 e 3, não existe um inteiro entre eles. O conjunto $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ são chamados conjuntos discretos, por não serem densos como os racionais. Na obtenção de um número racional entre outros dois números racionais, o livro descreve três maneiras, que podem ser consultadas em Dante (2018).

No livro do 9º ano, o conjunto dos números reais é desenvolvido no capítulo 1, dividido em cinco seções: números racionais, números irracionais, conjunto dos números reais, operações com raízes e potenciação de base real. Na abertura do capítulo, o autor usa a raiz quadrada para calcular a medida do lado de dois terrenos quadrados, dadas as suas áreas, sendo que a área de um terreno é um quadrado perfeito e a do outro não, o que leva à impossibilidade de realização do cálculo exato do lado do último terreno. Nas questões da abertura do capítulo, os conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ são revisados. Na seção 1, o conjunto $\mathbb{Q}$ é trabalhado, retomando a sua definição e sua representação fracionária em número decimal exato e na forma de dízima periódica.

Na 2ª seção, é abordado o número irracional, definindo-o como um número cuja representação decimal é infinita e não periódica, construindo representações decimais que não apresentam período, como, por exemplo, o número *0,101001000....* o texto lembra que o exemplo dado não possui um período que se repete, mesmo tendo um padrão na sua escrita, portanto, trata-se de um número irracional. O número irracional π é estudado, aplicando-o em situações problemas que envolvem cálculos de comprimento e da área de um círculo. São efetuados cálculos das raízes quadradas exatas e não exatas, em que os números quadrados perfeitos possuem raízes exatas, sendo o resultado um número racional. As raízes não exatas são calculadas por aproximações sucessivas, como no livro 1, mostrando que tal representação decimal não tem fim, sendo esse resultado um número decimal infinito e não periódico, o texto conclui que as raízes quadradas não exatas são números irracionais, como $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{7},$ etc. O tema da leitura no final da seção são as grandezas comensuráveis e incomensuráveis, relacionando-as com os números racionais e irracionais respectivamente.

Na seção 3, é definido o conjunto dos números reais. O autor ressalta que um número não pode ser racional e irracional ao mesmo tempo, sendo a definição do conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$) a união dos números racionais com os números irracionais. Com relação ao estudo da reta numérica, é destacada a relação biunívoca entre o conjunto $\mathbb{R}$ e os pontos da reta, em que cada número real corresponde a um ponto da reta e cada ponto da reta corresponde a um número real. No livro do 8º ano, foi ressaltado pelo autor que a reta numerada, formada pelo conjunto $\mathbb{Q}$, continha inúmeros "buracos", que seriam preenchidos pelos números irracionais. Neste caso, a completude da reta numérica só existe no conjunto $\mathbb{R}$, chamada de reta real. Na parte referente à história da matemática, é demonstrado a irracionalidade da $\sqrt{2}$ pela redução ao absurdo de forma detalhada.

A comparação de números reais é destaque no final da seção 3, dados dois números reais *a* e *b,* só pode ocorrer uma e somente uma das três possibilidades: $a < b, a = b \; ou \; a > b$. Essa propriedade, chamada de tricotomia, mostra que o conjunto $\mathbb{R}$ é ordenado. A ordenação dos números reais pode ser expressa geometricamente, utilizando a reta real, ou algebricamente, por meio do uso de letras e símbolos para representar a igualdade ou desigualdade entre dois números. As atividades da seção trabalham diversas situações problemas, envolvendo o conjunto dos números reais.

5.3 SÍNTESES DAS ANÁLISES

Com relação ao conteúdo dos números irracionais pesquisados por Trindade (2017), Almeida (2015) e Pommer (2012), e consequentemente os números reais, não se contextualiza o problema da medida entre duas grandezas que não são comensuráveis, sendo renegada, na maioria das vezes, a curiosidade histórica, mas que poderia ser um ponto inicial para se tratar dos números irracionais, pois estes números sempre apareceram com frequência em tais situações problemas. Visto que duas grandezas incomensuráveis não podem ser representadas por uma fração ordinária $\frac{a}{b}, a \; e \; b \in \mathbb{Z}$, então, essas grandezas possuem outro estatuto de número, que hoje chamamos de irracionais. O que está escrito, na maioria dos livros didáticos, é que a grandeza incomensurável dada por $\sqrt{2}$ não é um número racional por que ela tem uma representação decimal infinita e não periódica, e não pela negação da sua representação por uma divisão entre dois números inteiros.

A análise do livro 1, sobre a construção dos números reais por meio da extensão dos números racionais, complementando com os números irracionais, possui algumas lacunas, como não mostrar porque o número irracional não pode ser escrito na forma de uma fração ordinária, por meio da demonstração por absurdo da irracionalidade da $\sqrt{2}$, principalmente na definição feita no livro do 8º ano. O livro do 9º, utilizando a história das grandezas incomensuráveis, não conclui que os números irracionais e as grandezas incomensuráveis possuem a mesma natureza, sendo uma aritmética e outra geométrica, e que a incomensurabilidade surge da razão entre duas grandezas e a irracionalidade na razão entre dois números. Com relação à reta e ao conjunto dos números reais, a correspondência biunívoca se dá de forma direta, sem detalhar que tal biunivocidade não seria possível somente com os números racionais.

Ressaltamos que a obra utiliza diversas metodologias para descrever o conteúdo dos números reais, tais com: resolução de problema, história da matemática, uso da tecnologia, aplicações a diversas situações problemas da matemática e de outras áreas (como meio ambiente referente ao desmatamento). A obra mostra aplicações dos números racionais e irracionais em diversos contextos, entre os quais, podemos citar o cálculo de porcentagem e o lado da diagonal de um quadrado, além da importância do número π em objetos circulares. Nas atividades, o livro orienta os alunos a explorarem conceitos e fazerem conjecturas de algumas propriedades que não estão no texto, como classificar qual fração ordinária terá como resultado um número decimal exato ou uma dízima periódica, por meio do uso de calculadoras, colocando os alunos em contato com a utilização da tecnologia.

O livro 2 trabalha todas as propriedades dos números reais vistos na fundamentação teórica que, geralmente, não são explorados no ensino fundamental, tais como: ordenação dos números reais, densidade e completude da reta real. Além disso, o livro relaciona as significações aritméticas, algébrica e geométricas do conjunto $\mathbb{R}$, levando o aluno a ter contato com notação e simbologia que serão importantes nos níveis de ensino mais avançados, como a notação de conjuntos. A História da Matemática é utilizada como recurso para relacionar as grandezas comensuráveis e incomensuráveis com os números racionais e irracionais, respectivamente e, através da História, é mostrado que $\sqrt{2}$ não pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}$, usando a demonstração por contradição. Tais metodologias mostram a origem e a importância dos irracionais em várias situações práticas, principalmente na Geometria, mostrando ao aluno a necessidade de definir o conjunto $\mathbb{R}$.

Os livros 1 e 2 trabalham a construção dos números reais por meio da extensão dos conjuntos numéricos, na qual os inteiros são extensão dos naturais, os racionais são extensão dos inteiros e no final, os reais são definidos como a união dos racionais e irracionais. As metodologias e os recursos didáticos são diferentes, mas, no geral, elas se assemelham na construção de tais números. Mesmo trabalhando a interdisciplinaridade e aplicação em diversas situações cotidianas, o conteúdo abordado nos livros didáticos não transformam a constituição dos alunos pela apropriação do conhecimento escolar, não suscitando os motivos na realização das tarefas (BERNARDES, 2012).

As ações e as operações que os alunos realizam sobre o estudo de números reais estão ainda relacionadas com a percepção sensorial, com a representação simbólica, com a classificação e comparação (para diferenciar), elaborando o conceito com bases em características formais. Tal apropriação proporciona a obtenção das abstrações iniciais do conceito de número pelos estudantes, que caracterizam a dimensão empírica do pensamento, que são necessárias, mas não o suficiente para a apropriação do conhecimento teórico (BERNARDES, 2012). Por esse motivo, a importância de se trabalhar com outra organização do ensino, proposto por Davydov, com a formulação da teoria do ensino desenvolvimental.

Nesta teoria, os números são definidos por meio da relação entre grandezas, como comprimento, área, volume, explorando a construção do conceito as relações aritméticas, geométricas e algébricas, por meio da atividade de estudo, que é a espinha dorsal da teoria desenvolvimental, ao mesmo tempo em que são trabalhadas as relações multiplicativas, de igualdade e desigualdade entre grandezas.

A proposta de ensino dos números reais, com ênfase no trabalho com os números irracionais, utilizando a teoria do ensino desenvolvimental de Davydov, se dará por uma nova organização do processo de ensino, por meio da atividade de estudo, visando à assimilação pelos estudantes de novos conhecimentos acerca dos conceitos de números reais. Para Davydov:

> O conceito filosófico-pedagógico de atividade significa transformação criativa pelas pessoas da realidade atual. A forma original dessa transformação é o trabalho que todo o tipo de atividade carrega em si um

> traço principal – a transformação criativa da realidade, e ao final do próprio homem (DAVYDOV, 1999, p. 1).

A atividade de estudo propicia ao estudante o desenvolvimento de seu pensamento teórico, com a assimilação dos conteúdos escolares, que se manifesta pela obtenção do núcleo conceitual do objeto de estudo. O conhecimento obtido pelo aluno, na realização desta atividade na concepção de Davydov, é o conhecimento teórico, que só é obtido pela instrução no ambiente escolar, por meio das matérias escolares. Esse tipo de conhecimento não é obtido pelas relações cotidianas do aluno e nem pelas atividades que cultivam a reprodução do algoritmo ensinado pelo professor, cujas atividades só contemplam as propriedades externas do objeto, não relacionando a sua relação geral, pois o conhecimento gerado com tais atividades é o conhecimento empírico (DAVYDOV, 1998).

Com relação ao conceito de número, o programa de Davydov é baseado no estudo das grandezas. Para comparar grandezas, usam-se as seguintes relações: $a = b, a < b \ e \ a > b$, no qual *a* e *b* são duas grandezas de mesma espécie (área, segmento) para definir números por meio da relação entre grandezas, usando o princípio multiplicativo dado por $A = NB$, onde o número *N* é dado por: $\frac{A}{B}$, na qual *A* é a grandeza a ser medida e *B* é a unidade de medida (DAVYDOV, 1998). A expressão $N = \frac{A}{B}$ é a relação geral de número que, após as crianças assimilarem o seu significado, podem obter números concretos, por meio das manifestações particulares obtidas pela relação geral. Nesse caso, a mudança *B* resulta em um número diferente.

Para exemplificar o que foi dito acima, se a grandeza *A* puder ser dividida em 6 partes iguais e *B* é a unidade dada por uma dessas seis partes, temos que o número *N* é dado por $N = \frac{6}{1} = 6$. Mas se *B* corresponder a 2 dessas partes de seis, temos um novo número que é dado por $N = \frac{6}{2} = 3$. Os resultados expostos estão bem detalhados na tese de Rosa (2012).

Entretanto, a relação geral exposta acima define com precisão os números racionais, que envolvem as frações e os números inteiros. Quando se estende tal conceito para os números reais, tem-se uma dificuldade epistemológica em defini-los na relação entre grandezas, pois existem grandezas que não podem ser comparadas pela mesma unidade de medida, que são as grandezas incomensuráveis. O problema que se defronta é: como um aluno da educação elementar, ao comparar duas grandezas de mesma espécie, vai determinar se a relação geral de número dada por $N = \frac{A}{B}$ é comensurável ou incomensurável, ou seja, se existe uma unidade de medida que cabe um número inteiro de vezes na grandeza *A* e na grandeza *B?*

Para responder a essa questão, vamos voltar um pouco no tempo, na época do Egito Antigo, em que, para controlar as distribuições de terra as margens do Rio Nilo depois da cheia, os matemáticos da época criaram uma unidade de medida de comprimento que era o cúbito, dado pelo comprimento do cotovelo à extremidade do dedo médio do braço estendido do faraó. Por exemplo, para medir um segmento *CD,* que cabe dois cúbitos e um pedaço menor que 1 cúbito, para medir esse resto que sobrou, subdividia a unidade do faraó em partes iguais cada vez menores até que uma das partes coubesse em um número inteiro de vezes na parte que sobrou do segmento *CD*. Logo, a medida de *CD* é dada por 2 cúbitos mais $\frac{1}{n}$, onde *n* é o número de subdivisões da unidade do faraó, o cúbito (MOURA; LIMA; MOURA; MOISÉS, 2016).

Para Moura, Lima, Moura e Moisés (2016), essa técnica funcionava tão bem, que as sociedades antigas acreditavam que tudo podia ser medido. Os pitagóricos acreditavam que tudo no universo podia ser determinado pelos números inteiros ou pelas relações entre esses números. Mas o próprio teorema atribuído aos pitagóricos revelou que era impossível medir a diagonal de um quadrado de lado l, em que sua medida $l\sqrt{2}$ determina um comprimento que não pode ser determinado pela razão de duas grandezas inteiras. Da mesma forma, era impossível medir a relação do comprimento da circunferência com o seu diâmetro, que é o número $\pi = \frac{C}{d}$.

Segundo a mística Pitagórica, tudo no universo é formado pelas partes mais simples, que compõem o todo, que é o complexo. Todo segmento de reta tem número finito. A medida desse segmento é composta por uma quantidade de mônadas, que é a parte menor de todas as coisas. “De acordo com Pitágoras, todos os comprimentos podem ser medidos e escritos na forma de um número racional, que é a quantidades de mônadas existentes na medição” (MOURA; LIMA; MOURA; MOISÉS, 2016, p. 343). Na sequência temos:

> Se a medida *AB* pode ser decomposta em 10 mônadas. Considere o segmento *EF* decomposto em 12 mônadas. Considerando o segmento *AB* como unidade de medida, quanto mede o segmento *EF?* Temos que a

> razão entre os números de mônadas de *EF* com o número de mônadas da unidade de medida *AB* é dado por $\frac{12}{10} = 1{,}2$ (MOURA; LIMA; MOURA; MOISÉS, 2016, p. 343).

No exemplo acima, *10* mônadas, que corresponde a *1* unidade de medida, cobre *10* mônadas de *EF* e ainda sobra *2* mônadas. Cada mônada que sobrou se subdivide em 10 partes, logo $\frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{2}{10} = 0{,}2$. Nesse caso, tem-se $1\frac{2}{10}$ (um inteiro e dois décimos) que resulta da medição de *EF*, tendo *AB* como unidade de medida. Nesse contexto, os números racionais resolviam o problema das mônadas, estabelecido pelos pitagóricos. Mas existem grandezas para as quais não é possível efetuar medições, como a diagonal do quadrado ou o comprimento de uma circunferência, contradizendo o modelo das mônadas. Para resolver essa contradição da medida das grandezas incomensuráveis, foi necessário desenvolver o conceito dos números irracionais.

Portanto, a relação geral do número irracional é a negação de representá-lo como a razão entre dois números inteiros, isto é, não é um número racional. Logo, o número irracional é o pensamento numérico que trata das grandezas que não podem ser expressas na relação numérica $\frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}$ (MOURA; LIMA; MOURA; MOISÉS, 2016). Na relação entre grandezas, estabelece-se a relação entre geometria e aritmética. “A reta é o elemento geométrico que corresponde ao comprimento”, de acordo com Moura, Lima, Moura e Moisés (2016, p. 350), que pode ser representado por um modelo numérico, chamado de números reais, obtido pela união dos números racionais com os irracionais. Na aritmética, o número irracional surge na impossibilidade de se obter o resultado da raiz enésima não exata.

A partir das análises feitas anteriormente, determinando a relação geral do número racional e irracional, será apresentada, no próximo capítulo, uma proposta de ensino baseada na teoria desenvolvimental para abordar o conceito de números reais.

6 PROPOSTA DE ENSINO DO CONCEITO DE NÚMEROS REAIS NA TEORIA DO ENSINO DESENVOLVIMENTAL DE DAVYDOV

Neste capítulo será abordado sobre o ensino de números reais conforme as bases teóricas utilizadas para esta investigação. Neste sentido, iremos destacar as abordagens dadas a este campo numérico na BNCC, logo iremos discorrer a respeito do ensino de números reais segundo o ensino desenvolvimental e por fim iremos apresentar uma atividade de estudo que materializa o que defendemos a respeito do ensino deste conceito.

O plano de ensino executa as ações a serem realizadas no ensino de uma matéria, que vai da organização do conteúdo, dos objetivos, da avaliação até a execução em sala de aula. Para elaborar o plano de ensino, o professor deve fazer uma análise do conteúdo para identificar seus principais fundamentos conceituais, atividade principal dos alunos, motivos, ZDP, a mudança qualitativa no conhecimento do aluno que se espera que o ensino impulsione. (LIBANEO; FREITAS, 2012).

O professor, na elaboração/execução do plano de ensino, precisa ter alguns requisitos, tais como: ter o conhecimento do conceito e das suas relações gerais, bem como o processo investigativo que gerou o objeto de estudo; dominar bem o conteúdo que vai ministrar; saber escolher exemplos e atividades concretas que incidem nas relações gerais da matéria para, posteriormente, avançar nos casos particulares em diversas situações (LIBANEO; FREITAS, 2012).

Deve-se ressaltar a importância do percurso lógico-histórico de um conceito que procura investigar as descobertas científicas e as necessidades sociais que levaram à definição atual do conteúdo a ser ensinado. Focando no nosso caso, a forma que os números reais foram construídos pode ser utilizada para a execução do ensino deste conteúdo. Nesta proposta, um problema histórico é relacionado ao respectivo conteúdo para demonstrar que, apesar de os conhecimentos que temos atualmente terem sido descobertos de forma desconexa e fora da ordem que se tem, pode-se utilizar o lógico-histórico para que fatos ocorridos, como o dos incomensuráveis, contribuam para a construção do conhecimento dos conjuntos numéricos.

O objetivo geral deste plano de ensino é mostrar a importância dos números irracionais na definição dos números reais, nas formas algébrica, aritmética e geométrica. Os objetivos específicos estão relacionados a: demonstração de problemas históricos na descoberta de números não racionais; resolução de situações problema para se encontrar um número irracional; fazer uma correspondência entre os conjuntos dos racionais com os pontos da reta; mostrar a necessidade da união dos racionais e irracionais para definir um conjunto correspondente aos pontos da reta.

6.1 PLANO DE ENSINO

Esta proposta é direcionada para o ensino desenvolvimental do conceito de números reais a alunos do 9º ano do ensino fundamental, pois é nesta etapa que os alunos estudam o conceito dos números reais com a inserção dos números irracionais. Os alunos já possuem o conhecimento acerca dos números racionais e também do Teorema de Pitágoras, que é a gênese do número irracional. Portanto, antes de iniciar a proposta de ensino, é importante que o professor retome esses conceitos. A proposta de ensino será direcionada em torno de 6 aulas com duração de 1 hora e 30 minutos cada uma.

Vygotsky (2018) afirma que o processo da formação de conceitos se desenvolve desde cedo nas crianças, mas é na adolescência que eles se configuram e se tornam realidade nas suas funções psicológicas. Na atividade de estudo principal do plano de ensino, devemos vincular os fatores sociais que se apresentam na vida do adolescente, como aspectos culturais, esportivos e artísticos (VYGOSTKI, 2018). Davydov (1998) ressalta a importância de o professor levar em consideração o interesse do aluno, pois quando o professor deixa de considerar a relação entre atividade principal e o motivo do aluno, pode implicar que ele não entre, de fato, na realização da atividade. Isto leva em explicar o porquê de determinado conteúdo deve ser assimilado pelos estudantes (FREITAS, 2012).

Entendemos, segundo a orientação dada pela atividade principal da teoria histórico-cultural, a importância de que o professor inclua, em seu planejamento, a participação efetiva dos alunos, de modo a socializarem os conhecimentos por meio do diálogo que marca essa fase da adolescência, propondo atividades em grupo que valorizam a premissa que diz que o conhecimento ocorre do nível interpessoal para o intrapessoal, do coletivo pensante para o individual. Dessa forma, possibilita a mediação a partir daquele que tem mais experiência no grupo, capaz de auxiliar o professor na construção do saber a ser apropriado (VYGOSTKI, 2018).

A atividade principal de estudo, em nosso planejamento, se inicia com o seguinte problema investigativo que, por princípio, verifica a aprendizagem do conteúdo do teorema de Pitágoras (SOUSA, 2017), ao mesmo tempo em que inicializa uma nova fase conceitual, compreender a gênese dos números irracionais. O problema investigativo pode ser enunciado da seguinte maneira: “Os alunos do 9º ano, a fim de arrecadar dinheiro para a formatura da turma vendendo doces e rifas, vão ocupar três espaços quadrangulares em volta de um terreno que será o espaço de convivência da escola, que possuirá o formato de um triângulo isósceles reto, de modo que a área de um espaço quadrado seja igual a soma das áreas dos outros dois quadrados, cujos lados coincidem com os lados do espaço de convivência. O professor quer que os alunos descubram a medida exata dos três lados do espaço de convivência”.

6.1.1 Aula 1

Conteúdo a trabalhar: Grandezas comensuráveis e grandezas incomensuráveis.

Objetivo geral: Estabelecer relação matemática para a compreensão do conceito de grandezas comensuráveis e grandezas incomensuráveis.

Objetivos específicos: Compreender o processo histórico que possibilitou ao homem a descobrir que existem grandezas incomensuráveis; perceber a falta de uma unidade de medida para comparar duas grandezas que são incomensuráveis e mostrar que não existe uma medida exata para mensurar o lado maior do triângulo isósceles reto.

Avaliação: Observação das discussões dos alunos nas interações e dos registros feitos por eles na resolução do problema de aprendizagem.

Ação: Assimilação e transformação de dados dos problemas e descobrir a relação geral abstrata do número irracional (abstração substantiva).

Nesse caso, é a existência de medidas que não podem ser escritas na representação $\frac{A}{B}$, na qual não se consegue repartir uma dada grandeza de medida *A* em partes iguais, por qualquer que seja a unidade de medida *B*, por menor que ela seja. Portanto, temos as chamadas grandezas incomensuráveis, que não possuem um resultado numérico exato.

Momento 1: Propor aos alunos que resolvam o problema de aprendizagem. A turma será dividida em grupo, no qual cada grupo apresentará sua solução.

Momento 2: Exposição dos grupos envolvidos, a respeito das estratégias utilizadas para solucionarem o problema de aprendizagem.

Momento 3: Roda de conversa. A partir do problema de aprendizagem concreto, fazer com que os alunos vivenciam a necessidade de compreender que tipo de número representa essa medida não- exata. O professor pode orientar a discussão fazendo os seguintes questionamentos: É possível determinar a medida exata de todos os lados do triângulo isósceles reto? Será conjecturado que dada qualquer medida dos lados iguais do triângulo isósceles, usando o Teorema de Pitágoras para calcular o lado maior, a medida obtida será exata ou aproximada? Os alunos podem testar os lados de medida 2 e 2; 3 e 3 e assim por diante, verificando se a terceira medida é um inteiro ou um número que pode ser escrito na razão entre dois inteiros.

Momento 4: Passar um vídeo que aborde a história cultural da medição na Grécia e Egito, mostrando que as descobertas das grandezas incomensuráveis tiveram sua origem na Grécia Antiga, por meio do Teorema de Pitágoras.

Nesta atividade, os alunos irão se deparar sempre com uma raiz não exata, quando simplificada, obtendo o número $\sqrt{2}$, que não possui uma representação decimal exata. Este número representa uma grandeza geométrica real, mas o seu resultado exato é teórico e tal natureza desse número é relacionada às grandezas incomensuráveis.

6.1.2 Aula 2

Conteúdo a trabalhar: Números irracionais.

Objetivo geral: Distinguir números racionais e irracionais através do conceito de grandezas comensuráveis e incomensuráveis.

Objetivos específicos: Constatar pela história que o número irracional foi criado com base na impossibilidade de fazer medição exata; compreender a ideia de número irracional, sendo aquele que não pode ser escrito na forma $\frac{A}{B}$, em que *A* e *B* são números inteiros; mostrar que a inversa da potenciação (radiciação) não exata se faz por meio dos números irracionais e mostrar que o cálculo de raízes não exatas não possui representação decimal finita ou dízima periódica.

Avaliação: Observação dos caminhos traçados pelos alunos nas resoluções das atividades e dos registros feitos por eles na resolução dos problemas 1 e 2.

Ação 1: Assimilação e transformação de dados dos problemas e descobrir a relação geral abstrata do número irracional (abstração substantiva).

Neste caso, é a negação da representação $\frac{A}{B}$, em que não se consegue repartir a grandeza de medida *A* em patres iguais, por qualquer que seja a unidade de medida *B*, por menor que ela seja. Portanto, irracional é a não irracionalidade.

Momento 1: Propor aos alunos dois problemas históricos que os gregos se depararam ao trabalhar com as grandezas incomensuráveis. Tais problemas estão envoltos em lendas a respeito das descobertas das grandezas incomensuráveis.

Lenda 1: No cálculo da medida da base do triângulo isósceles reto de lados iguais, deparou-se com o resultado cuja medida não podia ser expressa pela razão entre dois números inteiros. Esse resultado foi atribuído aos pitagóricos, pois todo resultado nessa comunidade não era atribuído a um membro e sim a escola fundada por Pitágoras. Estava sendo descoberto os números irracionais, relacionados as grandezas incomensuráveis. A descoberta dos irracionais causou um forte impacto entre os pitagóricos, pois todas as provas dos teoremas envolvendo proporções e semelhanças haviam sido obtidos supondo que a razão entre duas grandezas de mesma espécie (segmentos, áreas e volumes) era sempre exprimível por meio de números inteiros. Uma lenda diz o descobridor da existência dos irracionais, o pitagórico Hipasus de Metaponto (cerca 470 A.C.), foi jogado ao mar, afogando-se, por ter revelado a comunidade não pitagórica a sua descoberta (GARBI, 2010).

Problema 1: No cálculo da medida da base do triângulo isósceles reto de lados iguais, medindo 1 metro, analise o resultado obtido*.* Generalize o resultado, calculando a medida da base de lados iguais medindo *a.*

Lenda 2: Conta-se que, no templo de Apolo, na ilha de Delos, um oráculo foi procurado para petição da ajuda dos deuses, pois a peste estava ameaçando matar muitos dos cidadãos atenienses. A resposta do oráculo foi de que os deuses pediram para que os sábios resolvessem um problema aparentemente fácil, mas posteriormente, descobriu-se que era impossível de resolvê-lo, pois os deuses pediram simplesmente para que lhes erguessem um altar que fosse igual ao dobro do já existente, e o mal poderia ser debelado. Como o problema não foi resolvido, o mal sobre os cidadãos não foi evitado. Esse problema chamado de a duplicação do cubo ficou conhecido como o problema de Delos ou problema deliano.

Problema 2: O problema é o seguinte: dado um cubo, como construir o lado de outro cubo cujo volume seja o dobro do volume do primeiro cubo?

Nos problemas 1 e 2 os alunos verificam a semelhança com o problema de aprendizagem que eles precisam resolver, mostrando a dificuldade e a necessidade de se solucionar situações problemas que envolvam grandezas incomensuráveis que se relacionam com os números irracionais.

Momento 2: Discutir com os alunos que os resultados obtidos nos problemas 1 e 2, nos casos os números $\sqrt{2}$ e $\sqrt[3]{2}$, são resolvidos pela ideia da operação inversa da potenciação, em que tais resultados escapam constantemente da sua representação decimal finita, ou seja, a infinitude está imersa neste tipo de número.

Ação 2: Modelação da relação geral dos números irracionais para forma objetivada literal para o estudo das suas propriedades na forma pura.

Os alunos irão compreender que os números $\sqrt{2}$ e $\sqrt[3]{2}$ não podem ser escritos na forma de razão entre dois inteiros e que a representação decimal destes números é infinita e não periódica, mostrando a relação geral dos números irracionais e sua modelação na forma objetivada e literal.

Momento 3: Após verificar a impossibilidade de se calcular o valor exato nas soluções dos problemas 1 e 2, será pedido aos alunos para demonstrar o seguinte resultado: Dado dois números inteiros *A* e *B*, irredutíveis, mostrar que é impossível escrevê-los na forma $\left(\frac{A}{B}\right)^2 = 2$. Explicar que esse resultado é equivalente a mostrar que é impossível escrever $\sqrt{2}$ na forma $\frac{A}{B}$, ou seja, $\sqrt{2}$ não pode ser escrita na razão entre dois números inteiros, logo $\sqrt{2}$ não é um número racional.

Do mesmo modo, pedir para os alunos demonstrar que é impossível ter $\left(\frac{A}{B}\right)^3 = 2$, em que *A* e *B* são números inteiros irredutíveis, fazendo-os concluir que esse resultado é equivalente a mostrar que é impossível representar $\sqrt[3]{2}$ na forma $\frac{A}{B}$, em que *A* e *B* são números inteiros irredutíveis.

Momento 4: Nos resultados obtidos acima, o professor medeia a discussão, conduzindo os estudantes a compreenderem que os números $\sqrt{2}\ e\ \sqrt[3]{2}$ não podem ser escritos na razão entre dois números inteiros; logo, eles não são números racionais. Nestes casos, temos um novo tipo de número, os irracionais. No cálculo dessas raízes, os alunos vivenciam a impossibilidade de obterem um resultado exato (finito), relacionando os números decimais infinitos e não periódicos aos números irracionais. Nesse caso, os alunos já têm o conhecimento dos números racionais e que as únicas representações decimais que eles possuem são os números decimais finitos ou decimais infinitos e periódico.

6.1.3 Aula 3

Conteúdo a trabalhar: A reta numérica real.

Objetivo geral: Compreender que a completude da reta se obtém pela união dos números racionais com os números irracionais.

Objetivos específicos: Marcar as raízes quadradas não exatas na reta numérica; identificar, na reta numérica, os números racionais e irracionais e que existem infinitos números racionais e irracionais na reta numérica.

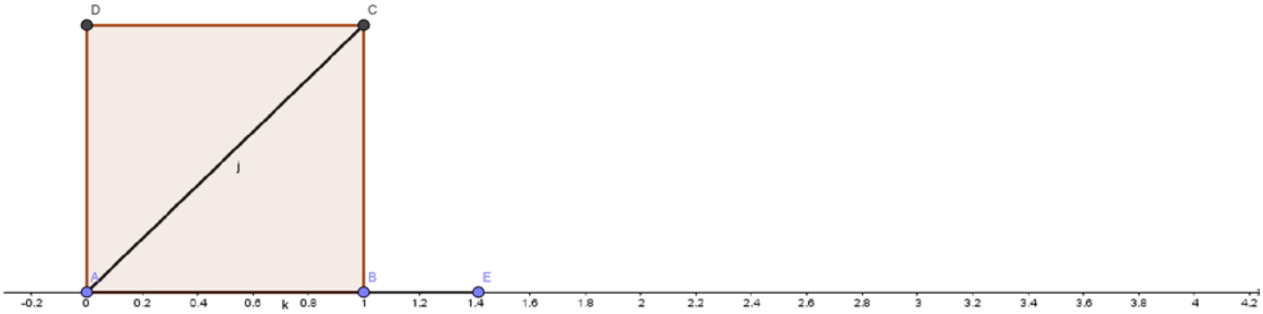
Avaliação: Observação das discussões dos alunos nas interações e dos registros feitos por eles durante a resolução das atividades. Observar a participação dos alunos na discussão das atividades.

Ação: Transformação do modelo da relação geral dos números irracionais na forma literal para a forma geométrica na reta numérica para o estudo das suas propriedades na forma pura.

O aluno deve compreender que realizar a representação geométrica somente com o uso dos números racionais na reta numérica deixa-a incompleta, cheia de buracos, necessitando dos números irracionais para preenchê-la totalmente.

Momento 1: Propor aos alunos a seguinte atividade 1: dado um quadrado de lado 1 unidade na reta numérica, localize a diagonal deste quadrado na reta usando régua e compasso. Ver Figura:

Figura 8 – Quadrado de lado 1

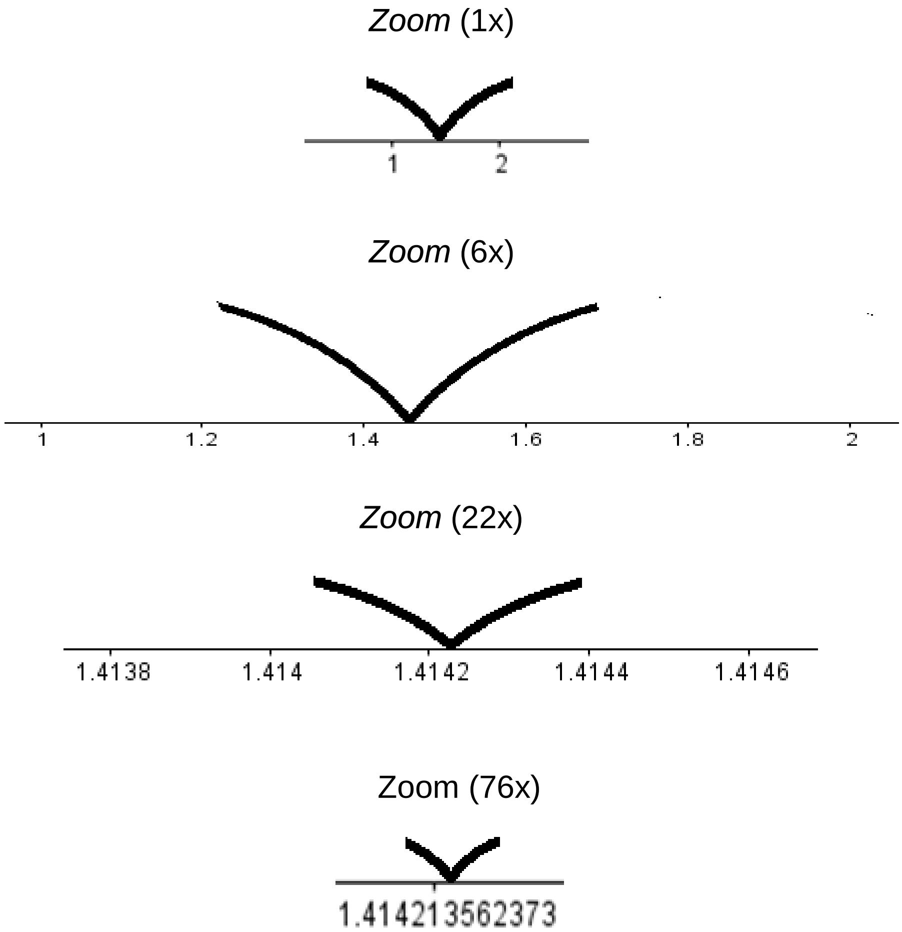


Fonte: Autoria própria.

Momento 2: Roda de conversa. Após os alunos marcarem a diagonal na reta numérica, discutir que a $\sqrt{2}$ faz parte da reta, mesmo não tendo uma representação decimal finita ou dízima periódica.

Após a atividade 1, pode-se mostrar a representação deste número na reta, por meio do *software* Geogebra. A discussão pode ser conduzida de maneira equivalente à definição segundo o corte de Ricardo Dedekind. Como o conceito de corte é uma importante teoria da Análise Matemática, o docente precisa se atentar para os conhecimentos que os estudantes adquiriram até então para não perder a atenção do aluno e proporcionar a compreensão, de maneira que cada definição seja feita a partir dos conhecimentos prévios por eles adquiridos. O *software* Geogebra é composto por uma janela algébrica, uma janela geométrica e de uma barra de ferramentas que fica na parte superior. Na barra de ferramentas, pode-se ampliar a reta numérica – preferencialmente o eixo das abscissas – para ver o comportamento dos números, possibilitando que se possam ver números entre números. Dessa forma, toda vez que se dá *zoom,* novos números aparecem, conforme a Figura 9, a seguir:

Figura 9 – Exemplos de *Zoom*



Fonte: Autoria própria.

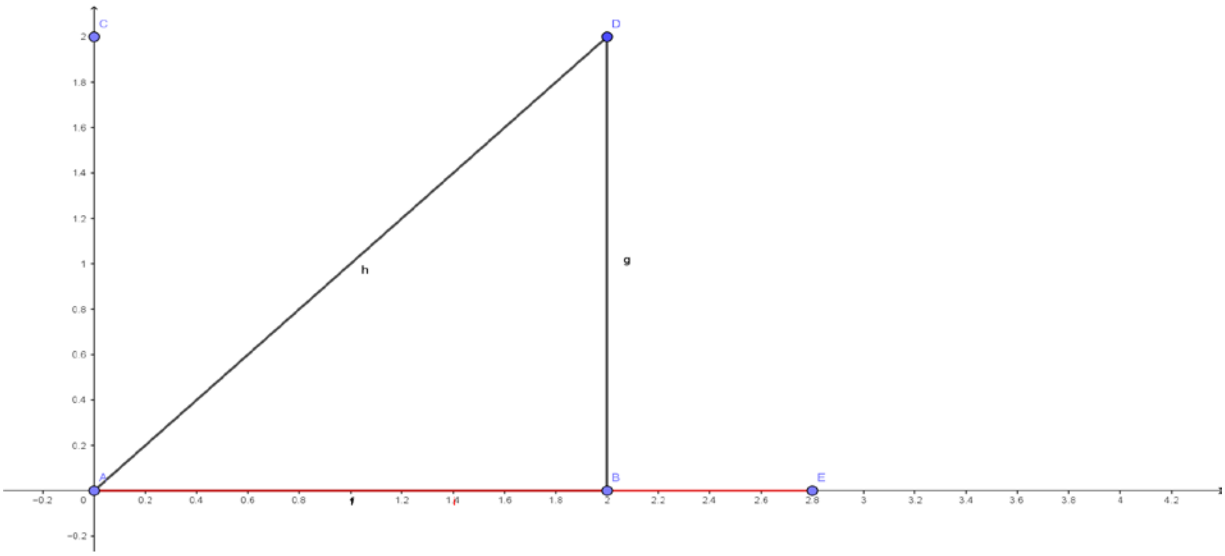
O número no meio da figura acima se aproxima do valor da raiz quadrada de dois que aparece na calculadora científica, e os números ao lado podem ser tratados como aproximações deste número. O *software* destaca, por meio do *zoom*, que entre dois números racionais, têm-se outros números racionais, e tal propriedade é chamada de densidade. Pode-se demonstrar esse fato da seguinte forma: dados dois números racionais *a* e *b* é sempre possível encontrar números racionais entre eles, por exemplo, a média aritmética entre esses números.

As discussões sobre números devem ser intensificadas neste momento, pois, no primeiro *zoom* da figura 9, se têm os números naturais e inteiros, a partir da terceira ampliação, se pode identificar os números racionais. Chegando à máxima ampliação que o computador consegue, o professor finaliza a atividade fazendo perguntas como: chegamos ao fim? Existem números com mais casas decimais do que o que se vê? Pode-se discutir com os alunos que o resultado obtido no cálculo da $\sqrt{2}$ será sempre uma aproximação e nunca um número exato. Trabalha-se com esses números na prática com aproximações a um número racional.

Momento 3: Propor aos alunos a atividade 2: marque os seguintes números na reta numérica: $10\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{8}$ e $1+\sqrt{13}$.

Para realizar essa atividade, sugere-se que sejam construídos triângulos retângulos com um dos catetos na reta numérica. Por exemplo, a raiz $\sqrt{8}$, conforme Figura 10.

Figura 10 – Raiz $\sqrt{8}$



Fonte: Autoria própria.

Na Figura 10, constrói-se um triângulo isósceles retângulo, em que um cateto está no eixo da abcissa do ponto de *0* a *2* e o outro cateto é perpendicular ao ponto *B* medindo 2 unidades, no qual a hipotenusa será $\sqrt{8}$. Mede-se a abertura do compasso com a medida da hipotenusa e transporta-se essa medida na reta com a ponta fixa na origem, obtendo o $\sqrt{8}$ na reta real.

Pode-se deduzir a localização de todas as raízes quadradas de números inteiros positivos da seguinte forma: para localizar $\sqrt{2}$, construa um triângulo retângulo cujo cateto está no eixo da abcissa do ponto de *0* a *1* e o outro cateto é perpendicular ao ponto A, localizado na reta no ponto de abscissa *1*, medindo 1 unidade, onde a hipotenusa será $\sqrt{2}$. Com a abertura do compasso com a medida da hipotenusa, transportá-la na reta com a ponta fixa na origem, obtendo o $\sqrt{2}$ na reta real. Depois, constrói-se outro triângulo retângulo cujo cateto está no eixo da abcissa do ponto de *0* a $\sqrt{2}$ e o outro cateto que é perpendicular ao ponto C, localizado na reta no ponto de abscissa $\sqrt{2}$, medindo *1* unidade, sendo o valor da hipotenusa igual a $\sqrt{3}$. Repete-se o processo para obter as outras raízes quadradas.

Momento 4: A partir das atividades 1 e 2, levar os alunos a perceberem que os números irracionais possuem representação geométrica na reta. Tem-se a necessidade de ampliar o conjunto numérico racional, acrescentando os números irracionais, dando origem ao conjunto dos números reais, pois, caso contrário, a reta seria incompleta, cheia de buracos, não tendo a propriedade da continuidade da reta vista no terceiro capítulo.

6.1.4 Aula 4

Conteúdo a trabalhar: O conjunto dos números reais.

Objetivo geral: Estabelecer relação geral para a construir do conceito de números reais.

Objetivos específicos: Deduzir quais são os tipos de números reais que existem e representar os números reais na sua forma aritmética e geométrica

Avaliação: Observação das discussões dos alunos nas interações e dos registros feitos por eles na resolução das atividades.

Ação 1: Modelação da relação geral do conceito de número real para a forma objetivada literal para o estudo das suas propriedades na forma pura.

O conjunto dos números reais é a união dos dois conjuntos numéricos: o dos números racionais com o dos números irracionais. “É o pensamento abstrato produzido diretamente pela continuidade da reta” (MOURA; LIMA; MOURA; MOISÉS, 2016, p. 355).

Momento 1: Discutir a representação decimal de vários números, como, por exemplo: $\frac{20}{2}, \frac{1}{3}, \sqrt{3}, \frac{2}{5}$ e $\sqrt{17}$. Nesse momento, os alunos vão verificar quais tipos de números possuem representação decimal exata, decimal infinita periódica e decimal infinita e não periódica. Os alunos podem usar o recurso da calculadora para ajudar nos cálculos cujos resultados possuem uma representação decimal infinita, ponderando que a calculadora tem uma precisão, ou seja, o seu resultado não é exato, e sim uma aproximação para as dízimas periódicas e as não periódicas.

Momento 2: Após a discussão realizada no momento 1, propor as seguintes questões:

1. Como é a representação decimal dos números escritos na sua forma $\frac{A}{B}$, onde A e B são inteiros? Tome mais números escritos nesta forma e verifique se o padrão continua o mesmo.

2. Qual é o tipo de representação decimal dos números irracionais?

Para responder às questões, pode-se utilizar a calculadora para os alunos verificarem como são as representações decimais dos números racionais e irracionais.

Momento 3: Roda de conversa. A partir das questões acima, deduzir que a representação dos números racionais é dada pelos números decimais finitos ou dízimas periódicas, ao contrário dos números irracionais, que possuem representação decimal infinita e não periódica. A representação decimal infinita e não periódica dos números irracionais decorre da sua relação geral, que é a não racionalidade. O professor pode discutir que as operações aritméticas de adição, subtração, multiplicação e divisão entre um número racional e um número irracional são irracionais, pois resulta em um número cuja representação decimal é infinita e não periódica.

Além disso, as operações aritméticas envolvendo os números racionais e os irracionais são dadas pelas seguintes representações: decimais finitas, dizimas periódicas ou os decimais infinitos e não-periódicos. Portanto a reunião dos números racionais com os números irracionais, formam um novo campo numérico que satisfaz a propriedade de fechamento[22] com relação as operações aritméticas, chamado o conjunto dos números reais.

Na próxima ação será modelado a relação geral na forma geométrica dos números reais, para os alunos formarem o conceito dos números reais como a reunião dos números racionais com os irracionais. Os alunos nas ações anteriores verificaram que a reta numérica possui os números racionais e irracionais e que para se obter a propriedade da continuidade da reta o conjunto dos números reais devem conter esses dois tipos de números.

Ação 2: Modelação da relação geral do conceito de número real para a forma objetivada geométrica para o estudo das suas propriedades na forma pura.

[22] Um conjunto *A* é fechada com relação a uma operação * se e somente se, para quaisquer dois elementos *x* e *y* de *A*, temos que *x * y* pertencem ao conjunto *A*.

Momento 4: Deduzir que o conjunto numérico que possui uma correspondência biunívoca com a reta numérica é formado pela união dos números racionais e irracionais, denominado o conjunto dos números reais. O conjunto dos números reais possui a mesmas propriedades que a reta numérica, pois ele é infinito, denso (os números racionais e irracionais são densos) e contínuo, pois a reta formada pelos números reais é completa, sem espaços vazios. Por isso, os números irracionais são importantes na construção dos números reais. Portanto tem-se a modelação do conceito dos números reais, dada na reunião dos números racionais com os irracionais.

6.1.5 Aula 5

Conteúdo a trabalhar: Comparação de números reais. Propriedades da adição e multiplicação dos números reais.

Objetivo geral: Estabelecer a relação de ordem para a comparação dos números reais. Discutir as propriedades operatórias da adição e multiplicação no conjunto dos números reais.

Objetivos específicos: Localizar os números reais na reta numérica. Perceber que quanto maior o número real, mais à direita da reta ele estará localizado. Deduzir que o conjunto dos números reais satisfaz as propriedades associativa, comutativa, elemento neutro e elemento inverso com relação às operações de adição e multiplicação.

Avaliação: Observação das discussões dos alunos nas interações e dos registros feitos por eles na resolução do problema de aprendizagem.

Ação: Assimilação e transformação do modelo da relação geral para o estudo das propriedades dos números reais, a fim de resolver tarefas particulares.

Mostrar a relação de ordem no conjunto dos números reais e que as propriedades operatórias da adição e multiplicação são satisfeitas neste conjunto.

Momento 1: Propor aos alunos que representam alguns números reais na reta numérica, como, por exemplo, $\frac{20}{2}, \frac{1}{3}, \sqrt{3}, \frac{2}{5}$ e $\sqrt{17}$. Cada número vai corresponder a um único ponto na reta.

Momento 2: Após os alunos localizarem estes números na reta, será discutida a ordenação destes números, isto é, qual número é maior, qual é menor. A partir da atividade aplicada no momento 1, discutir a comparação de números reais, a fim de que os alunos percebam, a partir do conceito, que quanto maior o número real, mais à direita ele estará localizado na reta numérica. Como a representação de um número real na reta numérica é única, dados dois números reais distintos a e b, teremos duas possibilidades que são $a < b$ ou $a > b$. Dois números que correspondem ao mesmo ponto da reta são iguais.

Momento 3: Roda de conversa. Discutir com os alunos as propriedades das operações nos subconjuntos dos números reais. Por exemplo, no conjunto dos números naturais, temos que o inverso da adição, a subtração entre dois números naturais nem sempre se tem um número natural como resultado, mostrando a necessidade de ampliar o conjunto numérico dos naturais com a inserção dos números negativos, formando os números inteiros. Com a possibilidade da divisão (inversa da multiplicação) entre dois inteiros nem sempre resultar em um inteiro, foi preciso ampliar novamente este conjunto, formando o conjunto dos números racionais, que contém os inteiros e as frações.

O conjunto dos números racionais, munido das operações da adição e multiplicação, satisfaz as propriedades de um corpo, vistas na seção 3.3 do terceiro capítulo. Como os números reais são formados pelos números racionais e irracionais, visto que as operações entre os números irracionais são racionais ou irracionais, temos que o conjunto dos números reais satisfaz as propriedades associativa, comutativa, elemento neutro e elemento inverso com relação as operações de adição e multiplicação. Além disso, o conjunto dos números reais é ordenado.

A necessidade de conceituar os números reais como a união entre os racionais e irracionais existe porque os conjuntos dos números racionais não satisfazem a completude da reta numérica, não satisfazendo a propriedade da continuidade. Nesse caso, para se obter o conjunto numérico com essa propriedade, devemos acrescentar os números irracionais no conjunto dos racionais, formando o conjunto dos números reais.

6.1.6 Aula 6

Conteúdo a trabalhar: Tarefas particulares que envolvem o conceito de números reais que podem ser resolvidas pela relação geral do conceito (Apêndice A).

Objetivo geral: Avaliar se os conceitos de número irracional e real foram formandos nos estudantes.

Objetivos específicos: Avaliar se os alunos conseguem distinguir os números reais em racionais e irracionais, ordenando-os e representando-os na reta numérica e em sua forma decimal.

Avaliação: Ocorrerá através das atividades individuais e em grupos.

Ação: Construção do sistema de tarefas particulares que podem ser resolvidas por um procedimento matemático geral.

Verificar se foram estabelecidos os nexos conceituais necessários à formação do conceito de número real e aplicar esse conceito na resolução de tarefas particulares.

Momento 1: Propor aos alunos que resolvam as atividades individualmente. Após os alunos resolverem as atividades de modo individual, formar grupos com três alunos cada, para discutir as estratégias utilizadas para solucionarem as atividades.

Momento 2: No final, os alunos vão solucionar o problema de aprendizagem dado no início do plano utilizando o conceito nuclear dos números reais.

É neste momento que o professor avalia os alunos, verificando a aprendizagem do conceito de número real, isto é, se foram desenvolvidas ações mentais referentes ao objeto de estudo e conduzir os alunos a pensarem sobre sua aprendizagem, analisando se o conceito foi formado ou não; nesse último caso, levantar os pontos que precisam ser reforçados.

O controle da realização das ações será realizado em toda aula, permitindo aos alunos verificarem se estão assimilando a relação geral do conceito de números reais, comparando o resultado das suas ações com os objetivos definidos em cada aula. A avaliação será realizada em cada aula na parte da realização do sistema de tarefas feitas pelos alunos.

6.2 ANÁLISE DA PROPOSTA DA ATIVIDADE

Ao compararmos a proposta de ensino desenvolvimental baseada na atividade de estudo de Davydov com livros didáticos analisados, nota-se a diferença entre esses métodos. Na nossa proposta, para ensinar o conceito de número irracional, a ação da aula 1 é direcionada de forma a compreender a gênese do conceito, as dificuldades com que os povos antigos lidaram para calcular a medida da diagonal de um quadrado, que é um número irracional. Iniciamos o estudo dos irracionais com o conceito de grandezas comensuráveis e incomensuráveis, para mostrar que a medição de um segmento incomensurável não é um resultado exato, ou seja, que a sua natureza está interligada com a infinitude, com a não racionalidade.

Em um dos livros didáticos analisados inicia-se o capítulo sobre números irracionais por meio de um problema do cálculo do lado de um quadrado, dada a sua área, cujo resultado é a raiz quadrada não exata de um número racional. Porém, após esse problema, o livro já define que a raiz quadrada não exata deste número é um número irracional, cuja expansão decimal é infinita e não periódica, contemplando os nexos externos do conceito, a partir das operações aritméticas das raízes quadradas não exatas. O resultado é dado de forma direta, sem o processo investigativo do conceito para se chegar a sua definição sistematizada no processo lógico-histórico.

Na aula 2, os alunos são solicitados a solucionar dois problemas históricos. Na resolução destes problemas, os alunos vão se deparar com as raízes quadradas e raízes cúbicas não exatas, em que tais raízes não possuem uma representação decimal finita ou dízima periódica, calculando-as por meio da inversa da operação da potenciação. Os estudantes vivenciam essa impossibilidade. Posteriormente, na discussão da solução das atividades, o professor demonstra que tais números não podem ser representados pela razão entre dois inteiros, trabalhando os nexos conceituais dos números irracionais que é a sua não racionalidade.

Os livros didáticos trabalham as grandezas comensuráveis e incomensuráveis e a irracionalidade de $\sqrt{2}$, mas o seu uso didático é feito no sentido inverso da nossa proposta, porque primeiro eles definem as relações aritméticas e, posteriormente, trabalham a origem do conceito, que é colocado na parte histórica ou na parte da leitura complementar, sem relação direta com o conteúdo em si.

Com relação à conceituação dos números reais, os livros didáticos já os definem de imediato, como sendo a reunião dos números racionais com os irracionais, para depois trabalhar a correspondência biunívoca entre o conjunto dos números reais e a reta numérica, na qual cada número real corresponde a um ponto da reta e vice-versa. O conceito dos números reais se confunde com a sua definição, nos livros didáticos analisados, ressaltando somente os nexos externos do conceito, em que os exercícios visam à classificação dos números reais em racionais ou irracionais. Nesse contexto, o conceito de números reais está atrelado somente a sua significação aritmética. A significação geométrica dos números reais, associada à reta numérica, é dada de forma direta, não relacionando a reta real com as propriedades de completude e a continuidade, que são os nexos conceituais dos números reais.

Na proposta de ensino, na aula 3, trabalhamos a representação dos números irracionais na reta numérica, mesmo que eles não tenham um resultado exato. A necessidade de ampliar o conjunto dos números racionais para o conjunto dos números reais é dada na relação geométrica, sistematizada na reta numérica. Mesmo os números irracionais possuindo uma representação decimal infinita e não periódica, eles possuem um ponto correspondente na reta numérica, como foi detalhado na marcação das raízes quadradas não exatas no momento 3 desta aula. Logo, se os irracionais não fossem considerados números, a reta numérica ficaria cheia de buracos, não tendo uma correspondência um a um entre os conjuntos dos números racionais e a reta real. Assim, são descritos os números reais, na sua significação aritmética e geométrica, concebidos como um todo contínuo.

Na aula 4, para fazer a correspondência biunívoca da reta com um conjunto numérico, é necessário conceituar os números reais como sendo o conjunto numérico obtido pela união dos números racionais e irracionais, pois só assim temos a propriedade da completude da reta numérica. Nesse caso, temos a relação geral do conceito do número real, dada pela continuidade da reta e, de acordo com Lima (2006, p. 52), “o processo de medição das grandezas ditas contínuas conduz à noção de número real”.

A significação algébrica também é contemplada na proposta de ensino, pois nas atividades para determinar a diagonal do quadrado ou a aresta de um cubo, é pedido para determinar uma medida desconhecida, que é denotada por uma letra, cujos modelos matemáticos são as equações do 2º e do 3º grau.

Na aula 5, a comparação de dois números reais é desenvolvida, utilizando a reta numérica, pois quanto mais à direita o número estiver posicionado na reta, maior será o seu valor. Com isso, os alunos compreendem que o conjunto dos números reais é um conjunto ordenado, ou seja, existe uma relação de ordem entre os seus elementos. As propriedades operatórias também são discutidas, mostrando que o conjunto dos números reais é um corpo ordenado completo, diferente dos números racionais, para os quais falta a propriedade da completude. A aula 6 é o momento de o professor verificar se os alunos assimilaram os nexos conceituais dos números irracionais e reais.

O plano de ensino, com ênfase nas atividades de estudo para conceituar os números reais, propicia uma mudança explícita como tal conceito é apresentado, pois, no ensino tradicional, o número real é apresentado nas práticas cotidianas, com ênfase nas operações aritméticas. Já a proposta baseada no ensino davydoviano implica uma mudança na metodologia e, consequentemente, na postura do professor, pois a atividade de estudo propicia mobilizar os nexos externos e internos do conceito de número, contemplando as significações aritméticas, geométricas e algébricas, de modo a desenvolver nos alunos o pensamento científico.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como objetivo principal desenvolver uma proposta de ensino do conceito de números reais, mostrando a importância dos irracionais na formação deste conceito, alicerçado na teoria do ensino desenvolvimental de Davydov. Para isso, foi necessário realizar um estudo referente a esta teoria, pois se trata de uma didática diferenciada no modo de ensinar conceitos científicos, pautada no método histórico dialético, que tem como principal finalidade o desenvolvimento do pensamento teórico do aluno. Vale ressaltar que este estudo é primordial para compreender os caminhos que o professor deve percorrer para procurar desenvolver uma atividade de estudo que possibilite que o aluno compreenda os nexos conceituais do conteúdo de números reais, segundo as perspectivas davydovianas.

Diante do que foi escrito anteriormente, foi realizado um estudo aprofundado da teoria do ensino Desenvolvimental, formulada pelo filosofo e psicólogo russo Vasily Vasilyevich Davydov (1930-1998), com a pretensão de fornecer uma base teórica e metodológica de ensino, que foi constituída a partir da teoria histórico-cultural de Vygotsky. Davydov possuía bastante conhecimento dessa teoria, já que foi colaborador das pesquisas de Luria e Leontiev e considerado o mais notável pesquisador da terceira geração entre os pesquisadores russos que estudaram a psicologia pedagógica.

> O ensino Desenvolvimental, tal como propôs Davydov, mantém a premissa básica da teoria histórico-cultural segundo a qual a educação e o ensino são formas universais e necessárias do desenvolvimento humano, em cujo processo estão interligados os fatores socioculturais e a atividade interna dos indivíduos (LIBÂNEO; FREITAS, 2013, p. 5).

O levantamento bibliográfico referente ao ensino do conceito de números reais vigente no nosso sistema educacional, através da análise de teses, dissertações, documentos oficiais do MEC e livros didáticos, nos mostra que o ensino deste conceito está ainda muito atrelado a lógica formal, que se fundamenta em apenas transmitir ao aluno o conteúdo historicamente produzido e sistematizado pelos pesquisadores em ciências matemáticas das civilizações antigas. Nesse sentido, a formulação do conceito é dada pela sua forma acabada e sistematizada, predominando no ensino a transmissão do saber como está nos livros didáticos. Mesmo a escola priorizando os conhecimentos científicos e teóricos, a assimilação destes pelos alunos não leva ao desenvolvimento do pensamento teórico, pois ele é ministrado em uma didática que contempla as propriedades captadas pelos dados sensoriais do objeto de estudo, fornecidos pela imagem ou linguagem, observando seus traços comuns para classificá-los pelos seus aspectos exteriores (SOUSA, 2014), assim como é a abordagem dos livros didáticos.

O tipo de ensino, descrito acima, prioriza a definição, a comparação (para diferenciar características), a classificação e a memorização de um conteúdo. Neste caso, o conceito acaba se confundindo com a definição do objeto. Nesta lógica de ensinar, mobilizam-se somente os nexos externos de um conceito que, de acordo com Sousa (2014, p. 65), “eles se limitam aos elementos perceptíveis do conceito, desenvolvendo no escolar somente o pensamento empírico

Neste trabalho foi pesquisado também como ocorreu a evolução do conceito de número real, dentro de um panorama lógico-histórico. Este passeio pela gênese histórica do conceito de número mostra o quanto a sua constituição foi complexa e quantos estudiosos contribuíram para a formação deste conceito, em cada período, imersos num ambiente de problemas matemáticos que era característico de cada época. Assim, nessa reconstrução do caminho percorrido para se chegar à ideia atual do conceito de número real, sistematizada na Análise Matemática, fica evidente que a proposta lógico-histórica pode ser um auxiliar efetivo para se entender a construção de um conceito e também as dificuldades que devem ser superadas no seu processo de ensino-aprendizagem.

Vale ressaltar que as necessidades que os números reais vão se constituindo ao longo da história não partem mais de necessidades prático-sociais, mas sim de uma necessidade teórica dentro da própria matemática, culminando com a aritmetização da Análise, cujo método utilizado foi o axiomático-dedutivo, como foi explanado no capítulo 4, descrevendo o conjunto dos números reais como sendo um corpo ordenado completo.

Considerando que “a atividade pedagógica**,** somente é pedagógica se ela mobiliza ações mentais dos sujeitos, visando à ampliação de suas capacidades cognitivas e à formação de sua personalidade global” (LIBÂNEO, 2014, p. 43), foi elaborada uma proposta de ensino referente à construção do conceito de números reais, pensada a fim de mobilizar as ações mentais dos alunos por meio das atividades de estudo. Estas atividades foram subsidiadas pelas ações propostas por Davydov (1988), a saber: transformação dos dados da tarefa e identificação da relação universal do objeto estudado; modelação da relação encontrada em forma objetivada, gráfica ou literal; transformação do modelo para estudar suas propriedades; construção do sistema de tarefas particulares que podem ser resolvidas por um procedimento geral e controle da realização das ações anteriores (FREITAS, 2011, p.80).

Para efetivar a proposta de ensino, foi realizada uma análise do conteúdo, identificando a relação geral básica e as relações particulares que compõem o conceito de números reais. Assim, a partir dessa análise, se buscou propor o movimento do pensamento dos alunos e esperar que eles se apropriem desse conceito como uma “ferramenta” de pensamento e análise em diversos contextos e situações particulares.

Na construção da proposta, foi levado em consideração o ano de formação escolar que seria possível trabalhar o conceito de números reais, que foi a turma do 9º ano do ensino fundamental. O problema de aprendizagem buscou contextualizar as práticas socioculturais em que os alunos estão inseridos e, ao mesmo tempo, procurou-se abordar o conceito de números reais como mecanismo de resolução. A atividade de aprendizagem também está diretamente ligada ao surgimento do conceito dos números reais, que era a dificuldade em medir grandezas que não podiam ser comparadas com uma unidade de medida. A escolha das tarefas de estudo foi pensada de modo a respeitar o contexto sociocultural do aluno, a ligação com o percurso lógico-histórico do objeto e a perspectiva de trabalhar os casos particulares quando os alunos se apropriam da relação geral do conceito de números reais.

Infelizmente não foi possível realizar o experimento didático formativo da proposta de ensino (por causa do fechamento das escolas no último ano devido a pandemia causada pela COVID-19) para verificar as transformações mentais nos alunos ao apreender o conceito de número real. Porém, espera-se aplicar esta proposta de ensino e que este material possa contribuir e motivar novas pesquisas e ser uma ferramenta metodológica para o ensino dos números reais a partir da teoria do ensino desenvolvimental de Davydov. Concluímos que quando se pesquisa um conceito, novas possibilidades sobre o objeto de estudo aparecem em outras situações a serem aprofundadas. Além do fato de que esta pesquisa contribuiu significativamente na minha prática docente, propiciando trabalhar outros conteúdos utilizando a teoria desenvolvimental de Davydov.

Uma das maiores dificuldades encontradas na utilização da teoria do ensino desenvolvimental de Davydov é o tempo necessário para poder planejá-la, além da necessidade de ter pleno conhecimento do contexto social dos alunos e domínio do conteúdo a ser ensinado. Outro obstáculo que o professor pode encontrar é o tempo imprescindível para poder trabalhar conceitos nesta perspectiva em sala de aula. Vale ressaltar que esta proposta foi construída respeitando os pressupostos teóricos e que é passível de aplicação em sala de aula, com um bom retorno no aprendizado, desde que o professor tenha as ferramentas didáticas disponíveis, a autonomia de trabalhar a grade curricular e o tempo necessário para planejamento e aplicação desta grade. Ou seja, o professor precisa ter condições que auxiliem o seu trabalho com este modelo de organização do ensino.

Ao realizar este trabalho, acredita-se ter propiciado avanços nas produções de conhecimentos no campo da didática, oferecendo subsídios teóricos e metodológicos que auxiliem os professores a atuarem nos processos de ensino e aprendizagem. Este trabalho teve como pretensão também auxiliar os professores que queiram conhecer e/ou tentar colocar em prática esta metodologia de ensino, mas que não tem uma ideia inicial ou, até mesmo, que possa contribuir na implementação do conhecimento acerca deste tema, trazendo novas visões e novos instrumentos que darão maior qualidade ao ensino de matemática.

Os desdobramentos da pesquisa é estender a atividade de estudo baseada na teoria do ensino desenvolvimental de Davydov para o Ensino Médio, abordando o estudo das representações decimais dos números racionais e irracionais de modo mais acessível e com mais rigor, levando o aluno a compreender a demonstração que todo número racional possui representação decimal finita ou periódica (PNLD, 2018). Essa demonstração equivale a dizer que toda representação decimal infinita e não-periódica corresponde um número irracional. A partir desses resultados que é possível conceituar corretamente os números irracionais no Ensino Médio.

Outra contribuição do trabalho é no que tange a abordagem dos números reais nas disciplinas específicas do curso de Licenciatura em Matemática, como Análise Matemática. Pode-se articular o conceito de números reais na Análise Matemática articulada com a didática, como proposta da prática como componente curricular. A prática como componente curricular terá como objetivo buscar a articulação entre a teoria (conteúdos de números reais na Análise Matemática), e prática (docência). Desse modo, nas atividades desenvolvidas ao longo do curso de

Análise, serão realizadas discussões em grupos e sequências didáticas, promovendo ao licenciando meios para fazer a transposição didática dos conceitos de números reais, para a sala de aula no ensino fundamental e médio.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Theodoro Becker. **Uma revisitação aos conjuntos numéricos no Ensino Médio.** 2015. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre. Rio Grande do Sul. 2015.

ALTOÉ, Anair; FUGIMOTO, Sonia Maria Andreto. Computador na educação e os desafios educacionais. *In:* CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO, 9. 2009, Maringá. **Anais** [...]. UEM, Maringá, 2009.

ÁVILA, Geraldo Severo de Souza. **Análise Matemática para Licenciatura**. 3º ed. São Paulo. Editora Blucher, 2006.

BERNARDES, M. E. M. Pedagogia e mediação pedagógica. *In:* LIBÂNEO, J. C.; ALVES, N. (Org.). **Temas de pedagogia**: diálogos entre didática e currículo. São Paulo: Cortez, 2012. p. 35-60.

BONGIOVANNI, V. As duas maiores contribuições de Eudoxo de Cnido; a teoria das proporções e o método de exaustão. **Revista Ibero-americana de Educacion Matemática,** n. 2, p. 91-110, 2005.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. Revista por uta C. Merzbach; tradução Elza F. Gomide. 2º ed. São Paulo. Edgard Blucher, 1996.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares nacionais/ Secretaria de Educação Fundamental – Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: Educação é a base. Brasília, 2017.

Brasil. Ministério da Educação. **PNLD 2020**: matemática – guia de livros didáticos/ Ministério da Educação – Secretaria de Educação Básica – Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Brasília, DF: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2019.

CAMPOS, Dinah M.de S., **Psicologia e desenvolvimento humano**. 5° ed. Petrópolis: Vozes, 2008.

CARAÇA, B. de J. **Conceitos Fundamentais da Matemática.** 1º ed. Lisboa. Tipografia Matemática, 1951.

CARAÇA, B. de J. **Conceitos Fundamentais da Matemática.** 5º ed. Lisboa. Gradiva, 2003.

CARAÇA, Bento de Jesus, **Lições da análise**, Vol. 1. Lisboa. 1951

CONTADOR, Paulo Roberto Martins. **Matemática, uma breve história volume 1**. 2º edição. São Paulo: Editora e Livraria Física, 2008.

D'AMBROSIO, Ubiratan., Educação Matemática: Uma Visão do Estado da Arte. **Proposições,** Campinas, v.4, n.1, p. 07-17, mar. 1993. Disponível em: www.proposicoes.fe.unicamp.br/proposições. Acesso em: 17/03/2016.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática:** da teoria à prática. 17º ed. Campinas, Papirus, 1996.

D'AMBRÓSIO, Ubiratam. **Educação para uma sociedade em transição**. 2.ed. Campinas: Papirus, 2001.

DANTE, L. R. **Teláris Matemática.** 8º e 9º ano. Editora Ática S.A. 3º edição. 2018.

DAMAZIO, A.; ROSA, J. E.; EUZÉBIO, J. S. O ensino do conceito de número em diferentes perspectivas. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 14, p. 209-231, 2012.

DAVÍDOV V. V.; MÁRKOVA, A. K. **La concepción de la actividad de estudio en los escolares**. In: SHUARE, Martha (Recopilación, comentarios e tradução). La psicología evolutiva en la URSS: antología. Moscou: Editorial Progreso, 1987. p. 316-349. (Biblioteca de Psicologia Soviética).

DAVYDOV, V. V. **Problemas do ensino desenvolvimental** - a experiência da pesquisa teórica e experimental na psicologia. Textos publicados na Revista Soviet Education, August/VOL XXX, N° 8, sob o título "Problems of Developmental Teaching. The Experience of Theoretical and Experimental Psycholgogical Research – Excerpts", de V.V. Davydov. **Educação Soviética**. Tradução de José Carlos Libâneo e Raquel A. M. da Madeira Freitas, 1988.

DAVYDOV, V. V**.** O que é atividade de estudo, tradução do russo por Ermelinda Prestes, **Revista Escola inicial**, n. 7. 1999a.

DAVYDOV, V. V. Uma nova abordagem para a interpretação da estrutura e do conteúdo da atividade. Tradução de José Carlos Libâneo do texto: "A new approach to the interpretation of activity structure an content". *In:* CHAIKLIN, Seth; HEDEGAARD, Mariane; JENSEN, Uffe Jull (Orgs.). **Activity theory and social practice**: cultural-historical approaches. Aarhus (Dinamarca): Aarthus University Press, 1999b. p. 39-50.

DAVYDOV, V. V.; ZINCHENKO, V. P. **A contribuição de Vygotsky para o desenvolvimento da psicologia**. In: DANIELS, Harry (Org.). Vygotsky em foco: pressupostos e desdobramentos. 6º ed. Trad. Mônica Saddy Martins e Elizabeth Jafet Cestari. Campinas: Papirus, 2003. p. 151-166.

EVES, H. **Introdução a História da Matemática.** Tradução Hygino H. Domingues. Editora UNICAMP. São Paulo. 2011.

FACCI, M. G. D.; **A periodização do desenvolvimento psicológico individual na perspectiva de Leontiev, Elkonin e Vygotsky.** Caderno CEDES. Scielo. Abril de 2004.

FIORENTINI, Dário; MIORIM, Maria A. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino da matemática. **Boletim SBEM**, São Paulo, v.4, n.7, p.4-9, 1996.

FONSECA, R. F. **A complementariedade entre os aspectos intensional e extensional na conceituação de número real proposta por John Horton Conway.** 2010. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontificia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP). 2010.

FREITAS, Raquel. A. M. M. Pesquisa em didática: o experimento didático formativo. *In:* ENCONTRO DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO da ANPED Centro-Oeste, 10. 2010, Uberlândia. **Anais** [...]. Uberlândia, v. I. 2010. p. 01-11.

FREITAS, Raquel. A. M. da M. Aprendizagem e formação de conceitos na teoria de Vasily Davydov. *In:* LIBÂNEO. J. C.; SUANNO, M. V. R.; LIMONTA, S. V. (Orgs.). **Concepções e práticas de ensino num muno em mudanças:** diferentes olhares se entrecruzam. Goiânia: CEPED; PUC Goiás, 2011. p. 71-84.

FREITAS, Raquel. A. M. da M. A cultura escolar como questão didática. *In:* LIBÂNEO, J. C.; ALVES, N. (Orgs.). **Temas de pedagogia:** diálogos entre didática e currículo*.* São Paulo: Cortez, 2012. p. 127-151 (Cap. 5).

FREITAS, Raquel. A. M. M. Formação de conceitos na aprendizagem escolar e atividade de estudo como forma básica para a organização do ensino. **Educativa**, Goiânia, v. 19, n. 2, p. 388-418, maio/ago. 2016. Disponível em: http://seer.pucgoias.edu.br/index.php/educativa/issue/view/261/showToc. Acesso em: 17 fev. 2017.

FREITAS, Raquel. A. M. M. **Teoria histórico-cultural e pesquisa: o experimento didático como procedimento investigativo**. 2016 Disponível em: https://www.subnormalvisao.com.br/index_arquivospage701.html. Acesso em: 31 jan. 2017.

FREITAS, Raquel. A. M. da M; LIMONTA, S. V. A educação científica da criança: contribuições da teoria do ensino desenvolvimental. **Linhas Críticas**, Brasília, v. 18, n. 35, p. 69-86, janeiro-abril, 2012*.*

GARBI. G. G. **A Rainha das Ciências.** Livraria da Física. 5º ed. São Paulo. 2010.

GIEST Hartmut; LOMPSCHER, Joachim. Formation of Learning Activity and Theoretical Thinking in Science Teaching. *In:* KOZULIN, Alex *et al*.. **Vygotsky's Educational Theory in Cultural Context.** Cambridge: Cambridge University Press, 2003, p. 267-288, Cap. 13. Disponível em: https://www.cambridge.org/core. Acesso em: 08 Jun. 2018.

GIOVANNI JUNIOR, J. R.; CASTRUCCI, B. **A Conquista da Matemática.** 8º e 9º ano. Editora FTD, 4º edição. 2018.

GOULART, Iris Barbosa., **PSICOLOGIA DA EDUCAÇÃO**: Fundamentos Teóricos Aplicações a Prática Pedagógica. 6° ed. Petrópoles: Vozes, 1999.

GOMES, E.; INGAR, K. V. A história dos incomensuráveis: poderá desencadear uma atividade significativa? *In:* CONGRESSO BRASILEIRO DE MATEMÁTICA SINPRO SP. Educação. 2011. São Paulo. **Anais** [...]. Modalidade comunicação científica, São Paulo, 2011. Disponível em: http://www1.sinprosp.org.br/congresso_matematica/revendo/dados/textos.htm. Acesso em: 20 jul. 2021.

GUIMARÃES, M. A. **A organização do processo de ensino do conceito número nos anos iniciais do Ensino Fundamental:** uma análise histórico-cultural. 2018. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Educação. Pontifícia Universidade Católica de Goiás. Goiânia. Goiás. 2018.

IFRAH, G. **Os Números:** a história de uma grande invenção. 10º ed. São Paulo: Globo, 2005.

IGLIORI, S. B. C.; Fonseca, R. F. Reflexões sobre a teoria de Conway no ensino e na aprendizagem de números reais. *In:* FROTA, M. C. R.; BIANCHINI, B. L.; CARVALHO, A. M. T. (Org.). **Marcas da Educação Matemática no Ensino superior**. Editora Papirus. São Paulo, p. 165-186, 2013.

IVIC Ivan. **Lev Semionovich Vygotsky**. Tradução José Eustáquio Romão. Recife: Fundação Joaquim Nabuco, Massangana, 2010.

KARLSON, P. **A Magia dos Números.** 1º ed. Porto Alegre. Editora Globo. 1961.

LEMOS, N. A. **Convite a Física Matemática.** Editora Livraria da Física. São Paulo. 2013.

LEONTIEV, A. **Atividade, Consciência e Personalidade**. 1978. Disponível em http://www.marxists.org/portugues/leontiev/1978/activ_person/index.htm. Acesso em: 21 set. 2015.

LEONTIEV, A. El marxismo y la ciencia psicológica*. In:* LEONTIEV, A. **Actividad, conciencia y personalidad**. Habana, Cuba: Pueblo y Educación, 1983. p. 12-29. (Capítulo. I).

LEONTIEV, A. **O Desenvolvimento do Psiquismo**. Tradutor Rubens Eduardo Frias. 2º edição. São Paulo. Centauro, 2004.

LIBÂNEO, J. C. A didática e a aprendizagem do pensar e do aprender: a teoria histórico-cultural da atividade e a contribuição de Vasili Davydov. **Revista Brasileira de Educação**, Rio de Janeiro, n. 27, p. 5-24, set. /out. /nov./dez. 2004. Disponível em: http:// www.scielo.br/pdf/rbedu/n27/n27a01.pdf. Acesso em: 19 jul. 2017.

LIBÂNEO, J. C. Ensinar e aprender, aprender e ensinar: o lugar da teoria e da prática em didática. *In:* LIBÂNEO, J. C.; ALVES, N. (Org.). **Temas de pedagogia**: diálogos entre didática e currículo*.* São Paulo: Cortez, 2012. p. 35-60.

LIBANÊO, José C. Formação de professores e Didática para Desenvolvimento Humano. **Educação e realidade,** Porto Alegre, v.40, n.2, p.629-650, abr./jun.2015. Disponível em: www.scielo.br. Acesso em 15 mar. 2016.

LIBANEO, J. C. **A teoria do ensino para o desenvolvimento humano e o planejamento de ensino**. Educativa, Goiânia, v. 19, n. 2, p. 353-387, maio/ago. 2016.

LIBÂNEO, J. C. **A didática e a aprendizagem do pensar e do aprender** - Davídov e a teoria histórico-cultural da atividade. p. 01-17. 2015. Disponível em: site pessoal do Autor - PUC Goiás. Acesso em: 25 set. 2016.

LIBÂNEO, José Carlos; FREITAS, Raquel A. M. da M. **Vygotsky, Leontiev, Davydov:** três aportes teóricos para a teoria histórico-cultural e suas contribuições para a didática. Matemática, Universidade Católica de Goiás, Goiânia. 2005. Disponível em: https://docplayer.com.br/11604458-Vygotsky-leontiev-davydov-tres-aportes-teoricos-para-a-teoria-historico-cultural-e-suas-contribuicoes-para-a-didatica.html. Acesso em: 20 jan. 2020.

LIBÂNEO, J. C.; FREITAS, Raquel. A. M. da M. Vygotsky, Leontiev, Davidov - contribuições da teoria histórico-cultural para a didática. *In:* SILVA, C. C.; SUANNO, M. V. R. (Org.) **Didática e interfaces**. Goiânia: Descubra, 2007. p. 39-60.

LIBÂNEO, J. C.; FREITAS, R. A. M. da M. Vasily Vasilyevich Davydov: a escola e a formação do pensamento teórico-científico. *In:* LONGAREZI, A. M.; PUENTES; R. V. (Orgs.). **Ensino desenvolvimental:** vida, pensamento e obra dos principais representantes russos. Uberlândia: EDUFU, 2013. p. 315-350. (Coleção biblioteca psicopedagógica e didática. Série ensino desenvolvimental; v. 01).

LIBÂNEO, J. C.; FREITAS, Raquel. A. M. da M. **A elaboração do plano de ensino (ou unidades didáticas) conforme a Teoria do Ensino Desenvolvimental.** 2017. Disponível em: http://professor.pucgoias.edu.br/SiteDocente/admin/arquivosUpload/5146/material/Plano%20de%20Ensino%20Texto%20Prograd%202016.doc. Acesso em: 20 jan. 2020.

LIMA, Elon Lages. **Meu professor de matemática e outras histórias.** Rio de Janeiro: SBM, 1991.

LIMA, Elon Lages. **Curso de análise. Vol. 1**. Projeto Euclides. IMPA, 2004.

LIMA, Elon Lages *et al.* **A matemática do ensino médio.** V.1, 9° ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LOMPSCHER, Joachim. Learning Activity and. its Formation: Ascending from the Abstract to the concrete. *In:* HEDEGAARD, Mariane; LOMPSCHER, Joachim (ed.).

Learning activity and development. Aarhus (Dinamarca): Aarhus Universitiy Press, 1999, p. 139-166. Tradução de José Carlos Libâneo e Raquel A. Marra da Madeira Freitas.

LOPES, Paula Cristina Reis. **Construção dos Números Reais**. 2006. Dissertação (Mestrado)- Departamento de Matemática e Engenharia da Universidade de Madeira. Madeira, 2006.

MELLO, S. A. A Escola de Vygotsky. *In:* CARRARA, K. (Org**.). Introdução a psicologia da educação:** seis abordagens. São Paulo: Avercamp, 2004.

MOREIRA, Marcos A., **Teorias de aprendizagem**. São Paulo: E.P.U., 1999.
MOURA, A. L. L. DE; LIMA, L. C.; MOURA, M. A. DE; MOISÉS, R. P. **Educar com a matemática. Fundamentos.** Editora Cortez. São Paulo. 2016.

MOYSÉS, Lucia. **Aplicações de Vygotsky à educação matemática**. Campinas, SP: Papirus, 2006.

NAVARRO, E. R.; FILLOS, L. M. A perspectiva teórica de Davydov na educação matemática: Um olhar analítico para teses e dissertações produzidas no Brasil. **RPEM**, Campo Mourão, v.6, n. 11, p. 142-160, 2017.

NETTO, J. P. **Introdução ao estudo do método de Marx**. São Paulo: Expressão Popular, 2011.

NIVEN, I, M. **Números racionais e irracionais.** S.B.M. Rio de Janeiro. 2012.

OLIVEIRA, M. K. Vygotsky - **Aprendizado e desenvolvimento:** um processo sócio histórico. 1. ed. São Paulo: Scipione, 1993.

OLIVEIRA, M. K. Vygotsky - **Aprendizado e desenvolvimento:** um processo sócio histórico. 5. ed. São Paulo: Scipione, 2010.

PINTO, M. M. F.; GIRALDO, V.; HEITMANN, F.P. Objetos de aprendizagem, números reais e o modelo matemático da reta real. In: FROTA, M. C. R.; BIANCHINI, B. L.; CARVALHO, A. M. T. (Org.). **Marcas da Educação Matemática no Ensino Superior**. Editora Papirus. São Paulo, p. 187-210, 2013.

POLONI, A. Educação Matemática e a Psicologia sócio-histórica. *In:* MEDONÇA, S. G. L.; MILLER, S. **Vigotski e a Escola Atual:** Fundamentos teóricos e implicações pedagógicas. 2.ed. revisada. Araraquara, SP: Junqueira & Marin; Marília, SP: Cultura Acadêmica, 2010.

POMMER, W. M. **A construção do significado dos números irracionais no ensino básico.** 2012. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade São Paulo (USP), São Paulo: 2012.

POSSAMAI, C. F. **A função social da escola, o papel do professor e a relevância do conhecimento cientifico na pedagogia histórico-crítica.** 2014. Dissertação (Mestrado) - Universidade do Sul de Santa Catarina (Unisul). Santa Catarina. 2014.

REGO, T.C. Vygotsky: **Uma perspectiva histórico-cultural na educação**. 11. ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 1995.

REZENDE, W.M., **O Ensino de Cálculo:** Dificuldades de Natureza Epistemológica. 2003. Tese (Doutorado em Educação)– Universidade de São Paulo, São Paulo: USP, 2003.

ROQUE, Tatiana, **História da Matemática.** Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Zahar. 2012.

ROSA, J. E. **A atividade de aprendizado e os problemas referentes à formação do pensamento teórico dos escolares.** 2012. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Paraná (UFPR), Paraná: 2012.

ROSA, J. E.; DAMAZIO, A. O ensino do conceito de número: uma leitura com base em Davydov. **Revista Unión**, San Cristobal de La Laguna, v. 30, p. 81-100, 2012.

ROSA, J. E.; DAMAZIO, A. Movimento conceitual proposto por Davydov e colaboradores para o ensino. **Educativa**, Goiânia, v. 19, n. 2, p. 498-525, maio/ago. 2016.

ROSA, J. E.; DAMAZIO, A.; ALVES, E. S. B. Adição e subtração em Davydov. **BOLETIM GEPEM**. n. 63, p. 61-75, janeiro / julho. 2013.

ROSA, J. E.; DAMAZIO, A; EUZÉBIO, J. S. O ensino de conceito de número: a proposta de Davydov e as propostas empíricas. In: Congresso Nacional em Educação, 10. 2011, Curitiba. **Anais** [...]. Curitiba, PUCPR, 07 a 10 de nov. 2011.

ROSA, J. E.; DAMAZIO, A; EUZEBIO, J. S. O ensino do conceito de número em diferentes perspectivas. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.14, n.1, p. 209-231, 2012.

ROSA, J. E.; DAMAZIO, A.; CRESTANI, S. Os conceitos de divisão e multiplicação nas proposições de ensino elaboradas por Davydov e seus colaboradores. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.16, n.1, p. 167-187, 2014.

ROSA, J. E.; DAMAZIO, A; SILVEIRA, G. M. O sistema de numeração nas tarefas propostas por Davydov e seus colaboradores para o ensino de Matemática. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 28, n. 50, p. 1135-1154, dez. 2014.

ROSA, J. E.; HOBOLD, E. S. F.; BERNARDO, C. S.; CORREA, D. A.; INACIO, G. M. Relações entre as Proposições para o Ensino do Conceito de Fração com base no Ensino Tradicional e na Teoria Histórico-Cultural. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 8, p. 227-245, 2013.

ROSA, J. E.; SOARES, M.T.C.; DAMAZIO, A. Conceito de número no sistema de ensino de Davydov, *In:* CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13. 2011, Recife. **Anais** [...]. Recife, 2011.

RUBTSOV, V. Proposições de Davydov para o ensino de Matemática no primeiro ano escolar: inter-relações dos sistemas de significações numéricas. *In:* GARNIER, C..; BEDNARZ, N.; ULANOVSKAYA, I. (Org.). **Após Vygotsky e Piaget**. Perspectivas social e construtivista. Escolas russa e ocidental. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. p. 129-137.

SILVA, B. A., VENDEMIATTI, A. D. A questão da quadratura do círculo e o número π: Aspectos históricos, epistemológicos e didáticos. *In*: FROTA, M. C. R.; BIANCHINI, B. L.; CARVALHO, A. M. T. (Org.). **Marcas da Educação Matemática no Ensino Superior**. Editora Papirus. São Paulo, p. 231-252, 2013.

SOUSA, Maria do Carmo de. O Ensino de Matemática da Educação Básica na Perspectiva Lógico-Histórica. **Perspectivas da Educação Matemática**, Campo Grande, v. 7, n. 13, 1 jun. 2014.

SOUSA, M. C.; JESUS, W. P. Reflexões sobre os nexos conceituais e de seu ensino na Educação Básica. **BOLETIM GEPEM**, n. 58, p. 115-127, jan./jun. 2011..

SOUSA, E. R. **As contribuições do ensino desenvolvimental de Davydov para o ensino de geometria euclidiana no curso de licenciatura em Matemática**. 2017. Dissertação (Mestrado)- Programa de Pós-graduação em Educação Para Ciência e Matemática da Universidade Federal de Goiás. Campus Jataí. 2017.

STEWART, Ian. **Em busca do infinito**: uma história da matemática dos primeiros números à teoria do caos. Tradução George Schlesinger. 1° ed. Rio de janeiro: Zahar; 2014.

TRINDADE, D. de A.; SILVA M. C. L., Grandezas: relações lidas no ensino de saberes aritméticos, 1890-1950, **Zetetike**, v. 26, n. 3, set. 2018.

TRINDADE, Stephanie da Silva. **Análise das propriedades dos conjuntos numéricos e operações identificadas em livros didáticos do ensino fundamental**. 2017. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal do Pampa. Caçapava do Sul, 2017.

TUNES, Elizabeth; PRESTES Zoia. Vigotski e Leontiev: ressonância de um passado. **Cadernos de pesquisa**, São Paulo, v.39, n.136, p.285-314, jan/abr. 2009.

VASCONCELLOS, Celso dos S. Metodologia Dialética em Sala de Aula. **Revista de Educação AEC**. Brasília, n. 83, abril de 1992.

VASQUEZ, A. S. **Filosofia da práxis**. Tradutor Luiz Fernando Cardoso. 2º edição. Rio de Janeiro. Paz e Terra, p. 148-163. 1977a.

VASQUEZ, A. S. **O conceito da essência humana em Marx.** Filosofia da práxis. Tradutor Luiz Fernando Cardoso. 2º edição. Rio de Janeiro. Paz e Terra, 1977b.

VAZ, Duelci Aparecido de Freitas *et al.* **Uma proposta de atividade desenvolvimental para o ensino de cônicas,** Goiânia, p.1-16, 2016.

VYGOTSKY, Lev. S., **A FORMAÇÃO SOCIAL DA MENTE.** Tradutores José Cipolla Neto, Luis Silveira Menna Barreto, Solange Castro Afeche. 4.ed. São Paulo: Martins Fontes, 1991.

VYGOTSKI, L.S. **A formação social da mente: O desenvolvimento dos processos psicológicos superiores.** 6. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1998.

VYGOTSKY, L. S. **A construção do pensamento e da linguagem.** Trad. Paulo Bezerra. – São Paulo: Martins Fontes, 2000.

VYGOTSKI, Lev Semenovich. **Psicologia Pedagógica.** Tradução de Paulo Bezerra. 2.ed. São Paulo: Martins Fontes, 2004.

VYGOTSKY, L. S. **A construção do pensamento e da linguagem.** Trad. Paulo Bezerra. – São Paulo: Martins Fontes, 2000.

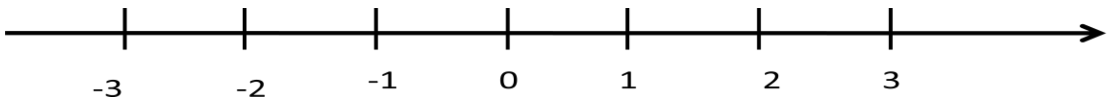
APÊNDICE A – Atividade avaliativa

ATIVIDADE AVALIATIVA SOBRE O CONCEITO DE NÚMEROS REAIS

1. Represente os números pela sua representação decimal (dízima), classificando-os em racionais ou irracionais. Com relação a dízima periódica, indique seu período.

$$\frac{7}{5}, \quad \frac{2}{11}, \quad \sqrt{3}, \quad \frac{19}{6}, \quad \sqrt{7}, \quad \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \frac{312}{110}, \quad \sqrt{0{,}64}.$$

2. Represente na reta real os seguintes números em cm: $\sqrt{3}$ e $\sqrt{7}$.



3. Coloque os seguintes números reais na ordem crescente:

$$1{,}6, \quad -\sqrt{2}, \quad \frac{8}{5}, \quad 1{,}4, \quad \sqrt{0{,}25}\,, \quad 1{,}333\ldots$$

4. Indique o número $\sqrt{17}$ com precisão de duas casas decimais, por aproximação (sem o uso da calculadora).