

Pontifícia Universidade Católica de Goiás
Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa
Coordenação do Programa Stricto Sensu em Psicologia
Programa de Doutorado em Psicologia

Equivalência de estímulos e aquisição do conceito de proporção: efeito de instruções programadas, manipulação de material concreto e treino de composição

Antonio Carlos Godinho dos Santos
Lorismário Ernesto Simonassi (Orientador)

Goiânia, 2010.

Equivalência de estímulos e aquisição do conceito de proporção: efeito de instruções programadas, manipulação de material concreto e treino de composição.

Antonio Carlos Godinho dos Santos

Tese apresentada ao programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Psicologia da Pontifícia Universidade Católica de Goiás como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Psicologia.

Área de concentração: Processos Básicos.

Orientador: Prof. Dr. Lorismario E. Simonassi

Equivalência de estímulos e aquisição do conceito de proporção: efeito de instruções programadas, manipulação de material concreto e treino de composição.

Tese apresentada à Pontifícia Universidade Católica de Goiás como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Doutor em Psicologia.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Lorismario Ernesto Simonassi
Pontifícia Universidade Católica de Goiás – Presidente

Prof. Dr^a Elisa Tavares Sanábio Heck
Universidade Federal de Goiás – Membro convidado externo

Prof. Dr. José Gonçalves Medeiros
Universidade Federal de Santa Catarina – Membro convidado externo

Prof. Dr. Cristiano Coelho
Pontifícia Universidade Católica de Goiás - Membro convidado interno

Prof. Dr^a Sônia Maria de Melo Neves
Pontifícia Universidade Católica de Goiás – Membro convidado interno

Prof. Dr^a Ilma Aparecida G. de Souza Brito
Pontifícia Universidade Católica de Goiás – Membro convidado suplente

Prof. Dr^a Michella Rodrigues Ribeiro
Pontifícia Universidade Católica de Goiás – Membro convidado suplente

Tese aprovada em 17/12/2010.

Agradecimentos¹

Aos alunos que colaboraram como participantes nos três experimentos realizados neste trabalho.

A toda minha família, pais, esposa e filho que sempre me apoiaram e ajudaram em minhas escolhas.

Ao professor Lorismario Ernesto Simonassi, meu orientador, o qual considero um grande amigo e agradeço por ter me apresentado a análise do comportamento.

À Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa da Pontifícia Universidade Católica de Goiás pela concessão de licença parcial de minha carga horária no último ano do curso.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Goiás – Fapeg- pela concessão de bolsa de estudo no último ano do curso.

À toda Coordenação do Programa Stricto Sensu em Psicologia, na pessoa do seu coordenador, professor Lauro Eugênio Guimarães Nalini, pelo apoio administrativo disponibilizado ao longo do curso.

À professora Maria das Graças Gomes Monteiro pela forma como sempre se dispôs a me ajudar enquanto diretora do departamento de Psicologia.

Ao professor Weber Martins por acreditar no projeto e aceitá-lo em seu grupo de pesquisa da Fapeg.

Às alunas Rafaela Ferreira de Queiroz, Camila Fernandes Rodrigues e Maira Ribeiro Magri pela dedicação, compromisso, disposição e presteza que sempre demonstraram ao me ajudar nas diversas etapas do trabalho. Meu muitíssimo obrigado.

¹ Trabalho realizado com apoio parcial da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Goiás – FAPEG (Processo 200910267000702) e da Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa – PUC/GO.

Aos alunos da PUC/GO Alexandre Castelo Branco, Fabiola Belém Pacheco, Gustavo Henrique Heime de Mela, Maiara Maia de Santana, Marcos Maciel de Aguiar e Saimon Luiz Bisello (Unip) pela ajuda na coleta de dados.

Aos professores e servidores administrativos da Escola Estadual Wilmar Guimarães, aos quais, nas pessoas das professoras Espírito Santo Fortes e Idaliza de Souza Brasil, agradeço imensamente por nos receberem de braços abertos na realização da pesquisa.

Aos amigos Flávio da Silva Borges e Adelino Candido Pimenta pelas sugestões literárias que me passaram e que muito ajudaram na construção teórica do trabalho.

Muito obrigado!!!

Resumo

A literatura aponta que crianças de final do sexto ano do ensino fundamental demonstram dificuldade para resolver problemas fracionários que exigem o conceito de proporção. A análise do comportamento dispõe de técnicas e procedimentos eficientes para formar classes de estímulos que dão origem a conceitos. Contudo, poucos trabalhos sobre formação de conceitos embasados nessa perspectiva foram realizados no campo da matemática. O objetivo do presente estudo foi investigar o efeito do treino de relações condicionais entre: estímulos fracionários pictóricos (conjunto A) e numéricos (conjunto B) e, entre estímulos fracionários numéricos (conjunto B) e numéricos (conjunto C), ambos realizados por meio do procedimento de pareamento com o modelo a partir do paradigma de equivalência de estímulos sobre a formação de classes de equivalência com estímulos fracionários, tendo sido avaliada também a generalização da resposta a novas situações e a expansão das classes formadas após o treino entre os membros do conjunto A e um novo conjunto de estímulos numéricos (D). Foram conduzidos três experimentos com um total de 90 crianças matriculadas na rede estadual de ensino das cidades de Goiânia e Trindade, de ambos os sexos cujas idades variaram entre 11 e 14 anos. Os participantes, divididos em grupos experimentais e de controle, passaram inicialmente por uma avaliação do tipo lápis e papel sobre problemas fracionários (AI) expressos de forma absoluta e relativa. No primeiro experimento, um grupo foi exposto apenas ao treino com instruções programadas sobre a resolução de problemas fracionários (GIP), outro apenas ao treino de relações condicionais (GEQ) e um terceiro a ambos os treinos (GIPEQ). No experimento 2, um grupo manuseou material concreto apresentado em forma de fração (GMC), outro fez treino de relações condicionais entre estímulos fracionários (GEQ) e um terceiro passou pelo treino das duas condições (GMCEQ). No experimento 3, um grupo fez treino de relações condicionais com estímulos fracionários (GEQ), outro passou pelo treino de composição (cópia) de frações a partir de modelos apresentados visualmente mais o treino de relações condicionais (GEQTC) e a um terceiro grupo foi solicitado o relato das estratégias que eles adotaram para resolver os problemas durante os treinos e testes das relações condicionais (GEQR). Ao final dos procedimentos todos eles passaram por uma avaliação final (AF) idêntica à avaliação inicial (AI) aplicada no início do estudo. Os participantes controles fizeram apenas as avaliações inicial e final. Os resultados mostraram que os participantes demonstraram dificuldade para resolver problemas expressos na forma relativa. Em geral, todos os participantes dos grupos experimentais dos três experimentos formaram três classes de estímulos fracionários (ABC), mas não houve expansão dessas classes após o treino entre um de seus membros e um novo estímulo. Os maiores índices de generalização ocorreram no primeiro teste programado e decaíram na segunda avaliação. Apenas os participantes dos grupos experimentais apresentaram ganhos sistemáticos da AI para a AF, sendo que as maiores porcentagens de acertos para problemas com frações expressas de forma relativa ocorreram para os participantes do grupo GIPEQ.

Palavras-chave: Equivalência de estímulos, equivalência de frações, conceito de proporção, resolução de problemas e formação de conceitos.

Abstract

Literature points that children in sixth grade of Middle School show difficulty to solve fractional problems that demand the concept of proportion. Behavior analysis affords efficient techniques and procedures to form stimulus classes that originate concepts. Nevertheless, few production about concepts formation based on this perspective were achieved on Math field. The present study's goal is to investigate the effect of conditional relationship training between: fractional pictorial stimulus (group A) and numerical (group B) and, numerical (group B) and numerical (group C), both performed by means of the stimulus equivalence paradigm, concerning formation of equivalence classes with fractional stimulus, generalization of responses to new situations and the expansion of the formed classes after the training among members of group A and a new group of numerical stimulus (D). Three experiments were conducted with an amount of 90 children enrolled in State educational system in Goiania and Trindade cities, falling into both genres whose ages range from 11 to 14 years old. The participants, divided in experimental and control groups, were initially submitted to a pencil and paper evaluation about fractional problems (IE) expressed in absolute and relative way. In the first experiment, one group was exposed only to the training with programmed instructions about fractional problem resolutions (PIG), another one only to conditional relationship training (EQG) and a third one to both trainings (EQPIG). In experiment 2, one group handled concrete material presented in form of fraction (CMG), another one went through the training of the two conditions (CMGEQ). In experiment 3, one group trained conditional relationships with fractional stimulus (EQG), another one went through the training of compounding (copying) fractions from models visually presented and conditional relationship tests (EQCTG) and to a third group was asked the exposition of the strategies adopted to solve problems during the trainings and conditional relationship tests (GEQR). At the end of the procedures all of them went through a final evaluation (FE) identical to the initial evaluation (IE). The control participants took only the initial and final evaluations. The results show that participants presented difficulty to solve problems expressed in relative way. Generally, all the participants of the experimental groups of the three experiments formed three fractional stimulus classes (ABC), however there was no expansion of these classes after the training between one of its members and a new stimulus. The highest generalization indexes occurred in the first programmed test and decreased in the second evaluation. Only participants of experimental groups presented systematic gains from IE to FE, considering that the highest performances to problems with fractions occurred to participants in EQPIG group.

Keywords: Stimulus Equivalence, Fractions Equivalence, Proportion Concept, Problem Resolutions and Concepts Formation.

Sumário

Agradecimentos	iii
Resumo	v
Abstract.....	vi
Lista de quadros	ix
Lista de tabelas	x
Apresentação	xiv
Introdução.....	01
1 – Questões conceituais, metodológicas e epistemológicas sobre o ensino de frações	03
2 - Formação de conceito e resolução de problemas na visão da análise do comportamento.....	13
2.1 – Formação de conceito: controle por estímulos e classes de equivalência.....	14
2.2 - Resolução de problemas: comportamentos precorrentes e controle por regras	19
3 – Contribuições da psicologia para o estudo do comportamento matemático.....	29
3.1 – Contribuições da psicologia ao estudo do conceito de proporção.	32
3.2 – Contribuições da tecnologia de equivalência de estímulos para a resolução de problemas matemáticos.....	36
3.3 – Aprendizagem do conceito de proporção com uso de material concreto.....	45
4 – Objetivos do trabalho.....	50
Experimento1	52
Método.....	56
Participantes	56
Local e sessões	56
Material.....	56
Estímulos.....	57
Procedimento.....	57
Resultados	68

Discussão	88
Experimento 2	95
Método	100
Participantes	100
Local e sessões	100
Material	100
Estímulos	101
Procedimento	101
Resultados	114
Discussão	130
Experimento 3	138
Método	146
Participantes	146
Local e sessões	146
Material.....	146
Estímulos	146
Procedimento	147
Resultados	156
Discussão	192
Discussão Geral	216
Referências	247
Anexo A	254
Anexo B	257
Anexo C	259
Anexo D	272
Anexo E	282
Anexo F.....	284

Lista de Quadros

Quadro 1 – Estímulos apresentados nas condições de treinos e testes das relações condicionais	57
Quadro 2 – Organização das condições programadas, relações treinadas e testadas nas condições de Instrução Programada (GIP), Instrução Programada mais Equivalência (GIPEQ) e equivalência (GEQ).	60
Quadro 3 – Porcentagem de acerto nas operações de multiplicação e de divisão para os participantes dos grupos Instrução Programada (GIP), Instrução Programada mais equivalência (GIPEQ) e equivalência (GEQ).	68
Quadro 4 - Organização das condições programadas, relações testadas e treinadas nos grupos Material Concreto (GMC), Material Concreto e Equivalência (GMCEQ) e Equivalência (GEQ).	102
Quadro 5 – Porcentagem de acertos nas operações matemáticas de multiplicação e divisão para os participantes dos grupos material concreto (GMC), Material Concreto mais Equivalência ((GMCEQ) e Equivalência (GEQ)	114
Quadro 6 - Quadro 4 - Organização das condições programadas, relações testadas e treinadas nos grupos Equivalência mais Treino de Composição (GEQTC), Equivalência e Relato (GEQR) e Equivalência (GEQ)	154
Quadro 7 - Porcentagem de acertos nas operações matemáticas de multiplicação e divisão para os participantes dos grupos Equivalência mais Treino de Composição (GEQTC), Equivalência e Relato (GEQR) e Equivalência (GEQ)	156
Quadro 8 - Freqüência de acertos por participantes nos testes de nomeação das frações dos conjuntos B, C e D realizados antes e depois das condições experimentais programadas para os grupos Equivalência mais Treino de composição (GEQTC), Equivalência e Relato (GEQR) e Equivalência (GEQ)	157

Lista de Tabelas

Tabela 1 – Porcentagem e média de acertos nas frações expressas de forma absoluta e relativa nas avaliações inicial e final para os participantes dos grupos Equivalência mais Instrução Programada (GIPEQ), Instrução Programada (GIP) e Equivalência (GEQ)...	69
Tabela 2 – Porcentagem de acertos nas condições de pré- e pós-testes e número de blocos de treino (N), realizados nas condições de treino AB e BC e número de blocos (N) necessários para demonstrar o critério de 100% de acerto na condição AB/BC para os participantes dos grupos Equivalência (GEQ), Instrução Programada (GIP) e Instrução Programada mais Equivalência (GIPEQ).....	73
Tabela 3 – Porcentagem de acerto por bloco de tentativa (B) nas condições BA/CB (simetria) e AC/CA (transitividade/equivalência) para os participantes dos grupos Instrução Programada (GIP), Instrução Programada mais Equivalência (GIPEQ) e Equivalência (GEQ).....	74
Tabela 4 – Porcentagem de acerto no pré-teste (Prt) e pós-teste (Pst), número de blocos de treino realizados (N) no treino AD e porcentagem de acertos por bloco de tentativas nos testes de expansão das classes (B) para os participantes dos grupos Instrução Programada (GIP), Instrução Programada mais Equivalência (GIPEQ) e Equivalência (GEQ)	76
Tabela 5 – Porcentagem de acerto por bloco de tentativas na condição de treino de expansão das classes para os participantes dos grupos Instrução Programada (GIP), Instrução Programada mais Equivalência (GIPEQ) e Equivalência (GEQ).....	78
Tabela 6 – Porcentagem de acerto e médias nas condições de teste de generalização 1 e 2 para os participantes dos grupos Instrução Programada (GIP), Instrução Programada mais Equivalência (GIPEQ) e Equivalência (GEQ).....	79
Tabela 7 – Porcentagem de acertos (PA) e de erros em cada relação testada na condição de teste de expansão das classes D-(ABC) para os participantes dos grupos Instrução Programada (GIP), Instrução Programada mais Equivalência (GIPEQ) e Equivalência (GEQ).....	81
Tabela 8 - Porcentagem de acertos (PA) e de erros em cada relação testada na condição de teste de teste de generalização 1 para os participantes dos grupos Instrução Programada (GIP), Instrução Programada mais Equivalência (GIPEQ) e Equivalência (GEQ).....	84
Tabela 9 - Porcentagem de acertos (PA) e de erros em cada relação testada na condição de teste de teste de generalização 2 para os participantes dos grupos Instrução Programada (GIP), Instrução Programada mais Equivalência (GIPEQ) e Equivalência (GEQ).....	86

Tabela 10 – Porcentagem e média de acertos nas frações expressas de forma absoluta e relativa nas avaliações inicial e final para os participantes dos grupos Material Concreto (GMC), material Concreto e Equivalência (GMCEQ) e Equivalência (GEQ).....	116
Tabela 11 – Porcentagem de acertos nas condições de pré- e pós-testes e número de blocos de treino (N), realizados nas condições de treino AB e BC e número de blocos (N) necessários para demonstrar o critério de 100% de acerto na condição AB/BC para os participantes dos grupos material Concreto e Equivalência (GMCEQ) e Equivalência (GEQ).....	119
Tabela 12 – Porcentagem de acerto por bloco de tentativa (B) nas condições BA/CB (simetria) e AC/CA (transitividade/equivalência) BC para os participantes dos grupos Material Concreto e Equivalência (GMCEQ) e Equivalência (GEQ).....	120
Tabela 13 – Porcentagem de acerto no pré-teste (Prt) e pós-teste (Pst), número de blocos de treino realizados (N) no treino AD e porcentagem de acertos por bloco de tentativas nos testes de expansão das classes (B) para os participantes dos grupos material Concreto e Equivalência (GMCEQ) e Equivalência (GEQ).....	121
Tabela 14 – Porcentagem de acerto por bloco de tentativas na condição de treino de expansão das classes para os participantes dos grupos Material Concreto e Equivalência (GMCEQ) e Equivalência (GEQ).....	122
Tabela 15 – Porcentagem de acerto e médias nas condições de teste de generalização 1 e 2 para os participantes dos grupos Material Concreto e Equivalência (GMCEQ) e Equivalência (GEQ).....	123
Tabela 16 – Porcentagem de acertos (PA) e de erros em cada relação testada na condição de teste de expansão das classes D-(ABC) para os participantes dos grupos Material Concreto e Equivalência (GMCEQ) e Equivalência (GEQ).....	125
Tabela 17 - Porcentagem de acertos (PA) e de erros em cada relação testada na condição de teste de teste de generalização 1 para os participantes dos grupos Material Concreto e Equivalência (GMCEQ) e Equivalência (GEQ).....	127
Tabela 18 - Porcentagem de acertos (PA) e de erros em cada relação testada na condição de teste de teste de generalização 2 para os participantes dos grupos Material Concreto e Equivalência (GMCEQ) e Equivalência (GEQ).....	129
Tabela 19 – Porcentagem e média de acertos nas frações expressas de forma absoluta e relativa nas avaliações inicial e final para os participantes dos grupos Equivalência mais Treino de Composição (GEQTC), Equivalência e Relato (GEQR) e Equivalência (GEQ).....	160
Tabela 20 – Porcentagem de acertos nas condições de pré- e pós-testes e número de blocos de treino (N), realizados nas condições de treino AB e BC e número de blocos (N) necessários para demonstrar o critério de 100% de acerto na condição AB/BC para os participantes dos grupos Equivalência mais Treino de Composição (GEQTC), Equivalência e Relato (GEQR) e Equivalência (GEQ).....	164

Tabela 21 – Porcentagem de acerto por bloco de tentativa (B) nas condições BA/CB (simetria) e AC/CA (transitividade/equivalência) para os participantes dos grupos Equivalência mais Treino de Composição (GEQTC), Equivalência e Relato (GEQR) e Equivalência (GEQ).....	167
Tabela 22 – Porcentagem de acerto no pré-teste (Prt) e pós-teste (Pst), número de blocos de treino realizados (N) no treino AD e porcentagem de acertos por bloco de tentativas nos testes de expansão das classes (B) para os participantes dos grupos Equivalência mais Treino de Composição (GEQTC), Equivalência e Relato (GEQR) e Equivalência (GEQ).....	169
Tabela 23 – Porcentagem de acerto por bloco de tentativas na condição de treino de expansão das classes para os participantes dos grupos Equivalência mais Treino de Composição (GEQTC), Equivalência e Relato (GEQR) e Equivalência (GEQ).....	171
Tabela 24 – Porcentagem de acertos e médias nas condições de teste de generalização 1 e 2 para os participantes dos grupos Equivalência mais Treino de Composição (GEQTC), Equivalência e Relato (GEQR) e Equivalência (GEQ).....	172
Tabela 25 – Porcentagem de acertos (PA) e de erros em cada relação testada na condição de teste de expansão das classes D-(ABC) para os participantes dos grupos Equivalência mais Treino de Composição (GEQTC), Equivalência e Relato (GEQR) e Equivalência (GEQ).....	174
Tabela 26 - Porcentagem de acertos (PA) e de erros em cada relação testada na condição de teste de teste de generalização 1 para os participantes dos grupos Equivalência mais Treino de Composição (GEQTC), Equivalência e Relato (GEQR) e Equivalência (GEQ).....	176
Tabela 27 - Porcentagem de acertos (PA) e de erros em cada relação testada na condição de teste de teste de generalização 2 para os participantes dos grupos Equivalência mais Treino de Composição (GEQTC), Equivalência e Relato (GEQR) e Equivalência (GEQ).....	178
Tabela 28 – Porcentagem de acertos nas questões que apresentaram relações número-número (N/N), número-figura (N/F), figura-número (F/N) e figura-figura (F/F) durante as avaliações iniciais e finais para cada participante dos grupos Equivalência mais Treino de Composição (GEQTC), Equivalência e Relato (GEQR) e Equivalência (GEQ).....	181
Tabela 29 – Frequência de acertos (A), relatos totais (RLT) e relatos parciais (RLP) das contingências descritas pela regra de três ensinada na escola regular para solução de problemas sobre equivalência entre frações colhidos em tentativas de sonda nos pré- e pós-testes das condições de treino AB, BC e AD e testes de simetria (BA/CB), transitividade/equivalência (AC/CA), testes de generalização 1 e 2 e teste de expansão das classes para os participantes do grupo Equivalência e Relato (GEQR).....	184
Tabela 30 – Porcentagem em que as estratégias foram utilizadas pelos participantes do grupo Equivalência e Relatos (GEQR) para a solução dos problemas fracionários durante os pré- e pós-testes das condições AB. BC e AD, simetria (BA/CB),	

transitividade/equivalência (AC/CA), expansão das classes e testes de generalização 1 e 2, nas categorias Multiplicar ou Dividir (M/D), Somar ou Subtrair (S/S), Contagem (Cont), Exclusão (Excl) e Outros (Out).191

Apresentação

A importância da representação fracionária remonta a períodos anteriores à era cristã. Segundo a história do antigo Egito, os proprietários de terras localizadas às margens do rio Nilo tinham que remarcar constantemente seus terrenos em decorrência das freqüentes inundações que ocorriam em suas propriedades. As medidas eram refeitas a partir de unidades inteiras que nem sempre davam certo ou “cabiam” completamente em cada lado do rio. Assim, uma nova medida tornou-se necessária e, começou a desenvolver-se então, o conceito de número fracionário. Muitas atividades humanas desenvolvidas ao longo da história, como por exemplo, as construções, se beneficiaram do desenvolvimento dos números fracionários, os quais poderiam expressar unidades menores que o inteiro. Atualmente, muitas medidas do dia-a-dia fazem referência a frações, como na quantidade de combustível existente no tanque de um carro.

O ensino de conceitos fracionários é de suma importância para a aprendizagem de outros conceitos matemáticos na atualidade. Embora seja ponto de discussão entre professores e pesquisadores do ensino da matemática, a inserção de estudos sobre frações na segunda fase do ensino fundamental é de extrema relevância para a aquisição de conteúdos mais complexos previstos para o ensino médio e até mesmo o ensino superior.

O ensino de frações tem grande relevância epistemológica tanto para a matemática quanto para outras áreas de conhecimento. Apesar disso, a literatura registra inúmeros trabalhos que mostram que alunos do ensino fundamental apresentam grandes dificuldades para resolver problemas fracionários. Uma das maiores dificuldades refere-se à resolução de problemas que exigem o conceito de proporção ou a compreensão de

que frações diferentes podem representar um mesmo valor, ou seja, que frações podem expressar magnitudes relativas entre elas. Portanto, há necessidade de que professores e pesquisadores dediquem mais atenção ao ensino de conceitos fracionários.

Em decorrência de sua importância para a aquisição de outros conceitos matemáticos, para a resolução de muitos problemas do dia-a-dia das pessoas e da dificuldade que grande parte dos alunos apresenta para aprender conceitos fracionários, professores e pesquisadores da área da matemática vêm discutindo essa questão já há algum tempo. Muitos questionamentos e propostas foram apresentados, mas muito pouco se mudou nesse cenário. Há ainda muito que se fazer nesse campo da matemática.

Uma possível explicação para encontrar caminhos alternativos para o ensino de conceitos fracionários pode ser a concepção geneticista da aprendizagem bastante presente atualmente nas áreas pedagógicas. De forma geral, o conhecimento, nessa visão, é compreendido em função de estruturas e esquemas de pensamento previamente determinados e que podem se modificar com a interação do indivíduo ao longo de seu desenvolvimento. No entanto, compreender a aprendizagem nessa perspectiva pode dificultar a identificação das reais variáveis responsáveis pela aquisição de novas respostas pelo indivíduo, uma vez que a relação entre comportamento e ambiente não é o foco principal de estudo.

Para analistas comportamentais, ao contrário das tradicionais concepções da psicologia e da pedagogia, as variáveis funcionalmente responsáveis pelo comportamento estão no meio ambiente, seja ele público ou privado, e é na interação que ocorre entre eles que se devem procurar as explicações para a aprendizagem, ou como prefere os analistas do comportamento, as relações funcionais imprescindíveis para a aquisição e modificação do comportamento.

O presente trabalho, pautado em princípios da análise do comportamento, consistiu numa tentativa de um estudo interacionista para a dificuldade que alunos da segunda fase do ensino fundamental apresentam para resolver problemas fracionários que exigem o conceito de proporção, e teve por objetivo investigar possíveis variáveis que facilitassem sua aprendizagem.

O ensino de conceitos matemáticos desenvolveu-se a partir de exigências impostas pela evolução cultural e econômica da sociedade. O ser humano, desde os primórdios de sua existência, demonstrou curiosidade e necessidade de compreender os eventos que ocorriam na natureza. Diferentes níveis de explicação são possíveis para os fenômenos, mas ao longo da história humana, evidenciou-se, cada vez mais, a importância de explicações naturais baseadas em modelos matemáticos que possibilitassem prever e resolver problemas do cotidiano (Bahiano, S/D).

Inicialmente, a noção de números naturais era suficiente para que o homem resolvesse os problemas do seu dia-a-dia. Por exemplo, o conceito de números naturais possibilitava-lhe controlar a quantidade de cabeças de ovelhas que possuía ou até mesmo saber se todos os familiares estavam presentes ao final da tarde. Contudo, o desenvolvimento de novas atividades humanas exigiu a criação de formas diferentes de representação numérica. Por exemplo, o estabelecimento de relações comerciais exigiu uma notação matemática que assinalasse a idéia de débito ou crédito. Nesse contexto surgiu a noção de números inteiros como forma de suprir as necessidades daquele momento. Por sua vez, a necessidade de descobrir novas formas de construir exigiu a comparação de elementos utilizados nas edificações e a possibilidade de expressar suas partes constituintes (divisão) como uma determinada dimensão territorial. Essas novas relações não eram possíveis de ser feitas com os números inteiros, o que exigiu o desenvolvimento de uma nova forma de representação matemática denominada como números racionais. (Bahiano, S/D).

Um número é considerado racional se for possível multiplicá-lo por algum número natural, diferente de zero, e obter como resultado um número inteiro, ou seja, um número racional expressa a razão ou divisão entre dois números inteiros. Por exemplo, a notação $\frac{1}{3}$ representa um número racional que multiplicado por três ($\frac{3}{1}$)

dará como resultado o número um. No campo dos números racionais encontram-se determinadas formas de representações numéricas quantitativas denominadas como frações (Bahiano, S/D; Silva, 2009). Uma fração é um número que representa uma parte de um todo (de um inteiro) (Silva, 2009) e é apresentada aos alunos na escola na sua forma matemática como $\mathbf{a/b}$, sendo que \mathbf{b} deve ser diferente de zero. Nesse caso, o símbolo \mathbf{a} é chamado de numerador e \mathbf{b} de denominador (Silva, 2009). Uma fração é, portanto, uma representação numérica de quantidades de uma mesma natureza (diferente de razão que diz respeito a relações entre quantidades de naturezas diferentes) e cujo surgimento possibilitou representar valores menores que os números inteiros.

De um determinado inteiro é possível extrair diferentes representações fracionárias. Quando o numerador de uma fração é menor que o seu denominador (por exemplo, $1/3$) diz-se que é uma fração própria. Caso contrário, quando o numerador é maior que o denominador (por exemplo, $5/3$), diz-se que a fração é imprópria (Bahiano, S/D). As frações podem ser expressas de forma absoluta (também chamada de literal) ou relativa. No primeiro caso, observa-se correspondência entre o número de partes em que o inteiro foi dividido e o denominador e o número de partes que foram tomadas (marcadas) do inteiro e o numerador. No segundo caso não há essa relação direta. Por exemplo, a fração $1/3$ é uma expressão absoluta ou literal de um retângulo dividido em três partes iguais, das quais uma foi tomada (marcada). Por outro lado, a fração $2/6$ é uma expressão relativa dessa mesma figura (Carraher & Schliemann, 1992). Portanto, algumas notações fracionárias, apesar de serem diferentes, representam uma mesma quantidade. Nesse caso, elas são denominadas como frações equivalentes. Frações equivalentes são aquelas que, embora simbolizadas por números diferentes, representam a mesma parte ou quantidade de um inteiro. Nesses casos, a multiplicação (ou divisão) do numerador e do denominador de uma fração por um número natural dará origem a

um conjunto denominado como classe de equivalência da fração (por exemplo, $1/3$, $2/6$, $3/9$, $4/12$, $5/15...$).

Frações equivalentes mantêm uma relação de proporcionalidade entre elas. Diz-se que duas frações são proporcionais quando o resultado da multiplicação entre numerador da fração 1 e o denominador da fração 2 é igual ao resultado da multiplicação entre o numerado da fração 2 e o denominador da fração 1 (Carraher, Carraher & Schliemann, 1986). Exemplificando, as frações $1/3$ e $2/6$ são consideradas proporcionais e equivalentes porque 1×6 é igual a 2×3 .

1- Questões conceituais, metodológicas e epistemológicas sobre o ensino de frações.

O ensino do conceito de proporção e equivalência entre frações configura-se como um grande desafio para os educadores. A noção de que frações diferentes referem-se a um mesmo valor, ou seja, a compreensão de frações como magnitudes relativas representa dificuldades adicionais para alunos e professores no ensino da matemática (Carraher & Schliemann, 1992; Santos, 1999). Essa dificuldade em resolver problemas que requerem o conceito de número racional em sua representação fracionária e em questões semelhantes às observadas nos livros didáticos foi confirmada pelo Sistema Nacional de Avaliação do Ensino Básico do ano de 2001, no qual se constatou apenas 35% de acerto nesse tipo de questão em uma amostra nacional de alunos matriculados na rede publica de ensino (Magina & Campos, 2008).

A aprendizagem do raciocínio proporcional é uma habilidade essencial para a matemática e seu ensino deve ocupar grande parte do currículo escolar. Tem início no nível fundamental e se estende ao ensino médio envolvendo principalmente a aquisição de relações matemáticas multiplicativas (Bem-chaim, Ilany & Keret, 2008). No Brasil, a apresentação do conteúdo sobre frações tem início no terceiro ano e vai até o sexto ano

do ensino fundamental (Magina e Campos, 2008). Contudo, poucos alunos, incluindo os de níveis escolares mais elevados, usam o raciocínio proporcional adequadamente ou finalizam atividades que o exigem corretamente. A evidência de que muitos segmentos da sociedade não adquirem fluência no pensamento proporcional aponta a necessidade de trabalhar diferencialmente o desempenho dos professores em cursos de formação docente, para que assim, possam planejar ações mais efetivas relativas ao desenvolvimento do raciocínio proporcional.

A necessidade de uma estratégia de ensino para o conceito de raciocínio proporcional que aproxime os problemas escolares à realidade dos alunos, ou seja, que os procedimentos didáticos apresentem aos alunos problemas do cotidiano, como a comparação entre quilômetros percorridos por litro de combustível e número de pessoas por metro quadrado foi proposta por Bem-chaim et al. (2008). Os autores propuseram quatro componentes para o ensino do conceito proporcional. O primeiro componente dessa proposta, o qual é o centro do modelo, diz respeito à inclusão de atividades que envolvam cálculos sobre razão, taxa, escala e proporção indireta. O segundo componente refere-se à estruturação de atividades que incluam problemas aritméticos com conteúdo e contexto familiares aos alunos. Como terceiro componente, dever-se-ia articular trabalhos em grupo, discussões coletivas dos resultados e trabalhos domiciliares. O quarto componente da proposta diz respeito ao cuidado que o professor deve ter para avaliar a aprendizagem. Sugerem ainda a exigência de que os alunos apresentem explicações orais sobre as operações realizadas para resolver problemas envolvendo proporcionalidade como uma estratégia avaliativa do conhecimento do aluno.

A representação fracionária, apesar do uso social generalizado da notação decimal, é o conceito mais relevante para compreender os conceitos de proporção, razão

e probabilidade (Bertoni, 2008). Apesar disso, são evidentes as limitações dos atuais processos utilizados para seu ensino. Por exemplo, o método de dividir e pintar figuras, onde o número total de partes forma o denominador e o número pintado o numerador, acaba encorajando a aprendizagem da contagem dupla sem ensinar o real significado desse novo tipo de número, ou seja, não promove a aprendizagem de uma nova relação de quantificação. Por sua vez, a estratégia de ensinar fração como uma relação parte-todo é um modo abstrato e não significativo de ensino, uma vez que introduz sempre a parte de uma unidade (figuras geométricas) como modelo único para todos os objetos do mundo, o que por sua vez não encontra respaldo no contexto social real. Portanto, é necessário investigar formas mais eficientes de ensinar os conceitos de fração, número fracionário e da representação fracionária desse número.

Uma proposta de ensino para o conceito de fração baseada nas idéias de Vergnaud (1996, 2001) foi defendida por Bertoni (2008). Segundo esse referencial, um conceito é constituído de três partes. Primeiro, por um conjunto de situações em que o sentido é constituído (S) e que dá significado ao objeto em questão. Segundo, por um conjunto de invariantes operatórias resultantes dos tratamentos das situações (I) e que se refere às propriedades e procedimentos necessários para definir esse objeto. Terceiro, por um conjunto de representações lingüísticas que representam simbolicamente o conceito (L) e possibilitam relacionar o significado do objeto com suas propriedades. A partir dessas idéias básicas, Bertoni (2008) sugeriu um modelo de ensino constituído por três estratégias. A primeira, que ele denominou como manipulação concreto/abstrato, diz respeito ao emprego do mesmo material usado para o ensino do conceito de números naturais, como canudos partidos ou fichas dobradas. O ensino deveria começar com as frações $1/2$, $1/4$ e $1/6$ e não com $1/2$, $1/3$ e $1/4$, uma vez que dessa forma seria possível ter maior apoio na linguagem materna, por exemplo, ao aprender que um

inteiro menos um quarto é igual a três quartos. A segunda refere-se à proposição de atividades denominadas como abstrações reflexivas, nas quais são realizadas tarefas sobre figuras que se desdobram em divisões e pinturas, onde possam ser observadas partes pintadas descontínuas e a divisão de uma figura em certo número de partes pintadas distintas entre si. A terceira envolve o emprego de objetos contextualizados e reais, como o uso de sanduíches, laranjas e bolos da própria merenda dos alunos, uma vez que a utilização de material arbitrário e fora da realidade do aluno favorece a aprendizagem da representação simbólica antes do aluno saber o que está realmente sendo representado.

De forma semelhante, Lopes (2008) propõe que o ensino do conceito de fração ocorra com problemas retirados do cotidiano dos alunos e que nas propostas curriculares apareça nos momentos necessários, como no ensino de razão ou probabilidade. Exemplifica que o conceito é importante em vários contextos do mundo real, como quando se considera que $\frac{2}{3}$ dos votos dos deputados federais são necessários para dar início a um processo de *impeachment* ou quando há necessidade de calcular indenizações, décimo - terceiro salário ou férias proporcionais. Contudo, defende que o conceito de fração não deveria ser ensinado aos alunos da forma como atualmente acontece na escola elementar, ou seja, como um capítulo ou tema de um programa de ensino. Critica a estratégia de apresentar fração como uma relação parte-todo que representa partes ou números menores que a unidade, onde o inteiro é dividido em partes iguais. Segundo o autor, essa idéia entra em conflito com a definição de fração imprópria e o uso de regras para realizar operações envolvendo quantidades fracionárias. Argumenta que a aprendizagem de fração não pode ocorrer com definições prontas e pseudo-problemas que utilizam estratégias com figuras de pizza e barras de chocolate.

A própria notação usada para representar frações, ainda segundo Lopes (2008), também pode dificultar sua compreensão, uma vez que ela pode dificultar o aluno fazer a associação entre os dois números inteiros que estão separados por um tracinho. Propõe como alternativas de ensino: a) a apresentação de problemas que explorem o referencial de metade, bem como a idéia de metade da metade e a metade da metade da metade; b) a investigação do sentido de palavras que compartilhem a idéia de partes como meio e terço (em relação a pizzas, por exemplo), quinto (como em “quinto dos infernos”) e noventa (referente a reza); c) a explicitação do sentido de palavras com a mesma raiz da palavra fração (fratura, fracionar) e d) a exploração de problemas focados na visualização.

A dificuldade observada para a compreensão de conceitos fracionários pode estar relacionada ainda ao fato de que muitos estudos atuais sobre frações apóiam-se em pressupostos teóricos algébricos relacionados com os conceitos de equivalência e classes de equivalência (entre frações), e acabam por não operar com as frações em si, mas com as classes a que elas pertencem. Nesses casos, corre-se o risco de trabalhar com a idéia restrita de que frações equivalentes são frações iguais, o que em muitos casos pode implicar na resolução de problemas propostos, mas não na aquisição do significado do conceito (Guerra & Silva, 2008). De acordo com esses autores o ensino de fração deveria ocorrer a partir de operações mais básicas, como os processos de contagem, os quais as crianças comumente já apresentam no momento em que iniciam a aprendizagem sobre frações. Ressaltam que a operação de contagem teve importância histórica para o homem, como no controle de rebanhos e no estoque de armas de alimentos e que, inicialmente, foi estabelecida no pressuposto da existência de correspondência um a um, o que exigia a presença do conceito de número. Atualmente, o princípio da contagem tornou-se mais abstrato, mas continua exigindo a compreensão

do conceito de números inteiros e utilizando o princípio lógico da recorrência, no qual cada número é associado ao seu anterior acrescido de mais uma unidade. No caso da representação fracionária, o princípio da contagem pode ser utilizado ensinando-se ao aluno que uma fração é a razão entre dois inteiros (m/n) e significa ou pode ser interpretado como sendo a representação de “ m ” unidades de $1/n$.

O modelo lógico-dedutivo atualmente adotado parece ser insuficiente para o ensino de frações segundo Silva e Almouloud (2008). Os autores sugerem que há necessidade de compreender as relações entre matemática científica e a matemática escolar e suas funções na prática docente. O conceito de número modificou-se com a própria história da matemática escolar brasileira. Inicialmente, fundamentou-se na medição de uma grandeza, expressa por um número inteiro ou fracionário, denominada como “preferencialmente número comensurável”. Posteriormente, números continuaram a ser conceituados como resultado da medição de uma grandeza, mas sem utilizar a denominação de “números comensuráveis”. Por último, desapareceu a noção de grandeza e, dessa forma, a idéia de fração passou a ser apresentada por meio de uma abordagem formal que passou a enfatizar o par ordenado de números inteiros **a** e **b**, sendo **b** diferente de zero.

Comumente, a escola utiliza e prioriza o ensino dessa relação a partir da concepção parte-todo, ou seja, a partir da relação entre todos os elementos de um conjunto e a parte desses elementos que se quer avaliar. Nesse caso, o aluno é ensinado a contar as partes em que o inteiro foi dividido (denominador) e as partes que serão consideradas (numerador), principalmente em figuras como segmentos, polígonos e círculos, o que torna natural o uso dessas figuras para a compreensão das regras necessárias para realizar as várias operações envolvendo números fracionários. No entanto, essa estratégia pode até viabilizar a produção de respostas corretas, mas não

garante a compreensão de frações como uma medida (comparação com a unidade). Como fazer, por exemplo, para que o aluno compreenda a fração $5/3$? Como obter cinco partes se o inteiro foi dividido em três? Aqui, métodos didáticos que trabalhem com concepções de medida e quociente podem facilitar a compreensão das crianças. No primeiro caso pode-se recorrer ao uso de retas numeradas e no segundo situações de distribuição. No entanto, em ambos os casos não são dispensáveis o uso da concepção parte-todo (Silva & Almouloud, 2008).

Embora existam sugestões contrárias na literatura matemática (eg. Vianna, 2008), Silva e Almouloud (2008) consideram a possibilidade de ensinar frações a partir de representações com figuras planas e de concepção parte-todo e apresentam um conjunto de sugestões de atividades para trabalhar as operações matemáticas que envolvam números fracionários que possam auxiliar o aluno a compreender as regras operatórias sobre números fracionários. Afirmam ser necessário descontextualizar as situações (problemas) para que habilidades de cálculos com números fracionários se desenvolvam independentemente das representações pictóricas, visto ser importante que o aluno aprenda as regras ensinadas pela escola para resolver problemas fracionários, ou seja, que ele efetivamente aplique as regras na solução dos problemas e não apenas memorize-as.

A forma como fração é atualmente concebida, aprendida e ensinada no segundo ciclo do ensino fundamental (em Goiânia, quarto ao sexto ano do ensino fundamental) foi discutida por Magina e Campos (2008). Esses autores investigaram o conceito que professores têm sobre frações e o desempenho de alunos da terceira e quarta séries na resolução de problemas fracionários. Constataram que muitos professores não dominam completamente os invariantes operatórios da fração como, por exemplo, a noção de ordem e equivalência. Observaram que a principal estratégia de ensino empregada pelos

docentes é o uso de desenho ou material concreto como forma de facilitar comparações perceptuais entre os objetos, o que, segundo eles, oferece poucas possibilidades para a aprendizagem das lógicas dos invariantes. Os resultados mostraram ainda que não houve diferença no desempenho entre alunos da terceira e quarta séries. Mesmo assim, é comum professores fazerem predições sobre o desempenho dos alunos bem acima de suas reais capacidades. Ao discutirem os dados, questionaram sobre a necessidade do ensino de habilidades consideradas como pré-requisitos antes de se ensinar o conceito de fração e a adequação da atual disposição desse conteúdo na matriz curricular. Questionaram ainda a relação parte-todo como forma de ensinar frações e defenderam a idéia de que essa estratégia não resulta na aprendizagem de relações lógico-matemáticas necessárias para a compreensão do conceito. Sugeriram que essas relações lógico-matemáticas seriam mais eficientemente ensinadas a partir de estratégias como quociente, nas quais o aluno aprende, por exemplo, que quanto mais dividir o bolo (maior o denominador) menor ficará cada pedaço. De grande importância, é a observação dos autores de que os invariantes operatórios são respostas que precisam ser aprendidas e não as causas da aprendizagem dos alunos, uma vez que só é possível dizer que o aluno usou o invariante adequado ou corretamente quando ele resolve o problema.

O ensino de frações foi comparado metaforicamente com a “hora do vampiro” existente na ficção literária. Vianna (2008) argumentou que a “hora da fração” reproduz no ensino da matemática dilemas semelhantes aos dos filmes de terror. Segundo o autor, a aprendizagem de frações continua a assombrar as crianças e, o que é pior, tirando algum prazer que elas ainda poderiam ter pela matemática. Considera que o verdadeiro problema no ensino sobre frações não é discutido pelos professores. São comuns pesquisas tentando descobrir por que as crianças não aprendem e qual a melhor forma de ensiná-las ou ainda como relacionar frações com números racionais. No entanto,

professores e pesquisadores parecem não ter clareza sobre o que de fato estudam. O autor assinalou que o problema principal, que as pesquisas desconhecem, é conceitual. O que é denominado como fração, pelo menos nos materiais didáticos destinados a crianças com idades de 10 ou 11 anos, não se refere a números, embora sejam assim considerados. Frações, assim como vampiros, são criações humanas de um dado contexto social e histórico. A diferença é que a compreensão sobre frações é exigida em situações que envolvem “partes” e compõem o que se denomina como conhecimento científico e escolar.

Não há base racional, científica, histórica ou filosófica para manter o tópico sobre frações nos currículos escolares. Continua presente porque se relaciona com algo considerado importante chamado de números racionais (Vianna, 2008). Contudo, para o autor, frações, da forma como são ensinadas nas escolas, ou seja, frações como relação parte-todo, não são números. Justifica sua posição argumentando que a estratégia de dividir o inteiro em partes iguais e tomar alguma dessas partes não possibilita o aprendiz a identificar esse número com os números racionais. Por exemplo, quando ocorre essa identificação o número 0.25 é o mesmo que $1/4$, e isso significa que “uma parte tomada em um todo dividido em quatro partes iguais” e “um dividido por quatro” representam o mesmo valor. O problema, nesse caso, diz respeito ao fato de que, no momento em que as frações são apresentadas nas séries iniciais, a partir da operação de dividir o todo em partes iguais e contar essas partes, as crianças não têm, paralelamente, a apresentação da operação matemática de dividir quantidades em partes iguais. Isso ocorre porque nesse momento as crianças ainda estão aprendendo operações de divisão somente com números inteiros, ou seja, números “não-quebrados”. Dito de outra forma, nessa fase a operação de divisão ainda está vetada. Não é possível substituir $1/3$ por 0,3333 ... ou “metade” por 0,5.

Outra questão diz respeito ao fato de que, enquanto algo que serve para contar, frações também não são números. Esse é um problema capital, segundo Vianna (2008), porque nessa fase escolar (10 – 11 anos) os problemas podem ser resolvidos por contagem das partes, independentemente do todo, que no caso das frações, deve ser repartido igualmente. Em decorrência desse fato, as crianças não conseguem resolver problemas semelhantes aos que solicitam responder quantos meios ou terços estão pintados numa figura de barra ou pizza. Em outras palavras, a representação p/q pode ser útil para os números racionais, mas quando se aplica essa forma para frações ou para operações envolvendo números fracionários corre-se o risco de ensinar algo que se parece com um número, mas não é. Por exemplo, considere uma fração que representa uma parte tomada de uma barra de chocolate dividida em três partes ($1/3$) e outra que representa duas partes tomadas de uma pizza dividida em cinco partes ($2/5$). É comum supor que a soma dessas duas frações resulte em três partes tomadas de um total de oito partes ($3/8$). Só que dessas oito partes, três são de um tipo e cinco são de outro, ou seja, os todos não são comparáveis. Portanto, essa fração ($3/8$) parece um número, mas não é. Nesse caso, o que ocorreu foi a representação de uma situação a partir do mesmo referencial ou símbolo usado para frações (Vianna, 2008). Essa questão pode ser colocada de outra forma da seguinte maneira: como representar “partes iguais” para “todos” de “qualidades” ou “naturezas” diferentes?

O método de ensino baseado na relação parte-todo apenas incentiva a operação de dupla contagem, ou seja, contar o número total de partes e as partes marcadas, sem produzir o entendimento do significado desse “novo tipo de número”. Nesse caso, a “fração” significa apenas uma maneira de representar partes escolhidas em um todo dividido igualmente. Fração, da maneira como é apresentada aos alunos, torna-se apenas uma forma de notação, uma representação da relação parte-todo. Nesse contexto, o

equivoco pode ser compreendido como uma questão semântica, a qual ganha evidência quando se adentra no campo da equivalência de frações, visto que em muitas situações são necessárias operações que permitam “juntar” coisas diferentes numa mesma unidade de medida, ou, em outras palavras, torná-las equivalentes, por exemplo, ao somar $1/3$ e $1/4$ (Vianna, 2008).

A literatura matemática apresenta evidências bastante fortes sobre a dificuldade que alunos encontram para **solucionar problemas** que exigem a **formação** (ou aquisição) dos **conceitos** de proporção e magnitude relativa entre frações. Tais evidências são suficientemente fortes para causar preocupação entre os professores e servirem como motivação para o desenvolvimento de pesquisas que viabilizem formas diferenciadas e mais eficientes de ensinar e aprender conceitos e operações matemáticas relacionadas ao raciocínio proporcional. A análise do comportamento dispõe de conhecimento metodológico, teórico e conceitual para ajudar a encontrar possíveis respostas a esse problema.

2- Formação de conceito e resolução de problemas na visão da Análise do Comportamento.

A análise do comportamento diferencia-se de outros modelos existentes na psicologia pela importância dada aos processos de interação entre o organismo e o meio ambiente na explicação dos comportamentos (Todorov, 1989). Nesse modelo, as investigações enfatizam a busca das variáveis que estão funcionalmente relacionadas ao comportamento e a análise funcional apresenta-se como instrumento para compreender essa interação (Skinner, 1978). Diferentes fenômenos são estudados nessa perspectiva, dentre eles algumas classes especiais de respostas que são genericamente chamadas de

cognições. Um fenômeno cognitivo de interesse da análise do comportamento é a **formação de conceito**, o qual parece ser fundamental para a aquisição de outros tipos de comportamentos que também fazem parte dos chamados processos cognitivos, como o pensamento, a linguagem e a **resolução de problemas** (de Rose, 1993).

2.1 – Formação de conceito: controle por estímulos e classes de equivalência.

Segundo analistas do comportamento, um conceito é constituído quando estímulos são agrupados em classes, sendo que uma classe consiste em um conjunto de estímulos que compartilham certas propriedades em comum. Diz-se que ocorre um comportamento conceitual quando o organismo responde de uma mesma forma a todos os estímulos de uma classe e de forma diferente a estímulos de outra classe. Em outras palavras, o comportamento conceitual implica em generalização dentro de uma classe e discriminação entre classes de estímulos (Whaley & Mallot, 1980).

Classes de estímulos podem ser formadas a partir de três tipos de relações ambientais (De Rose, 1993). Os estímulos podem ser agrupados em classes por compartilharem alguma propriedade física ou atributos comuns. Nesse caso, destaca-se o papel da comunidade verbal ao programar e manter as contingências de reforço necessárias para a formação das classes. Apesar dos limites dessas classes nem sempre serem perfeitos, é a comunidade verbal que estabelece os contextos sob os quais o reforço será liberado. Apenas respostas que ocorrem dentro desses limites serão reforçadas pela comunidade e diferentes comunidades podem estabelecer limites diferentes umas das outras. Ressalte-se que é a comunidade verbal que também disponibiliza as palavras referentes a cada conceito ou classe de estímulos. Estímulos inusitados que compartilham propriedades físicas comuns podem ser incluídos dentro

da classe sem a necessidade de treino direto. Um exemplo de conceito formado por similaridade é o de cor. Pode-se responder da mesma maneira a uma variedade de tons da cor verde (uma classe), mas responder de outra forma na presença de cores diferentes, como azul e amarelo, em que novos membros (cores de tons semelhantes) podem ser incluídos em uma dessas classes apenas por compartilharem propriedades físicas com os demais membros.

Classes de estímulos ou conceitos, no entanto, nem sempre são formados por similaridades físicas entre seus membros. Em alguns casos, os conjuntos de estímulos são formados por membros arbitrários ou dissimilares, ou seja, por membros que não compartilham propriedades físicas comuns. Nesse caso, os estímulos que dão origem a essas classes são arbitrários e são agrupados porque compartilham uma mesma função. De Rose (1993) aponta duas maneiras pelas quais estímulos arbitrários podem ser agrupados numa classe. Na primeira, estímulos arbitrários são agrupados quando uma mesma resposta ocorre na presença de cada um dos membros. Assim, eles podem se tornar estímulos funcionalmente equivalentes e fazer parte de uma classe funcional. Uma característica desses conceitos é a necessidade de treinar diretamente cada membro a ser incluído na classe. Por exemplo, o conceito de alimento pode ser um exemplo de classe arbitrária formada pela emissão de uma resposta comum. Uma maçã, um pedaço de pão e uma bolacha são estímulos arbitrários e que compõem o conceito de alimento. Para que o estímulo arroz seja incluído nessa classe há a necessidade de aprender diretamente que ele também é um alimento, visto que não possui similaridade física comum com os demais membros da classe.

A segunda forma de agrupar estímulos dissimilares ou arbitrários não exige a emissão de uma resposta comum na presença de cada membro constituinte da classe. Nesse caso, as classes são formadas quando relações condicionais entre estímulos

arbitrários são estabelecidas e dão origem ao que Sidman e Taiby (1982) denominaram como equivalência de estímulos. Um procedimento comumente usado para estabelecer relações arbitrárias condicionais é o de pareamento com o modelo. A análise do comportamento convencionou uma notação alfanumérica específica para esse tipo de procedimento. Os estímulos que fazem parte dos treinos relacionais são representados por uma combinação de letras e números que permitem identificar o tipo de função que eles têm em cada relação ensinada. As letras identificam os conjuntos a que os estímulos pertencem e os números cada membro dos conjuntos. A primeira letra identifica o conjunto que terá a função de modelo ou amostra e a segunda a de comparação. Por exemplo, na relação A1B1, os estímulos do conjunto A1 serão amostras para os estímulos de comparação do conjunto B1, enquanto na relação A1C1 os estímulos A1 serão amostras e C1 a comparação. O conceito de quantidade pode ser um caso de aprendizagem decorrente do treino de relações condicionais. Após ouvir a palavra “um” (A1) a criança aprende a apontar um objeto (B1). Em seguida, diante do som da palavra um (A1) aprende a apontar o numeral escrito um (C1). Posteriormente, sem treino adicional, aprende a apontar o numeral escrito um (C1) na presença de um objeto (A1) e vice-versa. Nessa condição, a criança demonstrou que aprendeu mais do que foi diretamente ensinado e que pode ter ocorrido a formação de uma classe de equivalência entre estímulos, o que, segundo analistas do comportamento exemplifica um caso de formação de conceito (De Rose, 1993).

Segundo Sidman e Taiby (1982), é necessário observar a existência de três critérios para considerar que o treino de relações condicionais entre conjuntos de estímulos viabilizaram também a aprendizagem de relações de equivalência: reflexividade, simetria e transitividade. Uma relação é reflexiva se na presença dos estímulos de amostra do conjunto A os mesmos estímulos do conjunto A forem

escolhidos como comparação. A relação será simétrica se após o treino direto da relação AB, onde os estímulos do conjunto A foram amostras para os do conjunto B, ocorrer a relação BA sem necessidade de treino direto, ou seja, apesar da inversão das funções dos estímulos de amostras e comparações a relação se mantém válida sem treino adicional. Para demonstrar transitividade é necessário um terceiro conjunto de estímulos (C). Após os treinos AB e AC a relação será transitiva se a relação AC for observada sem treino direto. A demonstração da relação CA (a simetria da transitividade) permite dizer que ocorreu a formação de uma classe de equivalência de três membros (ABC) e que os estímulos agora se tornaram intercambiáveis. Dessa forma, a partir do treino direto de duas relações (AB e AC) quatro novas relações podem ser esperadas (BA, CB, AC e CA) sem a necessidade de cada uma delas ser aprendida diretamente.

Uma vez formada uma classe de equivalência a literatura sugere ser possível expandí-la por meio do treino direto entre o novo membro a ser incluído e apenas um dos membros da classe já estabelecida (Sidman & Taiby, 1982). Neste estudo, os autores ensinaram e testaram relações condicionais entre estímulos arbitrários dos conjuntos A, B, C e D de três membros cada a oito crianças. O conjunto A foi formado por nomes ditados de letras gregas e os demais conjuntos formados por letras gregas impressas. Os participantes aprenderam relações condicionais entre os estímulos dos conjuntos AB, AC e DC por meio de treino direto e foram testados quanto a emergência de relações dois estágios (CD), três estágios (AD, BC e CB) e de quatro estágios (BD e DB). Os resultados mostraram que seis das oito crianças formaram três classes de equivalência de quatro membros (A1B1C1D1, A2B2C2D2 e A3B3C3D3), enquanto as outras duas formaram classes de três membros (sem a inclusão do conjunto D).

A literatura registra ser possível a formação de classes de estímulos com mais de quatro membros. Sidman, Kirk e Willson-Morris (1985) relataram a formação de

classes de estímulos de seis membros após treino de relações condicionais entre conjuntos de estímulos arbitrários compostos por letras gregas. O conjunto A foi formado pelos nomes das letras (auditivos) e os conjuntos B, C, D, E e F pelos nomes impressos (visuais). No experimento 1 os participantes aprenderam todas as relações de linha de base antes dos testes, enquanto no experimento 2 eles primeiro foram testados nas relações de três-estágios antes de aprenderem todas as relações de linha de base. No experimento 3 os participantes aprenderam progressivamente as relações de linha de base, sendo que cada classe apropriada foi testada passo a passo. De forma geral, o procedimento programou, num primeiro momento, o treino direto entre os estímulos dos conjuntos A, B e C (relações AB e AC) e num segundo momento entre os estímulos dos conjuntos D, E e F (relações DE e DF). Em seguida, ocorreu o treino entre os estímulos dos conjuntos E e C. Por último foram testadas as relações entre os estímulos dos seis conjuntos. A maioria dos participantes dos três experimentos demonstrou a formação das classes de equivalência e sua expansão para classes de seis membros (ABCDEF). Os autores explicaram a expansão em função da existência de relações de linha de base consideradas como pré-requisitos (relações treinadas diretamente) e que a ausência da expansão estaria relacionada à falta dessas relações. Sugeriram um procedimento de superaprendizagem das relações de linha de base como procedimento para aumentar a probabilidade de ocorrência da expansão.

O paradigma de equivalência de estímulos é hoje uma área fundamental de pesquisa na análise do comportamento dos fenômenos genericamente denominados como cognitivos. A forma como foi estruturada as pesquisas sobre equivalência de estímulos possibilita um instrumento sistemático de investigação para pesquisas com interesse em questões relacionadas à emergência de novos e complexos repertórios comportamentais, em especial, quando envolvem a compreensão sobre a aquisição de

comportamentos simbólicos, como no caso da linguagem, formação de conceitos e de outros fenômenos considerados cognitivos, a partir da interação do comportamento do indivíduo com o meio ambiente. Assim, o paradigma de equivalência pode ser uma alternativa promissora para estudos que envolvam a formação de conceitos matemáticos, como no caso do conceito de proporção.

2.2 – Resolução de problemas: comportamentos precorrentes e controle por regras.

Alunos do início do ensino fundamental apresentam dificuldades para **resolver problemas** fracionários que exigem o conceito de proporção (e.g., Carraher & Shliemann, 1992; Santos, 1999). Conforme sugerem Guerra e Silva (2008) parte dessa dificuldade pode estar relacionada a déficits em habilidades ou operações mais básicas necessárias para resolver problemas fracionários. Magina e Campos (2008) também argumentaram sobre a necessidade de se identificar e dar mais atenção às habilidades consideradas como pré-requisitos antes de se ensinar o conceito de fração.

Um problema é compreendido por analistas do comportamento como a situação na qual o indivíduo identifica o estímulo reforçador desejado, mas não emite a resposta que pode produzi-lo. Segundo Skinner (1978/1980) um problema autêntico é exemplificado pela situação na qual o indivíduo não tem o comportamento capaz de reduzir a privação ou permitir a fuga de uma situação aversiva. A resposta pode não ser emitida porque, embora faça parte do repertório comportamental do indivíduo, ele não discrimina que o contexto é apropriado para sua emissão, ou ainda, é possível que a resposta não faça parte de seu repertório comportamental (Nico, 2001).

Solucionar uma situação considerada como um problema diz respeito ao processo pelo qual a resposta solução torna-se conhecida. Para uma que uma resposta seja conhecida é necessário que o indivíduo manipule variáveis ambientais e torne mais provável a ocorrência da resposta solução. Em outras palavras, solucionar um problema implica em se comportar manipulando variáveis, tornando assim, a solução mais provável. Por sua vez, solução é definida como a resposta ou cadeia de respostas, resultantes do processo de solucionar problemas ou, como dito anteriormente, manipular variáveis, que alteram a situação dita problemática (Jacob, 2004).

Diante de uma situação problema é necessário, portanto, que o indivíduo interaja com o meio ambiente alterando as condições presentes de maneira que a emissão de um comportamento ou de uma seqüência de comportamentos aumente a probabilidade de a resposta solução ocorrer. Os comportamentos ou a seqüência de comportamentos emitidos pelo indivíduo e que aumentam a probabilidade da resposta solução ocorrer são denominados como respostas precorrentes e fazem parte de uma cadeia comportamental. Comportamentos precorrentes são freqüentes em muitas atividades humanas e têm como uma de suas funções aumentar a probabilidade de ocorrência de outros comportamentos (as respostas correntes) da cadeia comportamental que produzirão o reforço final (Oliveira-Castro & Campos, 2004). Portanto, embora reconheçam que numa situação de resolução de problemas existam tanto variáveis estruturais quanto funcionais que merecem atenção na busca da solução apropriada, analistas do comportamento têm maior interesse por questões de funcionalidade. Em outras palavras, o objetivo maior é em identificar variáveis que aumentam a probabilidade da resposta solução ocorrer (Catania, 1999, Baum, 2006). Afirmar que uma resposta torna outra resposta mais provável significa dizer que a primeira agiu de maneira a produzir mudanças no ambiente e que agora este novo ambiente, incluindo a

própria resposta que o modificou tem função de estímulo discriminativo para a segunda. Dito de outra forma, uma primeira resposta muda o ambiente e, como parte do ambiente, esta resposta produz condições para uma segunda resposta e assim sucessivamente, de tal maneira que essas diferentes respostas possam ser combinadas e gerar a última resposta da cadeia, ou como dito anteriormente, a resposta solução. Assim, os comportamentos anteriores integrantes da cadeia comportamental estabelecem a condição ou funcionam como contexto ou estímulos discriminativos para tornar certas respostas mais ou menos prováveis e produzir a solução. Portanto, o precursor pode se constituir em um ou vários elos de uma cadeia que exige várias respostas para que o reforçador final ocorra (Simonassi & Cameschi, 2003). Os autores destacam ainda que além de aumentar a probabilidade da ocorrência da resposta solução o comportamento precursor também tem outra importante função: possibilita que essas respostas variem sistematicamente e não casualmente.

A cadeia comportamental necessária para solucionar o problema pode ser caracterizada por respostas tanto de natureza pública quanto privada (Baum, 2006). Por exemplo, na tentativa de resolver um problema o indivíduo pode se comportar verbalmente em relação a ele mesmo e dizer de forma privada qual comportamento deveria ser emitido na situação, o qual provavelmente, resolveria o problema. Assim, ao tentar abrir uma porta emperrada ele pode verbalizar de maneira inaudível que deveria girar a chave mais lentamente e, assim, conseguir abri-la. Assim, diante uma situação problema é muito comum a ocorrência de respostas que frequentemente são categorizados como cognitivas e chamadas de pensamento, raciocínio, inteligência e imaginação. Embora recebam denominações diferentes, elas compartilham a característica funcional de gerar estímulos discriminativos que alteram a probabilidade da resposta solução ocorrer (Catania, 1999; Baum, 2006).

O treino de respostas precorrentes pode facilitar a resolução de problemas matemáticos complexos. Os resultados obtidos por Levington, Neef e Cihon (2009) evidenciaram o efeito do ensino de comportamentos precorrentes na solução de problemas de multiplicação e divisão apresentados na forma de sentenças apresentados a crianças. Dentre outros objetivos, o trabalho avaliou a relação entre comportamentos precorrentes e correntes envolvidos nas operações de adição e subtração e verificou em que extensão a ocorrência de respostas corretas foi suficiente para manter o precorrente. Os comportamentos precorrentes foram ensinados em quatro fases. Cada fase correspondeu a uma instrução referente ao precorrente que a criança não tinha adquirido. Os participantes tinham que escrever a resposta abaixo no enunciado do problema. Pistas escritas foram fornecidas para cada precorrente. Os precorrentes ensinados foram denominados como identificação de rótulos, operações, números grandes e números pequenos. A professora lia os problemas e liberava os *prompts* que identificavam as palavras específicas relacionadas à solução de cada problema. Por fim, a professora escreveu a resposta correta abaixo do enunciado. Os resultados mostraram que as respostas para identificação de rótulos, operações e números grandes aumentaram após a fase de treino e que respostas corretas para números pequenos emergiram após o treino para números grandes. Testes por sondagem mostraram que houve generalização para novas situações. Os autores concluíram que ensinar instruções sistemáticas sobre comportamentos precorrentes que compunham o problema foi um método efetivo para estabelecer habilidades generalizadas na solução de problemas aritméticos expressos na forma de sentença.

A aquisição de comportamentos precorrentes é uma condição necessária para que diferentes atividades acadêmicas sejam desenvolvidas com êxito pelos alunos. De acordo com Coelho (2000), muitas tarefas escolares exigem a emissão prévia de ações

precorrentes que o reforçador final, ou a solução do problema, seja obtido. Por exemplo, ao resolver uma questão de multiplicação o aluno pode escrever no papel ou consultar uma tabuada. Esses precorrentes são denominados ainda como auxiliares porque suas ocorrências não são necessariamente exigidas pela contingência, ou seja, o resultado da questão de multiplicação pode ocorrer sem que o precorrente ocorra. Uma possibilidade de explicar a dificuldade que alunos apresentam para resolver problemas cuja solução exige o conceito de proporção (e.g., Carraher & Schliemann, 1992; Spinillo, 1993, Santos, 1999) é a ausência de respostas que seriam pré-requisitos no repertório dos alunos. Lopes (2008), Bertoni, (2008), Bem-chain et al. (2008), Guerra (2008) e Magina e Campos (2008) enumeraram um conjunto de habilidades consideradas necessárias para que os alunos compreendam o conceito de fração. Contudo, não há garantia que a existência desses pré-requisitos seja avaliada pelos atuais métodos de ensino antes de introduzir o tópico sobre frações no ensino regular. No entanto, é importante ressaltar que o comportamento de solucionar problemas é uma habilidade aprendida pelos mesmos princípios que outros comportamentos e uma das funções de pais e professores é ensiná-lo aos filhos e alunos. Sua aquisição deve ser entendida à luz de treinos, instruções e reforçadores anteriores, fazendo com que o comportamento ocorra de forma sistemática e não aleatória, chegando ao ponto de se tornar uma habilidade generalizada.

Um ponto fundamental para compreender a aquisição do comportamento de resolver problema é o reconhecimento de que ele pode ser um comportamento **controlado por regras** (Baum, 2006). Analistas do comportamento têm estudado o efeito de regras sobre o comportamento a partir do conceito de comportamento verbal. De acordo com a proposta feita por Skinner (1978), um comportamento é considerado verbal se o reforço a ele dispensado for mediado por outra pessoa. A pessoa que reforça o comportamento é denominada como ouvinte e a que tem o comportamento reforçado

é chamada de falante. Portanto, por definição pode-se dizer que o comportamento verbal é de natureza social e interacionista, mas apenas o comportamento do falante exemplificaria um caso de comportamento verbal, enquanto o do ouvinte não se enquadraria nesta definição. Quando o comportamento do ouvinte está sob o controle de descrições de possíveis contingências feitas pelo falante ele é denominado como comportamento controlado por regras. Skinner (1980) definiu uma regra como um estímulo discriminativo verbal, portanto produto do comportamento verbal de uma falante, que descreve possíveis contingências e discutiu a possibilidade de que uma pessoa possa desempenhar os papéis de falante e ouvinte ao mesmo tempo. Exemplos de controle por regras podem ser encontrados quando o indivíduo segue uma instrução, ordem ou conselho. Essas estratégias comumente são adotadas em procedimentos de aprendizagem no ensino formal em instituições de todos os níveis acadêmicos.

Regras exercem importantes funções no controle do comportamento humano. Pode-se destacar com facilidade pelo menos três delas quando se fala de resolução de problemas. Primeiro, simplificam as contingências de reforço no estabelecimento de um novo comportamento. Essa simplificação ocorre quando as contingências são complexas, pouco claras, ineficazes ou atuam a longo prazo. Segundo, têm a função de ampliar o repertório do indivíduo ao permitirem que ele entre em contato com contingências que seriam naturalmente muito improváveis. Contudo, chamam a atenção para o fato de que, em alguns casos, as regras podem mais atrapalhar do que ajudar. Segundo os autores, o problema ocorre quando as contingências mudam e o comportamento sob o controle da regra não. Nesse caso, as regras podem interferir na adaptação do comportamento humano não verbal às novas contingências de reforço em vigor na situação (Santos, Paracampo & Albuquerque, 2004).

Uma terceira e importante função da regra é colocar o indivíduo em contato com as contingências de modo a facilitar a aquisição de novas respostas, especialmente, quando as contingências são de difícil discriminabilidade (Baum, 2006). Exatamente por esse motivo, dificilmente um comportamento estará sob controle apenas de regras ou de contingências, visto que na aprendizagem humana é comum a aquisição do comportamento ter início sob o controle de regras e gradualmente passar para o controle das contingências. Mesmo assim, fica clara a utilidade do controle por regras como ferramenta de aprendizagem no ensino formal e informal. Muitos conceitos ensinados na escola regular ocorrem em função de regras descritas pelos professores que atuam enquanto falantes sobre o comportamento dos alunos que atuam como ouvintes.

Dificilmente o comportamento humano é controlado apenas por regras ou apenas por contingências. Santos et al. (2004) estudaram como regras e contingências podem interagir no controle do comportamento e investigaram o efeito de diferentes tipos de instruções sobre o comportamento verbal e não verbal de crianças de segunda série do ensino fundamental e idades variando entre oito e nove anos. O material utilizado foi uma placa de acrílico sob a qual estavam duas lâmpadas vermelhas, duas verdes e duas amarelas. Desenhos coloridos de objetos conhecidos (bola, lua, etc) impressos em cartões formaram arranjos de três estímulos, sendo sempre dois dos estímulos iguais em cada cartão. Um dos cartões iguais ficava sempre no topo da folha e os outros dois colocados mais abaixo e lado a lado. Os estímulos contextuais foram lâmpadas e fichas foram usadas como reforçadores condicionados que davam acesso a um bazar. Os participantes passaram por treino de relações condicionais programados em duas condições: única instrução e múltipla instrução. Cada condição teve três fases. Na primeira fase da condição única instrução, quando o estímulo contextual foi uma luz verde, o participante deveria escolher uma figura de comparação igual à do modelo e

quando era vermelha deveria escolher uma comparação diferente. Na fase dois houve uma inversão dessas relações e na fase três uma volta às condições da fase 1. Na fase 1 as instruções estiveram de acordo com as contingências e na fase 2 foram dadas instruções mínimas aos participantes (“a partir de agora descubra qual a melhor maneira de ganhar fichas”). Na segunda condição (instruções múltiplas), a fase 1 foi dividida em três passos. Estímulos contextuais que controlavam a resposta de escolher comparações iguais ao modelo num passo sinalizaram a escolha de uma comparação diferente noutro passo. Na fase 2 houve a reversão das relações de controle de dois estímulos contextuais da fase 1 mediante sinalização por instruções mínimas. Na fase 3 houve o retorno às condições programada na fase 1. De forma geral, os resultados mostraram que na condição única instrução a sinalização da mudança nas contingências (instrução mínima) não gerou sensibilidade às contingências. Na condição múltipla instrução metade dos participantes foi sensível às novas contingências. Os autores concluíram que uma história de variação comportamental pode interferir na sensibilidade do comportamento de seguir regras quando a mudança é sinalizada.

O efeito que a regra exerce sobre o comportamento pode depender da forma como ela descreve as contingências. Uma das variáveis que pode afetar a probabilidade da regra ser seguida regra é a extensão em que ela é apresentada. Albuquerque e Ferreira (2001) analisaram o efeito de regras, disponibilizadas na forma de instruções, com diferentes extensões sobre o comportamento humano. O objetivo foi investigar se a extensão da regra interferiu no próprio comportamento de seguir a regra. Nesse estudo, a extensão da regra foi medida pelo número de respostas diferentes descritas na própria regra. Participaram do experimento 16 alunos universitários de diversos cursos, exceto psicologia, com idades variando entre 20 e 29 anos. O material utilizado foi uma mesa com anteparo na forma de espelho unidirecional. No anteparo havia três lâmpadas. Uma

à esquerda, uma ao centro e outra à direita. Acima de cada lâmpada uma etiqueta com as letras E, C e D, respectivamente. Os estímulos usados foram peças de madeira oriundas de blocos lógicos lúdicos com diferentes características quanto a forma (F), cor (C) e espessura (E) e foram apresentados aos participantes como amostras e comparações numa bandeja em forma de T. As sessões ocorreram em um único dia com duração de 30 minutos e intervalo de cinco minutos entre uma e outra. A tarefa dos participantes era tocar em seqüências de tamanhos variados dos estímulos de madeira previamente programadas. Os participantes receberam quatro tipos de instruções: instruções mínimas que não especificaram a seqüência das respostas, regra 1 que especificou a seqüência de três estímulos a ser tocados, regra 2 que especificou três seqüências diferentes de três estímulos que deveriam ser tocados dependendo do estímulo contextual presente e a regra 3 que especificou três seqüências diferentes de seis estímulos cada que deveriam ser tocadas de acordo com o estímulo contextual programado. De forma geral, os resultados mostraram que a extensão da regra pode interferir na probabilidade da própria regra ser seguida. Os dados permitiram concluir que quanto maior a extensão da regra menor a probabilidade dela ser seguida.

A especificidade da descrição das contingências presente na regra pode ser também uma variável que afeta a probabilidade do seguimento da regra ocorrer. Silva e Alburquerque (2006) investigaram o efeito de diferentes tipos de instruções apresentadas na forma de perguntas sobre a resolução de problemas em estudantes universitários com idades entre 18 e 40 anos. Foram programados três diferentes grupos de participantes: 1) sem pergunta (sem instrução), 2) pergunta tipo 1, contendo instruções mais genéricas quanto às contingências (“Quando a lâmpada da esquerda/direita estiver acesa o que você deve fazer?”) e 3) pergunta tipo 2, contendo instruções mais específicas quanto às contingências (“Quando a lâmpada da esquerda/direita estiver acesa, você deve apontar

para os objetos de comparação em qual seqüência para ganhar pontos?”). O material usado foi uma mesa com anteparo contendo três lâmpadas dispostas em fileira e peças de madeira que serviram como estímulos de amostra e comparação. A tarefa dos participantes foi apontar as diferentes seqüências de estímulos programadas variando a forma (F), a cor (C) e espessura (E) dependendo da lâmpada (esquerda ou direita) que estivesse acessa. Em algumas sessões as regras estiveram em acordo e em outras em desacordo com as contingências. Em geral, os resultados mostraram que na ausência de perguntas nenhum participante acertou as seqüências programadas (não se comportaram de acordo com as contingências). Instruções mais específicas (tipo 2) produziram mais descrições corretas e mais acertos da seqüências (comportamento de acordo com as contingências). Quando a regra foi discrepante das contingências foram essas últimas que controlaram o responder. Os autores concluíram que a forma como a pergunta foi feita pode ter restringido a variabilidade comportamental e facilitado o controle pelas contingências dos comportamentos dos participantes.

A escola regular tem historicamente adotado a regra de três como um dos principais procedimentos para o ensino do conceito de proporção e de equivalência entre frações (Projeto Arirabá, 2006). No entanto, vários estudos questionam a eficiência da regra de três o ensino desses conceitos (Carraher & Shliemann, 1986, Carraher, Carraher & Shliemann e Ruiz, 1986). O desconhecimento dos professores dos resultados obtidos a partir de estudos sistemáticos sobre o controle que regras exercem sobre o comportamento pode ser uma possível explicação para a busca de outras metodologias de ensino. Uma possibilidade de solução para essa aparente divergência é investigar formas alternativas de ensino do conceito de proporção que não utilizem o algoritmo da regra de três. Outra possibilidade é investigar formas diferentes de ensinar a regra de três para aumentar a probabilidade de que ela seja efetiva, ou seja, de que

venha a realmente a controlar o comportamento dos alunos diante de problemas fracionários. Iniciativas como essas poderiam resultar na obtenção de métodos didáticos mais eficientes para o ensino do conceito de proporção.

3- Contribuições da psicologia para o estudo do comportamento matemático.

No Brasil, avaliações oficiais e extra-oficiais revelam o fracasso escolar no ensino de conceitos matemáticos. Esse fato torna-se preocupante quando se constata que a matemática é um importante instrumento conceitual para avanços científicos e tecnológicos e para muitas atividades triviais do dia a dia, como por exemplo, estimar o número de peças necessárias para revestir uma parede (Carmo & Prado, 2004).

Para analistas do comportamento, a matemática pode ser considerada como um caso especial de comportamento verbal no qual a resposta está sob controle de propriedades quantitativas do ambiente. Uma importante característica de certos tipos de comportamento verbal é o controle que objetos, eventos ou suas propriedades exercem sobre o responder. O comportamento verbal matemático pode ser compreendido como uma resposta que está sob controle de propriedades ou relações quantitativas entre os eventos do ambiente e que, portanto, refere-se a esses eventos ou até os simboliza (de Rose, 2010).

O comportamento matemático, segundo Carmo e Prado (2004), é também mais bem compreendido como interação entre comportamento e meio ambiente. O professor, elemento participante desse meio ambiente, é o responsável por intervir e criar condições mais favoráveis à aprendizagem. Uma de suas preocupações principais relaciona-se à análise de pré-requisitos (ou precorrentes) necessários à aprendizagem de conceitos matemáticos. No caso específico do conceito de número, pode-se considerar

como pré-requisito a rede de relações entre eventos ambientais dos quais fazem parte números simbólicos e comportamentos. Os autores ressaltam que as condições programadas para o ensino devem possibilitar a aprendizagem para além do que foi diretamente ensinado. Nessa visão interacionista para o comportamento matemático compete ao educador planejar o ambiente e incluir-se nele para promover as interações necessárias à aprendizagem. Os autores destacam ser importante considerar a forma como o aprendiz sente as alterações propostas na interação, enquanto processo subjetivo, bem como o que o aprendiz pensa sobre elas, enquanto dimensão cognitiva da interação. Ressaltam ainda que muito dessa aprendizagem ocorre de forma privada, o que torna mais difícil compreender a aquisição de comportamentos denominados como raciocínio e outros processos cognitivos.

Conceitos matemáticos, dos mais simples aos mais complexos, podem ser compreendidos como comportamentos sob controle de estímulos ambientais. A aquisição de conceitos matemáticos básicos, fundamentais para a aprendizagem de conteúdos mais complexos, ocorre na pré-escola. Um desses conceitos, comumente negligenciado pela matemática elementar, é o de número. Número é uma propriedade abstrata encontrada na relação entre conjuntos. Não pertence a um objeto particular, ou seja, número diz respeito a idéias e, portanto, não é uma propriedade física dos estímulos. Embora o conceito de número seja uma relação abstrata adquirida a partir de objetos físicos ele não é uma propriedade desses objetos. Frequentemente o conceito de número é confundido com o de numeral, o qual na verdade é a representação simbólica do número. Por exemplo, diz-se que “aquele é o número 3 quando na verdade é o numeral 3”. Esse equívoco foi observado entre graduandos em matemática, pedagogia e pós-graduandos em educação. É possível que essa confusão estenda-se também a outros conceitos, dentre eles, o de números fracionários. Torna-se, portanto, importante

descobrir como ensinar essa diferença aos alunos. Implícita à essa questão colocada por Carmo (2003), pode-se levantar a importância da linguagem, ou mais especificamente do comportamento verbal, na aquisição de classes de estímulos (ou conceito) de número (Carmo, 2003).

O conceito de número é relacional e uma alternativa, como propõe Carmo (2003), é considerá-lo como um conjunto de habilidades referentes a relações arbitrárias entre estímulos. Por exemplo, um conjunto formado por algarismos, por seus nomes escritos, nomes falados e representações ou figuras que sugiram quantidades. Assim, um número, dentre eles o fracionário, pode ser compreendido como uma rede de relações ou um quadro relacional entre: 1) numeral e objetos, 2) numeral e nomes escritos dos numerais, 3) coleção de objetos e nomes escritos dos numerais, 4) coleção de objetos e numerais, 5) nome escrito do número e coleção de objetos, 6) nome escrito e numeral, 7) número ditado e palavra escrita, 8) número ditado e numeral correspondente, 9) número ditado e coleção de objetos, 10) numeral e a verbalização do nome correspondente, 11) ordenar numerais, palavras ou quantidades (coleção de objetos) e 12) comparar conjuntos (coleções) de objetos, dizer qual é o maior ou tem mais elementos e o menor ou tem menos elementos.

A evolução das interações entre comportamento e meio ambiente exigiu o refinamento de formas mais precisas de avaliações quantitativas dos fenômenos, ou em outras palavras, a ocorrência de novas formas de se comportar em relação às propriedades numéricas do ambiente. A correspondência biunívoca entre os elementos cedeu lugar para os símbolos numéricos. Assim, a quantificação de “dez” animais por meio da marcação por “dez” pedras foi substituída pela relação entre dez animais e o numeral dez, o que deu origem ao comportamento simbólico numérico ou comportamento conceitual numérico. Para o ensino desse novo comportamento, Carmo

e Prado (2004) sugerem um programa com as seguintes estratégias: 1) apresentar uma rede de relações entre nome (conjunto A) e numeral (conjunto B) e entre nome (conjunto A) e conjunto de elementos (conjunto C); 2) equiparar conjuntos envolvendo configurações idênticas (reflexividade) e diferentes; 3) contar ou numerar conjuntos maiores que quatro elementos para os casos em que não ocorra subitização², 4) ordenar grandezas e treinar cardinalidade (o último número da contagem determina o valor do conjunto).

O comportamento matemático ocorre, atualmente, tanto em relação a símbolos quanto em relação às coisas simbolizadas. Isso significa que objetos, sons e símbolos passaram a ser usados de forma intercambiáveis, ou seja, passaram a fazer parte de uma classe de estímulos equivalentes. A psicologia deu um passo metodológico importante no estudo do comportamento simbólico com a proposta feita por Sidman (1971/1994) sobre equivalência de estímulos ao sistematizar um procedimento que explicitou como classes de estímulos podem ser formadas, em especial, na ausência de uma história explícita de reforçamento para todas as respostas e estímulos envolvidas nas relações comportamentais (Carmo & Prado, 2004).

3.1 – Contribuições da psicologia ao estudo do conceito de proporção.

Vários estudos apontam a aprendizagem do conceito de proporção como uma grande dificuldade para alunos de final do sexto ano do ensino fundamental (anteriormente quinta série) e a ineficiência dos procedimentos correntes da escola regular para seu ensino (e.g. Carraher & Schliemann, 1992; Spinillo, 1993, Santos,

² Subitização é a habilidade para reconhecer e distinguir conjuntos com numerosidade de até três ou quatro elementos sem precisar contar (reconhecer de súbito). A literatura sugere que a subitização seja uma habilidade inata. Biologicamente primária e necessária para aquisição de habilidades secundárias dependentes da cultura, como por exemplo, o uso de símbolos numéricos.

1999). Diferentes trabalhos analisaram essa dificuldade e propuseram alternativas para superar esse obstáculo.

Uma das estratégias comumente adotada pela escola para solucionar problemas sobre proporção e equivalência de frações é o ensino da regra de três. Basicamente, ensina-se aos alunos que uma fração será equivalente a outra se ao multiplicar ou dividir os seus dois termos por um número diferente de zero os resultados forem iguais (Tinoco & Lopes, 1994). Carraher, Carraher e Schliemann (1986) avaliaram o uso da regra de três como estratégia de ensino na resolução de problemas sobre proporcionalidade. Analisaram soluções de problemas que exigiam o raciocínio proporcional, a transformação de escalas numéricas e problemas de natureza piagetiana em alunos de 5^a a 7^a series da rede pública e particular de ensino (atualmente 6^o ao 8^o anos, respectivamente). Os resultados mostraram que os alunos adotaram estratégias próprias (aditivas) para a solução dos problemas em detrimento da regra de três ensinada pela escola. Isso significa que os alunos não adotaram operações multiplicativas na solução dos problemas. A negligência observada no uso de estruturas multiplicativas pelos alunos pode ser devido à dificuldade que os mesmos apresentam em compreender o significado da manipulação dos materiais propostos como atividades avaliativas. Além disso, a simplicidade das operações de multiplicação e divisão descritas pela regra de três dificulta compreender o novo significado introduzido pela modificação conceitual decorrente do ensino das operações multiplicativas. Sem essa compreensão, o ensino da regra de três perde seu sentido e pode facilmente cair no esquecimento dos alunos. Os autores sugeriram enfatizar o ensino de estratégias multiplicativas na escola regular.

A forma como crianças e adolescentes matriculadas em escolas da rede pública e privada resolveram problemas sobre proporcionalidade foi investigada por Carraher et al. (1986). Um total de 49 participantes com idades entre 10 e 16 anos, freqüentando

entre a 5^a e 7^a séries (hoje 6^o e 8^o anos), resolveram exercícios orais que exigiam o raciocínio proporcional. Pouco mais de 6% dos participantes demonstraram desempenhos satisfatórios na resolução dos exercícios. Uma das dificuldades observadas foi que os participantes não analisaram todas as relações necessárias entre as quantidades presentes nos exercícios. Verificaram ainda que os participantes não aplicaram a regra de três como estratégia de solução para os problemas e apontaram a possibilidade da regra não ser compreendida pelos alunos.

De acordo com Spinillo (1992), o uso do referencial de metade pode facilitar a resolução de problemas que exigem o conceito de proporção. Crianças demonstraram desempenhos melhores em tarefas de julgamento proporcional quando as quantidades apresentadas nos exercícios atravessavam esse limite em comparação com exercícios em que as quantidades ficavam abaixo desse limite. Ao resolverem os problemas, as crianças usaram os indicativos de “mais que metade”, “menos que metade” e “igual à metade” como referencial comparativo entre os elementos de uma mesma fração. Ao resolverem os problemas as crianças inicialmente consideram o referencial de metade em relação a cada fração (relação parte-parte), para só posteriormente considerá-la quanto à relação parte-todo. Em trabalho posterior, a autora denominou essas relações como de primeiras e segundas ordens, respectivamente (Spinillo, 1993). Nesse caso, para saber se as frações A/B e C/D são equivalentes, inicialmente as crianças comparam, a partir do referencial de metade, cada uma delas isoladamente, para em seguida, comparar os resultados obtidos. Spinillo (1992) sugeriu que os programas de ensino deveriam inserir tarefas destinadas ao treino em habilidades perceptivas e não apenas à aquisição de algoritmos lógico-matemáticos (regras), uma vez que, inicialmente, o referencial de metade tem importantes funções no raciocínio proporcional das crianças, servindo como base para o uso de conceitos como “maior do

que” e “menor do que” no julgamento proporcional. Lopes (2008) corroborou a idéia do uso do referencial de metade como forma de ensinar o conceito de proporcionalidade.

O problema capital dos alunos parece ser a dificuldade em compreender frações como magnitudes relativas entre quantidades que não se referem de forma absoluta a nenhum dos termos que compõem a fração (Carraher & Schliemann, 1992). Sessenta alunos de 5ª (o que hoje corresponde ao 6º ano) da rede pública de ensino com idades entre 10 e 13 anos participaram desse estudo. Metade dos participantes resolveu primeiro problemas fracionários apresentados por escrito na forma literal e depois na forma relativa. Alguns problemas foram apresentados nas duas versões. A outra metade resolveu primeiro problemas na versão relativa e depois na versão literal. Os resultados mostraram que os participantes, em sua maioria, resolveram corretamente os problemas apresentados em sua forma literal, mas erraram os exercícios apresentado de forma relativa. Nos exercícios apresentados nas duas versões os participantes demonstraram nítida preferência pela forma absoluta ou literal. Os dados indicam que os participantes acertaram os problemas onde havia correspondência direta entre o número de partes marcadas e o total de partes em que o inteiro foi dividido, mas erraram quando não havia essa correspondência. Carraher e Schliemann (1992) sugeriram que essa dificuldade em compreender frações como magnitude relativa pode ser devido ao uso freqüente de frações em sua forma simplificada nos livros didáticos ou à própria dificuldade em compreender o significado dos números. Os participantes demonstraram ainda dificuldade em usar a estratégia da regra de três na solução dos problemas fracionários. Esses resultados reafirmam a necessidade de desenvolver novas formas didáticas que sejam mais eficientes para o ensino do conceito de proporção e que facilitem aos alunos compreenderem que frações diferentes podem representar um mesmo valor matemático, ou seja, as compreendam como magnitudes relativas.

3.2 – Contribuições da tecnologia de equivalência de estímulos para a resolução de problemas matemáticos.

A emergência de relações não ensinadas diretamente, fenômeno denominado como equivalência de estímulos, pode ser um modelo proveitoso para a economia de procedimentos de ensino em diferentes contextos conforme sugerem Ninness et al. (2009). A tecnologia de controle de estímulos presente nesse modelo mostra-se como uma forma eficiente para o ensino de habilidades mais básicas no campo da matemática (Green, 2010) e de relações mais complexas do raciocínio matemático (Niness, et al., 2006), a resolução de problemas matemáticos exige, além da discriminação das variáveis relevantes da situação, a aprendizagem de uma linguagem específica com sintaxe, conceitos e símbolos próprios, o que implica na aquisição de discriminações condicionais de relações entre estímulos.

A equivalência de estímulos pode ser uma forma alternativa e eficiente para ensinar repertórios matemáticos mais básicos a pessoas com dificuldade de aprendizagem. Green (2010) investigou a formação de classes de estímulos entre números impressos, quantidade e nomes dos números ditados por meio da equivalência de estímulos em duas crianças de 13 e 15 anos de idade que apresentavam dificuldades de aprendizagem. Os participantes demonstraram a presença de relações condicionais entre nomes de números ditados (modelos) e numerais impressos (comparações). Foram ensinadas diretamente relações entre nomes de números ditados e quantidades (representadas por pontos). Testes das relações entre quantidades de pontos e números impressos e vice-versa foram conduzidos em tentativas de sonda. Avaliações de generalização foram realizadas substituindo-se as quantidades de pontos por novos estímulos como maçãs, casas e moedas. Testes de nomeação oral foram realizados no

início e ao final do experimento. Os resultados mostraram que ambos participantes demonstraram relações não ensinadas diretamente entre os numerais impressos e cada uma das três configurações da quantidade correspondentes aos pontos como comparações e esses mesmos estímulos com os papeis de modelos e comparações invertidos.

Outro exemplo de aplicação eficiente do treino de relações condicionais segundo o paradigma de equivalência de estímulos no ensino de conceitos matemáticos fundamentais é encontrado no trabalho de Oliveira, Carvalho e Figueiredo (2001) que estudaram o comportamento de contagem e a aquisição de relações entre número e quantidade em crianças com idades entre sete e 10 anos. Os participantes foram primeiro avaliados quanto à habilidade de contar em cinco tarefas aplicadas na condição de pré-teste. Um programa especialmente construído apresentou os quatro conjuntos de estímulos e registrou as respostas dos participantes. O conjunto A foi composto por algarismos, o B por pontos pretos dispostos em linhas, o C pelos nomes dos algarismos e o D por pontos pretos desalinhados. Um procedimento de treino pareamento com o modelo apresentou inicialmente relações condicionais entre os conjuntos A e B (relação AB) e, posteriormente, entre os estímulos dos conjuntos B e C (relação BC). Em seguida, foram conduzidos testes das relações de simetria, transitividade, equivalência, um primeiro teste de generalização com os estímulos do conjunto (AD, BD, CD, DA, DB e DC) e um segundo teste de generalização (com outros estímulos). Por último, os participantes passaram por uma situação de pós-teste semelhante ao teste inicial. Os resultados mostraram que a maioria dos participantes necessitou de apenas uma exposição a cada condição para demonstrar o critério e que o procedimento de pareamento com o modelo foi eficaz para estabelecer as relações entre os diferentes

conjuntos de estímulos. Pode-se supor que essa estratégia seja eficaz também para o ensino do conceito de frações.

A transformação de gráficos de funções é um importante componente no ensino de álgebra de cursos avançados de matemática e representa uma dificuldade para muitos estudantes. Seu ensino ocorre basicamente por meio de instruções. No entanto, o paradigma de equivalência pode ser um procedimento facilitador para a aprendizagem desse conteúdo. Niness et al. (2006) investigaram a aprendizagem de transformação de gráficos em fórmulas e vice-versa em 10 participantes com idades entre 19 e 35 anos por meio da inclusão de relações entre gráfico e fórmulas e de controle instrucional verbal. Os participantes tiveram que avaliar novas relações entre fórmulas e gráficos e gráficos e fórmulas apresentadas na tela de computador na forma de pareamento com o modelo. O procedimento foi dividido em dois estágios. No primeiro ocorreu o pré-treino de relações matemáticas básicas por meio de regras sobre como resolver os problemas entre os estímulos dos conjuntos A e B e B e C, tanto na forma de gráfico quanto de fórmulas. No segundo estágio houve treino de relações AB (A modelos e B comparações) e BC (B modelos e C comparações) e o teste das relações BA, CB, AC e CA. Por último, relações novas entre fórmulas e gráficos e gráfico e fórmulas foram testadas. Os resultados mostraram que o procedimento de pareamento com o modelo, utilizado junto com as instruções, produziu ganhos na aquisição de relações gráfico-fórmula e fórmula-gráfico para a maioria dos participantes. Os autores concluíram que, usado em conjunto com um currículo matemático bem planejado, o procedimento de pareamento com o modelo pode ser uma alternativa às tradicionais modalidades de ensino baseadas em instruções.

O paradigma de equivalência de estímulos realmente não se limita, enquanto procedimento, ao ensino de conceitos matemáticos mais elementares, podendo ser

eficiente também a conceitos mais complexos como os relacionados ao campo da trigonometria. Ninness et al. (2009) estudaram a construção e derivação de relações trigonométricas em dois experimentos. No experimento 1 avaliaram a formação de oito classes trigonométricas de dois membros relacionadas a tarefas de transformação de funções de amplitude e frequência. Os participantes foram quatro estudantes do sexo feminino com idades entre 23 e 28 anos. O procedimento exigiu que os participantes construíssem gráficos na tela de um computador que seriam comparados posteriormente com um modelo apresentado na tela. Posteriormente, fórmulas e gráficos foram usados como estímulos de amostra e comparação em tentativas de pareamento com o modelo. Os resultados mostraram aumento nos desempenhos observados no pós-teste em relação aos da linha de base para todos os participantes, o que significa dizer que os gráficos foram identificados corretamente em relação às fórmulas e vice-versa. O experimento 2 foi uma continuidade do experimento 1 e teve como objetivo verificar o efeito do treino de relações de coordenação (same as) e oposição (reciprocal of) sobre a identificação de relações trigonométricas complexas entre gráficos e fórmulas e vice-versa. De forma geral, o procedimento objetivou a formação de duas redes relacionais de quatro membros a partir do treino das relações AB (recíproca of), BC (same as) e CD (same as) e do teste de relações mútuas (DC, CB e BA) e combinatórias (BD, DB, AD, DA, AC e CA) entre fórmulas e gráficos. No primeiro estágio ocorreram treinos e testes de relações das funções de cosseno e secante e no segundo estágio entre relações das funções de seno e cosecante. A maior parte dos participantes demonstrou todas as relações treinadas e testadas. Os resultados mostraram que o treino de construção on-line de relações de amplitude e frequência foram suficientes para preparar os participantes em direção a relações trigonométricas mais complexas e que o treino de duas redes de quatro membros de acordo com as relações de reciprocidade e identidade

foi eficaz para gerar novas relações entre fórmulas e gráficos de funções matemáticas complexas.

A leitura é um comportamento precorrente para a resolução de problemas matemáticos quando eles são expressos na forma de sentenças. O efeito do ensino de relações de equivalência entre três formas de apresentação de problemas aritméticos de adição sobre o comportamento de resolver problemas foi investigado por Haydu, Costa e Pullin (2006). Participaram do experimento sete alunos do ensino fundamental que resolveram problemas nas formas de sentença, balança e operações que foram apresentados em folhas divididas em duas partes e dispostas em pastas catálogos. Na parte superior da folha estavam os problemas-modelo (conjunto A) e na parte de baixo os problemas de comparação na forma de operações (B) e sentenças (C). A incógnita dos problemas apareceu em três possíveis posições. Após uma situação de pré-teste os participantes foram expostos a treinos de discriminações condicionais (relações AB e AC) e teste de relações emergentes. Por fim, passaram pelo pós-teste. De forma geral, os resultados mostram que todos os participantes demonstraram relações emergentes após um bloco de treino de relações condicionais e que apenas um deles não formou classes de equivalência entre as três diferentes formas de apresentação dos problemas. A maioria dos participantes aumentou os acertos do pré- para o pós-teste. Problemas expressos na forma de sentenças tiveram acertos menores do que os de operações e balança. Os participantes com melhores desempenhos em leitura no pré-teste foram os que demonstraram maiores ganhos nos problemas do tipo sentença, o que sugere que o comportamento de leitura possa ser um pré-requisito (precorrente) para a solução de problemas em forma de sentenças.

A resolução de problemas matemáticos pode depender do repertório de leitura conforme demonstraram Haydu et al. (2006). Por outro lado, existem evidências de que

os repertórios de leitura e escrita podem ser adquiridos de forma independente e que, posteriormente podem ocorrer de forma integrada sem a necessidade de treino adicional. Medeiros, Vettorazi, Kliemann, Kurbam e Mateus (2007), tanto classes verbais de palavras quanto de números podem ficar sob controle de estímulos condicionais, o que viabiliza ao professor ensiná-las em qualquer ordem, e derruba a idéia de que a linguagem é um pré-requisito para o ensino da matemática. Os autores investigaram quais relações emergiram quando os comportamentos de ler e escrever palavras e identificar números foram ensinados em separado e, posteriormente, testados juntos. Participaram do estudo 12 crianças com idades entre seis e oito anos da 1ª série do ensino fundamental. Um computador e um programa de software especialmente desenvolvido apresentaram um procedimento de exclusão para expandir o repertório de pareamentos entre estímulos de modelos e estímulos de comparação. Os participantes passaram por três fases experimentais. A primeira fase foi dividida em duas etapas e cada etapa em quatro passos. No primeiro passo da etapa 1 houve a apresentação de três figuras e três números com suas respectivas palavras. No passo 2 ocorreu o ensino de cada uma dessas relações por meio de exclusão. No passo 3 os participantes fizeram cópias de palavras a partir de letras que apareciam no computador e no passo 4 passaram por um pós-teste idêntico ao pré-teste. Na etapa 2, houve a aplicação de um procedimento de exclusão no qual os quatro passos foram idênticos aos da etapa 1. Na segunda fase as participantes foram testadas em dois diferentes passos. No primeiro, figuras correspondentes às palavras foram comparações para modelos auditivos (relação AB). Em seguida, figuras foram modelos para nomes impressos (relação BC). Na terceira fase foram testadas a emergência de relações conjuntas entre números e palavras ensinadas nas etapas 1 e 2: relações AC (auditivo-palavra impressa), AF (auditivo-cópia) e CF (palavra impressa-cópia). Os resultados mostram que todos os

participantes apresentaram os comportamentos de ler, escrever e identificar números e indicaram que o procedimento foi eficiente para ensinar leitura de palavras, identificação de números e a ocorrência de leitura generalizada de números e palavras juntos quando essas relações foram testadas, ou seja, após o treino de leitura e escrita e identificação de números de forma independente emergiram novas relações entre essas classes de estímulos.

A combinação de tecnologia comportamental e computacional pode ser um estratégia bastante promissora para o ensino de conceitos matemáticos. Lynch e Cuvo (1995) integraram tecnologia computacional e comportamental e ensinaram relações entre diferentes concepções de números racionais. Nesse procedimento, ensinaram relações condicionais entre números fracionários e números decimais a alunos com dificuldade em resolver problemas envolvendo essas medidas. As tarefas experimentais ocorreram em um computador e um software especialmente programados. Os estímulos foram organizados em seis conjuntos (A, B, C, D, X e Y). Os conjuntos A, D e X foram números impressos na forma de fração (e.g., $1/5$). Os conjuntos C e Y foram números impressos na forma decimal (e.g., 0,20). O conjunto B apresentou representações pictóricas de frações. Na primeira condição de treino relações AB e BC foram diretamente ensinadas. Em seguida, foram conduzidos testes de simetria, transitividade e equivalência e um primeiro teste de generalização. Posteriormente, duas seqüências diferentes de testes foram aplicadas. Uma iniciou pelo teste das relações XY/YX, passou pelo treino AD e posteriormente pelo teste CD. Na outra, primeiro ocorreu o treino AD, em seguida testou-se a relação CD e depois as relações XY/YX. Os resultados indicaram que, independente da seqüência das condições, o procedimento foi eficaz para estabelecer equivalência de estímulos entre frações representadas como razões, decimais e figuras. Porém, produziu generalização limitada entre relações

fração-decimal. Houve também inconsistência nas justificativas verbais dadas pelos sujeitos nas respostas corretas observadas nos testes (o que não ocorreu nas justificativas colhidas após os treinos).

O treino de relações condicionais segundo o paradigma de equivalência de estímulos é também eficiente para estabelecer classes entre estímulos fracionários de natureza pictórica e numérica. Santos (1996) investigou o efeito do treino de relações condicionais segundo o paradigma de equivalência de estímulos proposto por Sidman e Taiby (1982) sobre aprendizagem do conceito de proporção. Alunos de final de quinta série (atualmente sexto ano) com baixos desempenhos apresentados numa avaliação inicial com problemas sobre proporção entre frações expressas de forma relativa e absoluta serviram como sujeitos. Eles foram divididos em quatro grupos: GE1 (cujos numeradores das frações de comparação se repetiram), GE2 (cujos numeradores das frações de comparação variaram), GC1 e GC2. Esses dois últimos grupos fizeram apenas as avaliações inicial e final. Tentativas de treinos e testes das relações condicionais aconteceram em um computador e um programa especialmente desenvolvido. Os sujeitos dos GE1 e GE2 passaram primeiro pelo treino da relação AB (frações pictóricas e numéricas), BC (apenas frações numéricas), testes de simetria, transitividade e equivalência. Posteriormente, receberam treinos adicionais entre os estímulos do conjunto A e novas classes de estímulos e intercalados com testes de expansão das classes e de generalização. Os sujeitos aprenderam todas as relações treinadas e demonstraram relações de simetria, transitividade e equivalência. Na avaliação final, observaram-se de forma geral, ganhos para todos os sujeitos experimentais, em especial para o GE1. Contudo, os sujeitos demonstraram níveis de generalização moderados e assistemáticos e a expansão das classes não ocorreu para a maioria dos sujeitos.

A forma como a regra é apresentada durante os treinos de relações condicionais segundo o paradigma de equivalência de estímulos parece afetar o desempenho dos participantes. Santos, Souza e Bay (1997) investigaram o efeito de instruções apresentadas na forma da regra de três antes das condições de treino das relações condicionais e verificaram se elas facilitaram a aprendizagem do conceito de proporção, a generalização para novas classes e a expansão das classes já formadas. O procedimento foi semelhante ao de Santos (1996) e os resultados indicaram que a descrição da regra antes dos treinos não assegurou a aprendizagem dos comportamentos necessários para a resolução dos problemas, em especial, para novas situações. No entanto, na análise desses resultados devem-se considerar dois fatores importantes. Primeiro, que a regra de três foi apresentada de uma só vez aos participantes e, portanto, descrevendo vários passos ou comportamentos ao mesmo tempo, o que pode ter comprometido sua eficiência. Segundo, que não houve avaliação de que os participantes tinham realmente adquirido os comportamentos descritos pela regra de três que foi apresentada antes dos treinos e testes das relações condicionais.

Parâmetros estruturais das classes de equivalência, como o número de estímulos nodais ou a direcionalidade dos treinos das relações condicionais, podem afetar a aquisição e a manutenção das relações emergentes ou derivadas (Fields, Verhave & Fath, 1984; Fields e Verhave, 1987). Seguindo essa linha de estudo, Santos, Silva e Oliveira (1999) investigaram se a substituição do estímulo fracionário nodal pictórico programado por Santos (1996) por um estímulo nodal numérico afetaria a expansão das classes de estímulos de equivalência já estabelecidas. Após os treinos das relações AB (onde os estímulos de amostras foram frações pictóricas e as comparações frações numéricas) e BC (onde os estímulos de amostras e comparações foram numéricos) os participantes fizeram os testes das relações de simetria (BA e CB) e transitividade (AC)

e equivalência (CA). Em seguida, aprenderam relações consideradas como pré-requisitos para a ocorrência da expansão da classe. No entanto, enquanto no trabalho de Santos (1996) esses pré-requisitos envolveram relações entre estímulos pictóricos e numéricos (conjuntos A e B), no trabalho de Santos, Silva e Oliveira (1999) essas relações foram entre estímulos numéricos (conjuntos BD). Os resultados mostram que o treino entre estímulos fracionários numéricos e numéricos antes do testes de expansão das classes (BD) não produziu ganhos em relação aos desempenhos observados quando os treinos envolveram relações entre estímulos pictóricos e numéricos (AD).

Tomados em conjunto, os resultados dos estudos sobre formação de classes com estímulos fracionários realizados a partir do treino de pareamento com o modelo segundo o paradigma de equivalência de estímulos, sugerem que essa tecnologia pode ser um caminho alternativo para o ensino de conceitos matemáticos.

3.3 – Aprendizagem do conceito de proporção com uso de material concreto.

Estudos recentes indicam que o uso de material concreto ainda é uma das principais estratégias adotadas pelos professores para o ensino de frações (e.g., Magina & Campos, 2008). Considerações sobre sua importância para o ensino de conceitos fracionários são encontradas há muito na literatura matemática. Berzuk (1988) sugeriu usar uma variedade de objetos manipuláveis e do mundo real do aluno como forma de facilitar a aprendizagem. Amato (1988) defendeu a idéia de que o ensino do conceito de fração deva começar utilizando material concreto como massa de modelar, canudo e papel, e só depois inserir os símbolos fracionários. Contudo, a eficiência do material manipulativo no ensino de frações não é um ponto consensual. Thompson (1994) considera necessário ser mais criterioso quanto ao uso que o professor faz de material

concreto para o ensino de frações. Segundo ele, aprender conceitos matemáticos em material manipulável é difícil porque, apesar do material ser concreto, as idéias não estão no material, mas sim na relação existente entre o aluno, o professor e o material. Recentemente, Bertoni (2008) questionou porque materiais manipulativos como fichas, canudos e pizzas não viabilizam a construção de números fracionários. Segundo a autora, essa estratégia pode ser falha quando usada para ensinar frações a partir do ensino da relação parte-todo, porque encoraja apenas a aprendizagem do comportamento de contagem. Sugeriu que essa estratégia poderia ser mais eficiente se houvesse a manipulação concreto/abstrato a partir do mesmo material (partição de fichas e canudos) usado no ensino de números naturais em conjunto com o apoio da linguagem materna do aprendiz.

O manuseio de material concreto, em especial quando programado de forma lúdica, pode facilitar a aquisição de habilidades fundamentais para a aquisição de conceitos matemáticos mais elementares. Gerteg (2009), amparado pela concepção piagetiana de aprendizagem, sugeriu que o contato com materiais concretos que possibilite trabalhar habilidades elementares de classificação e representação, como por exemplo, quando se manipula sucatas e blocos, ajuda a formação de conceitos básicos matemáticos, especialmente se essas atividades forem apresentadas de maneira lúdica. Nessa linha de pensamento, a construção do conhecimento ocorre devido a fontes externas, a partir de processos físicos e sociais, e internas, a partir de processos lógico-matemáticos. Portanto, a interação é a fonte de conhecimento e a construção do conceito e de representações numéricas dependem do desenvolvimento de estruturas de pensamento decorrentes das ações do sujeito sobre o mundo (ambiente).

A aprendizagem de conceitos matemáticos tradicionalmente é estudada pela pedagogia e psicologia partir da necessidade estruturas mediacionais entre as condições

de aprendizagem e o próprio aprendiz. De acordo com Teixeira (2001), a compreensão da formação de conceitos numa perspectiva piagetiana depende da ação do sujeito cognoscente que, ao operar sobre o objeto elabora estruturas envolvidas pelos processos transformacionais. Dessa forma, conceitos são formados por processos nos quais o sujeito elabora seu próprio conhecimento e sua adaptação ao meio a partir de sua atuação sobre o mundo físico e social, o que resulta na construção de instrumentos cognitivos que viabilizam a interação eficiente com o meio social. Portanto, nessa perspectiva as condições ambientais presentes no contexto da aprendizagem não são o foco da atenção dos métodos didáticos.

A análise psicogenética proposta por Piaget (1983) contradiz a dicotomia entre conhecimento produzido externamente e de forma endógena. Em sua visão o conhecimento não procede do objeto já constituído, de acordo com o sujeito, nem do próprio sujeito consciente de si mesmo. Ele é resultante de interações, ao mesmo tempo, entre o objeto e o sujeito, sendo que o instrumento inicial de troca entre ambos é a própria ação do sujeito e não sua percepção passiva do objeto. Pode-se, nessa perspectiva, analisar o desenvolvimento do conhecimento em dois períodos sucessivos. No primeiro, não há efeito da linguagem ou representações conceituais sobre a aquisição do conhecimento, e denomina-se como período sensório-motor. No segundo, ocorre a ação da consciência, intenções e pensamentos conceitualizados.

A proposta de desenvolvimento do pensamento feita por Piaget (1983) configura-se numa tentativa de explicação interacionista para o fenômeno. Segundo esse modelo, o pensamento desenvolve-se em aprendizado. O primeiro, denominado como sensório-motor, inicia-se no nascimento e estende-se até aproximadamente dois anos de idade. Nele, não há consciência de um eu diferenciado do outro. Tudo é relacionado pela criança, que é o centro do mundo, ao seu próprio corpo. Ações como sugar, olhar e

segurar, não são coordenadas entre si, mas ocorrem isoladamente, sendo que os dados da experiência são assimilados e passam a fazer parte de uma nova estrutura de pensamento ou sendo integrados a uma já existente na forma de esquemas. Para desenvolver essa coordenação é necessário diferenciar os objetos do próprio corpo, o que ocorre de forma progressiva nos estágios posteriores, dando início à formação da inteligência propriamente dita.

O segundo estágio, denominado como pré-operatório, estende-se até os sete anos de idade. Nele já existem ações coordenadas, mas ainda prevalece o plano da ação efetiva e não há um sistema conceitual desenvolvido. Nesse momento, no entanto, a linguagem já se faz mais presente e ações simples garantem a interdependência direta entre sujeito e objeto, o que dá início a ações novas, interiorizadas e conceitualizadas. Contudo, a tomada de consciência da ação ocorre ainda de forma parcial. Nessa fase, o sujeito começa a adquirir as futuras ações lógico-matemáticas ou operatórias. Começa a fazer inferências elementares, classificações espaciais e correspondências. O que diferencia grandemente as formas de assimilação sensório-motora e pré-operatória (conceitual) é que, no primeiro caso, a distinção é feita entre características do objeto e da ação, ao passo que no segundo a diferenciação recai apenas sobre os objetos, porém, quando esses estão ausentes e presentes, libertando o sujeito de suas ligações com o atual, possibilitando-o fazer classificações, seriações e correspondências, mas não demonstram ainda o pensamento reversível ou simétrico.

O terceiro estágio, denominado como operações concretas, compreende a faixa etária dos sete aos dez anos. Nessa fase, a conceitualização adquire papel de operações enquanto transformações reversíveis que modificam certas variáveis e conservam outras. As habilidades de antecipar e retroagir aparecem como esquemas solidários que asseguram o pensamento reversível. O pensamento passa a ocorrer em função de pré-

correções dos erros devido às ações de operações diretas e inversas. O indivíduo passa a realizar operações a partir da seriação operatória, o que por sua vez, viabiliza a ocorrência de operações envolvendo relações transitivas.

O quarto e último estágio proposto por Piaget (1983) é o das operações formais, o qual tem início aproximadamente a partir dos 11 ou 12 anos. Nessa fase, as operações independem do contexto psicológico das ações do sujeito. O conhecimento não necessita mais da mediação do concreto e recai agora sobre hipóteses e não mais apenas sobre objetos, o que é peculiar ao pensamento lógico-matemático. O indivíduo é capaz de fazer deduções que vão do nível das hipóteses às conclusões, de realizar operações sobre operações e usar o pensamento combinatório. É capaz ainda de observar a existência de leis e a possibilidade de explicação independentemente dos objetos. Para Goulart (1983), esse estágio é caracterizado pela distinção entre o real e o possível. O indivíduo demonstra habilidade para prever todas as relações que poderão ser validadas, qual delas tem validade real e realiza experimentação e análise para testar as relações. Nesse período ocorre a liberação do pensamento do concreto infantil para o abstrato e futuro. As estratégias hipotético-dedutíveis passam a ser usadas para descobrir o real em meio “ao possível”, o que supõe considerar o possível como um conjunto de hipóteses. Dessa forma, os dados não manipulados de maneira concreta, como em estágios anteriores, mas por meio de enunciados e proposições, o que enfatiza o papel da linguagem na construção do pensamento. Em outras palavras, nesse período, o das operações formais, os resultados das operações concretas são organizados em proposições para que se estabeleçam vínculos lógicos de relações. Portanto, as operações formais são resultantes das operações concretas que ocorreram em estágios anteriores.

No período das operações formais tem-se o início do raciocínio científico, no qual começam a ser usados o método hipotético-dedutivo, a análise combinatorial e a realização de provas empíricas como estratégias para solucionar problemas. Operações proposicionais de implicação (“se ... então”), exclusão (“ou ... ou”) e implicações recíprocas (“nem um ... nem outro”) aparecem e passam a fazer parte do pensamento. Começa a desenvolver-se o pensamento proporcional ou operação de lógica de razão-proporção, o qual permite ao sujeito construir relação métricas que descrevem mudanças proporcionais nas variáveis. O conceito de proporção tem início de forma qualitativa e lógica e só depois estrutura-se de forma quantitativa. Seu desenvolvimento é importante para aquisição de outras formas de operações lógicas, como por exemplo, o pensamento probabilístico.

4 – Objetivos do trabalho.

O objetivo geral do presente estudo foi investigar relações entre variáveis ambientais e comportamentais que facilitassem a aquisição do conceito de equivalência entre frações e a resolução de problemas que exigem o raciocínio proporcional em três experimentos. Os objetivos específicos foram estudados em três experimentos. No Experimento 1 investigou-se os efeitos das condições: 1) de treino com instruções programadas sobre como resolver problemas fracionários; 2) de treino exclusivo de relações condicionais entre estímulos fracionários pictóricos e numéricos e entre estímulos fracionários numéricos e numéricos segundo o paradigma proposto por Sidman e Taiby, (1982) e, 3) de treino conjunto entre instruções programadas e treino de relações condicionais sobre: a) a formação de classes de equivalência com estímulos fracionários; b) a expansão das classes de equivalência de estímulos formadas e a

generalização da resposta para novas situações e c) a resolução problemas fracionários do tipo lápis e papel.

No Experimento 2 verificou-se os efeitos das condições: 1) de treino com material concreto; 2) de treino de relações condicionais entre estímulos fracionários pictóricos e numéricos e entre estímulos fracionários numéricos e numéricos segundo o paradigma proposto por Sidman e Taiby, (1982) e, 3) de treino com material concreto em conjunto com treino de relações condicionais sobre: a) a formação de classes de equivalência com estímulos fracionários; b) a expansão das classes de equivalência de estímulos formadas e a generalização da respostas para novas situações e c) a resolução de problemas fracionários do tipo lápis e papel.

No Experimento 3 investigou-se os efeitos das condições: 1) de treino exclusivo de relações condicionais entre estímulos fracionários pictóricos e numéricos e entre estímulos fracionários numéricos e numéricos segundo o paradigma de Sidman e Taiby (1982); 2) de treino de composição das frações em conjunto com o treino de relações condicionais e, 3) de treino de relações condicionais em conjunto com o relato das estratégias utilizadas para a resolução dos problemas fracionários sobre: a) a formação de classes de equivalência com estímulos fracionários; b) a expansão das classes de equivalência de estímulos formadas e a generalização da respostas para novas situações e c) a resolução de problemas fracionários do tipo lápis e papel. Um quarto objetivo desse experimento foi verificar se houve correspondência entre as estratégias descritas pelos participantes para resolver os problemas fracionários durante os treinos e testes de relações condicionais e as estratégias ensinadas pela escola regular.

Experimento 1.

A utilidade das regras ensinadas pela escola na solução de problemas tem sido questionada por vários estudos que exigem o raciocínio proporcional. Carraher e Schlieman (1986) investigaram como alunos de 5ª à 7ª séries (atualmente 6º ao 8º anos do ensino fundamental) resolveram problemas sobre proporcionalidade. Os dados indicam preferência dos alunos por estratégias próprias de solução em detrimento à regra de três ensinada pela escola. Carraher et al. (1986) também observaram que os alunos não usaram a regra de três como algoritmo para a solução de problemas sobre proporcionalidade. Os autores consideraram a possibilidade da regra não ser completamente compreendida pelos alunos. Tinoco e Lopes (1994) sugeriram que a regra de três não deveria ser uma estratégia de ensino, mas sim o resultado da aprendizagem. Recentemente, Silva e Almouloud (2008) sugeriram ensinar frações a partir de atividades que trabalhem as operações matemáticas que envolvam números fracionários e que possam auxiliar o aluno a compreender as regras operatórias envolvidas nos problemas. Todos esses autores propuseram que essa forma torna mais provável que os alunos aprendam as regras ensinadas pela escola e que eles efetivamente as apliquem na solução dos problemas e não apenas memorize-as.

Analistas do comportamento têm demonstrado interesse nos efeitos que regras podem ter sobre a aquisição de novos repertórios. Em especial, porque as regras possibilitam simplificar as contingências de reforço no estabelecimento de um novo comportamento e porque elas permitem que o aprendiz entre em contato com contingências que seriam naturalmente muito improváveis (Santos et al. 2004), principalmente quando as contingências são de difícil discriminabilidade (Baum, 2006).

O efeito de regras disponibilizadas na forma de instruções sobre a aquisição de novos repertórios pode ser exemplificado a partir de duas propostas clássicas que

ilustram bem como aplicar esses princípios na construção de uma tecnologia do ensino: a instrução programada e as máquinas de ensinar (Skinner, 1972) e o Sistema Personalizado de Instrução ou PSI (Keller, 1983). Instrução programada ou IP é uma denominação geral para alguns métodos de ensino cujo objetivo é programar a aprendizagem com o mínimo de erros possível. Um princípio muito simples, advindo da Análise Experimental do Comportamento, é o fundamento para a instrução programada: a aprendizagem será mais fácil se todos os pré-requisitos (ou precursores) necessários forem hierarquicamente ensinados. Em outras palavras, todas as relações comportamento-ambiente necessárias para aquisição de novas respostas devem ser ensinadas anteriormente, pois assim, diminui-se a possibilidade do aprendiz cometer erros. Segundo Skinner (1991), a instrução programada (IP) permite reforçar o comportamento do aprendiz imediatamente e substituir gradualmente os reforçadores artificiais pelos naturais à medida que o aluno avança dos estágios iniciais para os finais da aprendizagem.

Por sua vez, o Sistema Personalizado de Instrução ou PSI pode ser resumidamente descrito da seguinte forma: os alunos resolvem exercícios em casa, na sala de aula ou no laboratório; o conteúdo a ser aprendido é dividido em pequenos passos, sendo que o aluno avança conforme suas habilidades; em cada passo ocorre uma avaliação cujo resultado determinará se o aluno tem condições de prosseguir para o próximo passo. Caso o aluno não demonstre a habilidade necessária permanecerá no estágio em que se encontra ou até mesmo voltará um passo no programa. O aluno é incentivado a usar a sala de aula como local de estudo, uma vez que ali poderá contar com a presença do professor ou de um monitor; aulas expositivas, palestras e demonstrações são programadas como veículo de motivação e não como fonte de informação, e a comunicação entre professor e aluno acontece preferencialmente por

escrito. Um dos efeitos mais marcantes do PSI sobre a aprendizagem é a inversão do desempenho dos alunos quando comparados com suas próprias performances no ensino regular. Alunos sempre considerados como "fracassos" passaram a demonstrar resultados agora considerados como "brilhantes" (Keller, 1983).

Enquanto a instrução programada introduz o uso de máquinas de ensinar como condição para apresentar os programas de forma mais eficiente, o PSI valoriza os aspectos sociais da interação entre professor e aluno no processo de ensino. Ainda, na IP os passos programados na modelagem do comportamento são menores que no PSI, o qual programa seqüências mais amplas como leitura de textos, pesquisas bibliográficas e palestras. No entanto, a instrução programada e o Sistema Personalizado de Ensino assemelham-se quanto a aplicação de princípios do comportamento na modelagem de repertórios comportamentais, fortalecendo e/ou enfraquecendo comportamentos, colocando comportamentos sob controle de uma ampla variedade de estímulos antecedentes e conseqüentes, encadeando respostas e garantindo que todos os pré-requisitos necessários para a aquisição de uma nova resposta sejam ensinados (Teixeira, 2006).

Existem muitos questionamentos na literatura quanto a utilidade da regra de três como procedimento para ensinar o conceito de proporção (e.g. Carraher & Shliemann, 1986; Carraher et al., 1986; Tinoco & Lopes, 1994). Contudo, poucos trabalhos têm estudado a forma como essa regra é ensinada. Conforme verificaram Santos, Souza e Bay (1997) a apresentação de uma só vez dos passos necessários descritos pela regra de três para resolver problemas fracionários sobre proporção não foi uma condição que aumentou o desempenho dos participantes na resolução dos exercícios. Esses resultados corroboram sugestões feitas por Albuquerque e Ferreira (2001) que verificaram existir uma relação inversa entre o tamanho da instrução e a probabilidade dela ser seguida.

Portanto, é interessante investigar se a apresentação gradual das instruções sobre a regra de três na forma de instruções programadas apresentando passo a passo os comportamentos necessários para a resolução dos problemas, facilitaria a aquisição do conceito de equivalência de frações e do raciocínio proporcional.

Os objetivos propostos para o Experimento 1 foram investigar os efeitos das condições: 1) de treino com instruções programadas sobre como resolver problemas fracionários; 2) de treino exclusivo de relações condicionais entre estímulos fracionários pictóricos e numéricos e entre estímulos fracionários numéricos e numéricos segundo o paradigma proposto por Sidman e Taiby, (1982) e, 3) de treino conjunto entre instruções programadas e treino de relações condicionais sobre: a) a formação de classes de equivalência com estímulos fracionários; b) a expansão das classes de equivalência de estímulos formadas e a generalização para novas situações e c) a resolução problemas fracionários do tipo lápis e papel.

Método

Participantes:

Trinta alunos de final de sexta série do ensino fundamental, com idades entre 11 e 13 anos, de ambos os sexos, que tiveram escores máximos iguais a 25% de acertos em problemas fracionários expressos de forma relativa, resolvidos numa situação de teste denominada de avaliação inicial (ver procedimento). Somente os alunos cujos pais ou responsáveis autorizaram a participação no experimento por meio do Termo de Autorização Livre e Esclarecido fizeram parte do estudo (Anexo A).

Local e sessões:

O experimento ocorreu em duas escolas da rede pública de ensino, sendo uma na cidade de Goiânia e outra em Trindade. Na escola de Goiânia, a coleta de dados aconteceu no laboratório de ciências que media aproximadamente 30 metros quadrados (5m x 6m). A sala era iluminada natural e artificialmente e tinha apenas ventilação natural. Além de uma pia e de aparelhagem específica de ciências, havia na sala mesas e cadeiras para uso acadêmico e uma lousa. Não houve programação prévia quanto ao limite mínimo ou máximo de sessões. A quantidade de sessões que cada participante fez variou de acordo com seu ritmo pessoal. Na escola de Trindade, a coleta ocorreu na biblioteca que media aproximadamente 20 metros quadrados. A sala tinha iluminação natural e artificial, mesas, cadeiras e prateleiras com livros.

Material:

Foram utilizadas oito pastas do tipo classificador contendo folhas ofício do tamanho A4, formatas no modo paisagem do Microsoft Word 2003, para a apresentação dos estímulos. Cada folha apresentou sempre quatro quadrados de 5cm x 5cm, sendo

um localizado na parte central superior da folha e os três outros na parte inferior e equidistante um dos outros. Os estímulos de amostras eram apresentados no quadrado superior e os de comparação nos quadrados inferiores (Ver Exemplos em tamanho reduzido no Anexo B).

Utilizaram-se também apostilas com instruções programadas sobre as operações necessárias para a resolução dos problemas fracionários (ver anexo C) e protocolos para o registro das respostas emitidas pelos participantes em cada condição de treino e teste programados.

Estímulos

Estímulos visuais na forma de frações numéricas e figuras que representavam as frações foram organizados em quatro conjuntos de três elementos. O conjunto A foi formado por frações pictóricas, por exemplo, um retângulo dividido em três partes com uma delas sombreada (figura representada pela fração $1/3$) e os demais por frações numéricas. O quadro 1 apresenta os estímulos utilizados ao longo do experimento.

Quadro 1 - Estímulos apresentados nas condições de treinos e testes das relações condicionais. O conjunto A foi composto por estímulos fracionários pictóricos (F = figuras) e os conjuntos B, C, D, E, F e G por estímulos fracionários numéricos.

	Treinos			Testes			
Conjuntos	1	2	3	Conjuntos	1	2	3
A	$1/3.$	$1/4.$	$1/5.$	E	$1/2.$	$1/6.$	$1/7.$
B	$1/3.$	$1/4.$	$1/5.$	F	$2/4.$	$2/12.$	$2/14.$
C	$2/6.$	$2/8.$	$2/10.$	G	$3/6.$	$3/18.$	$3/21.$
D	$3/9.$	$3/12.$	$3/15.$	-	-	-	-

Procedimento:

Avaliação inicial e formação dos grupos experimentais e de controle:

A avaliação inicial consistiu na aplicação coletiva de uma prova contendo problemas fracionários utilizados por Santos (1996). No entanto, no presente trabalho

aplicou-se apenas o modelo contínuo de apresentação das frações nas formas absoluta e relativa (Anexo D). Após a avaliação inicial, cinco alunos passaram por condições de treinos e testes de relações condicionais segundo o paradigma de equivalência de estímulos proposto por Sidman e Tailby (1982) e compuseram o grupo que foi denominado como grupo Equivalência (GEQ). Cinco receberam instruções programadas sobre como resolver problemas fracionários após os pré-testes das condições de treino AB, BC e AD e dos testes das relações de equivalência (caso não satisfizessem os critérios) e formaram o grupo Instrução Programada (GIP) e cinco receberam instruções programadas sobre como resolver problemas fracionários mais treino das relações condicionais antes dos testes das relações de equivalência e formaram o grupo Instrução Programada mais Equivalência (GIPEQ). Outros quinze alunos compuseram os grupos controle. Cada grupo controle foi formado por cinco participantes e serviu como comparação para os grupos experimentais. Assim, para cada grupo experimental programou-se um grupo controle. Os grupos controle passaram apenas pelas condições de avaliações inicial e final.

Teste de conhecimentos básicos:

Todos os participantes experimentais foram avaliados quanto ao conhecimento do conceito de numerador e denominador. A avaliação consistiu em responder a um exercício apresentado na forma de instrução programada onde foi solicitada aos participantes a identificação de numeradores e denominadores em vários exemplos de frações. Em seguida, pediu-se aos mesmos que resolvessem 20 problemas de multiplicação e divisão simples, sendo 10 de cada modalidade (por exemplo: $3 \times 3 = \dots$ e $10 : 5 = \dots$). Os testes sobre conhecimentos ocorreram após a avaliação inicial.

Treino da Tarefa:

Os participantes de todas as condições experimentais receberam treino em tarefa de pareamento com modelo com estímulos não fracionários como quantidades, numerais representativos de quantidades, e nomes escritos das quantidades. Por exemplo, uma bolinha como modelo e os numerais 1, 2 e 3 como comparação. O treino apresentou blocos com nove tentativas. Os estímulos foram apresentados em pastas conforme descrição feita anteriormente na sessão sobre material. Os estímulos de modelo apareceram no quadrado superior e as três comparações nos quadrados inferiores. Os acertos foram conseqüenciados com a palavra oral “certo” e os erros pela palavra “errado”, sendo que nesse caso um procedimento de correção esteve em vigor até o acerto ocorrer. O procedimento de correção consistiu na reapresentação das tentativas em que ocorreram erros até o acerto acontecer. As instruções orais para o treino inicial da tarefa foram as seguintes:

"Sua tarefa é simples. Você deverá em primeiro lugar tocar no quadrado da parte de cima da folha. Em seguida você deverá tocar uma das figuras laterais. Eu lhe direi se sua escolha foi certa ou errada. Tente acertar o máximo possível. Você entendeu?"

Grupo Equivalência.

Os participantes do grupo equivalência passaram por treinos e testes de relações condicionais conforme a seqüência apresentada no Quadro 2 e descritas a seguir.

Condições de treinos:

O grupo equivalência (GEQ) passou por condições de treino de relações arbitrárias entre frações expressas de forma pictórica e numérica (condições AB e AD) e

Quadro 2 - Organização das condições programadas, relações testadas e treinadas nos grupos Instrução Programada (GIP), Equivalência (GEQ), Instrução Programada mais Equivalência (GIPEQ) e controles.

Condição	Relações Apresentadas	Grupos			
		GIP	GEQ	GIPEQ	Controles
Avaliação Inicial	Ver no texto	Sim	Sim	Sim	Sim
Treino de conhecimentos básicos	Ver no texto	Sim	Sim	Sim	Não
Treino da tarefa	Ver no Texto	Sim	Sim	Sim	Não
Treino AB	A1B1, A2B2 e A3B3	Não	Sim	Sim	Não
Treino Instrução Programada AB	Idem Treino AB	Sim	Não	Sim	Não
Treino BC	B1C1, B2C2 e B3C3	Não	Sim	Sim	Não
Treino Instrução Programada BC	Idem Treino BC	Sim	Não	Sim	Não
Treino Misto	A1B1, A2B2, A3B3, B1C1, B2C2 e B3C3	Não	Sim	Sim	Não
Teste de Simetria	B1A1, B2A2, B3A3, C1B1, C2B2 e C3B3	Sim	Sim	Sim	Não
Treino Instrução Programada BA e CB	Idem Treino de Simetria	Sim	Não	Sim	Não
Treino de simetria	B1A1, B2A2, B3A3, C1B1, C2B2 e C3B3	Sim	Sim	Sim	Não
Teste de Transitividade e equivalência	A1C1, A2C2, A3C3, C1A1, C2A2 e C3A3	Sim	Sim	Sim	Não
Treino Instrução Programada AC e CA	Idem treino de Transitividade e equivalencia	Sim	Não	Sim	Não
Treino de Transitividade e equivalencia	A1C1, A2C2, A3C3, C1A1, C2A2 e C3A3	Não	Sim	Sim	Não
Teste de Generalização 1	Ver no texto	Sim	Sim	Sim	Não
Treino AD	A1D1, A2D2 e A3D3	Não	Sim	Sim	Não
Treino Instrução Programada AD	Idem Treino AD	Sim	Não		Não
Teste de Expansão das classes D-(ABC)	D1A1, D2A2, D3A3, D1B1, D2B2, D3B3, B1D1, B2D2, B3D3, C1D1, C2D2, C3D3, D1C1,	Sim	Sim	Sim	Não
Treino de Expansão das classes D-(ABC)	Idem relações do teste de expansão	Não	Sim	Sim	Não
Treino Instrução Programada D-(ABC)	Idem relações do teste de expansão	Sim	Não	Sim	Não
Teste de Generalização 2	Ver no texto	Sim	Sim	Sim	Não
Avaliação Final	Ver no texto	Sim	Sim	Sim	Sim

frações expressas de forma numérica e numérica (condição BC). Por exemplo, na condição AB os participantes foram ensinados a escolher, diante da figura de um retângulo dividido em três partes iguais e com uma das partes sombreadas (estímulo de amostra), a fração de comparação $1/3$, a qual foi apresentada junto com as frações $1/4$ e

1/5. Na condição BC, os participantes aprenderam a escolher a comparação 2/6, apresentada junto com as frações 2/4 e 2/10, diante do estímulo de amostra 1/3. Os treinos AB e BC antecederam os testes de relações das propriedades de simetria e transitividade e o treino AD ocorreu após a aplicação desses testes. A apresentação dos estímulos foi igual ao do treino da tarefa. Nesses treinos, cada amostra correspondeu a uma única comparação e cada comparação correta apareceu em três posições diferentes nos quadrados inferiores compondo um bloco de nove tentativas. Cada condição de treino apresentou alternadamente dois blocos que diferiram apenas quanto à ordem de apresentação das tentativas. Foram três condições de treino: AB, BC e AD. A primeira letra de cada par representou os estímulos modelo e a segunda letra as comparações (notação idêntica foi adotada para as condições de testes). Os estímulos do conjunto A foram as representações pictóricas das frações 1/3, 1/4 e 1/5, do conjunto B as frações numéricas 1/3, 1/4, e 1/5, do conjunto C 2/6, 2/8 e 2/10, e do D 3/9, 3/12 e 3/15. Para esses treinos os participantes receberam de forma oral as seguintes instruções:

"Sua tarefa continua sendo simples. Tudo o que você tem que fazer é tocar na figura da parte de cima da folha e em seguida, tocar uma das frações abaixo. No entanto, agora será dito a você se sua escolha foi certa ou errada. Tente acertar o máximo possível. Você entendeu?"

Cada uma dessas condições de treino foi precedida pela apresentação de nove tentativas de testes (pré-testes) das relações a serem ensinadas. Não foi programado nenhum tipo de consequência especial para os pré-testes. Apenas os participantes com escores menores que 100% nos pré-testes passaram pelo treino das relações condicionais previamente testadas. Participantes com 100% de acerto foram dispensados dos treinos. Após cada condição de treino, os participantes passaram por

nova avaliação idêntica à descrita para o pré-teste e agora denominada de pós-teste. As seguintes instruções orais antecederam os pré-testes e pós-testes:

"Sua tarefa continua sendo simples. Primeiramente, toque o quadrado que está na parte de cima da folha e em seguida toque uma das frações abaixo. Não será dito a você se sua escolha foi certa ou errada. Portanto, você poderá estar errando ou acertando em suas escolhas. Tente acertar o máximo que você puder. Entendeu?"

Após os treinos das condições AB e BC os participantes fizeram a condição de treino AB/BC (Treino misto). Nessa condição apresentaram-se dois blocos de tentativas. Cada bloco com seis tentativas da relação AB e seis da relação BC. Os blocos diferiram apenas quanto a ordem de apresentação das tentativas. Apenas três tentativas em cada bloco foram consequenciadas. As seguintes instruções orais antecederam essa condição:

"A sua tarefa é igual à anterior. Tudo que você tem que fazer é tocar na figura da parte de cima da folha e em seguida tocar uma das frações laterais. Apenas algumas vezes será dito a você se sua escolha foi certa ou errada. Quando nada for dito você pode ter acertado ou errado. Entendeu?"

O critério adotado para o encerramento de todas as condições de treino foi o acerto de 100% de tentativas a partir da exposição ao segundo bloco de tentativas. Caso o critério não fosse demonstrado em até 40 blocos de tentativas o participante retornava à condição anterior e, após atingir o critério, avançava novamente para as demais condições.

Condição de testes de equivalência:

Após os treinos AB e BC, foram realizados testes para avaliar a emergência das relações BA/CB (simetria) e AC/CA (transitividade/equivalência). Cada teste,

programado separadamente, consistiu na apresentação alternada de dois blocos de tentativas. Cada bloco foi composto por 12 tentativas. No teste de simetria três tentativas foram das relações BA e três das relações CB. Foram inseridas ainda seis relações dos treinos AB e BC para as quais foram liberadas conseqüências. Contudo, apenas quatro dessas seis relações de treino foram conseqüências em cada bloco de tentativas. De forma semelhante, no teste de transitividade/equivalência, três tentativas foram da relação AC, três CA e seis das relações AB e BC. Os dois blocos da condição de simetria e os dois da condição de transitividade/equivalência diferiram apenas na ordem de apresentação das tentativas. Os participantes que não demonstraram o critério nas condições de teste de simetria e transitividade/equivalência passaram pelo treino direto dessas condições. O treino consistiu na repetição dos blocos de testes com todas as tentativas sendo agora conseqüenciadas. As instruções para os testes de simetria e transitividade/equivalência foram as mesmas das condições de treino AB, BC e AD.

Programaram-se dois critérios para encerrar essas condições de teste. Primeiro, se o participante tivesse 100% de acerto a partir do segundo bloco de tentativas. Segundo, se houvesse algum erro a partir do segundo bloco o participante faria blocos adicionais até demonstrar 100% de acerto caso o desempenho de um bloco para outro fosse crescente. Contudo, se o desempenho diminuísse de um bloco para outro o teste era suspenso e as relações diretamente treinadas. Esses treinos consistiram na apresentação dos mesmos blocos de testes com conseqüências programadas para todas as tentativas.

Condição de teste de expansão das classes de equivalência:

O teste de expansão das classes de equivalência D-(ABC) ocorreu após o treino da relação AD e avaliou a ocorrência das seguintes relações: DA, DB, BD, DC e CD. O

teste consistiu na apresentação de dois blocos de tentativas. Cada bloco teve três tentativas de cada relação (variando a posição da comparação correta) e mais cinco tentativas de treinos anteriores (AB e BC) escolhidas aleatoriamente. A diferença entre o bloco 1 e o 2 foi a ordem de apresentação das tentativas.

As instruções e o critério para encerrar essa condição foram idênticos aos das condições de simetria e transitividade/equivalência.

Os participantes que não demonstraram o critério no teste de expansão das classes (ou expansão da rede) passaram pelo treino direto dessa condição. O treino consistiu na aplicação dos blocos de testes com todas as tentativas sendo agora conseqüenciadas. As instruções foram as mesmas das condições de treino AB, BC e AD.

Condições de testes de generalização:

Ocorreram dois testes de generalização. O primeiro foi após a condição de teste de transitividade/equivalência ou do treino dessas relações para quem não demonstrou o critério durante os testes. Nessa condição, testou-se as relações entre os estímulos dos conjuntos E e F. Foram testadas as relações E1F1, E2F2, E3F3, F1E1, F2E2 e F3E3. Os estímulos de comparação corretos foram apresentados em três posições diferentes (esquerda, centro e direita) para cada relação e apresentadas sem conseqüência. Nessa condição, incluíram-se ainda quatro tentativas de condições de treinos anteriores, as quais receberam conseqüências e compuseram um bloco com 22 tentativas.

A segunda condição de teste de generalização, denominado como generalização 2, ocorreu após a condição de teste de expansão das classes de equivalência (ou de treino dessas relações para quem não demonstrou o critério durante os testes). Apresentou-se um bloco com 30 tentativas das relações E1G1, E2G2, E3G3, G1E1,

G2E2, G3E3, F1G1, F2G2, F3G3, G1F1, G2F2 e G3F3, com as comparações corretas variando em duas de três posições (esquerda, centro ou direita). Acrescentaram-se ainda a esse bloco seis tentativas de relações de condições anteriores de treino, as quais foram as únicas conseqüenciadas.

Não houve treino direto das relações testadas para os participantes que não demonstraram o critério em nenhum dos testes de generalização. As instruções foram as mesmas da condição de treino AB/BC (treino misto). O critério de encerramento dessas condições foi a realização de um único bloco de tentativas.

Grupo Instrução Programada:

O grupo Instrução Programada (GIP) passou pelas mesmas condições e critérios do grupo equivalência (GEQ). Contudo, os participantes que não tiveram 100% de acertos nos pré-testes das condições AB, BC e AD ou não demonstram o critério nos testes de simetria, transitividade/equivalência e expansão das classes, ao invés de serem submetidos aos treinos de relações condicionais por meio do procedimento de pareamento com o modelo, passaram pelo treino com instruções programadas. Esses treinos consistiram na aplicação de exercícios graduais, apresentados de forma escrita, sobre os passos e as operações de multiplicação e divisão necessárias para a resolução dos problemas fracionários apresentados nessas condições. Cada treino foi apresentado em apostilas com um exercício de cada relação testada. Por exemplo, quando o exercício apresentou a relação entre o estímulo pictórico correspondente a $\frac{1}{3}$ como modelo e as comparações $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{5}$ (relação AB) os participantes foram instruídos a contar o número de partes em que a figura foi dividida e colocar o resultado no lugar indicado (na apostila) para o denominador e a contar o número de partes que estava sombreada na figura e colocar no lugar indicado (na apostila) para o numerador. Na

relação BC, se o estímulo de modelo fosse a fração numérica $1/3$ e a comparação a fração $2/6$, por exemplo, os participantes foram instruídos a multiplicar o número um por dois e colocar o resultado no lugar indicado para o numerador e multiplicar o número três por dois e colocar no lugar indicado para o denominador. Problemas envolvendo operações de divisão (relação CB, por exemplo) foram instruídos de forma semelhante (ver Anexo C).

Os participantes que não demonstraram o critério nos pré-testes ou testes de cada condição programada e que precisaram, portanto, ser treinados nas relações testadas, tiveram tempo livre para resolver os exercícios na presença do experimentador, o qual corrigia os problemas imediatamente após a finalização da tarefa. Quando demonstraram 100% de acertos nos treinos, os participantes passaram pelos pós-testes das relações avaliadas de forma idêntica aos pós-testes programados para o grupo GEQ (no caso das condições AB, BC e AD) e, em seguida, prosseguiram para a próxima condição. Caso contrário, fizeram mais blocos de treino com instruções programadas (ver Quadro 2). De forma semelhante, os participantes que não tiveram 100% de acertos nos testes de simetria, transitividade/equivalência e de expansão das classes, fizeram o treino de instrução programada dessas condições e, após demonstrarem 100% de acertos, prosseguiram direto para a próxima condição, ou seja, não passaram pelo pós-teste programado para essas condições. Para todas as condições, caso os desempenhos fossem inferiores a 100% no primeiro treino com instrução programada, os erros eram mostrados aos participantes e, em seguida, solicitado que fizessem novamente a resolução completa de um novo bloco de exercícios. Somente após demonstrarem 100% de acertos os participantes prosseguiram para a próxima condição, independentemente do número de blocos de exercícios realizados.

As instruções orais dadas aos participantes nessa condição foram as seguintes:

“Você irá agora resolver alguns exercícios sobre os problemas que você acabou de fazer. Os exercícios estão nessa apostila e serão resolvidos a lápis. Leia as instruções com bastante atenção. Quando terminar me avise e eu lhe direi quais foram resolvidos corretamente e quais ficaram incorretos. Se você errar algum fará todo exercício novamente. Você entendeu?”.

Grupo Instrução Programada mais Equivalência:

O grupo Instrução Programada mais Equivalência (GIPEQ) passou pelas mesmas condições programadas para os grupos Instrução Programada e Equivalência. Contudo, os participantes desse grupo que não demonstram 100% de acerto nos pré-testes das condições AB, BC e AD e nos testes de simetria, transitividade/equivalência e expansão das classes, resolveram primeiro exercícios na forma de instrução programada (idêntico ao que fizeram os participantes do grupo GIP) e, imediatamente após demonstrarem o critério, passaram pelo treino de relações condicionais (idêntico ao do grupo GEQ). Somente então se submeteram aos pós-testes das condições AB, BC e AD ou passaram para a próxima condição no caso dos testes de simetria, transitividade/equivalência e teste de expansão das classes de equivalência. Os critérios e instruções foram os mesmos dos grupos GIP e GEQ.

Resultados

Os dados analisados referem-se aos desempenhos dos participantes nas avaliações inicial e final, nas condições de treinos e testes de relações condicionais segundo o paradigma de equivalência de estímulos (Sidman e Taiby, 1982) e nas condições de treino com instrução programada. O delineamento programou avaliações dos desempenhos dos participantes ao longo de várias condições experimentais, o que enfatiza o interesse no dado individual. Contudo, dados foram também analisados comparando-se os desempenhos dos grupos, o que permitiu analisar o efeito isolado do treino em relações condicionais e do treino com instruções programadas, bem como a interação de ambos sobre a formação e a expansão das classes de equivalência.

O Quadro 3 apresenta o desempenho dos participantes em problemas envolvendo operações simples de divisão e multiplicação. Em geral, os participantes demonstraram 100% de acertos tanto nos problemas de multiplicação quanto de divisão, exceto P2 na multiplicação e P4 na divisão, com 86% de acertos, ambos do GEQ. O que permite afirmar que todos os participantes dominavam essas habilidades antes do experimento.

Quadro 3 - Porcentagem de acertos nas operações de multiplicação e divisão para os participantes dos grupos Equivalencia (GEQ), Instrução Programada (GIP) e Instrução Programada mais Equivalência (GIPEQ).

Grupo	Partic.	Multipl	Divisã	Grupo	Partic.	Multipl	Divisão
GEQ	P1	100	100	GIPEQ	P11	100	100
	P2	86	100		P12	100	100
	P3	100	100		P13	100	100
	P4	100	86		P14	100	100
	P5	100	100		P15	100	100
GIP	P6	100	100	-	-	-	
	P7	100	100	-	-	-	
	P8	100	100	-	-	-	
	P9	100	86	-	-	-	
	P10	100	100	-	-	-	

A Tabela 1 mostra os desempenhos observados nos três grupos experimentais e nos três grupos de controle nas condições de avaliação inicial e final. De forma geral, nos grupos experimentais e nos de controle, os participantes demonstraram maiores escores quando os problemas foram expressos de forma absoluta do que na versão relativa, tanto na avaliação inicial quanto na final. Dentre os participantes dos grupos

Tabela 1- Porcentagem e média de acertos nas frações expressas de forma absoluta e relativa nas avaliações inicial (AI) e final (AF) para os participantes dos grupos Equivalencia(GEQ), Instrução Programada (GIP) e Equivalencia mais Instrucao Programada (GIPEQ) e seus respectivos grupos de controle.

	Grupos Experimentais					Grupos Controles				
	Part.	Absolutas		Relativas		Part.	Absolutas		Relativas	
		A.I	A. F.	A. I.	A. F.		A.I	A. F.	A. I.	A. F.
GIP	P1	40	90	0	10	P16	90	100	10	0
	P2	70	100	0	75	P17	100	90	10	5
	P3	100	100	25	65	P18	100	50	65	15
	P4	70	90	0	55	P19	80	70	15	15
	P5	40	100	20	35	P20	100	90	0	5
	\bar{X}	64	96	9	48	\bar{X}	94	80	20	8
GEQ	P6	50	80	0	30	P21	90	100	30	35
	P7	100	90	5	20	P22	80	70	0	5
	P8	90	90	5	50	P23	90	100	5	85
	P9	100	90	5	70	P24	100	90	15	35
	P10	80	80	5	95	P25	100	100	10	10
	\bar{X}	84	86	4	53	\bar{X}	92	92	12	34
GIPEQ	P11	70	100	0	75	P26	60	100	20	30
	P12	90	100	0	60	P27	90	80	10	20
	P13	50	80	0	60	P28	80	80	20	30
	P14	80	90	0	70	P29	60	50	30	10
	P15	100	90	0	80	P30	70	60	20	35
	\bar{X}	78	92	0	69	\bar{X}	72	74	20	25

experimentais (GIP, GEQ e GIPEQ) os resultados observados nos exercícios onde os problemas apresentaram frações expressas de forma absoluta mostraram aumentos nos desempenhos para nove dos 15 participantes da avaliação inicial para a final (P1, P2, P4, P5, P6, P11, P12, P13 e P14).

No grupo experimental GIP a média de acertos com frações absolutas subiu de 64%, na avaliação Inicial, para 96% na avaliação final. Quatro dos cinco participantes (P1, P2, P4 e P5) apresentaram ganhos da avaliação inicial para a Final, exceto P3 que teve 100% de acertos nas duas avaliações. Por outro lado, no grupo de controle os participantes demonstraram, na avaliação final, redução de 14 pontos na porcentagem média de acertos com os escores diminuindo de 94% para 80%. Apenas P16 aumentou 10 pontos percentuais na última avaliação. Os demais participantes diminuíram seus escores da avaliação inicial para a final.

No grupo experimental GEQ observou-se aumento de apenas 2% na porcentagem média de acertos da avaliação inicial (84%) para a final (86%) com frações expressas de forma absoluta. Apenas P6 aumentou a porcentagem média de acertos, passando de 50% para 80%. Os participantes P7 e P9 apresentaram redução de 10 pontos percentuais em seus escores na avaliação final, enquanto que P8 e P10 tiveram os mesmos desempenhos nas duas avaliações. No grupo de controle, por outro lado, os participantes mantiveram, na avaliação final, a mesma média de acertos da avaliação inicial (92%). Apenas P21 e P23 tiveram ganhos na porcentagem de acertos. Destaca-se o participante P25 que acertou 100% dos problemas nas duas avaliações.

No grupo experimental GIPEQ a média de acertos aumentou de 78% para 92%, sendo que, quatro dos cinco participantes (P11, P12, P13 e P14) aumentaram o desempenho da avaliação inicial para a final. Por outro lado, no grupo de controle os participantes apresentaram aumento médio de 2% da avaliação inicial para a final. Apenas P26 melhorou seu desempenho e obteve ganhos de 40 pontos percentuais e demonstrou 100% de acerto na avaliação final. Os demais participantes mantiveram ou reduziram seus escores. O participante P28 manteve 80% de acerto nas duas avaliações.

Apenas os participantes dos grupos experimentais demonstraram aumentos sistemáticos da avaliação inicial para a final quando os problemas apresentaram frações na forma relativa de expressão. Os 15 participantes dos três grupos experimentais demonstraram aumentos na porcentagem de acerto da avaliação inicial para a final. Em média, o maior aumento ocorreu para o grupo GIPEQ, onde os escores passaram de 0% na avaliação inicial para 69% na avaliação final. O segundo maior aumento médio ocorreu no GEQ, cujo desempenho médio subiu de 4% para 53%, o que significou um ganho de 49 pontos percentuais. O grupo instrução programada (GIP) foi o que apresentou menor ganho médio da avaliação inicial para a final com os escores passando de 9% para 48%, respectivamente, o que representou um aumento de 39 pontos percentuais.

Diferentemente do que ocorreu nos grupos experimentais, os participantes dos três grupos de controle apresentaram ganhos assistemáticos e menores da avaliação inicial para final quando os problemas apresentaram frações expressas de forma relativa. Em média, os participantes do grupo de controle referente ao GIP demonstraram redução de 12% na avaliação final (com os acertos caindo de 20% para 8%). Apenas P20 apresentou 5% de aumento na avaliação final, os demais participantes reduziram ou mantiveram seus desempenhos, sendo que o maior escore foi igual a 15% de acertos na avaliação final. No grupo de controle referente ao GEQ, a média de acertos aumentou 22 pontos percentuais, passando de 12% para 34%. O participante P25 manteve seu desempenho nas duas avaliações (10% de acerto). Os demais participantes demonstraram aumentos em seus escores. O maior aumento ocorreu para P23, cujos acertos subiram de 5% para 85% na avaliação final. No grupo de controle referente ao GIPEQ, o desempenho médio aumentou cinco pontos percentuais da avaliação inicial para a final. Apenas P29 diminuiu seu desempenho em 20 pontos percentuais. Três

outros participantes (P26, P27 e P28) tiveram ganhos de 10% na última avaliação. O participante P30 aumentou os acertos em 15%. Em resumo, os maiores desempenhos ocorreram quando as frações foram expressas em sua forma absoluta, tanto na avaliação inicial quanto na final, em especial dentre os participantes dos grupos experimentais. Aumentos sistemáticos na porcentagem de acerto quando os problemas apresentaram frações expressas de forma relativa ocorreram apenas para os grupos experimentais. Os maiores ganhos na porcentagem de acertos nas frações expressas de forma relativa ocorreram para os participantes do grupo Instrução Programada mais Equivalência (GIPEQ) e os menores entre os participantes do grupo Instrução Programada (GIP).

Os desempenhos dos participantes dos grupos GIP, GEQ e GIPEQ nas condições de treino AB, BC e AB/BC (misto) podem ser vistos na Tabela 2. Na condição AB, as médias de acertos foram de 100% para os participantes dos grupos GEQ e GIPEQ. No grupo GIP esse valor foi de 77.2%. A análise dos dados individuais mostrou que três dos cinco participantes do grupo GIP (P2, P3 e P4) e todos dos grupos GEQ e GIPEQ tiveram 100% de acertos no pré-teste e não passaram pelos treinos dessas relações. Apenas os participantes P1 e P5 (GIP) tiveram desempenhos inferiores a 100% e passaram pelo treino dessas relações. Após o treino com instrução programada esses dois participantes apresentaram 100% de acertos após a exposição a dois blocos de tentativas de instrução programada.

Na condição BC, os três grupos tiveram menos de 100% na porcentagem média de acertos. Os maiores valores ocorreram para os grupos GIP e GEQ cujos índices foram iguais a 86.6%. A menor média foi para o GIPEQ com 62% de acertos. A análise dos dados individuais mostrou que quatro dos cinco participantes do grupo GIP tiveram 100% de acertos no pré-teste (P2, P3, P4 e P5). Apenas P1 precisou de treino por ter obtido 33% de acertos no pré-teste. Em relação aos outros grupos, apenas dois

participantes do GEQ (P9 e P10) e dois do GIPEQ (P11 e P14) demonstraram 100% de acertos no pré-teste. Os demais participantes (P1 no GIP, P6, P7 e P8 no GEQ e P12, P13 e P15 no GIPEQ) tiveram escores inferiores a 100% e passaram por treino das relações condicionais dessa condição. Todos os participantes que necessitaram de treino direto nessa condição demonstraram 100% de acertos no pós-teste com a exposição a dois blocos de instrução programada.

Tabela 2 - Porcentagem de acertos nas condições de pré- e pós-testes e número de blocos de treino (N) realizados nas condições AB e BC e número de blocos (NB) necessários para demonstração do critério de cem por cento de acerto na condição de treino AB/BC para os participantes dos grupos equivalência (GEQ), instrução programada (GIP) e instrução programada mais equivalência (GIPEQ).

Grupo	Particip	Condição AB			Condição BC			AB/BC NB
		Pré-t.	N	Pós-t.	Pré-t.	N	Pós-t.	
GIP	P1	22	2	100	33	2	100	2
	P2	100	-	-	100	-	-	2
	P3	100	-	-	100	-	-	2
	P4	100	-	-	100	-	-	3
	P5	64	2	100	100	-	-	2
	\bar{X}	77.2	2	100	86.6	-	100	2,2
GEQ				-				
	P6	100	-	-	89	2	100	2
	P7	100	-	-	89	2	100	2
	P8	100	-	-	55	2	100	2
	P9	100	-	-	100	-	-	2
	P10	100	-	-	100	-	-	2
\bar{X}	100			86.6	2	100	2	
GIPEQ	P11	100	-	-	100	-	-	2
	P12	100	-	-	33	2	100	2
	P13	100	-	-	44	2	100	2
	P14	100	-	-	100	-	-	2
	P15	100	-	-	33	2	100	2
	\bar{X}	100		-	62	2	100	2

Na condição AB/BC (treino misto) todos os participantes, excetuando-se P4 do GIP, obtiveram 100% de acertos em dois blocos de tentativas (mínimo exigido), o que sugere que eles aprenderam as relações ensinadas nas condições anteriores.

A Tabela 3 apresenta a porcentagem de acertos por blocos de tentativas nos testes e treinos das condições BA/CB (simetria) e AC/CA (transitividade/equivalência) para os participantes do grupo Instrução Programada (GIP), Equivalência (GEQ) e Instrução Programada mais Equivalência (GIPEQ). De forma geral, as médias de

Tabela 3 - Porcentagem de acertos por bloco de tentativa (B) nas condições BA/CB (simetria) e AC/CA (equivalência/transitividade) para os participantes dos grupos Instrução Programada (GIP), Equivalência (GEQ) e Equivalência mais Instrução Programada (GIPEQ).

Grupo	Partic	Simetria				Transitividade/equivalência						
		Teste		Treino		Teste			Treino			
		B1	B2	B1	B2	B1	B2	B3	B4	B5	B1	B2
GIP	P1	83	66	100	100	50	67	67	67	100	-	-
	P2	100	100	-	-	83	83	83	100	-	-	-
	P3	100	100	-	-	100	100	-	-	-	-	-
	P4	100	100	-	-	100	100	-	-	-	-	-
	P5	100	100	-	-	89	100	-	-	-	-	-
	\bar{X}	96.6	100	-	-	84.4	90	7.5	83.5	-	-	-
GEQ	P6	100	100	-	-	83	67	-	-	-	100	100
	P7	100	100	-	-	83	67	-	-	-	67	100
	P8	83	100	-	-	67	100	-	-	-	-	-
	P9	100	100	-	-	100	100	-	-	-	-	-
	P10	100	100	-	-	100	100	-	-	-	-	-
	\bar{X}	96.6	100	-	-	86.6	86.8	-	-	-	83.5	100
GIPEQ	P11	100	100	-	-	66	100	-	-	-	-	-
	P12	83	100	-	-	83	100	-	-	-	-	-
	P13	66	66	100	100	66	33	-	-	-	100	100
	P14	100	100	-	-	66	100	-	-	-	-	-
	P15	100	100	-	-	100	100	-	-	-	-	-
	\bar{X}	89.8	93.2	-	-	76.6	86.6	-	-	-	-	-

acertos aconteceram de maneira crescente nas duas condições. Na condição de teste BA/CB (simetria), 13 dos 15 participantes experimentais demonstraram essas relações

em dois blocos de tentativas (número mínimo exigido). Apenas P1 do GIP e P13 do GIPEQ obtiveram escores inferiores a 100% e passaram pelo treino dessas relações. O participante P1 (GIP) demonstrou o critério com a exposição a dois blocos de treino com instrução programada e P13 (GIPEC) com dois blocos de treino de relações condicionais mais instrução programada. No grupo GEQ, todos os participantes demonstraram 100% de acertos no teste de simetria.

Na condição de teste de transitividade/equivalência (AC e CA), 12 dos 15 participantes demonstraram o critério durante os testes. Dentre esses, 10 demonstraram as relações testadas em apenas dois blocos de tentativas (P3, P4 e P5 no GIP; P8, P9 e P10 no GEQ e todos do GIPEQ). Os participantes P1 e P2 do GIP também demonstraram essas relações, porém, precisaram de cinco e quatro blocos de tentativas, respectivamente. Apenas os participantes P6 e P7 do GEQ e P13 do GIPEQ precisaram de treino direto nessa condição, mas demonstraram o critério em dois blocos de tentativas (mínimo exigido). Os desempenhos apresentados por esses participantes permitem afirmar que eles formaram três classes de equivalência de três membros cada (A1B1C1, A2B2C2 e A3B3C3). Em outras palavras, eles formaram três classes de equivalência entre os estímulos pictóricos, suas representações absolutas e suas representações relativas. Por exemplo, agruparam a figura de $\frac{1}{3}$, com a fração $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{6}$. O mesmo ocorreu com as frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{5}$.

A porcentagem de acertos nos pré- e pós-testes e o número de blocos de treino (N) realizados na condição AD e a porcentagem de acertos por bloco de tentativas (B) no teste de expansão da rede D-(ABC) para os participantes dos grupos Instrução Programada (GIP), Equivalência (GEQ) e Instrução Programada mais Equivalência (GIPEQ) são apresentados na Tabela 4. Na Condição AD, apenas um participante do

Tabela 4 - Porcentagem de acertos no pré-teste (Prt) e no pós-teste (Pst), número de blocos realizados no treino AD (N) e porcentagem de acertos por bloco de tentativas no teste de expansão das classes (B) para os participantes do grupos Instrução Programada (GIP), Equivalência (GEQ) e Equivalência mais Instrução Programada (GIPEQ).

	Part	AD			D-(ABC)												
		Prt	N	Pst	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10	B11	B12	B13
GIP	P1	88	3	100	73	80	80	66	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	P2	55	2	100	60	73	73	73	80	93	80	-	-	-	-	-	-
	P3	78	2	100	80	80	80	73	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	P4	66	2	100	80	80	60	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	P5	100	-	-	80	80	80	80	86	80	-	-	-	-	-	-	-
	\bar{X}	77	2.2	100	75	79	75	73	83	86	-	-	-	-	-	-	-
GEQ	P6	100	-	-	80	80	70	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	P7	55	3	100	47	67	60	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	P8	89	2	100	80	93	73	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	P9	100	-	-	73	87	87	87	87	87	87	87	87	87	87	87	100
	P10	100	-	-	93	100	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	\bar{X}	100	2.2	100	75	85	72	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
GIPEQ	P11	44	2	100	60	73	40	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	P12	66	2	100	73	60	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	P13	44	2	100	47	27	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	P14	100	2	-	60	53	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	P15	100	2	-	47	47	40	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	\bar{X}	71	2	100	57	52	40	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

grupo GIP (P5) acertou 100% das tentativas no pré-teste. Os demais (P1, P2, P3 e P4) tiveram desempenhos inferiores a 100% e passaram pelo treino da condição. No entanto, todos demonstraram o critério em no máximo três blocos de instruções programadas. No grupo GEQ, três dos cinco participantes (P6, P9 e P10) obtiveram 100% de acertos no Pré-teste e não passaram pelo treino dessas relações. Os participantes P7 e P8 que fizeram esse treino demonstraram o critério em três e dois blocos de tentativas, respectivamente. No GIPEQ, dois participantes (P14 e P15), apresentaram 100% de acertos no pré-teste e não fizeram o treino. Por outro lado, os participantes P11, P12 e P13 tiveram escores inferiores a 100% no pré-teste e

precisaram passar pelo treino. Contudo, todos demonstraram o critério em dois blocos de tentativas.

Na condição de teste de expansão da rede, denominada como D-(ABC), as porcentagens de acertos diminuíram ao longo dos blocos de tentativas nos três grupos experimentais. Os participantes do grupo GIP, em especial P1, P3 e P4, demonstraram escores decrescentes ao longo das tentativas e, em geral, realizaram maior número de blocos que os participantes dos grupos GEQ e GIPEQ. No GIP, embora os desempenhos tenham sido decrescentes, a maioria dos escores ficou na casa de 80% de acertos. Nenhum participante desse grupo demonstrou 100% de acertos ao longo dos blocos de tentativas realizados. No grupo GEQ, dois dos cinco participantes acertaram 100% das tentativas. Enquanto P10 precisou de dois blocos de tentativas para demonstrar as novas relações não ensinadas diretamente, P9 apresentou desempenhos crescentes em 13 blocos realizados. Contudo, os demais participantes (P6, P7 e P8) demonstraram escores decrescentes ao longo dos blocos de tentativas. Em geral, os escores observados ficaram em no máximo 80% de acertos. Todos os participantes do GIPEQ demonstraram decréscimos nos escores ao longo dos blocos de testes, sendo que os valores observados foram os menores das três condições (predominância de 40% de acerto). Apenas P11 e P12 atingiram escores na casa de 70% de acertos, mas também reduziram o desempenho em no máximo três blocos de tentativas. Em resumo, os participantes dos grupos GIP e GEQ demonstraram escores maiores no teste de expansão da rede. Contudo, os dados mostraram que nos três grupos, exceto P9 do GEQ, os desempenhos nessa condição foram apenas moderados ou limitados.

A Tabela 5 apresenta a porcentagem de acertos na condição de treino de expansão da rede para os participantes dos grupos Instrução Programada (GIP), Equivalência (GEQ) e Instrução Programada mais equivalência (GIPEQ). De forma

geral, os participantes dos três grupos experimentais tiveram médias crescentes na porcentagem de acertos e demonstraram as relações diretamente treinadas com a exposição a poucos blocos de tentativas (oito blocos aproximadamente). Todos os participantes do grupo GIP precisaram de treino direto para aprender as relações D-(ABC). Três, dos cinco integrantes desse grupo, precisaram de quatro blocos de tentativas para atingir 100% de acertos (P2, P4 e P5), enquanto P1 e P3 precisaram de oito e 13 blocos, respectivamente.

Tabela 5 - Porcentagem de acertos por bloco de tentativas na condição de treino de expansão das classes para os participantes dos grupos Instrução Programada (GIP), Equivalência (GEQ) e Equivalência mais Instrução Programada (GIPEQ).

	Part	Blocos																				
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
GIP	P1	75	90	80	80	95	85	90	100	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	P2	90	95	95	100	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	P3	80	80	87	73	73	80	80	80	80	87	93	93	100	-	-	-	-	-	-	-	-
	P4	80	80	85	100	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	P5	90	95	95	100	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	\bar{X}	83	88	88	91	84	82	85	90	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
GEQ	P6	73	80	66	80	86	86	86	73	86	92	86	80	92	73	80	80	80	92	92	92	100
	P7	67	73	87	93	87	87	100	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	P8	60	73	80	93	86	93	100	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	P9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	P10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	\bar{X}	67	75	78	89	86	89	95	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
GIPEQ	P11	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	P12	100	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	P13	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	P14	47	100	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	P15	100	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
\bar{X}	82	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	

No grupo GEQ, dois participantes (P9 e P10) não precisaram de treino direto porque demonstraram o critério no teste dessa condição. Os demais integrantes P6, P7 e P8 foram treinados, sendo que o primeiro precisou de 21 blocos de tentativas e os dois últimos de apenas sete para acertarem 100% das tentativas. Apenas os participantes P12, P14 e P15 do grupo GIPEQ fizeram o treino de expansão da rede D-(ABC) após o

treino das relações precorrentes dessa condição. Dois deles, P12 e P15, acertaram todas as tentativas em um bloco, enquanto um participante (P14) teve 100% de acertos no segundo bloco de tentativas. Os participantes P11 e P13 não foram submetidos ao treino dessa condição. Em geral, os participantes demonstraram as relações diretamente treinadas na condição D-(ABC) com a exposição a poucos blocos de tentativas, em especial, na condição GIPEQ.

Os desempenhos obtidos nos testes de generalização 1 e 2 estão apresentados na Tabela 6. Na condição de teste de generalização 1 as médias de acertos foram 100%, 88.4% e 76.2 para os grupos GIP, GEQ e GIPEQ, respectivamente. Quatro dos cinco participantes do GIP (P2, P3, P4 e P5) acertaram 100% das tentativas. Apenas P1 teve 83% de acertos.

Tabela 6- Porcentagem de acertos e média nas condições de teste de generalização 1 (TG1) e teste de generalização 2 (TG2) para os participantes dos grupos instrução programada (GIP), equivalência (GEQ) e instrução programada e equivalência (GIPEQ).

Condição	Participante	TG1	TG2
GIP	P1	83	36
	P2	100	64
	P3	100	67
	P4	100	37
	P5	100	78
	\bar{X}	96.6	56.4
GEQ	P6	100	59
	P7	67	71
	P8	75	39
	P9	100	46
	P10	100	100
	\bar{X}	88.4	63
GIPEQ	P11	100	75
	P12	66	58
	P13	58	54
	P14	66	63
	P15	91	72
	\bar{X}	76.2	64.4

Na condição GEQ, o menor escore ocorreu para o participante P7 e ficou na casa

de 67%, sendo que outros três tiveram 100% de acertos. Os menores escores foram observados no GIPEQ. Contudo, nessa condição os valores na porcentagem de acertos para quatro dos cinco participantes (P12, P13, P14 e P15) oscilaram entre 58% e 91%, sendo que P11 acertou 100% das tentativas.

Na condição de teste de generalização 2, todos os participantes, exceto P10 do GEQ, tiveram escores inferiores a 100% de acertos, sendo que todas as médias foram inferiores às da condição de teste de generalização 1. A menor média ficou com os participantes do GIP (56.4%), seguida pela média do GEQ (63%) e GIPEQ (64.4%). No GIP os escores oscilaram entre 36% e 78%. No GEQ entre 39% e 100% e no GIPEQ entre 54% e 75%. Em resumo, observou-se que os maiores escores ocorreram no teste de generalização 1, sendo que no testes de generalização 2 as porcentagens de acertos foram abaixo de 60% para sete dos 15 participantes (P1, P4, P6, P8, P9, P12, e P13).

A Tabela 7 apresenta a porcentagem de acertos e a de erros cometidos em cada comparação incorreta de cada relação da condição de teste de expansão da rede para os participantes dos grupos Instrução Programada (GIP), Equivalência (GEQ) e Instrução Programada mais Equivalência (GIPEQ). Observou-se que nos três grupos experimentais a porcentagem de acertos foi inferior a 100%. No grupo Instrução Programada (GIP), em 10 das 15 relações testadas (D1A1, B1D1, B2D2, B3D3, D1B1, D2B2, D3B3, C1D1, C2D2 e D1C1) os valores foram superiores a 70%. O melhor desempenho foi na relação D3B3 com 93% de acerto. Nas cinco relações restantes os escores ficaram em torno de 50% de acertos. Com relação às respostas incorretas, observou-se que em cinco relações os participantes cometeram erros escolhendo apenas uma das comparações (D1A1, B1D1, D1B1, D3B3 e C1D1). Nesse caso, os erros ocorreram unicamente pela escolha da comparação na qual o denominador da fração apresentou o menor valor numérico. Nas demais relações, os erros foram distribuídos

entre as duas comparações incorretas. Contudo, em cinco das relações onde os erros foram distribuídos (D2A2, D2B2, D1C1, D2C2 e D3C3) a maior porcentagem de respostas incorretas ocorreu também na fração com o menor denominador. Portanto, em 10 das 15 relações testadas os erros ocorreram com maior frequência pela escolha do numerador que apresentou o menor valor numérico no denominador.

Tabela 7 - Porcentagem de acertos (PA) e de erros em cada relação testada na condição de teste de expansão das classes D-(ABC) para os participantes dos grupos Instrução Programada (GIP), Equivalência (GEQ) e Instrução Programada mais Equivalência (GIPEQ).

Relação	GIP			GEQ			GIPEQ		
	PA	Erros Alternativas		PA	Erros Alternativas		PA	Erros Alternativas	
D1A1 (3/9-1/3F)	86	A2(1/4F) 14	A3(1/5F) 0	96	A2(1/4F) 4	A3(1/5F) 0	75	A2(1/4F) 25	A3(1/5F) 0
D2A2 (3/12-1/4F)	57	A1(1/3F) 36	A3(1/5F) 7	83	A1(1/3F) 17	A3(1/5F) 0	47	A1(1/3F) 6	A3(1/5F) 47
D3A3 (3/15-1/5F)	-	A1(1/3F) -	A2(1/4F) -	-	A1(1/3F) -	A2(1/4F) -	-	A1(1/3F) -	A2(1/4F) -
B1D1 (1/3-3/9)	86	D2(3/12) 14	D3(3/15) 0	92	D2(3/12) 8	D3(3/15) 0	67	D2(3/12) 26	D3(3/15) 7
B2D2 (1/4-3/12)	71	D1(3/9) 14	D3(3/15) 14	83	D1(3/9) 17	D3(3/15) 0	60	D1(3/9) 8	D3(3/15) 32
B3D3 (1/5-3/15)	86	D1(3/9) 7	D2(3/12) 7	83	D1(3/9) 8	D2(3/12) 8	53	D1(3/9) 13	D2(3/12) 33
D1B1 (3/9-1/3)	86	B2(1/4) 14	B3(1/5) 0	83	B2(1/4) 0	B3(1/5) 17	53	B2(1/4) 38	B3(1/5) 9
D2B2 (3/12-1/4)	71	B1(1/3) 21	B3(1/5) 7	83	B1(1/3) 8	B3(1/5) 8	53	B1(1/3) 47	B3(1/5) 0
D3B3 (3/15-1/5)	93	B1(1/3) 7	B2(1/4) 0	92	B1(1/3) 0	B2(1/4) 8	43	B1(1/3) 14	B2(1/4) 43
C1D1 (2/6-3/9)	71	D2(3/12) 29	D3(3/15) 0	8	D2(3/12) 92	D3(3/15) 0	50	D2(3/12) 50	D3(3/15) 0
C2D2 (2/8-3/12)	71	D1(3/9) 14	D3(3/15) 14	58	D1(3/9) 0	D3(3/15) 42	50	D1(3/9) 21	D3(3/15) 29
C3D3 (2/10-3/15)	50	D1(3/9) 21	D2(3/12) 29	75	D1(3/9) 17	D2(3/12) 8	40	D1(3/9) 40	D2(3/12) 20
D1C1 (3/9-2/6)	79	C2(2/8) 14	C3(2/10) 7	29	C2(2/8) 0	C3(2/10) 71	50	C2(2/8) 10	C3(2/10) 40
D2C2 (3/12-2/8)	50	C1(2/6) 38	C3(2/10) 14	0	C1(2/6) 100	C3(2/10) 0	40	C1(2/6) 53	C3(2/10) 6
D3C3 (3/15-2/10)	57	C1(2/6) 29	C3(2/10) 14	59	C1(2/6) 23	C2(2/8) 18	60	C1(2/6) 20	C3(2/10) 20

No grupo equivalência (GEQ), os participantes tiveram desempenhos acima de 80% de acertos em oito das 15 relações testadas (D1A1, D2A2, B1D1, B2D2, B3D3, D1B1, D2B2 e D3B3). As relações C1D1 e D2C2 foram onde ocorreram os menores

escores com os participantes acertando 8% e 0% das tentativas, respectivamente. Nas demais relações a porcentagem de acertos oscilou de 29% a 59% entre os participantes. Com relação aos erros, observou-se que em 10 das 15 relações testadas os participantes erraram escolhendo apenas uma das comparações incorretas (D1A1, D2A2, B1D1, B2D2, D1B1, D3B3, C1D1, C2D2, D1C1 e D2C2). Em seis dessas 10 relações, excetuando-se as relações D1B1, D3B3 e D1C1, os erros ocorreram pela escolha da comparação incorreta na qual a fração apresentou o menor valor numérico no denominador. Por exemplo, na relação D2C2 ($3/12$ como amostra e $2/8$ como comparação correta) as comparações incorretas foram $2/6$ (C1) e $2/10$ (C3), sendo que neste caso 100% dos participantes escolheram $2/6$ (C1) como resposta. Incluem-se nessa análise as relações onde as comparações foram apresentadas de forma pictórica (figuras representativas de frações). Nesse caso, os participantes escolheram as figuras em que o inteiro foi dividido em menor número de partes. Destacam-se as relações C1D1 e D2C2 nas quais as porcentagens de erros foram 92% e 100%, respectivamente, em apenas uma das alternativas de comparação. Nas relações D1B1, D3B3, D1C1 e C2D2 os erros ocorreram também pela escolha de uma única alternativa. Porém, nessas relações as escolhas incorretas aconteceram na alternativa com o maior valor no denominador da fração. Nas demais relações ocorreram escolhas nas duas comparações incorretas. No entanto, em duas dessas relações (C3D3 e D3C3), apesar dos erros terem sido distribuídos, a maior porcentagem ocorreu nas frações cujos denominadores tinham os menores valores. Em resumo, em oito das 14 relações (D1A1, D2A2, B1D1, B2D2, C1D1, C3D3, D2C2 e D3C3) a maior porcentagem de erros ocorreu na comparação com o menor valor numérico no denominador da fração.

No grupo Instrução Programada mais Equivalência (GIPEQ), de forma geral, os valores observados foram inferiores aos dos grupos Instrução Programada (GIP) e

Equivalência (GEQ). O melhor desempenho ocorreu na relação D1A1 com os participantes acertando 75% das tentativas, seguida da relação B1D1 com 67% de acertos. Nas demais relações os acertos oscilaram entre 40% e 60%. Com relação aos erros, observou-se que em apenas três das 15 relações testadas, os participantes erraram escolhendo apenas uma das comparações (D1A1, D2B2 e C1D1). Nessas relações, as resposta incorretas ocorreram sempre na comparação em que o denominador da fração apresentou o menor valor numérico. Nas outras 12 relações os participantes responderam nas duas comparações incorretas, sendo que em quatro delas a maior porcentagem de erros aconteceu pela escolha da comparação que apresentou o menor valor numérico no denominador da fração (B1D1, D1B1, C3D3 e D2C2). Em outras seis relações predominou a escolha da comparação com o maior valor numérico no denominador (D2A2, B2D2, B3D3, D3B3, C2D2 e D1C1). Na relação D3C3 os participantes cometeram a mesma porcentagem de erros nas duas comparações (20%). Em resumo, em todas as relações testadas os desempenhos ficaram abaixo de 100% nos três grupos de participantes. Pode-se afirmar que em aproximadamente metade das relações os erros ocorreram pela escolha da comparação onde a fração apresentou o denominador com o menor valor numérico. Esse fato foi observado em 10 das 14 relações testadas no GIP (D1A1, B1D1, D1B1, D3B3, C1D1, D2A2, D2B2, D1C1, D2C2 e D3C3) e em oito no GEQ (D1A1, D2A2, B1D1, B2D2, C1D1, C3D3, D2C2 e D3C3) e em sete no GIPEQ (D1A1, D2B2, C1D1 B1D1, D1B1, C3D3 e D2C2).

A porcentagem total de acertos e a de escolhas incorretas ocorridos em cada relação da condição de teste de generalização 1 para os participantes dos grupos Instrução Programada (GIP), Equivalência (GEQ) e Equivalência mais Instrução Programada (GIPEQ) é apresentada na Tabela 8. Em geral, observaram-se altos índices de acertos (80% ou mais) em todas as relações, exceto nas relações E3F3 e F1E1 no

grupo GIPEC. No grupo GIP, todas as relações tiveram índices elevados de acerto, no mínimo 80%, sendo que os menores escores ocorreram nas relações E2F2 e E3F3 e o maior na E1F1 (100%). No grupo GEQ, ocorreu 100% de acertos nas relações E1F1, E2F2, E3F3 e F1E1, nas demais relações, os participantes acertaram 90% das tentativas testadas. Por sua vez, no grupo GIPEQ não houve 100% de acertos em nenhuma das relações, sendo que os índices variaram entre 60% e 90%. Para três das cinco relações testadas (E1F1, E2F2 e F2E2) os escores de acertos foram iguais a 90%. O menor valor observado foi de 60% na relação F1E1. Em resumo, pode-se dizer que os participantes dos três grupos tiveram, de forma geral, altos índices de acertos em todas as relações testadas, em especial na relação EF para os participantes dos grupos GIP e GEQ.

Tabela 8 - Porcentagem de acertos (PA) e de erros em cada relação testada para os participantes dos grupos Instrução Programada (GIP), Equivalência (GEQ) e Instrução Programada mais Equivalência (GIPEQ) na condição de teste de Generalização 1.

Relação	GIP			GEQ			GIPEQ		
	PA	Erros Alternativas		PA	Erros Alternativas		PA	Erros Alternativas	
E1F1 (1/2-2/4)	100	F2(2/12)	F3(2/14)	100	F2(2/12)	F3(2/14)	90	F2(2/12)	F3(2/14)
E2F2 (1/6-2/12)	80	F1(2/4)	F3(2/14)	100	F1(2/4)	F3(2/14)	90	F1(2/4)	F3(2/14)
E3F3 (1/7-2/14)	80	F1(2/4)	F2(2/12)	100	F1(2/4)	F2(2/12)	70	F1(2/4)	F2(2/12)
F1E1 (2/4-1/2)	90	E2(1/6)	E3(1/7)	100	E2(1/6)	E3(1/7)	60	E2(1/6)	E3(1/7)
F2E2 (2/12-1/6)	90	E1(1/2)	E3(1/7)	90	E1(1/2)	E3(1/7)	90	E1(1/2)	E3(1/7)
F3E3 (2/14-1/7)	90	E1(1/2)	E2(1/6)	90	E1(1/2)	E2(1/6)	80	E1(1/2)	E2(1/6)

A análise dos erros mostrou que em três das seis relações testadas no grupo GIP (E2F2, F1E1 e F3E3) os erros ocorreram pela escolha de uma mesma alternativa e, nesse caso, a que apresentou o menor valor no denominador da fração. Resultados semelhantes foram observados no GEQ, onde os erros aconteceram de forma exclusiva nas relações F2E2 e F3E3 também pela escolha da fração com o menor denominador. No GIPEC, em metade das relações (E1F1, E2F2 e F3E3) a escolha também foi pelo

menor denominador. Apenas nas relações F2E2 (GIP) e E3F3 e F2E2 (GIPEC) os erros aconteceram pela escolha da fração com o maior denominador na fração. Em síntese, em oito das 13 relações onde aconteceram erros nos três grupos experimentais, as respostas incorretas aconteceram pela escolha da fração que apresentou o denominador com o menor valor numérico (E2F2, F1E1 e F3E3 no GIP, F2E2 e F3E3 no GEQ e E1F1, E2F2 e F3E3 no GIPEC).

A Tabela 9 apresenta a porcentagem total de acertos e de escolhas incorretas nas relações apresentadas na condição de teste de generalização 2 para os participantes dos grupos Instrução Programada (GIP), Equivalência (GEQ) e Equivalência mais Instrução Programada (GIPEQ). No grupo Instrução Programada (GIP), apenas nas relações E1G1 e G3E3 os participantes demonstraram 100% de acertos. Nas relações E3G3 e G3F3 os escores ficaram na casa de 80%. Nas demais relações os acertos oscilaram entre 40% e 60%.

Com relação às respostas incorretas, observou-se que, em quatro das 10 relações em que ocorreram erros os participantes escolheram apenas uma das comparações, sendo todas onde estavam os menores denominadores das frações de comparação (E3G3, G1E1, F1G1, F2G2). Nas demais relações os participantes demonstraram erros distribuindo as respostas entre as duas comparações, sendo que nesse caso, nas relações E2G2, G2E2, e G1F1 as porcentagens de erros também foram maiores na comparação que apresentou a fração com o menor denominador. Portanto, em sete das 10 relações em que ocorreram erros as porcentagens de escolhas foram maiores na fração que apresentou o menor valor numérico no denominador (E3G3, G1E1, F1G1, F2G2, E2G2, G2E2 e G1F1). Apenas em três relações (F3G3, G2F2 e G3F3) a maior porcentagem de erros aconteceu na fração com o maior denominador.

No grupo equivalência (GEQ), os maiores índices de acertos (70% ou mais)

Tabela 9 - Porcentagem de acertos (PA) e de erros em cada relação testada para os participantes dos grupos Instrução Programada (GIP), Equivalência (GEQ) e Instrução Programada mais Equivalência (GIPEQ) na condição de teste de Generalização 2.

Relação	GIP			GEQ			GIPEQ		
	PA	Erros Alternativas		PA	Erros Alternativas		PA	Erros Alternativas	
E1G1 (1/2-3/6)	100	G2(3/18)	G3(3/21)	100	G2(3/18)	G3(3/21)	100	G2(3/18)	G3(3/21)
E2G2 (1/6-3/18)	60	G1(3/6)	G3(3/21)	50	G1(3/6)	G3(3/21)	30	G1(3/6)	G3(3/21)
E3G3 (1/7-3/21)	87	G1(3/6)	G2(3/18)	100	G1(3/6)	G2(3/18)	100	G1(3/6)	G2(3/18)
G1E1 (3/6-1/2)	60	E2(1/6)	E3(1/7)	60	E2(1/6)	E3(1/7)	50	E2(1/6)	E3(1/7)
G2E2 (3/18-1/6)	60	E1(1/2)	E3(1/7)	90	E1(1/2)	E3(1/7)	60	E1(1/2)	E3(1/7)
G3E3 (3/21-1/7)	100	E1(1/2)	E2(1/6)	70	E1(1/2)	E2(1/6)	70	E1(1/2)	E2(1/6)
F1G1 (2/4-3/6)	40	(G2(3/18)	G3(3/21)	40	(G2(3/18)	G3(3/21)	80	(G2(3/18)	G3(3/21)
F2G2 (2/12-3/18)	40	G1(3/6)	G3(3/21)	0	G1(3/6)	G3(3/21)	10	G1(3/6)	G3(3/21)
F3G3 (2/14-3/21)	50	G1(3/6)	G2(3/18)	60	G1(3/6)	G2(3/18)	40	G1(3/6)	G2(3/18)
G1F1 (3/6-2/4)	40	F2(2/12)	F3(2/14)	0	F2(2/12)	F3(2/14)	30	F2(2/12)	F3(2/14)
G2F2 (3/18-2/12)	50	F1(2/4)	F3(2/14)	40	F1(2/4)	F3(2/14)	40	F1(2/4)	F3(2/14)
G3F3 (3/21-2/14)	80	F1(2/4)	F2(2/12)	30	F1(2/4)	F2(2/12)	80	F1(2/4)	F2(2/12)

ocorreram nas relações E1G1, E3G3, G2E2 e G3E3, sendo que apenas nas duas primeiras relações houve 100% de acerto. Em duas relações, F2G2 e G1F1, os participantes não tiveram acertos. Nas demais relações os índices ficaram entre 30% e 60% de acerto. A análise dos erros mostrou que em cinco, das dez relações testadas onde ocorreram erros, os participantes responderam em apenas uma das comparações, sendo que em todas elas a escolha foi exclusiva na fração com o menor valor no denominador da fração (E2G2, G1E1, G2E2, F1G1 e G1F1). Nas relações F2G2, G2F2 e G3F3 os erros aconteceram de forma distribuída entre as duas comparações. Também nesses casos, a maior porcentagem de respostas incorretas foi pela escolha da fração com o menor denominador. Apenas na relação G3E3 os erros aconteceram na fração

com o maior denominador. Em síntese, em oito das 10 relações em que ocorreram erros, as respostas incorretas foram mais frequentes na fração que apresentou o menor denominador (E2G2, G1E1, F1G1, G1F1, F2G2, G2F2 e G3F3)

No grupo Instrução Programada mais Equivalência (GIPEQ), observou-se 100% de acertos em apenas duas relações (E1G1 e E3G3). Em três outras, G3E3, F1G1 e G3F3 os escores variaram entre 70% e 80% de acerto. Nas relações E2G2, F2G2, F3G3, G1F1, G2F2 os escores ficaram abaixo de 50%. A análise dos erros mostrou que em cinco das dez relações em que ocorreram erros os participantes escolheram apenas uma das comparações incorretas (E2G2, G1E1, G3E3, G2F2 e G3F3), sendo que nessas relações a escolha foi exclusivamente pela comparação que apresentou o menor valor numérico no denominador da fração. Nas relações G2E2, F1G1, F2G2, e G1F1 os erros foram distribuídos entre as duas alternativas incorretas, sendo que em duas delas (F2G2 e G1F1) a maior porcentagem de erros foi na fração que também apresentou o menor denominador. Apenas nas relações G2E2 e F3G3 as escolhas ocorreram com maior frequência na fração com o maior denominador. Em síntese, em sete das 10 relações onde ocorreram erros as porcentagem de respostas incorretas foram maiores nas alternativas que apresentaram as frações com os menores denominadores (E2G2, G1E1, G3E3, G2F2, G3F3, F2G2 e G1F1).

Em resumo, os dados mostram que em sete das 14 relações testadas nos três grupos experimentais os erros aconteceram com maior frequência pela escolha da fração cujo denominador apresentou o menor valor numérico (E3G3, G1E1, F1G1, F2G2, E2G2, G2E2 e G1F1, no GIP; E2G2, G1E1, F1G1, G1F1, F2G2, G2F2 e G3F3 no GEQ e E2G2, G1E1, G3E3, G2F2, G3F3, F2G2 e G1F1 no GIPEC).

Discussão

Os objetivos propostos para o Experimento 1 foram investigar o efeito das condições; 1) de treino com instruções programadas sobre como resolver problemas fracionários; 2) de treino exclusivo de relações condicionais entre estímulos fracionários pictóricos e numéricos e entre estímulos fracionários numéricos e numéricos segundo o paradigma proposto por Sidman e Taiby, (1982) e, 3) de treino conjunto entre instruções programadas e treino de relações condicionais sobre: a) a formação de classes de equivalência com estímulos fracionários; b) a expansão das classes de equivalência de estímulos formadas e a generalização para novas situações e c) a resolução problemas fracionários do tipo lápis e papel.

Os resultados mostraram que todos os participantes apresentaram porcentagens de acertos mais elevadas na avaliação inicial quando os problemas apresentaram frações na forma absoluta do que na forma relativa e que na avaliação final os maiores aumentos nas porcentagens de acertos nas frações expressas de forma relativa ocorreram entre os participantes que receberam treino com instrução programada mais equivalência de estímulos (Tabela 1). Todos os participantes demonstraram altos escores de acertos na resolução dos problemas sobre multiplicação e divisão apresentados antes das condições de treino e testes das relações condicionais e instrução programada (Quadro 3). Em geral, os participantes dos três grupos demonstraram as relações AB já nos pré-testes e não passaram pelo treino dessas relações. Na condição BC, sete dos 15 participantes experimentais precisaram de treino. Contudo, o critério de 100% de acertos ocorreu com o número mínimo de dois blocos exigidos (Tabela 2). As relações BA/CB (simetria) quanto AC e CA (transitividade/equivalência) derivaram durante os testes para os participantes dos três grupos experimentais (Tabela 3). Em

geral, os participantes também tiveram dificuldade no pré-teste da relação AD, em especial os do GIPEQ, mas demonstraram o critério em no máximo três blocos de tentativas. Por outro lado, as porcentagens de acertos observadas nos testes de expansão das classes se deterioraram para todos os participantes dos grupos GIP e GIPEQ e para os participantes P6, P7 e P8 do GEQ (Tabela 4). Os participantes que não demonstraram o critério (100%) no testes de expansão da rede aprenderam as relações, por treino direto, com a exposição a poucos blocos de tentativas (Tabela 5). As porcentagens de acertos nos testes de generalização 1 foram maiores que os dos testes de generalização 2, em especial para os participantes do GIP. Cinco participantes (todos do GIP e os participantes P6, P9 e P10 do GEQ) acertaram todas as tentativas no teste de generalização 1. No Teste de Generalização 2 apenas um participante (P10 do GEQ) teve 100% de acertos (Tabela 6). A análise dos acertos e erros ocorridos em cada relação verificada no teste de expansão das classes mostrou que em todas as relações as porcentagens de acertos ficaram abaixo de 100% nos três grupos de participantes e que, em geral, os erros tenderam a ocorrer em metade das relações testadas pela escolha da comparação onde a fração apresentou o denominador com o menor valor numérico (Tabela 7). Na condição de teste de generalização 1, os participantes demonstraram escores elevados de acertos em todas as relações testadas e os erros, quando aconteceram, foram mais freqüentes nas frações com menores denominadores (Tabela 8). Na condição de teste de generalização 2, os participantes erraram escolhendo uma única comparação em oito das 10 relações em que aconteceram erros, sendo que a alternativa com o menor valor numérico do denominador foi escolhida com maior freqüência (Tabela 9).

Os resultados mostraram que todos os participantes resolveram os problemas sobre operações simples de multiplicação e divisão apresentados antes das condições de

treinos e testes das relações condicionais e do treino com instrução programada (exceto P2 do GEQ nos exercícios de multiplicação e P9 do GIP nos de divisão que tiveram 86% de acertos em ambas as operações). Portanto, pode-se dizer que essa habilidade já estava presente no repertório de todos eles (Quadro 3).

O melhor desempenho observado entre os participantes quando os problemas fracionários apresentaram frações expressas de forma absoluta (condição AB) em relação à forma de apresentação relativa (condições BC e AD) replicaram resultados obtidos em pesquisas anteriores (Carragher & Shliemann, 1992; Santos, 1996) e mostram a dificuldade que os alunos têm em compreender o conceito de magnitude relativa entre frações, reforçando a necessidade de mais investigações sobre formas alternativas de ensino desse conceito.

Durante os testes simetria e transitividade/equivalência (BA/CB e AC/CA, respectivamente), ocorridos após os treinos AB e BC, os participantes demonstraram a emergência de relações não ensinadas diretamente, o que está de acordo com literatura sobre equivalência de estímulos, a qual afirma que o treino de algumas relações segundo o procedimento de pareamento com o modelo é uma forma eficaz para ensinar relações não reforçadas diretamente (Sidman e Taiby, 1982; de Rose, Kato, Thé, & Kledaras, 1997). Pode-se afirmar, então, que os participantes demonstraram a formação de três classes de equivalência A1B1C1, A2B2C2 e A3B3C3, envolvendo um estímulo pictórico e dois estímulos fracionários, sendo um expresso na forma absoluta e outro na forma relativa.

Os decréscimos nas porcentagens de acertos de todos os participantes dos grupos GIP e GIPEC e dos participantes P6, P7 e P8 do GEQ no teste de expansão das classes de equivalência formadas após o treino adicional entre um dos membros dessa classe (estímulos do conjunto A) e um novo membro (estímulos do conjunto D), está em

desacordo com o que prevê a literatura da área (de Rose et al, 1997). Uma possível explicação para as reduções nas porcentagens de acertos de 13 dos 15 participantes dos grupos experimentais ocorridas ao longo das tentativas realizadas nessa condição de teste pode ser o fato de que a maioria das relações testadas (DA, BD, DB, CD e DC) foi programada na forma relativa de expressão das frações, o que segundo a literatura representa um ponto de dificuldade de aprendizagem para os alunos (e.g., Carraher e Shliemann, 1992; Santos 1999). Os resultados mostraram que a escolha dos estímulos de comparação esteve mais sob o controle do denominador da fração, nesse caso o denominador com o menor valor numérico, do que da relação existente entre o numerador e o denominador, o que é uma condição imprescindível para a compreensão do conceito de proporção. Apesar dos dados indicarem a formação das três classes de estímulos de três membros (ABC), essa condição não foi suficiente para que os participantes acertassem todas as relações no teste de expansão das classes.

Considerando-se os resultados observados após os testes de transitividade e equivalência é possível, segundo a literatura, afirmar que o treino de relações condicionais segundo o paradigma de equivalência de estímulos foi uma forma eficaz para o ensino de relações comportamentais complexas entre os estímulos dos conjuntos A, B e C, o que resultou na formação de três classes de estímulos ABC (Sidman & Tailby, 1982). Contudo, os resultados observados após os testes de expansão das classes permitem questionar se houve realmente a aquisição do conceito de magnitude relativa entre frações, visto que a porcentagem de acertos decresceu para 13 dos 15 participantes ao longo dos blocos de tentativas.

Os baixos rendimentos observados nos testes de generalização confirmaram dados da literatura sobre a ocorrência das respostas em novas situações após o treino de relações condicionais (Linch & Cuvo, 1995 e Santos, 1996). De forma geral, os

desempenhos observados para os participantes que passaram pelo treino de relações condicionais, pelo treino com instrução programada ou ainda por ambos, foram bastante limitados. O fato dos participantes, em geral, errarem ao escolher a alternativa incorreta em que o denominador apresentou o menor valor numérico nas condições de teste de generalização 1 e 2, sugerem que os participantes não responderam em função da relação existente entre o numerador e denominador da fração. Segundo Spinillo (1993), levar em consideração a relação parte todo é uma condição necessária para compreender o valor de uma notação fracionária. Assim, a ausência dessa resposta relacional pode explicar o resultado baixo em termos percentuais dos participantes nessas condições no presente estudo.

Cabe ressaltar, no entanto, que o termo generalização não é aqui empregado com o significado que a literatura comumente adota, como por exemplo, os propostos por Millenson (1976) e Catânia (1999). De acordo com esses autores, respostas de generalização ocorrem porque os antecedentes presentes no contexto de sua ocorrência compartilham propriedades físicas comuns com antecedentes presentes no momento em que tais comportamentos foram adquiridos. No presente caso, pode-se dizer que os estímulos presentes nos testes de “generalização” compartilhavam apenas algumas propriedades físicas mínimas, como a existência de um número dividido por outro número por meio de um traço, forma característica de representações fracionárias, mas não foi condição suficiente para assegurar a ocorrência da resposta em novas situações. Apesar dessa diferença conceitual, o termo generalização foi mantido nesse estudo por já ter sido empregado em trabalhos anteriores, como os de Linch e Cuvo (1995) e Santos (1996).

No presente estudo, os participantes tenderam a escolher a alternativa incorreta onde estava programado o denominador com o menor valor numérico. Esse fato reforça

a sugestão de que eles apresentaram dificuldade em discriminar ou compreender a relação que existe entre o numerador e o denominador no momento de avaliar o valor relativo entre duas frações. Segundo Spinillo (1993), para saber se as frações A/B e C/D são equivalentes, inicialmente as crianças comparam, a partir do referencial de metade, cada uma delas isoladamente, para em seguida, comparar os resultados obtidos. Caso os resultados sejam os mesmos a criança responderá as diferentes frações como equivalentes. O trabalho de Spinillo (1992) mostrou que as crianças demonstram maior facilidade para resolver problemas envolvendo o conceito de magnitude relativa entre frações quando os valores relativos obedecem ao referencial de metade. Em outras palavras, quando a criança consegue dividir ou multiplicar a fração por dois os problemas são resolvidos mais facilmente. Nessa linha de pensamento, é possível atribuir a maior incidência de erros cometidos pelos participantes ao escolher a fração com o menor valor numérico pelo fato dessa fração ser mais facilmente dividida ou multiplicada pelo número dois.

Quanto aos objetivos propostos para o Experimento 1 pode-se concluir que: a) ocorreu a formação de classes de equivalência de estímulos em todas as condições experimentais (GIP, GIPEQ e GEQ), sendo que os desempenhos dos participantes ocorreram de forma semelhante; b) não ocorreu a expansão das classes para os participantes dos três grupos experimentais. Em geral os índices de generalização da resposta foram maiores no primeiro teste de generalização, sendo que os maiores escores ocorreram para o grupo que fez treino exclusivo de instrução (GIP). Contudo, os participantes dos três grupos experimentais apresentaram desempenhos medianos no teste de generalização 2 e, c) o grupo que fez treino de instrução programada em conjunto com treino de relações condicionais (GIPEQ) foi o que apresentou melhor desempenho na resolução de problemas fracionários do tipo lápis e papel (avaliação

inicial e final), seguido do grupo que fez treino exclusivo com instruções programadas (GIP). O pior desempenho foi para os participantes que fizeram apenas treino de relações condicionais (GEQ).

Embora estudos sobre o uso de instrução programada na superação de dificuldades de aprendizagem sejam bastante promissores (e.g., Skinner, 1972 e Keller, 1983), os dados sugerem que, sozinhos, os treinos com instrução programada adotados no presente trabalho não facilitaram a formação das classes de equivalência e nem a sua expansão, visto que não se observou diferenças relevantes entre os participantes que fizeram e os que não fizeram esse tipo de treino. Uma possibilidade para estudos futuros quanto a essa variável pode ser aumentar o número de passos apresentados nas condições desses exercícios ou mesmos aumentar o número de exemplos disponibilizados durante os treinos.

Experimento 2:

A importância da interação com material manipulativo para a construção e desenvolvimento do pensamento é uma questão antiga na psicologia. Segundo Piaget (1983), os processos interativos representam a base da construção do conhecimento e dependem tanto de fatores externos quanto internos. O desenvolvimento do conhecimento ocorre em três níveis: físico, social e lógico-matemático. No primeiro nível, o conhecimento advém de nossas sensações e experiências, visto que ocorre no mundo exterior e está parcialmente nos objetos. No segundo, ele é herdado culturalmente e adquirido pela transmissão social, por exemplo, o treino para contar. No terceiro nível, o lógico-matemático, o conhecimento desenvolve-se por meio de relações mentais que o sujeito e o objeto estabelecem quando um age sobre o outro, por exemplo, ao aprender conceitos como semelhança, diferença e forma. Segundo Gertge (2009), na concepção piagetiana a construção do conceito de número exige primeiro que a criança desenvolva estruturas de pensamento relacionadas à habilidade de ordenar e fazer inclusão hierárquica, o que ocorre por volta dos quatro anos de idade. Na ordenação, a criança adquire a habilidade, por meio de experiências sociais e culturais, de arranjar objetos para que um fique em primeiro, o outro em segundo e assim por diante. Na inclusão hierárquica, a criança demonstra habilidade para perceber que um objeto está incluído no outro, por exemplo, um está incluído no dois, dois no três e assim por diante. Portanto, nessa perspectiva, não adianta ensinar diretamente conceitos matemáticos às crianças, mas sim, proporcionar a elas o contato com material concreto de forma lúdica que possibilitem trabalhar atributos como representação e classificação.

Como observaram recentemente Magina e Campos (2008), a adoção de material manipulativo na forma de desenho ou material concreto ainda é uma das principais

estratégias empregada atualmente pelos professores para ensinar frações. Embora os professores justifiquem a escolha alegando que a estratégia pode facilitar para que os alunos realizem comparações perceptuais entre os objetos, os autores argumentaram que esse procedimento oferece poucas possibilidades para a aprendizagem das lógicas dos invariantes operatórios necessários à resolução dos problemas.

O emprego de material concreto no ensino do conceito de frações deve ser usado com cuidado (Thompson, 1994). Segundo esse autor, isso se deve ao fato de que a compreensão que os alunos podem ter de conceitos matemáticos a partir de atividades manipulativas pode ser dificultada pela incompatibilidade entre a natureza concreta das atividades de ensino e a natureza abstrata dos conceitos matemáticos que eles deverão adquirir. O autor destaca ainda que a aprendizagem deva ocorrer em função da interação das atividades que o professor programa para que os alunos desenvolvam com esse material, ou seja, o contato do aluno com material concreto no ensino de frações deve ter como finalidade estimular professores e alunos a discutirem sobre algo palpável e servir como referencial para a compreensão de conceitos abstratos e não o objetivo central do ensino.

Vários autores continuam defendendo o uso de material concreto no ensino de frações, embora ainda seja uma questão controversa. Bezuk (1988) considerou que o professor utiliza pouco material manipulativo nas atividades de aprendizagem. Levantou a possibilidade das atividades propostas no ensino exigirem dos alunos respostas sobre procedimentos e conceitos abstratos que as crianças ainda não compreendem. Dentre as várias sugestões que fez, defendeu a antecipação do tópico sobre frações nos currículos escolares desde que seu ensino tivesse início a partir dos nomes das frações (meios e terços) e que seus símbolos ($1/2$ e $1/3$) fossem introduzidos apenas quando o conceito já estivesse bem compreendido. O ensino deveria ainda privilegiar o uso de objetos

manipuláveis de diferentes naturezas que fizessem parte da realidade das crianças e que os problemas fracionários fossem apresentados de forma verbal e como algo que faz parte do mundo real das pessoas. O tamanho do denominador das frações apresentadas às crianças com idade menor deveria ser limitado (embora não tenha apresentado um critério para esse limite). De forma semelhante, Amato (1988) corroborou com a proposta de que o ensino do conceito de fração seria mais eficiente se os símbolos matemáticos fossem inseridos apenas depois que as crianças tivessem passado pela experiência de manusear materiais concretos como massa de modelar, canudos e papéis.

A manipulação de material concreto é, ainda hoje, defendida como procedimento para o ensino de frações. Recentemente, Bertoni (2008) sugeriu um modelo de ensino para frações no qual uma das três estratégias propostas inclui o que ele denominou como manipulação concreto/abstrato. Nessa fase, ele propõe empregar o mesmo material concreto usado para o ensino do conceito de números naturais, como canudos partidos ou fichas dobradas. De forma semelhante, outras propostas de ensino defendem ser necessário que a criança primeiro se familiarize com o conceito de fração. Para isso, é importante que ela seja exposta a muitos problemas fracionários com material concreto (Educar, S/D). Gradualmente, os alunos deixarão de lado esse material e passarão a resolver “mentalmente” os problemas mais simples e até mesmo descobrirão possíveis regras a serem aplicadas com compreensão na resolução de problemas que exigem cálculos mais complexos com números fracionários. Nesse sentido, uma estratégia interessante para o ensino de frações é a programação de tarefas no modelo de pequenas “situações-problemas”. A descoberta das soluções a esses problemas pode ser facilitada se o professor programar atividades que envolvam a manipulação de material concreto como peças recortadas em plástico, madeira, papel, papelão ou cartolina. Na impossibilidade de usar material concreto, o professor pode

lançar mão de atividades que possibilitem os alunos representarem os problemas em forma de desenhos. Compete ao professor acompanhar o desempenho dos alunos e incentivar a “libertação” do material concreto. Contudo, é conveniente que os desenhos sejam empregados até que o professor tenha certeza de que as regras de operações não são apenas receitas decoradas, mas sim, estratégias bem compreendidas (Educar, S/D).

Conforme aponta a literatura matemática, o uso de material concreto é uma das estratégias disponíveis que o professor comumente adota para ensinar conceitos fracionários (Magina & Campos, 2008). No entanto, é importante que o aluno se “liberte” desse material, ou seja, não fique apenas sob controle dos estímulos manipuláveis. Conforme aponta Thompson (1994), o conceito de equivalência de fração e, conseqüentemente o de proporção, exigem a aquisição de respostas relacionais entre o material usado e as atividades que o professor programa para o ensino. Para analistas do comportamento isso significa que é necessário que o comportamento conceitual do aluno passe de um controle puramente físico dos estímulos para um controle relacional ou simbólico. A literatura comportamental aponta que o paradigma de equivalência de estímulos é uma forma eficiente para estabelecer comportamento simbólico (Sidman & Taiby, 1982; de Rose, 1993). No entanto, há pouquíssimos estudos sobre a aplicação dessa tecnologia no ensino de conceitos fracionários. Contudo, os poucos estudos existentes indicam que esse pode ser um caminho promissor nessa área (Lynch & Cuvo, 1995; Santos, 1996). Uma possibilidade interessante é investigar o efeito do treino com material concreto em conjunto com o treino de relações condicionais de acordo com o paradigma de equivalência de estímulos sobre a aquisição do conceito de equivalência de frações e de proporção.

Os objetivos de estudo propostos para o Experimento 2 foram verificar os efeitos das condições: 1) de treino com material concreto; 2) de treino de relações condicionais

entre estímulos fracionários pictóricos e numéricos e entre estímulos fracionários numéricos e numéricos segundo o paradigma proposto por Sidman e Taiby, (1982) e, 3) de treino com material concreto em conjunto com treino de relações condicionais sobre:

- a) a formação de classes de equivalência com estímulos fracionários; b) a expansão das classes de equivalência de estímulos formadas e a generalização para novas situações e
- c) a resolução de problemas fracionários do tipo lápis e papel.

Método

Participantes:

Trinta alunos do sexto ano ou início do sétimo ano do ensino fundamental de uma escola da rede estadual do estado de Goiás, cujas idades variaram entre 12 e 14 anos. A escolha dos participantes ocorreu de acordo com os critérios adotados no Experimento 1.

Local e sessões:

O segundo experimento ocorreu no ambiente da escola de Goiânia descrito no Experimento 1. Os critérios para as sessões foram os mesmos do Experimento 1.

Material:

O material usado para o treino e teste das relações condicionais foi composto pelas mesmas pastas descritas no Experimento 1 e mais três tabuleiros feitos em madeira para o treino com material concreto. Os tabuleiros tinham dimensões de 20 cm de largura por 30 cm de comprimento por 1.5 cm de altura. Foram divididos em quatro espaços separados por divisórias de um centímetro de espessura. Esses espaços tinham profundidade de um centímetro e foram numerados do lado esquerdo. Neles foram encaixados pequenos tocos de madeira de formato retangular.

No primeiro espaço de todos os tabuleiros foram encaixados tocos de madeira medindo 19 cm de comprimento por 5 cm de largura por 1.5 cm de altura. Nos três espaços restantes de cada tabuleiro foram encaixados tocos menores cujos comprimentos variaram de acordo com as frações $1/3$, $1/4$ ou $1/5$. Contudo, a largura e altura dos tocos foram sempre iguais às dos tocos inteiros. No tabuleiro destinado a trabalhar a fração $1/3$ foram encaixados três tocos de 6.33 cm de comprimento no

segundo espaço, sendo um na cor azul e dois na cor branca. No terceiro espaço foram encaixados seis tocos de 3.17 cm, sendo dois azuis e quatro brancos e no quarto espaço foram encaixados nove tocos de 2.11 cm, sendo três azuis e seis brancos. No tabuleiro destinado a trabalhar a fração $\frac{1}{4}$ foram encaixados quatro tocos de 4.75 cm de comprimento no segundo espaço, sendo um na cor azul e três na cor branca. No terceiro espaço foram encaixados oito tocos de 2.37 cm, sendo dois azuis e seis brancos e no quarto espaço foram encaixados doze tocos de 1.58 cm, sendo três azuis e nove brancos. No tabuleiro destinado a trabalhar a fração $\frac{1}{5}$ foram encaixados cinco tocos de 3.8 cm de comprimento no segundo espaço, sendo um na cor azul e quatro na cor branca. No terceiro espaço foram encaixados 10 tocos de 1.9 cm, sendo dois azuis e oito brancos e no quarto espaço foram encaixados quinze tocos de 1.27 cm, sendo três azuis e doze brancos. Uma ilustração do tabuleiro e dos tocos está no Anexo E.

Estímulos:

Os estímulos usados foram os mesmo do Experimento 1 descritos no Quadro 1.

Procedimento:

Após a avaliação inicial, os participantes foram divididos em três grupos experimentais e três controles. Um grupo passou apenas pelo treino com material concreto dividido fracionariamente e sua respectiva representação numérica e em seguida todos realizaram a avaliação final. Esse grupo foi denominado como GMC. O segundo grupo, após a avaliação inicial, passou pelo mesmo treino com material concreto dividido fracionariamente e sua respectiva representação numérica e, em seguida, passou pelas mesmas condições e pelos mesmos critérios de treinos e testes de relações condicionais e propriedades da equivalência de estímulos descritas para o

grupo GEQ do experimento 1 e, após o treino das relações condicionais, todos fizeram a avaliação final. Esse grupo foi denominado como GMCEQ. O terceiro grupo passou, após a avaliação inicial, pelas condições de treinos e testes de relações de equivalência descritas para o grupo GEQ do Experimento 1 e, em seguida, pela avaliação final e foi denominado como GEQ. O Quadro 4 apresenta a seqüência de condições programadas para os três grupos experimentais.

Quadro 4 - Organização das condições programadas, relações testadas e treinadas nos grupos Material Concreto (GMC), Material Concreto mais Equivalência (GMCEQ), Equivalência (GEQ) e Controles.

Condição	Relações Apresentadas	Grupos			
		GMC	GMCEQ	GEQ	Controles
Avaliação Inicial	Ver no texto	Sim	Sim	Sim	Sim
Treino de conhecimentos	Ver no texto	Sim	Sim	Sim	Não
Treino da tarefa	Ver no Texto	Não	Sim	Sim	Não
Treino material concreto	Frações 1/3, 2/6 e 3/9	Sim	Sim	Não	Não
Treino material concreto	Frações 1/4, 2/8 e 3/12	Sim	Sim	Não	Não
Treino material concreto	Frações 1/5, 2/10 e 3/15	Sim	Sim	Não	Não
Treino AB	A1B1, A2B2 e A3B3	Não	Sim	Sim	Não
Treino BC	B1C1, B2C2 e B3C3	Não	Sim	Sim	Não
Treino Misto	A1B1, A2B2, A3B3, B1C1, B2C2 e B3C3	Não	Sim	Sim	Não
Teste de Simetria	B1A1, B2A2, B3A3, C1B1, C2B2 e C3B3	Não	Sim	Sim	Não
Treino de simetria	B1A1, B2A2, B3A3, C1B1, C2B2 e C3B3	Não	Sim	Sim	Não
Teste de Transitividade e equivalência	A1C1, A2C2, A3C3, C1A1, C2A2 e C3A3	Não	Sim	Sim	Não
Treino de Transitividade e equivalencia	A1C1, A2C2, A3C3, C1A1, C2A2 e C3A3	Não	Sim	Sim	Não
Teste de Generalização 1	Ver no texto	Não	Sim	Sim	Não
Treino de AD	A1D1, A2D2 e A3D3	Não	Sim	Sim	Não
Teste de Expansão das classes D-(ABC)	D1A1, D2A2, D3A3, D1B1, D2B2, D3B3, B1D1, B2D2, B3D3, C1D1, C2D2, C3D3,	Não	Sim	Sim	Não
Treino de expansão das classes D-(ABC)	Idem teste de expsão das classes D-(ABC)	Não	Sim	Sim	Não
Teste de Generalização 2	Ver no texto	Não	Sim	Sim	Não
Avaliação Final	Ver no texto	Sim	Sim	Sim	Sim

Outros quinze alunos compuseram três grupos controle. Cada grupo de controle foi formado por cinco participantes e seus desempenhos serviram como comparação para os grupos experimentais. Assim, para cada grupo experimental programou-se um

grupo de controle. Os participantes do grupo de controle passaram apenas pelas condições de avaliação inicial e final.

O treino e teste de relações condicionais a que foram submetidos os participantes dos grupos GEQ e GMCEQ foi idêntico ao treino programado para os participantes do grupo equivalência do Experimento 1. No treino com material concreto a que foram submetidos os participantes dos grupos GMC e GMCEQ os participante foram instruídos oralmente pelo experimentador. Foram no mínimo três sessões de treino, sendo uma para a fração $1/3$ (treino1), uma para a fração $1/4$ (treino 2) e outra para a fração $1/5$ (treino 3). Os treinos ocorreram com intervalo de 24 horas. O critério para passar de um treino para o outro foi o acerto de todos os passos programados para cada treino. No caso do participante não acertar todos os passos, a próxima sessão repetiu o treino até o critério ser demonstrado.

Todas as sessões de treino começaram com a apresentação do tabuleiro vazio. As peças eram enfileiradas de acordo com as divisões fracionárias que elas representavam ao lado do tabuleiro que se encontrava sobre uma mesa com dimensões aproximadas de 1.20 m por 0.80 cm. Por exemplo, no primeiro treino a peça inteira ficou na primeira fileira, as peças representadas por $1/3$ estavam na segunda fileira, as peças representadas por $2/6$ na terceira fileira e as peças representadas por $3/9$ na quarta fileira (Ver Anexo E). A mesma disposição das peças foi observada para os treinos com as frações $1/4$ e $1/5$. O experimentador permaneceu ao lado de cada participante que esteve sentado em frente ao tabuleiro e às peças de encaixe. O encaixe das peças (toquinhos) começou sempre da esquerda para a direita do tabuleiro e com as peças de cor azul. A tarefa de encaixar as peças nos tabuleiros para cada condição de treino foi realizada mediante as seguintes instruções orais dadas pelo experimentador:

Treino 1 (fração 1/3)Peça 1 (Toco inteiro)

- a) *Olhe para esse toco que está na mesa (apontar);*
- b) *Pegue-o;*
- c) *Ele é um toco inteiro e todo branco?*

Quando o participante respondeu que não o experimentador corrigiu-o dizendo e mostrando que a peça não tinha divisões. Em seguida, passou para o próximo passo.

- d) *Coloque-o na parte de cima do tabuleiro no espaço 1 (apontar);*
- e) *Pronto. Ele ocupou todo o espaço no tabuleiro?*

Quando o participante respondeu que não o experimentador corrigiu-o dizendo e mostrando que a peça se encaixou totalmente no tabuleiro e seguiu para o próximo passo

Peças 2 (1/3)

- a) *Agora olhe os toquinhos que estão na primeira fila aqui sobre a mesa (apontar);*
- b) *Conte quantos toquinhos temos na primeira fila. Diga quantos são no total;*
- c) *Agora diga quantos são de cor branca e quantos de cor azul.*

Se o participante errasse a resposta, o experimentador contava junto com ele e prosseguia para o próximo passo.

- d) *Pegue-os. Compare o tamanho deles. São do mesmo tamanho?*

Quando o participante respondeu que não, o experimentador colocou um por cima do outro, disse que são do mesmo tamanho e pediu para o participante compará-los mais uma vez e responder novamente a pergunta. Em seguida, fez o próximo passo.

- e1) *Pegue o toquinho azul e coloque no tabuleiro no espaço 2 abaixo do toco que você já colocou antes (apontar o local);*

e2) *Agora pegue o segundo toquinho que é branco e coloque-o ao lado do toquinho azul que já está no tabuleiro;*

e3) *Agora pegue o terceiro toquinho que é branco e coloque-o ao lado dos dois toquinhos que já estão no tabuleiro;*

f) *Olhe para os três toquinhos, os dois brancos e o azul. Juntos, eles ficaram com o mesmo tamanho do toco grande branco da parte de cima?*

Quando o participante respondeu que não o experimentador retirou todos os tocos da segunda fileira e perfilou-os sobre o da primeira e repetiu a pergunta. Se a resposta foi sim o experimentador seguiu para o próximo passo.

g) *Então se eu dividir o toco grande em três partes iguais e juntar essas partes, eles terão o mesmo tamanho do toco grande?*

Quando o participante respondeu que não, o experimentador novamente perfilou os três toquinhos sobre o toco inteiro e repetiu a pergunta.

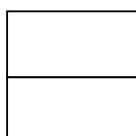
h) *Se você retirar o toquinho azul da parte de baixo do tabuleiro, qual fração representa essa parte que você retirou? (apontar).*

i1) *Para quem respondeu de forma correta: Sua resposta está correta. Vamos para o próximo passo.*

i2) *Para quem respondeu de forma incorreta: Sua resposta está errada. Vamos aprender a representar essa fração respondendo esses exercícios. (Exercícios para o treino fracionário 1/3).*

Os exercícios foram impressos em folhas de papel A4.

Treino da representação fracionária $1/3$

A) Conte o número total de toquinhos em que o toco maior foi dividido e coloque na parte de baixo do quadrado ao lado.	
B) Conte o número de toquinhos que foram pintados na cor azul e escreva na parte de cima do quadrado ao lado.	

C) Escreva novamente a fração que você encontrou no quadrado ao lado.

D) A fração que representa o número de partes azuis que você retirou é:

Quando o participante não respondeu corretamente o experimentador corrigiu-o e fez os exercícios junto com ele.

Peças 3 (2/6)

- a) *Agora olhe os toquinhos que ficaram na primeira fila aqui sobre a mesa (apontar);*
- b) *Conte quantos toquinhos temos na primeira fila. Diga quantos são no total;*
- c) *Agora diga quantos são de cor branca e quantos de cor azul.*

Se o participante errava a resposta o experimentador contava junto com ele.

- d) *Pegue-os e compare o tamanho deles. São do mesmo tamanho?.*

Quando o participante respondeu que não, o experimentador colocou um por cima do outro, disse que são do mesmo tamanho e pediu para o participante compará-los mais uma vez e responder novamente a pergunta.

- e1) *Peque um desses toquinhos azuis e coloque no tabuleiro no espaço 3 abaixo dos toquinhos da segunda fileira do tabuleiro. (apontar o local);*
- e2) *Agora peque o segundo toquinho azul e coloque-o ao lado do primeiro toquinho azul que já está no tabuleiro;*

e3) Agora pegue o terceiro toquinho que é branco e coloque-o ao lado dos dois toquinhos azuis que já estão no tabuleiro;

e4) Agora pegue o quarto toquinho que é branco e coloque-o ao lado dos três toquinhos que já estão no tabuleiro;

e5) Agora pegue o quinto toquinho que é branco e coloque-o ao lado dos quatro toquinhos que já estão no tabuleiro;

e6) Agora pegue o sexto toquinho que é branco e coloque-o ao lado dos cinco toquinhos que já estão no tabuleiro;

f) Olhe os seis toquinhos, os quatro brancos e os dois azuis. Juntos, eles ficaram com o mesmo tamanho dos três toquinhos da fileira de cima (os dois brancos e o azul) e do toco grande branco da primeira fileira do tabuleiro?

Quando o participante respondeu que não o experimentador perfilou os tocos da terceira fileira sobre os da segunda e, em seguida, sobre o toco inteiro e repetiu a pergunta. Se a resposta foi sim o experimentador seguiu para o próximo passo.

g) Então, se eu dividir o toco grande em seis partes iguais e juntar essas partes eles terão o mesmo tamanho do toco grande da primeira fileira (apontar) e dos três toquinhos da fileira de cima? (apontar)

Quando o participante respondeu que não, o experimentador novamente perfilou os tocos da terceira fileira sobre os da segunda, e em seguida, sobre o toco inteiro e repetiu a pergunta. Se a resposta foi sim o experimentador seguiu para o próximo passo.


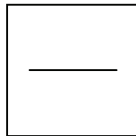
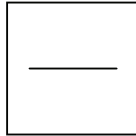
h) Se você retirar os dois toquinhos azuis da terceira fileira do tabuleiro (apontar), qual fração representa essa parte que você retirou?

i1) Para quem respondeu de forma correta: Sua resposta está correta. Vamos para o próximo passo.

i2) Para quem respondeu de forma incorreta: Sua resposta está errada. Vamos aprender a representar essa fração respondendo esses exercícios. (Exercícios para o treino fracionário 2/6).

Os exercícios foram impressos em folhas de papel A4 .

Treino da representação fracionária 2/6

<p>A) Conte o número total de toquinhos em que o toco maior foi dividido e coloque na parte de baixo do quadrado ao lado.</p> <p>B) Conte o número de toquinhos que foram pintados na cor azul e escreva na parte de cima do quadrado ao lado.</p>	
<p>C) Escreva novamente a fração que você encontrou no quadrado ao lado</p>	
<p>D) A fração que representa o número de partes azuis que você retirou é:</p>	

Quando o participante não respondeu corretamente o experimentador corrigiu-o e fez os exercícios junto com ele.

Exercício de integração dos treinos Peças 2 e Peças 3:

Responda às seguintes perguntas:

- 1) Se você pegar um toquinho da segunda fileira a fração numérica que representa a parte que você pegou é $1/3$ ou $2/6$?
- 2) Se você pegar dois toquinhos da terceira fileira a fração numérica que representa a parte que você pegou é $1/3$ ou $2/6$?

3) *As frações $1/3$ e $2/6$ são partes com o mesmo tamanho?*

4) *Então, as frações $1/3$ e $2/6$ representam tamanhos iguais ou diferentes? (perguntar mostrando as duas partes no tabuleiro).*

Quando o participante respondeu que não, o experimentador perfilou os toquinhos da terceira fileira sobre os da segunda e repetiu a pergunta. Quando respondeu que sim prosseguiu para o próximo passo.

As perguntas foram respondidas com os toquinhos expostos no tabuleiro de acordo com a representação de cada fração treinada.

Peças 4 (3/9)

a) *Agora olhe os toquinhos que ficaram aqui sobre a mesa (apontar).*

b) *Conte quantos toquinhos temos e diga quantos são no total.*

c) *Agora diga quantos são de cor branca e quantos de cor azul.*

Quando o participante errou a resposta o experimentador contou junto com ele.

d) *Pegue-os e compare o tamanho deles. São do mesmo tamanho?.*

Quando o participante respondeu que não o experimentador colocou um por cima do outro, disse que são do mesmo tamanho e pediu para o participante compará-los mais uma vez e responder novamente a pergunta.

e1) *Pegue um desses toquinhos azuis e coloque no tabuleiro no espaço 4 abaixo dos toquinhos da terceira fileira do tabuleiro (mostrar o local).*

e2) *Agora pegue o segundo toquinho azul e coloque-o ao lado do primeiro toquinho azul que já está no tabuleiro.*

e3) *Agora pegue o terceiro toquinho azul e coloque-o ao lado dos dois toquinhos azuis que já estão no tabuleiro.*

e4) Agora pegue o quarto toquinho que é branco e coloque-o ao lado dos três toquinhos azuis que já estão no tabuleiro.

e5) Agora pegue o quinto toquinho que é branco e coloque-o ao lado dos quatro toquinhos que já estão no tabuleiro.

e6) Agora pegue o sexto toquinho que é branco e coloque-o ao lado dos cinco toquinhos que já estão no tabuleiro.

e7) Agora pegue o sétimo toquinho que é branco e coloque-o ao lado dos seis toquinhos que já estão no tabuleiro.

e8) Agora pegue o oitavo toquinho que é branco e coloque-o ao lado dos sete toquinhos que já estão no tabuleiro.

e9) Agora pegue o nono toquinho que é branco e coloque-o ao lado dos oito toquinhos que já estão no tabuleiro.

f) Olhe os nove toquinhos, os seis brancos e os três azuis. Juntos, eles ficaram com o mesmo tamanho dos seis toquinhos da fileira de cima (os quatro brancos e os dois azuis), dos três toquinhos da segunda fileira (os dois brancos e o azul) e do toco inteiro branco da primeira fileira do tabuleiro?

Quando o participante respondeu que não, o experimentador perfilou os tocos da quarta fileira sobre os da terceira. Em seguida, sobre os da segunda fileira e por último em cima do toco inteiro e repetiu a pergunta. Se a resposta foi sim o experimentador seguiu para o próximo passo.

g) Então se eu dividir o toco grande em nove partes iguais e juntar essas partes eles terão o mesmo tamanho do toco grande da primeira fileira (apontar), dos três toquinhos da segunda fileira e dos seis toquinhos da fileira de cima? (apontar)

Quando o participante respondeu que não o experimentador novamente perfilou tocos da quarta fileira sobre os da terceira. Em seguida, perfilou-os sobre os tocos da

segunda fileira e, por último, em cima do toco inteiro e repetiu a pergunta. Se a resposta foi sim seguiu para o próximo passo.

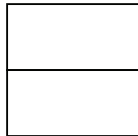
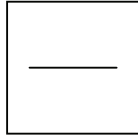
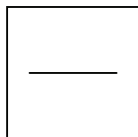
h) Se você retirar três toquinhos da quarta fileira do tabuleiro (apontar), qual fração representa essa parte que você retirou?

i1) Para quem respondeu de forma correta: Sua resposta está correta. Vamos para o próximo passo.

i2) Para quem respondeu de forma incorreta: Sua resposta está errada. Vamos aprender a representar essa fração respondendo esses exercícios. (Exercícios par treino fracionário 3/9).

Os exercícios foram impressos em folhas de papel A4.

Treino da representação fracionária 3/9

<p>A) Conte o número total de toquinhos em que o toco maior foi dividido e coloque na parte se baixo do quadrado ao lado.</p> <p>B) Conte o número de toquinhos que foram pintados na cor azul e escreva na parte de cima do quadrado ao lado.</p>	
<p>C) Escreva novamente a fração que você encontrou no quadrado ao lado</p>	
<p>D) A fração que representa o número de partes azuis que você retirou é:</p>	

Quando o participante não respondeu corretamente o experimentador corrigiu-o e fez os exercícios junto com ele.

Exercício de integração dos treinos Peças 2, Peças 3 e Peças 4.

Responda às seguintes perguntas:

- 1) *Se você pegar um toquinho da segunda fileira a fração numérica que representa a parte que você pegou é $1/3$, $2/6$ ou $3/9$?*
- 2) *Se você pegar dois toquinhos da terceira fileira a fração numérica que representa a parte que você pegou é $1/3$, $2/6$ ou $3/9$?*
- 2) *Se você pegar três toquinhos da quarta fileira a fração numérica que representa a parte que você pegou é $1/3$, $2/6$ ou $3/9$?*
- 3) *As frações $1/3$, $2/6$ e $3/9$ são partes com o mesmo tamanho?*
- 4) *Então, as frações $1/3$, $2/6$ e $3/9$ representam tamanhos iguais ou diferentes? (perguntar mostrando as duas partes no tabuleiro).*

Quando o participante respondeu incorretamente cada pergunta o experimentador perfilou os toquinhos da quarta fileira sobre os toquinhos da terceira, em seguida sobre os da segunda fileira, e depois sobre os da primeira fileira e repetiu a pergunta. Quando respondeu que sim prosseguiu para o próximo passo.

As perguntas foram respondidas com os toquinhos expostos no tabuleiro de acordo com a representação de cada fração treinada.

Treino 2 (fração $1/4$)

O Treino 2 seguiu exatamente os mesmos passos do Treino 1. Contudo, no Treino 2 as peças de madeira representantes das frações $1/3$, $2/6$ e $3/9$ (usadas do primeiro treino) foram substituídas pelas peças de madeira representantes das frações $1/4$, $2/8$ e $2/10$.

Treino 3 (fração 1/5)

O Treino 3 também seguiu exatamente os mesmos passos do Treino 1. Contudo, no Treino 3 as peças de madeira representantes das frações $1/3$, $2/6$ e $3/9$ (usadas do primeiro treino) foram substituídas pelas peças de madeira representantes das frações $1/5$, $2/10$ e $3/15$.

Resultados

Os dados analisados referem-se aos desempenhos dos participantes dos grupos experimentais GMC, GMCEQ e GEQ e controles nas condições de avaliação inicial e final e dos grupos GME e GMCEQ nas condições de treinos e testes de relações condicionais, segundo o paradigma de equivalência de estímulos (Sidman e Taiby, 1982).

As porcentagens de acertos dos participantes dos três grupos experimentais na resolução de problemas matemáticos de multiplicação e divisão podem ser vistos no Quadro 5.

Quadro 5 - Porcentagem de acertos nas operações matemáticas de multiplicação e divisão para os participantes dos grupos Material concreto (GMC), Material Concreto mais Equivalência (GMCEQ) e Equivalência (GEQ).

Grupos	Partic.	Multipl.	Divisão	Grupo	Partic.	Multipl.	Divisão
GMC	P1	100	0	GEQ	P11	100	86
	P2	100	100		P12	100	100
	P3	71	0		P13	100	71
	P4	100	100		P14	100	100
	P5	100	86		P15	100	71
GMCEQ	P6	29	71				
	P7	100	71				
	P8	100	43				
	P9	86	0				
	P10	100	43				

De modo geral, as porcentagens de acertos foram maiores nos exercícios de multiplicação e menores nos de divisão para os três grupos. No grupo GEQ todos os integrantes tiveram 100% de acertos nos exercícios de multiplicação. No grupo GMC esse fato ocorreu para quatro dos cinco participantes (P1, P2, P4 e P5). No grupo GMCEQ apenas P7, P8 e P10 demonstraram 100% de acertos. P6 e P9 tiveram escores

menores. Destaca-se o participante P6 que acertou apenas 29% dos problemas propostos. Por sua vez, nos exercícios de divisão apenas quatro dos 15 participantes experimentais apresentaram 100% de acertos nos exercícios. No grupo GMC esses participantes foram P2 e P4 e no grupo GEQ P12 e P14. Os demais participantes tiveram porcentagens de acertos menores que os observados nos teste de multiplicação, com exceção de P6 do GMCEQ que passou de 29% para 71% de acerto. Destacam-se os desempenhos de P1 e P3 do grupo GMC e P9 do GMCEQ que não acertaram nenhum problema (0%) de divisão apresentado.

A Tabela 10 apresenta os desempenhos dos três grupos experimentais e seus respectivos grupos de controle nas condições de avaliação inicial e final considerando-se as formas de apresentação absoluta e relativa das frações. Na avaliação inicial, todos participantes demonstraram porcentagens de acertos maiores quando as frações foram expressas de forma absoluta em comparação à forma relativa. As únicas exceções foram para os participantes P6 do grupo GMCEQ e P29 do GEQ, cujos escores foram iguais, respectivamente, a 20% e 10% em ambas a formas de apresentação das frações. Os participantes do grupo GMC acertaram, em média, 70% dos exercícios expressos de forma absoluta na avaliação inicial, enquanto nos grupos GMCEQ e GEQ a porcentagem média de acertos foi de 46% e 56%, respectivamente. Já os participantes de controle dos grupos GMC, GMCEQ e GEQ demonstraram, em ordem, médias percentuais de 54%, 50% e 74%.

Todos os participantes dos grupos experimentais demonstraram aumentos na porcentagem de acertos da avaliação inicial para a final com frações absolutas, exceto P2 (GMC) e P14 (GEQ) que mantiveram o mesmo padrão de desempenho (100% para P2 e 40% para P14). Em média, as porcentagens de acertos na avaliação final foram de 90%, 88% e 80% para os grupos GMC, GMCEQ e GEQ, respectivamente. Os

participantes P1, P2 e P4 do grupo GMC, P9 e P10 do grupo GMCEQ e P13 do GEQ obtiveram 100% de acertos na avaliação final com frações absolutas.

Tabela 10- Porcentagem e média de acertos nas frações expressas de forma absoluta e relativa nas avaliações inicial (AI) e final (AF) para os participantes dos grupos experimentais e controles.

	Grupos Experimentais					Grupos Controles				
	Part.	Absolutas		Relativas		Part.	Absolutas		Relativas	
		A. I.	A. F.	A. I.	A. F.		A. I.	A. F.	A. I.	A. F.
GMC	P1	90	100	15	0	P16	40	40	10	15
	P2	100	100	15	15	P17	80	60	0	0
	P3	50	70	20	5	P18	40	50	20	25
	P4	60	100	20	20	P19	30	40	10	5
	P5	50	80	25	45	P20	80	80	5	0
	\bar{X}	70	90	19	17	\bar{X}	54	54	9	9
GMCEQ	P6	20	90	20	15	P21	30	90	10	5
	P7	70	60	5	25	P22	30	40	15	10
	P8	50	90	10	45	P23	70	70	10	10
	P9	20	100	20	5	P24	60	60	15	25
	P10	70	100	10	20	P25	60	90	0	10
	\bar{X}	46	88	13	22	\bar{X}	50	50	10	12
GEQ	P11	60	90	15	75	P26	90	60	15	10
	P12	50	90	15	55	P27	100	90	15	0
	P13	90	100	10	50	P28	100	100	15	20
	P14	40	40	5	30	P29	10	20	10	10
	P15	40	80	0	10	P30	70	90	10	5
	\bar{X}	56	80	9	44	\bar{X}	74	72	13	9

Por outro lado, as porcentagens médias de acertos observadas na avaliação inicial para problemas com frações expressas de forma absoluta se mantiveram na avaliação final para os participantes controles dos grupos GMC e GMCEQ (54% e 50%, respectivamente) e diminuiu de 74% para 72% para os participantes do grupo de controle relacionado ao GEQ. Apenas P18 e P19, controles do GMC demonstraram aumentos (10%) da avaliação inicial para a final. Três participantes controles do GMCEQ (P21, P22 e P23) tiveram escores maiores na avaliação final. Já entre os participantes

controles do GEQ, P28 demonstrou 100% de acertos tanto na avaliação inicial quanto na final, enquanto P29 e P30 demonstraram aumentos de no máximo 20%.

A análise das porcentagens médias de acertos dos participantes dos grupos experimentais e controles mostrou que, tanto na avaliação inicial quanto final, os escores foram menores na forma relativa comparadas aos da forma absoluta. Na avaliação inicial a maior porcentagem média de acertos entre os três grupos experimentais para frações expressa na forma relativa foi de 19%, observada para o GMC. Por sua vez, a porcentagem média de acertos no GMCEQ foi igual a 13 pontos percentuais e no GEQ foi de 9%. Na avaliação final o maior aumento observado na porcentagem média de acertos foi para o grupo GEQ com 44%, seguido pelos participantes do grupo GMCEQ com 22%. O grupo GMC apresentou redução de dois pontos percentuais no desempenho final, acertando, em média, apenas 17% dos problemas fracionários expressos de forma relativa. Portanto, enquanto os participantes do GEQ apresentaram ganhos médios de 35 pontos percentuais, os do GMCEQ obtiveram aumentos de 9% da primeira para a última avaliação. Considerando-se os desempenhos individuais, nenhum participante dos três grupos experimentais apresentou 100% de acertos na avaliação final com frações expressas na forma relativa. Os maiores escores foram para os participantes P11, P12 e P13 do GEQ com 75%, 55% e 50%, respectivamente. Em seguida, vieram os participantes P8 do GMCEQ e P5 do GMC com 45% de acerto nos problemas fracionários.

Por sua vez, a porcentagem média de acertos com frações expressas na forma relativa diminuiu de 13 para nove pontos percentuais para os participantes controles referentes ao grupo GEQ da avaliação inicial para a final, aumentou dois pontos para os participantes controles do GMCEQ (passando de 10% para 12% de acertos) e manteve-se em nove por cento para os participantes controles do GMC. A análise individual dos

desempenhos mostrou que apenas dois participantes controles do GMC (P16 e P18) demonstraram aumentos de 5 pontos na porcentagem de acertos da avaliação inicial para a final. Dois participantes (P19 e P20) diminuíram cinco pontos percentuais e P17 manteve a porcentagem de acertos em zero. Entre os participantes controles do GMCEQ P24 e P25 obtiveram 10 pontos de aumento da avaliação inicial para a final, enquanto P21 e P22 diminuíram em cinco pontos os escores iniciais e P22 manteve o valor inicial de 10%. Por sua vez, no grupo controle do GEQ apenas P28 obteve 5% de aumento na avaliação final. Outros três participantes P26, P27 e P30 diminuíram os escores em até 15 pontos e P29 manteve os dez pontos iniciais.

A Tabela 11 apresenta a porcentagem e a média de acertos nos pré- e pós-testes das condições AB e BC e o número de blocos necessários para os participantes demonstrarem o critério nas condições de treino AB, BC e AB/BC para os participantes dos grupos GMCEQ e GEQ. A porcentagem média de acertos foi maior na condição AB (89%) em relação à condição BC (64%) para os participantes do GMCEQ, mas não diferiram entre as duas condições para os participantes do grupo GEQ (82% em ambas). Na condição AB, quatro dos cinco participantes do grupo GMCEQ (P7, P8, P9 e P10) demonstraram 100% de acertos durante o pré-teste e não passaram pelo treino dessa condição. O participante P6 obteve 44% de acertos e passou pelo treino da condição, demonstrando 100% de acertos no pós-teste com dois blocos de tentativas. No grupo GEQ, três dos cinco participantes (P11, P12 e P15) precisaram fazer o treino da relação AB e demonstraram o critério no pós-teste com no máximo quatro blocos de tentativas.

Na condição BC, quatro dos cinco participantes do grupo GMCEQ (P6, P8, P9 e P10) demonstraram escores inferiores a 100% no pré-teste e passaram pelo treino dessa condição, sendo que todos apresentaram o critério com o número mínimo de blocos exigidos (2). Apenas P7 obteve 100% de acerto no pré-teste e não passou pelo treino da

condição. No grupo GEQ três participantes (P11, P13 e P14) acertaram 100% das tentativas de pré-teste e não passaram pelo treino dessa condição. Somente os participantes P12 e P15 passaram pelo treino direto da relação BC. Contudo, demonstraram 100% de acertos em dois blocos de tentativas.

Em resumo, a análise conjunta os dados dos cinco participantes do grupo GMCEQ e dos cinco do grupo GEQ, observou-se que seis deles acertaram todas as tentativas da relação AB e quatro acertaram todas as tentativas da relação BC. Ao fazerem o treino AB/BC nove dos dez participantes demonstraram o critério com o número mínimo de blocos exigidos (2). Apenas P13, do GEQ, precisou de mais blocos (4) para demonstrar o critério.

Tabela 11- Porcentagem de acertos nos pré- e pós-testes dos treinos AB e BC e número de blocos de treino (NB) realizados nas condições AB, BC e AB/BC para os participantes dos grupos Material Concreto e Equivalência (GMCEQ) e Equivalência (GEQ).

Grupo	Part.	Condição AB			Condição BC			AB/BC NB
		Pré-t.	N	Pós-t.	Pré-t.	N	Pós-t.	
GMCEQ	P6	44	2	100	33	4	100	2
	P7	100	-	-	100	-	-	2
	P8	100	-	-	55	2	100	2
	P9	100	-	-	44	2	100	2
	P10	100	-	-	89	2	100	2
	\bar{X}	89	-	-	64	2	100	2
GEQ	P11	89	3	100	100	-	-	2
	P12	44	4	100	22	2	100	2
	P13	100	-	-	100	-	-	4
	P14	100	-	-	100	-	-	2
	P15	78	2	100	89	2	100	2
	\bar{X}	82	3	100	82	2	100	2.4

A porcentagem de acertos por bloco de tentativas e a média de acertos nas condições de teste e treino das relações BA/CB (simetria) e AC/CA (transitividade e equivalência) para os participantes dos grupos Material Concreto e Equivalência (GMCEQ) e Equivalência (GEQ) estão contidas na Tabela 12. Em média, os

desempenhos dos participantes dos dois grupos diferiram em quatro pontos percentuais na condição de teste de simetria e oscilaram entre 96% (bloco 1 do GMCEQ) e 100% do GEQ. Tanto os participantes do grupo GMCEQ quanto os do GEQ demonstraram 100% de acertos em no máximo dois blocos de tentativas (critério mínimo exigido) durante o teste da condição BA/CB (simetria), exceto P6 que diminuiu seu desempenho ao longo de três blocos de tentativas (89%, 89% e 78%, respectivamente) e precisou se submeter ao treino dessas relações, demonstrando o critério em dois blocos de tentativas.

Tabela 12 - Porcentagem de acertos por bloco de tentativas (B) e médias nos testes e treinos das condições BA/CB (simetria) e AC/CA (transitividade e equivalência) para os participantes dos grupos Material Concreto e Equivalência (GMCEQ) e Equivalência (GEQ).

Grupo	Part.	Simetria				Transitividade/equivalência							
		Teste		Treino		Teste			Treino				
		B1	B2		B1	B2	B1	B2	B3	B4	B5	B1	B2
GMCEQ	P6	89	89	78	89	100	100	100	-	-	-	-	-
	P7	100	100	-	-	-	100	100	-	-	-	-	-
	P8	89	100	-	-	-	100	89	100	-	-	-	-
	P9	100	100	-	-	-	78	78	78	78	55	89	100
	P10	100	100	-	-	-	100	100	-	-	-	-	-
	\bar{X}	96	98	-	-	-	96	93	89	-	-	-	-
GEQ	P11	100	100	-	-	-	89	100	-	-	-	-	-
	P12	100	100	-	-	-	56	67	67	100	-	-	-
	P13	100	100	-	-	-	67	89	100	-	-	-	-
	P14	100	100	-	-	-	100	89	100	-	-	-	-
	P15	100	100	-	-	-	100	100	-	-	-	-	-
	\bar{X}	100	100	-	-	-	82	89	89	-	-	-	-

Na condição de transitividade/equivalência observou-se tendência crescente na média de acertos ao longo dos blocos de tentativa para os grupos GMCEQ e GEQ. Nove dos 10 participantes (P6, P7, P8 e P10 do GMCEQ e todos do GEQ) acertaram 100% das relações AC/ CA em no máximo quatro blocos de tentativas. Apenas P9 do GMCEQ precisou do treino dessas relações e obteve 100% de acertos em dois blocos de tentativas. Esses desempenhos permitem afirmar que os participantes formaram três

classes de equivalência de três membros cada (A1B1C1, A2B2C2 e A3B3C3). Em outras palavras, eles formaram três classes de equivalência entre os estímulos pictóricos, suas representações absolutas e suas representações relativas. Por exemplo, agruparam a figura de 1/3, com a fração 1/3 e 2/6. O mesmo ocorreu com as frações 1/4 e 1/5.

A Tabela 13 apresenta a porcentagem de acertos individuais e as médias de acertos para os grupos GMCEQ e GEQ durante os pré- e pós-testes para da condição AD, o número de blocos de treino na relação AD e a porcentagem de acerto por bloco de tentativas na condição de teste de expansão da rede D-(ABC).

Tabela 13 - Porcentagem de acertos e média nos pré e pós-testes da condição AD, porcentagem de acerto por bloco no teste D-(ABC) e número de blocos realizados na condição de treino AD (N).

Grupo	Part.	Condição AD			Teste D-(ABC)				
		Pré-t.	N	Pós-t.	B1	B2	B3	B4	B5
GMCEQ	P6	56	3	100	75	70	-	-	-
	P7	78	2	100	85	85	75	-	-
	P8	78	3	100	80	60	-	-	-
	P9	67	6	100	85	65	-	-	-
	P10	78	3	100	70	75	75	95	80
	\bar{X}	71	3.4	100	79	71	75	-	-
GEQ	P11	89	2	100	90	85	-	-	-
	P12	89	2	100	80	60	-	-	-
	P13	100	-	-	80	75	-	-	-
	P14	56	2	100	80	85	80	-	-
	P15	78	3	100	65	65	60	-	-
	\bar{X}	82	2.2	100	79	74	70	-	-

Os dados mostraram que, em média, os participantes do grupo GMCEQ acertaram 71% das tentativas das relações AD, enquanto a média para o grupo GEQ ficou em 82%. Todos os participantes do grupo GMCEQ e quatro do GEQ (P11, P12, P14 e P15) tiveram desempenhos inferiores a 100% durante o pré-teste da relação AD e foram submetidos ao treino dessa condição. Apenas P13, do GEQ obteve 100% de acerto no Pré-teste e passou direto para o teste de expansão da rede. Dentre os outros nove participantes que fizeram o treino AD, oito demonstraram 100% de acertos em no

máximo três blocos de tentativas (P6, P7, P8, P10, P11, P12, P14 e P15). Durante o pós-teste ocorrido após o treino AD todos participantes acertaram 100% das tentativas AD.

Durante a condição de teste de expansão da rede D-(ABC), todos os participantes do grupo GMCEQ e GEQ demonstraram porcentagens de acertos decrescentes em no máximo cinco blocos de tentativas e tiveram que ser treinados diretamente nessas relações. Os participantes P6, P8 e P9 do GMCEQ e P11, P12 e P13 do GEQ demonstraram redução nos escores já no segundo bloco de tentativas. Em média, as porcentagens de acertos nos bloco de tentativas variaram entre 70% e 79%, tanto no GMCEQ quanto GEQ.

A Tabela 14 mostra o desempenho dos participantes dos grupos GMCEQ e GEQ na condição de treino de expansão da rede D-(ABC).

Tabela 14 - Porcentagem de acerto por bloco de tentativas na condição de treino de expansão das classes para os participantes do grupos Material Concreto e Equivalência (GMCEQ) e Equivalência (GEQ).

Part	Blocos																																
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31		
GMCEQ	P6	73	93	73	93	87	100	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
	P7	80	73	93	87	87	93	87	93	87	93	100	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
	P8	53	60	53	60	80	73	93	87	60	87	73	73	93	93	80	87	87	87	73	87	93	93	80	100	-	-	-	-	-	-	-	-
	P9	60	53	73	53	47	60	40	53	47	60	67	87	87	87	73	80	73	67	60	80	80	67	67	73	93	73	93	87	93	93	100	
	P10	87	80	87	100	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
GEQ	P11	73	93	73	93	87	100	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
	P12	47	73	80	87	93	93	87	80	80	80	93	100	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
	P13	60	80	87	87	93	87	87	80	80	87	87	80	80	87	87	100	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	P14	87	87	87	87	80	87	93	80	100	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	P15	47	60	80	67	73	73	80	73	87	100	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Tanto os participantes do GMCEQ quanto do GEQ aprenderam gradualmente as relações ensinadas ao longo dos blocos de tentativas realizados. Contudo, de forma geral, os participantes do grupo GMCEQ precisaram de mais blocos de tentativas para demonstrar o critério que os participantes do GEQ. No total, os participantes do primeiro grupo fizeram 77 blocos de tentativa para demonstrar o critério, enquanto no GEQ foram feitos 53 blocos.

No grupo GMCEQ, observou-se ainda maior variabilidade no número de blocos para demonstrar o critério do que no GEQ. Enquanto no primeiro o número de blocos realizados variou entre 4 e 31, no segundo variou entre 6 e 15. No grupo GMCEQ, os participantes P6 e P10 foram os que fizeram menor número de blocos, seis e quatro, respectivamente. Os participantes P7, P8 e P9 fizeram 12, 24 e 31 blocos de tentativas. No grupo GEQ, o número de blocos necessários variou entre 8 e 16.

A porcentagem de acertos para cada participante e a porcentagem média de acertos nos grupos GMCEQ e GEQ observados nos testes de generalização 1 e 2 são apresentadas na Tabela 15.

Tabela 15 - Porcentagem de acertos e média nos testes de generalização 1 e 2 para os participantes dos grupos Material Concreto mais Equivalência (GMCEQ) e Equivalência (GEQ)

		Teste de Generalização 1	Teste de Generalização 2
Grupo	Partic		
GMCEQ	P6	44	67
	P7	94	37
	P8	100	47
	P9	75	43
	P10	94	27
	\bar{X}	81	44
GEQ	P11	100	77
	P12	88	60
	P13	81	40
	P14	94	93
	P15	100	77
	\bar{X}	93	69

Os dados mostraram que as médias de acertos foram maiores no teste de generalização 1 e menores no teste de generalização 2. No grupo GMCEQ, a porcentagem média de acertos foi de 81% no teste de generalização 1 e 44% no teste de generalização 2, enquanto que no grupo GEQ a média de acertos foi de 93% no teste

de generalização 1 e 69% no teste de generalização 2. Somente P8 no grupo GMCEQ e P11 e P15 no grupo GEQ tiveram 100% de acertos durante o teste de generalização 1. Nenhum participante, tanto do GMCEQ e quanto do GEQ, teve 100% de acertos durante o teste de generalização 2. Analisando-se os dados individualmente, observou-se que os menores escores ocorreram para P6 (44%) no teste de generalização 1, P7 (37%), P8 (47%), P9 (43%) e P10 (27%) no teste de generalização 2, todos do GMCEQ. No grupo GEQ, apenas P13, com 40% de acertos, apresentou escores próximos a esses.

A porcentagem total de acertos e de erros em cada relação da condição de teste de expansão da rede D-(ABC) para os participantes dos grupos GEQ e GMCEQ estão apresentadas na Tabela 16. Os participantes do GEQ tiveram, de forma geral, índices de acertos maiores do que os dos participantes do GMCEQ. No grupo GEQ, em oito das 14 relações testadas os participantes tiveram mais de 80% de acertos (D1A1, D2A2, B1D1, B2D2, B3D3, D1B1, D2B2, D3B3). As menores porcentagens de acertos ocorreram nas relações C1D1, C2D2, D1C1, D2C2 e D3C3, em especial, nas relações C1D1 e D2C2 com oito e zero por cento, respectivamente. No grupo GMCEQ, em cinco das 14 relações testadas os participantes tiveram mais de 80% de acertos (D1A1, B1D1, B3D3, D1B1, D3B3). Em quatro outras relações (B2D2, D2B2, C1D1, C2D2) houve 71% de acertos. Nas relações D2A2, C3D3, D2C2 e D3C3 ocorreram os menores escores com os índices oscilando entre 50% e 57%.

A análise das respostas incorretas mostrou que em 10 das 14 relações testadas no GEQ, os erros aconteceram pela escolha de uma única comparação (D1A1, D2A2, B1D1, B2D2, D1B1, D3B3, C1D1, C2D2, D1C1 e D2C2). Em seis relações (D1A1, D2A2, B1D1, B2D2, C1D1 e D2C2) os erros aconteceram de forma exclusiva na fração que apresentou o menor valor numérico no denominador. Em quatro outras relações os erros foram também exclusivos, mas na fração com o maior denominador (D1B1,

D3B3, C2D2 e D1C1). Em duas outras relações os erros aconteceram de forma distribuída entre as duas comparações, mas as maiores porcentagens de respostas

Tabela 16 - Porcentagem de acertos e erros em cada relação testadas para os participantes dos grupos equivalência (GEQ) e material concreto e equivalência (GMCEQ) na condição de teste de expansão da rede D-(ABC).

Relação	GEQ		GMCEQ	
	Acertos	Erros Alternativas	Acertos	Erros Alternativas
D1A1 (3/9-1/3F)	96	A2(1/4F) A3(1/5F) 4 0	86	A2(1/4F) A3(1/5F) 14 0
D2A2 (3/12-1/4F)	83	A1(1/3F) A3(1/5F) 17 0	57	A1(1/3F) A3(1/5F) 36 7
D3A3 (3/15-1/5F)	-	A1(1/3F) A2(1/4F) - -	-	A1(1/3F) A2(1/4F) - -
B1D1 (1/3-3/9)	92	D2(3/12) D3(3/15) 8 0	86	D2(3/12) D3(3/15) 14 0
B2D2 (1/4-3/12)	83	D1(3/9) D3(3/15) 17 0	71	D1(3/9) D3(3/15) 14 14
B3D3 (1/5-3/15)	83	D1(3/9) D2(3/12) 8 8	86	D1(3/9) D2(3/12) 7 7
D1B1 (3/9-1/3)	83	B2(1/4) B3(1/5) 0 17	86	B2(1/4) B3(1/5) 14 0
D2B2 (3/12-1/4)	83	B1(1/3) B3(1/5) 8 8	71	B1(1/3) B3(1/5) 21 7
D3B3 (3/15-1/5)	92	B1(1/3) B2(1/4) 0 8	93	B1(1/3) B2(1/4) 7 0
C1D1 (2/6-3/9)	8	D2(3/12) D3(3/15) 92 0	71	D2(3/12) D3(3/15) 29 0
C2D2 (2/8-3/12)	58	D1(3/9) D3(3/15) 0 42	71	D1(3/9) D3(3/15) 14 14
C3D3 (2/10-3/15)	75	D1(3/9) D2(3/12) 17 8	50	D1(3/9) D2(3/12) 21 29
D1C1 (3/9-2/6)	29	C2(2/8) C3(2/10) 0 71	79	C2(2/8) C3(2/10) 14 7
D2C2 (3/12-2/8)	0	C1(2/6) C3(2/10) 100 0	50	C1(2/6) C3(2/10) 38 14
D3C3 (3/15-2/10)	59	C1(2/6) C2(2/8) 23 18	57	C1(2/6) C3(2/10) 29 14

incorretas continuaram ocorrendo nas frações com os menores denominadores (C3D3 e D3C3). Observou-se que no grupo GEQ os erros aconteceram com maior frequência pela escolha da comparação com o menor valor numérico no denominador em oito das 14 relações (D1A1, D2A2, B1D1, B2D2, C1D1, C3D3, D2C2 e D3C3).

Resultados semelhantes ocorreram no grupo GMCEQ, onde os erros ocorreram em uma única comparação em cinco das 14 relações testadas (D1A1, B1D1, D1B1,

D3B3 e C1D1). Em todas elas a escolha da comparação ocorreu na alternativa com o menor valor numérico no denominador da fração. Em cinco outras relações (D2A2, D1B1, D1C1, D2C2 e D3C3) os erros foram distribuídos entre as duas comparações, mas nesse caso, as maiores porcentagens de respostas incorretas continuaram a ocorrer na fração com o menor denominador. Apenas na relação C3D3 as escolhas foram mais freqüentes na comparação com o maior denominador na fração. Em resumo, os resultados mostram que em 10 das 14 relações testadas (A1D1, D2A2, B1D1, C1D1, D1B1, D2B2, D3B3, D1C1, D2C2 e D3C3) as respostas incorretas ocorreram com maior freqüência na comparação onde estava programada a fração que apresentou menor valor numérico no denominador.

A Tabela 17 apresenta a porcentagem de acertos e de erros observados na condição de teste de generalização 1 para os participantes dos grupos GMCEQ e GEQ. Os dados mostraram que os participantes do GEQ tiveram, em geral, desempenhos superiores aos do GMCEQ em todas as relações, exceto na F1E1 onde os índices foram iguais (70%). No grupo GEQ houve 100% de acertos em duas relações (E1F1 e F2E2). Nas demais relações os escores de acertos também foram elevados e oscilaram entre 70% e 90%. No grupo GMCEQ observou-se escores inferiores a 100% de acertos em todas as relações testadas, sendo que os índices de acertos variaram entre 70% e 90%.

A análise dos erros mostrou que no grupo GEQ as respostas incorretas ocorreram pela escolha de uma única comparação em três das seis relações testadas (E2F2, E3F3 e F3E3), sendo que em apenas uma delas (E3F3) a escolha foi na fração que apresentou o menor valor numérico no denominador da fração, nas outras duas relações os erros se concentraram na alternativa que apresentou a fração com o maior denominador. Em apenas uma relação (F1E1) os erros aconteceram de forma distribuída entre as duas comparações e, nesse caso, com maior freqüência de respostas incorretas

foi pela escolha da comparação que apresentou o menor valor numérico no denominador. No grupo GMCEQ, a escolha de apenas uma comparação incorreta ocorreu em duas relações (E1F1 e E2F2), sendo que na relação E1F1 foi escolhida a fração com o menor valor numérico no denominador e na relação E2F2 a escolha se inverteu. Em duas outras relações (E3F3 e F1E1), os erros foram distribuídos entre as duas comparações e, em ambas, houve maior frequência de respostas na fração com o maior denominador. Em resumo, os dados mostraram que no GEQ não houve algum tipo de tendência quanto aos erros cometidos pelos participantes, mas que no GMCEQ observou-se tendência para que os erros se concentrassem na alternativa com o maior denominador na fração.

Tabela 17 - Porcentagem de acertos e erros em cada relação testada para os participantes dos grupos equivalência (GEQ) e material concreto e equivalência (GMCEQ) na condição de teste de Generalização 1.

Relação	Acertos	GEQ		Acertos	GMCEQ	
		Erros	Alternativas		Erros	Alternativas
E1F1 (1/2-2/4)	100	F2(2/12)	F3(2/14)	90	F2(2/12)	F3(2/14)
E2F2 (1/6-2/12)	90	F1(2/4)	F3(2/14)	80	F1(2/4)	F3(2/14)
E3F3 (1/7-2/14)	90	F1(2/4)	F2(2/12)	70	F1(2/4)	F2(2/12)
F1E1 (2/4-1/2)	70	E2(1/6)	E3(1/7)	70	E2(1/6)	E3(1/7)
F2E2 (2/12-1/6)	100	E1(1/2)	E3(1/7)	70	E1(1/2)	E3(1/7)
F3E3 (2/14-1/7)	90	E1(1/2)	E2(1/6)	80	E1(1/2)	E2(1/6)

As porcentagens de acertos e de erros ocorridos em cada relação apresentada no teste de generalização 2 para os participantes dos grupos GEQ e GMCEQ estão contidas na Tabela 18. Com relação à porcentagem de acertos, observou-se que, de modo geral, os índices foram maiores no grupo GEQ do que no GMCEQ. No grupo GEQ, excetuando-se a relação E3G3, todas as porcentagens de acertos ficaram abaixo de 100%. Em quatro das 12 relações testadas nessa condição os escores oscilaram entre

70% e 90% (E2G2, G1E1, G2E2 e G3F3). Nas demais relações, os índices de acertos ficaram entre 30% e 60%. No grupo GMCEQ, em oito das 12 relações testadas as porcentagens de acertos ficaram abaixo de 50% (E2G2, G1E1, G2E2, F1G1, F2G2, F3G3, G2F2 e G3F3). O maior escore ocorreu na relação E1G1 onde os participantes acertaram 80% das tentativas e o menor foi na relação G1F1 onde não houve acertos (0%).

Com relação aos erros, observou-se que em nove das 11 relações onde eles ocorreram no grupo GEQ (E1G1, E2G2, G1E1, G2E2, G3E3, F1G1, F2G2, G2F2 e G3F3) as respostas incorretas aconteceram pela escolha exclusiva de uma única comparação. Em duas outras relações (F3G3 e G1F1) as respostas foram distribuídas entre as duas alternativas. No caso da relação G1F1, a maior porcentagem de acertos também foi na comparação com o menor denominador. Portanto, em 10 das 11 relações em que houve erros, as porcentagens de respostas incorretas foram maiores nas comparações que apresentaram frações com menores valores nos denominadores (E1G1, E2G2, G1E1, G2E2, G3E3, F1G1, F2G2, G1F1, G2F2 e G3F3). No grupo GMCEQ, em quatro das 12 relações testadas os erros aconteceram de forma exclusiva em uma única comparação (E1G1, E2G2, F1G1 e F2G2). Em outras sete relações (G1E1, G2E2, G3E3, F3G3, G1F1, G2F2 e G3F3), os erros foram distribuídos entre as duas comparações, mas as porcentagens de respostas incorretas continuaram maiores nas comparações com os menores valores nos denominadores das frações. Apenas na relação E3G3 houve maior frequência de respostas erradas na comparação com o maior denominador. Portanto, em 11 das 12 relações testadas (E1G1, E2G2, F1G1, F2G2, G1E1, G2E2, G3E3, F3G3, G1F1, G2F2 e G3F3), os erros ocorreram pela escolha da comparação que apresentou a fração com o menor valor numérico no denominador. Em resumo, tanto no GEQ quanto no GMCEQ observou-se que os participantes tenderam a

escolher as comparações incorretas onde estava programada a alternativa com o menor denominador na fração.

Tabela 18 - Porcentagem de acertos e erros em cada relação testada para os participantes dos grupos equivalência (GEQ) e material concreto e equivalência (GMCEQ) na condição de teste de Generalização 2.

Relação	Acertos	GEQ		Acertos	GMCEQ	
		Erros	Alternativas		Erros	Alternativas
E1G1 (1/2-3/6)	60	G2(3/18) 40	G3(3/21) 0	80	G2(3/18) 20	G3(3/21) 0
E2G2 (1/6-3/18)	80	G1(3/6) 20	G3(3/21) 0	30	G1(3/6) 70	G3(3/21) 0
E3G3 (1/7-3/21)	100	G1(3/6) 0	G2(3/18) 0	60	G1(3/6) 7	G2(3/18) 33
G1E1 (3/6-1/2)	70	E2(1/6) 30	E3(1/7) 0	20	E2(1/6) 60	E3(1/7) 20
G2E2 (3/18-1/6)	80	E1(1/2) 20	E3(1/7) 0	30	E1(1/2) 50	E3(1/7) 20
G3E3 (3/21-1/7)	90	E1(1/2) 10	E2(1/6) 0	60	E1(1/2) 30	E2(1/6) 10
F1G1 (2/4-3/6)	30	(G2(3/18) 70	G3(3/21) 0	20	(G2(3/18) 80	G3(3/21) 0
F2G2 (2/12-3/18)	30	G1(3/6) 70	G3(3/21) 0	40	G1(3/6) 60	G3(3/21) 0
F3G3 (2/14-3/21)	60	G1(3/6) 20	G2(3/18) 20	10	G1(3/6) 50	G2(3/18) 40
G1F1 (3/6-2/4)	20	F2(2/12) 70	F3(2/14) 10	0	F2(2/12) 80	F3(2/14) 20
G2F2 (3/18-2/12)	40	F1(2/4) 60	F3(2/14) 0	30	F1(2/4) 60	F3(2/14) 10
G3F3 (3/21-2/14)	70	F1(2/4) 30	F2(2/12) 0	30	F1(2/4) 50	F2(2/12) 20

Discussão

Os objetivos propostos para o Experimento 2 foram verificar os efeitos das condições: 1) de treino com material concreto; 2) de treino de relações condicionais entre estímulos fracionários pictóricos e numéricos e entre estímulos fracionários numéricos e numéricos segundo o paradigma proposto por Sidman e Taiby, (1982) e, 3) de treino com material concreto em conjunto com treino de relações condicionais sobre: a) a formação de classes de equivalência com estímulos fracionários; b) a expansão das classes de equivalência de estímulos formadas e a generalização para novas situações e c) a resolução de problemas fracionários do tipo lápis e papel.

Os resultados mostraram que 12 dos 15 participantes (P1, P2, P4, P5, P7, P8, P10, P11, P12, P13, P14 e P15) acertaram todos os exercícios de multiplicação. Por outro lado, nos exercícios de divisão, apenas quatro participantes (P2, P4, P12 e P14) tiveram 100% de acertos, enquanto outros seis (P5, P6, P7, P11, P13 e P15) tiveram desempenhos entre 71% e 86% de acertos. Isso sugere que os participantes dominavam essas habilidades, em especial a de multiplicar, antes de serem expostos às condições experimentais (Quadro 5). Pode-se supor, assim, que eventuais dificuldades por eles apresentadas para resolver problemas fracionários que exigem o conceito de proporção não se devem a possíveis déficits de aprendizagem em operações de multiplicação e divisão. Os desempenhos de todos os participantes dos grupos experimentais (GMCEQ, GMC e GEQ) e dos grupos controle durante as condições de avaliação inicial e final foram superiores quando as frações foram expressas de forma absoluta em comparação com a forma de apresentação relativa, o que de forma geral, replicou os resultados observados do Experimento 1. Na avaliação final os maiores ganhos observados em relação à avaliação inicial ocorreram para o grupo GEQ e os menores para o GMC. Os

participantes dos grupos de controle não apresentaram ganhos sistemáticos na avaliação final (Tabela 10). A maioria dos participantes dos grupos GMCEQ e GEQ demonstrou as relações AB durante o pré-teste e precisaram de treino direto na relação BC (Tabela 11). Todos os participantes dos GMCEQ e GEQ demonstraram as relações de simetria (BA e CB) e transitividade/equivalência (AC/CA), exceto P6 do GMCEQ (Tabela 12). Todos os participantes dos grupos GMCEQ e GME passaram por treino direto da relação AD (exceto P13 do GEQ) e demonstraram desempenhos decrescentes ao longo dos testes de expansão da rede (Tabela 13). Todos os participantes aprenderam as relações apresentadas no teste de expansão das classes quando treinados diretamente. Contudo, os participantes do GEQ necessitaram de menos blocos de tentativas para aprendê-las (Tabela 14). De forma geral, os desempenhos dos participantes do grupo GEQ foram superiores aos do GMCEQ nas duas condições de testes de generalização, sendo que os escores foram maiores no teste de generalização 1 nos dois grupos experimentais (Tabela 15). A análise dos erros cometidos durante o teste de expansão das classes mostrou que as porcentagens de respostas incorretas foram mais frequentes na comparação com o menor valor numérico no denominador da fração (Tabela 16). A análise dos erros ocorridos no teste de generalização 1 mostrou que em apenas duas relações, E1F1 e F2E2, os participantes do GEQ, acertaram todas as tentativas. Os erros ocorreram de forma mais freqüente nas alternativas em que as frações apresentaram denominadores com maiores valores numéricos no GMCEQ, mas não houve nenhum tipo de tendência no GEQ (Tabela 17). No teste de generalização 2 observou-se 100% de acertos apenas na relação E3G3 no grupo GEQ. Nas demais relações os erros ocorreram de forma concentrada em apenas uma das comparações apresentadas e tenderam a ser mais frequentes nas comparações cujas frações apresentaram denominadores menores (Tabela 18). Em geral, nas condições de teste de expansão das

classes e de generalização 2 verificou-se que os erros tenderam a acontecer pela escolha da comparação incorreta que apresentou os menores valores numéricos nos denominadores das frações.

A constatação de que os escores de acertos foram maiores na relação AB do que na relação BC e AD estão de acordo com a literatura e replicaram os resultados encontrados no Experimento 1. A literatura aponta que alunos resolvem facilmente problemas expressos de forma absoluta, como no caso da relação AB, e têm dificuldades para resolvê-los quando eles são expressos de forma relativa (e.g., Carraher & Schliemann, 1992).

Os resultados do Experimento 2 replicaram os dados do Experimento 1 e mostraram a eficiência do treino de relações condicionais por meio do procedimento de pareamento com o modelo para ensinar relações arbitrárias entre estímulos arbitrários pictóricos e numéricos (relações AB e AD) e numéricos e numéricos (relação BC). A literatura da área de equivalência já demonstrou a eficiência desse procedimento para treinos com diferentes estímulos e participantes (e.g., Sidman & Tailby, 1982; de Rose, 1993).

Os dados indicaram que os participantes demonstraram as relações de simetria (BA e CB) e transitividade e equivalência (AC e CA) que não foram ensinadas diretamente a eles. Esses resultados permitem afirmar que os participantes demonstraram a formação de três classes de estímulos. Cada classe foi formada por um estímulo pictórico, uma fração numérica absoluta e uma relativa (A1B1C1, A2B2C2 e A3B3C3). Esses dados corroboram achados da literatura que registram a ocorrência dessas relações inclusive com estímulos simbólicos matemáticos (Lynch & Cuvo, 1995; Santos, 1996; Carmo, 2000).

De acordo com a literatura (Sidman & Tailby, 1982; Sidman, Kirk & Willson-Morris, 1985; de Rose, 1993), uma vez ensinada duas relações entre estímulos de três conjuntos, por exemplo, entre estímulos dos conjuntos A e B e dos conjuntos B e C, e observadas as relações de simetria e transitividade/equivalência, é possível afirmar-se que ocorreu a formação de uma classe de equivalência de estímulos ABC. E mais, a partir do treino adicional entre um novo membro e um dos componentes da classe já estabelecida é possível expandir o tamanho dessa classe. Por exemplo, ao treinar a relação entre os estímulos do conjunto A e os estímulos de um novo conjunto, D, seria formada a classe ABCD. No entanto, os dados do Experimento 2, assim como os do Experimento 1, não mostraram a ocorrência da expansão das classes já estabelecidas. Ao contrário, todos os participantes, exceto P15 (GEQ) começaram os testes de expansão das classes de equivalência com índices em que variaram entre 70% e 90% de acertos, os quais decaíram à medida que novas tentativas aconteceram. Esses dados estão em desacordo com a literatura da área de equivalência. Uma possibilidade de explicar esses resultados aparentemente contraditórios entre os dados do presente experimento e os de estudos anteriores pode ser a natureza dos estímulos utilizados, uma vez que, ao contrário do que normalmente ocorre em experimentos relatados na literatura, os estímulos da presente investigação não são totalmente arbitrários, visto que se trata de participantes experientes e que já tiveram contato com os símbolos fracionários utilizados na escola regular.

Outro fator que pode justificar a não expansão das classes já estabelecidas pode ser o fato do comportamento do aluno não estar adequadamente sob controle instrucional das regras escolares comumente adotadas como estratégia de ensino para o conceito de proporção no ensino regular. A eficácia dessas regras já há muito tempo vem sendo questionada na literatura (e.g. Schliemann & Ruiz, 1986; Tinoco & Lopes,

1994: Lopes 2008). Nesse caso, seria interessante investigar se e como os alunos estariam aplicando as regras que a escola regular ensina na resolução de problemas fracionários, pois pode-se hipotetizar que essas regras poderiam estar interferindo na aquisição de novas respostas, uma vez que, apesar de ser um ponto ainda controverso, a literatura em análise do comportamento sugere que uma resposta adquirida via controle instrucional torna-se mais resistente à mudanças (e.g., Catânia, Matthews & Shimoff, 1982).

A formação de classes de equivalência de três membros (ABC) que foram estabelecidas após os treinos AB e BC confirmam dados da literatura que indicam ser o procedimento de pareamento com o modelo uma forma eficiente para estabelecer, via treino direto, (e.g., de Rose, 1993). Contudo, observou-se variabilidade no desempenho dos participantes para que o critério de aprendizagem fosse demonstrado, em especial, entre os participantes do GMCEQ. Esses resultados indicam que analisar mais precisamente os pré-requisitos que cada participante possui pode ser uma forma para otimizar a aquisição de novas respostas, como sugere Carmo (2004).

As porcentagens de acertos observados nos testes de generalização 1 e 2 mostraram que os participantes tiveram sistematicamente desempenhos maiores na primeira avaliação do que a segunda. Uma possível explicação para esse resultado pode ser o fato de que no primeiro teste os exercícios poderiam ser resolvidos multiplicando ou dividindo os estímulos de amostra pelo número 2, enquanto que no segundo teste os exercícios seriam resolvidos multiplicando ou dividindo os estímulos de amostra pelo número 3. Conforme assinalou Spinillo (1992), o referencial de metade é uma estratégia bastante utilizada pelas crianças para aprender o conceito de proporção e resolver problemas fracionários a partir de julgamentos envolvendo os limites “mais que metade” , “menos que metade” ou “igual à metade”. A análise dos erros cometidos

durante a condição de teste de generalização 1 mostrou que as escolhas das comparações incorretas ocorreram de forma assistemática, ou seja, os valores numéricos absolutos apresentados nos denominadores das frações programadas como estímulos de comparação incorretos parecem não ter determinado as respostas erradas. Em outras palavras, não é possível dizer que os participantes erraram escolhendo as frações que apresentaram números maiores ou menores nos denominadores das frações.

Nos testes de generalização 2 os participantes demonstraram maiores índices de acertos nas relações EG e GE do que nas relações FG e GF. Uma possível explicação para esse resultado pode ser o fato de que para encontrar os resultados corretos nas relações EG e GE os participantes teriam que usar apenas as operações fundamentais de adição e subtração. Por outro lado, para encontrar as respostas corretas nos exercícios referentes às relações FG e GF eram necessárias operações adicionais de multiplicação e divisão. Nesse caso, para encontrar a resposta correta os participantes precisavam inicialmente simplificar cada uma das frações separadamente e só posteriormente comparar os resultados encontrados para julgarem se eles exemplificavam casos de proporcionalidade ou não. Análise semelhante foi proposta por Spinillo (1993), quando considerou a importância das relações de primeiras e segundas ordens na aprendizagem do conceito de proporção. Relações de primeira ordem envolvem a comparação entre partes ou entre partes e o todo das quantidades envolvidas. Por exemplo, para saber se as relações A/B e C/B são equivalentes é necessário comparar os resultados de $A:B$ e $C:D$ para, num segundo momento, compará-los, ou seja, estabelecer relações de segunda ordem. No caso das relações FG e GF, por exemplo, para identificar as frações $2/12$ (F1) e $3/18$ (G1) como equivalentes, os participantes deveriam primeiro simplificar F1 e G1 (no caso de F1 dividindo numerador e denominador por 2 no caso de G1 dividindo o numerador e denominador por 3, o que representa estabelecer relações de primeira

ordem), para então, comparar os resultados e verificar se as frações são ou não equivalentes (relações de segunda ordem). A partir de uma linguagem comportamental, pode-se afirmar que no caso das relações EG e GE há uma menor quantidade de respostas precorrentes necessárias para que a resposta solução ocorra, enquanto que no caso das relações FG e GF há outros precorrentes envolvidos. Respostas precorrentes são caracterizadas como aquelas que tornam a ocorrência de outro comportamento mais provável, sendo que dessa forma, a última resposta da cadeia, a resposta solução, também se torna mais provável (Simonassi & Cameschi, 2003). Assim, seria interessante investigar quais são as resposta precorrentes necessárias para a solução dos problemas fracionários que as crianças deixam de apresentar quando erram os exercícios.

Os dados referentes aos erros cometidos pelos participantes dos dois grupos experimentais replicaram os resultados observados no Experimento 1. Em geral, os erros aconteceram porque os participantes escolheram a alternativa incorreta onde estava programado o denominador com o menor valor numérico. Esses dados sugerem que os participantes realmente apresentam dificuldade em discriminar a relação que existe entre o numerador e o denominador no momento de avaliar o valor relativo entre duas frações, habilidade essa, que segundo Spinillo (1993), dificulta aos participantes compreender que duas frações, apesar de numericamente diferentes apresentam o mesmo valor relativo. Mas para tanto, torna-se imperativo que os alunos simplifiquem isoladamente todas as frações que serão comparadas para, posteriormente, compará-las entre si. Em outro trabalho, Spinillo (1992) demonstrou que crianças percebem duas frações diferentes como sendo de uma mesma magnitude quando elas podem aplicar o conceito de maior que e menor que metade (de um objeto). Uma possibilidade é que as escolhas incorretas aconteceram por que os estímulos fracionários apresentados como

alternativas nas condições de teste dificultaram que os participantes realizassem operações de divisão e multiplicação (ou alguma operação aditiva correspondente) para encontrar a resposta correta. Assim, as escolhas ocorreram pelas frações cujos valores numéricos do denominador fossem mais facilmente divididos ou multiplicados por dois.

Considerando-se os objetivos propostos para o Experimento 2 pode-se dizer que:

a) houve formação de classes de equivalência tanto para o grupo que fez apenas treino de relações condicionais (GEQ) quanto para o que fez esse treino em conjunto com o treino com material concreto (GMCEQ); b) não houve expansão das classes de equivalência tanto para os participantes do grupo GMCEQ quanto GEQ, sendo que os desempenhos observados nos testes de generalização foram maiores para os participantes do grupo GEQ, em especial, no teste de generalização 2 e, c) o grupo que realizou treino exclusivo em relações condicionais (GEQ) foi o que apresentou maiores ganhos na resolução de problemas fracionários do tipo lápis e papel na avaliação final, seguido pelo grupo que fez treino com material concreto em conjunto com treino de relações condicionais (GMCEQ). O grupo que fez apenas treino com material concreto (GMC) foi o que obteve o menor desempenho na avaliação final entre os três grupos experimentais.

Experimento 3

A equivalência de estímulos apresenta-se como uma possibilidade de explicar comportamentos humanos simbólicos a partir da formação de classes de estímulos relacionados a diferentes tipos de comportamentos. Os resultados das pesquisas nessa área têm viabilizado tecnologia e conhecimento passíveis de aplicação em diferentes contextos (Albuquerque & Melo, 2005). Inúmeros trabalhos sugerem a eficiência da equivalência de estímulos na compreensão e modificação de comportamentos no contexto escolar. Dentre esses, destacam-se os comportamentos de leitura e escrita. Os comportamentos de ler e escrever podem ser compreendidos como uma rede de respostas verbais que se interligam umas às outras. Essa proposta de análise considera a possibilidade de que esses distintos repertórios possam ser adquiridos a partir do ensino de relações condicionais ensinadas por meio do procedimento de pareamento com o modelo (de Rose, Souza, Rossito & de Rose, 1989). Sidman (1971) pode ser creditado como o precursor dos estudos sobre equivalência de estímulos e sua possibilidade de aplicação na leitura. Neste estudo, um jovem com microencefalia foi exposto a um procedimento de treino e testes de relações condicionais entre três conjuntos de estímulos. O conjunto A foi formado por palavras ditadas. O conjunto B por figuras (representantes das palavras do conjunto A) e o conjunto C pelas palavras impressas (representantes das figuras do conjunto A). De início, o participante já apresentava relação AB (palavra ditada – figura) e a relação BD (nomear figuras). O participante passou pelo treino direto da relação AC entre palavras ditadas e palavras escritas. Sem necessidade de treino explícito adicional o participante apresentou as relações BC e CB (figuras – nomes impressos e nomes impressos – figuras, respectivamente) quando testado.

De forma semelhante, Sidman e Cresson (1973/1994) demonstraram que o treino de algumas relações foi suficiente para que os participantes aprendessem relações não ensinadas diretamente. Os pesquisadores programaram o treino e o teste entre quatro conjuntos de estímulos. O conjunto A foi composto por palavras ditadas, o conjunto B por figuras representantes das palavras do conjunto A, o conjunto C por palavras escritas representantes das figuras do conjunto A e o conjunto D pela nomeação dos estímulos do conjunto C. Neste estudo, os participantes já demonstravam inicialmente a relação AB (palavra ditada – figura). Os autores ensinaram aos participantes a relação AC (palavra ditada – palavra escrita) e verificaram que eles demonstraram as relações BC (figura – palavra escrita), CB (palavra escrita – figura) e CD (nomeação das palavras escritas). Esses resultados indicaram que o comportamento de leitura pode ser analisado a partir de uma complexa rede de relações condicionais adquiridas por meio do procedimento de pareamento com o modelo.

Analisar o comportamento de leitura e escrita nessa perspectiva permite identificar o repertório de entrada do aprendiz bem como as respostas ou relações que necessitam ser ensinadas e, assim, predizer quais novas relações ou respostas podem ser esperadas (Albuquerque & Melo, 2005). Segundo de Rose (2005), essas relações podem ser inicialmente independentes, mas à medida que são adquiridas podem se integrar e dar origem a novas relações não ensinadas diretamente. Uma rede pode ser formada tanto por relações entre estímulos quanto entre estímulos e respostas. No primeiro caso, essas relações dão origem ao que a análise do comportamento denomina como classes de estímulos. A formação de uma rede de relações implica que respostas estão agora sob controle de uma classe de estímulos. Esse controle pode ser exercido de diferentes maneiras dependendo do tipo de interação entre comportamento e ambiente que ocorre num dado momento. O controle pode ocorrer pelo efeito de unidades mínimas dos

estímulos (moleculares), como no caso de sílabas, e serem encadeados formando unidades globais (molaes), como no caso de palavras. Por outro lado, unidades molaes podem se decompor em unidades mais moleculares. Assim, essa concepção de leitura e escrita permite identificar quais relações devem ser primeiramente ensinadas, ou seja, permite avaliar a existência de respostas que podem ser precorrentes para a aquisição de outras e, em caso de ausência destes repertórios, ensiná-los.

O treino de relações condicionais segundo o paradigma de equivalência de estímulos é um procedimento eficiente para gerar leitura com compreensão. De Rose et al. (1989) investigaram a aquisição de leitura por meio do paradigma de equivalência de estímulos e do processo de generalização em seis crianças com história de fracasso escolar, cujas idades variavam entre oito e 14 anos. Metade deles cursava a primeira série do ensino fundamental e a outra metade a segunda série. Ensinaram aos participantes discriminações condicionais entre palavras faladas apresentadas como estímulos de amostra e palavras impressas como comparações. Utilizaram ainda um programa de exclusão para ensinar novas relações entre palavras desconhecidas. Após as condições de treino, os participantes foram testados quanto a aquisição de relações que não foram ensinadas diretamente entre palavras impressas e suas figuras correspondentes, a resposta de ler as palavras impressas e ler palavras escritas pela recombinação de sílabas presentes nas palavras de treino. Os resultados mostraram que, quatro das seis crianças, aprenderam a ler as palavras ensinadas e a relacioná-las às suas figuras e demonstraram bom desempenho em leitura generalizada. Duas outras crianças não concluíram o estudo, mas aprenderam as palavras ensinadas por meio do procedimento de exclusão. Contudo, não demonstraram leitura generalizada. Tomados em conjunto, os dados permitiram concluir que o treino de relações condicionais entre palavras ditadas e impressas pode ser eficiente para ensinar leitura com compreensão.

Os autores sugeriram que a rede de relações condicionais programada para o ensino de leitura e escrita incluía os conjuntos A (palavra escrita), A' (palavra ditada nova), B (figura), C (palavra escrita), C' (palavra escrita nova) e D (comportamento de nomear).

Outros estudos incluíram nessa rede de relações o comportamento de escrever chamado de composição de anagrama ou treino de cópia com resposta construída (Dube, McDonald, McIlvane e Mackay, 1991). Albuquerque e Melo (2005) apresentaram um modelo de rede de relações composto pelos conjuntos A (palavra ditada), B (figura), C (palavra impressa) e pelas respostas D (nomeação), E (escrita) e F (composição). Nessa proposta, a relação AF foi denominada como construção com anagrama, onde o participante, usando partes de uma palavra (como letras ou sílabas), construiu uma palavra ditada. A relação CF representou a construção com anagramas de uma palavra apresentada na forma impressa. A relação BF foi a construção de anagramas a partir de figuras apresentadas como estímulos de modelo.

A cópia é uma das respostas categorizadas por Skinner (1978) em sua proposta de compreensão funcional da linguagem. Nesse modelo o comportamento foi definido pelo efeito que ele exerce sobre outra pessoa, denominado como comportamento verbal e analisado a partir do conceito de contingência tríplice. O maior interesse dessa proposta é a identificação das variáveis relacionadas com a aquisição e manutenção das respostas e o efeito que o contexto exerce sobre o significado dos símbolos verbais. A cópia foi definida como uma das categorias de resposta verbal em que o controle discriminativo é exercido por estímulos visuais, a resposta emitida é motora e as conseqüências produzidas por essa resposta são de natureza social. Nessa categoria, é possível encontrar, em alguns casos, correspondência pontual ou estrutural entre as características visuais dos estímulos discriminativos e as do produto da resposta motora.

Em outros casos, essa correspondência pode ser mais flexível e de natureza mais funcional, o que, portanto, pode caracterizá-la como uma relação simbólica.

A cópia ou composição é um dos componentes do comportamento de escrever. De Rose (2005) aponta as respostas motoras, a soletração e a composição ou edição como componentes para a escrita e que, apesar das respostas motoras serem um dos componentes mais enfatizados na aquisição do comportamento de escrever, o treino de cadeias comportamentais correspondentes a cada letra do alfabeto instrumentaliza a criança com um repertório de unidades mínimas que podem ser encadeadas em unidades maiores (palavras e textos) sob controle de diferentes estímulos antecedentes. Essas relações, como dito anteriormente, são chamadas de cópias. A cópia possibilita o treino de respostas motoras envolvidas na escrita de tal maneira que seu produto seja uma reprodução dos estímulos textuais. Uma característica do comportamento de cópia é que ele deve ficar sob controle visual dos estímulos que poderão ter correspondência formal ou funcional com os estímulos e os produtos das respostas.

A literatura sugere que o procedimento de construir palavras a partir de suas letras ou sílabas (construir anagramas) pode facilitar a emergência de novas respostas no repertório dos indivíduos. Conforme sugeriu Skinner (1978), o treino de composição pode viabilizar o controle que unidades menores (como letras e sílabas) podem ter sobre o comportamento. O efeito do treino de cópia sobre o desempenho em ditado foi investigado por Hanna, Souza, de Rose e Borges (1994) com crianças cujas idades variaram entre oito e 10 anos. Os participantes aprenderam previamente, por meio do procedimento de exclusão, relações condicionais entre palavras ditadas apresentadas como estímulos de amostras e palavras impressas como estímulos de comparação. Inicialmente, os participantes fizeram um pré-teste onde deveriam construir, usando letras impressas em cartões, um conjunto de palavras que foram ditadas pelo

experimentador. Em seguida, deveriam escrever esse mesmo conjunto de palavras que também foram ditadas. Após o pré-teste os participantes foram submetidos ao treino de cópia com resposta construída. Nessa condição, o participante foi exposto a uma palavra impressa num cartão, o qual foi removido para em seguida ser construída por ele. Foram usados 10 conjuntos com 10 palavras cada. Metade das palavras de cada conjunto foi usada nos treinos e metade nos testes de generalização. A composição foi feita pela seleção de letras do alfabeto que se encontravam disponíveis ao mesmo tempo sobre uma mesa. Após a construção da cópia, o cartão foi reapresentado acima da palavra construída e dada a oportunidade do participante fazer as correções que julgasse necessárias. Composições corretas foram reforçadas socialmente com elogios e as incorretas passaram por procedimento de correção. Por último, os participantes passaram por uma condição de pós-teste semelhante ao pré-teste. Os resultados mostraram que o procedimento palavra ditada mais treino de cópia/composição foi mais eficiente que o de palavra ditada mais escrita cursiva para estabelecer relações entre palavras ditadas, em especial, para as palavras treinadas.

De forma semelhante ao que ocorre na aprendizagem da leitura e da escrita, o comportamento matemático pode ser considerado como um caso especialmente complexo de comportamento verbal, no qual as respostas estão sob controle de propriedade ou relações quantitativas (de Rose, 2010). Assim, como na leitura e escrita, o comportamento conceitual matemático refere-se também a relações simbólicas. Carmo (2000) analisou o conceito de número como uma rede de relações entre conjuntos de estímulos envolvendo número ditado, número impresso, conjunto de itens e o comportamento de nomear os símbolos numéricos. Análise semelhante pode ser feita em relação a conceitos matemáticos mais elaborados, como o de equivalência entre frações ou de proporção. Compreender que as frações $1/3$, $2/6$ e $3/9$, por exemplo,

representam magnitudes relativas entre frações e formam uma classe de equivalência implica em responder aos números ditados $1/3$, $2/6$ e $3/9$ (auditivo), aos números impressos $1/3$, $2/6$ e $3/9$ (visual), relacionar os símbolos $1/3$, $2/6$ e $3/9$ aos conjuntos de suas respectivas quantidades e nomeá-las. Essas classes de equivalência constituídas tornam-se os símbolos das propriedades quantitativas do ambiente (de Rose, 2010).

As relações de controle por unidades de diferentes tamanhos que ocorrem sobre o comportamento de ler e escrever também podem estar presentes no comportamento matemático. No caso da aprendizagem de frações, o aluno deve aprender que, diante de um retângulo dividido em três partes iguais sendo que uma delas está marcada, ele deve dizer ou escrever a fração $1/3$ (relação absoluta). Essa resposta é resultante de várias outras que ocorreram em cadeia sob controle de diferentes unidades. Para escrever ou dizer o denominador (o número três) a resposta deve estar sob o controle do conjunto de partes em que o inteiro foi dividido (controle molar), enquanto que para dizer ou escrever o numerador (o número um) a resposta deve estar sob controle apenas da parte marcada (controle molecular). Relações semelhantes ocorrem quando, diante de um retângulo dividido em seis partes iguais sendo que duas delas estão marcadas, o aluno diz ou escreve a fração $2/6$. Contudo, as aquisições dessas respostas isoladas não asseguram que ele responda ou compreenda que as duas frações representam um mesmo valor relativo, visto que são respostas diferentes sob controle de estímulos antecedentes também diferentes.

A análise do comportamento matemático como uma rede de relações permite compreendê-lo como respostas que estão sob controle dos estímulos do ambiente. A equivalência de estímulos tem se configurado como um modelo eficiente para identificar quais estímulos ou quais de suas propriedades são relevantes para a aquisição e a manutenção dos comportamentos. Permite ainda identificar quais são as relações que

estão ausentes e que precisam ser ensinadas para que a rede se forme. Estudos na área da leitura e da escrita indicam que o treino de cópia ou composição de palavras a partir de suas letras ou sílabas (construir anagramas) pode facilitar a emergência de novas respostas no repertório dos indivíduos, ou seja, pode facilitar a formação de uma rede relações ou classes de estímulos. Portanto, é cientificamente relevante investigar qual é o efeito de um procedimento de treino de composição de frações, semelhante ao treino de composição de palavras a partir de unidades menores, sobre a formação de classes de estímulos fracionários e a resolução de problemas proporcionais.

Os objetivos propostos para o Experimento 3 foram investigar os efeitos das condições: 1) de treino exclusivo de relações condicionais entre estímulos fracionários pictóricos e numéricos e entre estímulos fracionários numéricos e numéricos segundo o paradigma de Sidman e Taiby (1982); 2) de treino de composição das frações em conjunto com o treino de relações condicionais e, 3) de treino de relações condicionais em conjunto com o relato das estratégias utilizadas para a resolução dos problemas fracionários sobre: a) a formação de classes de equivalência com estímulos fracionários; b) a expansão das classes de equivalência de estímulos formadas e a generalização para novas situações e c) a resolução de problemas fracionários do tipo lápis e papel. Um quarto objetivo desse experimento foi verificar se houve correspondência entre as estratégias descritas pelos participantes para resolver os problemas fracionários durante os treinos e testes de relações condicionais e as estratégias ensinadas pela escola regular.

Método

Participantes:

Trinta alunos do sexto ano ou início do sétimo ano do ensino fundamental de duas escolas da rede estadual do estado de Goiás com idades variando entre 12 e 14 anos participaram do Experimento 3. A escolha dos participantes seguiu os mesmos critérios adotados no Experimento 1, exceto que o índice máximo de acerto nos problemas onde as frações foram expressas de forma relativas foi estendido a 40%.

Local e sessões:

O terceiro experimento ocorreu no ambiente da escola de Goiânia descrito no Experimento 1. Os critérios para as sessões foram os mesmos do primeiro experimento .

Material:

Foram utilizadas as mesmas pastas descritas no experimento 1 para o treino e teste das relações condicionais. Utilizou-se ainda, para o treino de composição das frações, o mesmo tabuleiro e os mesmos tocos de madeira pintados na cor branca e azul utilizados no Experimento 2 para compor as frações $1/3$, $2/6$, $3/9$, $1/4$, $2/8$, $3/12$, $1/5$, $2/10$ e $3/15$.

Estímulos:

Os estímulos de treinos e testes das relações condicionais foram os mesmo usados no Experimento 1 e descritos no Quadro 1.

Procedimento:

Os participantes foram divididos em seis grupos de cinco componentes. Três grupos foram designados como grupos experimentais e três como grupos de controle. Antes dos treinos e testes das relações condicionais os participantes dos grupos experimentais passaram por um teste de nomeação das frações dos conjuntos B, C e D. Cada fração foi apresentada individualmente na parte inferior de uma folha ofício A4 e impressa em fonte arial com tamanho 72. As folhas foram organizadas em pastas semelhantes às utilizadas nas condições de treinos e testes das relações condicionais e a seqüência de apresentação foi a ordem alfanumérica dos conjuntos, ou seja, B1, B2, B3, C1, C2, C3 e assim por diante. Se o participante não respondesse em 10 segundos era computado um erro e a próxima fração era apresentada (Ver Anexo F). Foram dadas as seguintes instruções orais:

“Vou lhe apresentar várias frações, uma a uma. Sua tarefa será tocar na fração que estará no centro da folha desta pasta e dizer o nome da fração. Caso não saiba diga NÃO SEI. Após você responder eu lhe mostrarei outra fração. Você entendeu? Então vamos começar. Qual é o nome desta fração”.

O primeiro grupo experimental passou pelas mesmas condições do grupo equivalência programado no Experimento 1. Contudo, após cada pré-teste programado para as condições de treino (AB, BC e AD), após o teste de transitividade/equivalência e do teste de expansão da rede os participantes fizeram, obrigatoriamente, o treino de composição de objetos (“ou construção de cópias”) a partir de figuras-modelos representáveis pelas frações numéricas dos conjuntos B, C e D. Este grupo foi designado como grupo Equivalência mais Treino de Composição (GEQTC).

Durante os treinos de composição dos objetos (ou “cópia), experimentador e participante ficaram em lados opostos de uma mesa escolar com medidas aproximadas

de 0,60cm x 0,80cm. Para esse treino, utilizou-se o tabuleiro e os toquinhos brancos e azuis descritos no Experimento 2 (ver Anexo D). Os toquinhos ficaram disponíveis do lado esquerdo da mesa, enquanto o tabuleiro ficou do lado direito. A tarefa dos participantes foi construir no tabuleiro, usando os tocos, cópias dos modelos pictóricos representativos de frações. Os modelos eram figuras em forma de barra de chocolate medindo 15cm de comprimento por 4cm de altura. Cada figura-modelo foi mostrada no centro de folhas tamanho A4 organizadas e apresentadas em pastas iguais às usadas nos treinos de relações condicionais do experimento 1 e ficaram à mostra durante cada treino de composição. As figuras-modelos apresentaram algumas partes azuis e outras brancas sendo que as de cor azul corresponderam aos numeradores e as de cor branca aos denominadores de suas respectivas representações fracionárias numéricas. Por exemplo, uma figura dividida em três partes iguais, sendo uma azul e duas brancas tem como representação numérica a fração $1/3$.

Durante os treinos de composição (ou construção) dos objetos (ou “cópia”), o toco inteiro e branco esteve sempre presente no primeiro espaço do tabuleiro. Antes de cada composição o experimentador disse o nome da fração que representa cada figura-modelo, sendo que o participante teve que repeti-lo em voz alta. Os participantes tiveram cinco minutos para tentar fazer a composição ou construção do objeto referente à cada figura-modelo apresentada. Ao final desse tempo, caso o participante não tivesse feito a tarefa ou feito de forma incorreta o experimentador mostrava como a composição deveria ser construída. Foram programados cinco treinos de composição ao longo do experimento.

O primeiro treino de composição (ou construção de “cópias”) dos objetos semelhantes às figuras-modelos ocorreu após o pré-teste AB. Estiveram disponíveis sobre a mesa, de forma aleatória, os toquinhos referentes às frações $1/3$, $1/4$ e $1/5$ e os

participantes tiveram que compor (ou construir), no segundo espaço do tabuleiro, usando os toquinhos, um objeto (ou “cópia”) semelhante à figura-modelo apresentada na pasta. Primeiro, foi apresentada uma figura-modelo que pode ser representado pela fração $\frac{1}{3}$, em seguida pela fração $\frac{1}{4}$ e por último $\frac{1}{5}$. Após a construção de cada composição (ou “cópia”) os toquinhos foram retirados do segundo espaço para que uma nova composição fosse feita. Após a primeira composição dos objetos (ou “cópias”) das frações $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{5}$ ocorreram as reconstruções de todas elas. Contudo, agora a composição do objeto correspondente à figura-modelo da fração numérica $\frac{1}{3}$ foi construída no segundo espaço do tabuleiro e ali permaneceu. A composição do objeto correspondente à figura-modelo da fração $\frac{1}{4}$ foi construída no terceiro espaço do tabuleiro e lá também permaneceu e, por último, a composição do objeto correspondente à figura-modelo da fração $\frac{1}{5}$ foi construída no quarto espaço do tabuleiro. Durante a reconstrução dos objetos os toquinhos da fração $\frac{2}{6}$ também estiveram disponíveis sobre a mesa. Em seguida, todos os toquinhos foram retirados e os treinos e testes das relações condicionais continuaram.

O segundo treino de composição dos objetos (ou construção de “cópias”) ocorreu após o pré-teste BC. A tarefa dos participantes foi construir objetos (ou “cópias”) de figuras-modelos representantes das frações $\frac{2}{6}$, $\frac{2}{8}$ e $\frac{2}{10}$ (sendo que sobre a mesa estiveram dispostos de forma aleatória todos os toquinhos referentes a estas frações). O procedimento, critérios e instruções foram os mesmos utilizados para o treino de construção realizado após o pré-teste AB. Durante a reconstrução desses objetos estiveram também disponíveis sobre a mesa os toquinhos referentes a fração $\frac{1}{4}$.

O terceiro treino de construção de cópias ocorreu após o teste de transitividade e equivalência. Os modelos foram figuras que podem ser representadas pelas frações

numéricas dos conjuntos B e C. Este treino ocorreu em três fases. Na primeira fase, os participantes inicialmente construíram o objeto (ou “cópia”) da figura-modelo correspondente à fração $1/3$ no segundo espaço do tabuleiro, o qual permaneceu no local. Posteriormente, construíram o objeto (ou “cópia”) correspondente à figura-modelo da fração $2/6$ no terceiro espaço do tabuleiro. Em seguida, todos os toquinhos foram retirados e o mesmo procedimento foi realizado com as figuras-modelos correspondentes às frações $1/4$ e $2/8$ (segunda fase), e por último, com as figuras-modelos correspondentes às frações $1/5$ e $2/10$ (terceira fase). Nesse treino, os toquinhos referentes a todas as frações ficaram dispostos de forma aleatória sobre a mesa em todas as fases. Os critérios e instruções foram os mesmos utilizados para o treino de construção realizado após os pré-testes AB

O quarto treino de composição de objetos (ou “cópias”) ocorreu após o pré-teste AD. A tarefa dos participantes foi compor (ou construir) objetos (ou “cópias”) correspondentes às figuras-modelos das frações $3/9$, $3/12$ e $3/15$. O procedimento, critérios e instruções foram os mesmos utilizados para o treino de composição realizado após os pré-testes AB. Nesse treino estiveram disponíveis sobre a mesa toquinhos referentes às frações $3/9$, $3/12$ e $3/15$.

O quinto e último treino de composição de objetos (ou “cópias”) aconteceu antes do teste de expansão da rede e foi dividido em três fases. Na primeira, os participantes construíram o objeto (ou “cópia”) correspondente à figura-modelo da fração $1/3$ no segundo espaço do tabuleiro, o qual permaneceu no local. Depois fizeram a composição do objeto correspondente à figura-modelo da fração $2/6$ no terceiro espaço do tabuleiro, o qual também permaneceu no local. Por último, fizeram a composição do objeto correspondente à figura-modelo da fração $3/9$. Em seguida, todos os toquinhos foram retirados e o mesmo procedimento foi realizado com as figuras-modelo das frações $1/4$,

2/8 e 3/12 (segunda fase) e, por fim, das frações 1/5, 2/10 e 3/15 (terceira fase). Todos os toquinhos referentes às frações de cada fase de treino ficaram dispostos de forma aleatória sobre a mesa. No entanto, nas fases um e três foram adicionados os toquinhos referentes à fração 2/8 e na fase dois os toquinhos da fração 2/6.

As instruções para a tarefa de composição dos objetos (ou “cópias”) das condições de treino AB, BC e AD foram as seguintes:

“Você tem a sua frente vários toquinhos brancos e azuis. Tem também um tabuleiro (apontar). Sua tarefa será olhar para a figura que eu lhe mostrarei nesta pasta (apontar) e, usando os toquinhos, fazer um objeto igual à figura que você verá no espaço abaixo do toco inteiro que eu lhe mostrar (indicar). Você poderá ver a figura o tempo todo. O objeto que você vai fazer, ou seja, a cópia que você fará, deverá ficar com o mesmo tamanho do toco inteiro que está na parte de cima do tabuleiro e conter o mesmo número de partes da figura, sendo que todos os toquinhos que você usar deverão ter o mesmo tamanho. Você terá cinco minutos para fazer essa tarefa”.

Quando o participante não fez a tarefa ou fez de forma incorreta após cinco minutos o experimentador descreveu ao participante passo a passo a forma correta de construir o objeto a partir das seguintes instruções orais:

“Seu tempo acabou. Vou lhe mostrar como fazer a tarefa. Primeiro, conte quantos toquinhos são de cor branca e quantos de cor azul na figura que eu lhe mostrei (se o participante errou ou não soube a resposta o experimentador contou junto com ele). Agora ache entre todos os toquinhos que estão sobre a mesa aqueles que têm tamanhos iguais aos da figura e coloque-os em separado (se após três minutos o participante não identificou os toquinhos o experimentador mostrou ao participante quais eram os toquinhos corretos). Agora coloque-os nesse espaço do tabuleiro (indicado pelo experimentador) na mesma ordem da figura (se o participante não sabia

o experimentador indicou qual era o toco e o local que ele deveria ser colocado). Faça isso com os demais toquinhos. Pronto, agora você têm um objeto igual ao da figura da pasta”.

O segundo grupo experimental foi designado como grupo equivalência mais relato (GEQR). As condições programadas para esse grupo foram as mesmas do grupo equivalência (GEQ). Contudo, nesse grupo foi solicitado aos participantes que descrevessem as estratégias por eles utilizadas para resolver os problemas fracionários após os pré-testes AB, BC e AD, após os treinos e testes de simetria (BA/BC) e transitividade/equivalência (AC/CA), após o teste de generalização 1 e 2 e após os treinos e testes de expansão da rede. O relato foi solicitado em apenas uma tentativa de cada relação testada nas condições acima descritas. No pré-teste AB o relato foi pedido após uma tentativa de uma relação A1B1, uma A2B2 e uma A3B3. No pré-teste BC o relato ocorreu após uma tentativa B1C1, uma B2C2 e uma B3C3. Após o pré-teste AD ocorreu após uma tentativa A1D1, A2D2 e A3D3. Na condição de teste de simetria os relatos ocorreram após uma tentativa das seguintes relações: B1A1, B2A2, B3A3, C1B1, C2B2 e C3B3. Na condição de teste de transitividade/equivalência os relatos seguiram uma tentativa das relações A1C1, A2C2, A3C3, C1A1, C2A2 e C3A3. Na condição de teste de generalização 1 o relato ocorreu após uma das seguintes tentativas: E1F1, E2F2, E3F3, F1E1, F2E2 e F3E3. Na condição de teste de generalização 2 o relato sucedeu as seguintes relações: E1G1, E2G2, E3G3, G1E1, G2E2, G3E3, F1G1, F2G2, F3G3, G1F1, G2F2 e G3F3. Por sua vez, na condição de teste de expansão da rede os relatos ocorreram após as seguintes condições: C1D1, C2D2, C3D3, B1D1, B2D2, B3D3, D1A1, D2A2, D1B1, D2B2, D3B3, D1C1, D2C2 e D3C3.

Os participantes que não demonstram 100% de acertos nos pré-testes AB, BC e AD e no teste de expansão da rede foram submetidos aos treinos específicos de cada

uma dessas condições e após demonstrarem o critério foram novamente solicitados a descrever as estratégias adotadas para a resolução dos problemas. Esses novos relatos ocorreram após as mesmas tentativas e seguindo as mesmas instruções adotadas para os relatos anteriores. Os relatos foram colhidos após os participantes escolherem a alternativa que julgaram ser a correta em cada uma das tentativas descritas anteriormente mediante a seguinte seqüência de perguntas orais feitas pelo experimentador:

“Agora que você fez sua escolha me diga por que você escolheu essa fração (ou figura). Por que você acha que esta é a fração (ou figura) correta? Como você pensou para escolher essa fração (ou figura)? Você fez alguma continha? Que tipo de continha você fez?”

As perguntas foram feitas de acordo com as respostas dadas pelos participantes. No momento em que o participante descrevia a estratégia utilizada, independentemente de ser adequada ou não, ou quando ele dizia que não sabia descrever a estratégias as perguntas foram suspensas. Portanto nem todas as perguntas foram feitas a todos os participantes.

Nesse grupo, três experimentadores participaram da coleta de dados. Enquanto um dos experimentadores apresentava as tentativas e consequenciava as respostas, outro anotava as respostas certas e erradas e um terceiro experimentador solicitava e anotava os relatos.

O terceiro grupo experimental passou pelas mesmas condições de treinos e testes de relações condicionais que foram submetidos os participantes do grupo equivalência do Experimento 1 e foi aqui também denominado como grupo equivalência (GEQ).

O Quadro 6 apresenta a seqüência de condições programadas para os grupos experimentais e controles.

Quadro 6 - Organização das condições programadas, relações testadas e treinadas nos grupos Equivalência mais Treino de Composição (GEQTC), Equivalência mais Relato (GEQR) e Equivalência (GEQ).

Condição	Relações Apresentadas	Grupos			
		GEQTC	GEQR	GEQ	Controles
Avaliação Inicial	Ver no texto	Sim	Sim	Sim	Sim
Treino de conhecimentos básicos	Ver no texto	Sim	Sim	Sim	Não
Treino da tarefa	Ver no Texto	Sim	Sim	Sim	Não
Treino AB	A1B1, A2B2 e A3B3	Sim	Sim	Sim	Não
Treino de Composição 1	Frações 1/3, 1/4 e 1/5	Sim	Não	Não	Não
Teste de relato	Relação AB	Não	Sim	Não	Não
Treino BC	B1C1, B2C2 e B3C3	Sim	Sim	Sim	Não
Teste de relato	Relação BC	Não	Sim	Não	Não
Treino de Composição 2	Frações 2/6, 2/8 e 2/10	Sim	Não	Não	Não
Treino Misto	A1B1, A2B2, A3B3, B1C1, B2C2 e B3C3	Sim	Sim	Sim	Não
Teste de Simetria	B1A1, B2A2, B3A3, C1B1, C2B2 e C3B3	Sim	Sim	Sim	Não
Teste de relato	Relação AB e CB	Não	Sim	Não	Não
Treino de simetria	B1A1, B2A2, B3A3, C1B1, C2B2 e C3B3	Sim	Sim	Sim	Não
Teste de Transitividade e equivalência	A1C1, A2C2, A3C3, C1A1, C2A2 e C3A3	Sim	Sim	Sim	Não
Teste de relato	Relação AC e CA	Não	Sim	Não	Não
Treino de Composição 3	Frações 1/3 e 2/6; 1/4 e 2/8 e 1/5 e 2/10	Sim	Não	Não	Não
Treino de Transitividade e equivalencia	A1C1, A2C2, A3C3, C1A1, C2A2 e C3A3	Sim	Sim	Sim	Não
Teste de Generalização 1	Ver no texto	Sim	Sim	Sim	Não
Teste de relato	Relações do teste general.1	Não	Sim	Não	Não
Treino de AD	A1D1, A2D2 e A3D3	Sim	Sim	Sim	Não
Treino de Composição 4	Frações 3/9, 3/12 e 3/15	Sim	Não	Não	Não
Teste de Expansão das classes D-(ABC)	D1A1, D2A2, D3A3, D1B1, D2B2, D3B3, B1D1, B2D2, B3D3, C1D1, C2D2, C3D3, D1C1, D2C2 e D3C3	Sim	Sim	Sim	Não
Teino de Expansão da rede D-(ABC)	Idem ao teste de Expansão da rede D-(ABC)	Sim	Sim	Sim	Não
Treino de Composição 5	Frações 1/3, 2/6 e 3/9; 1/4, 2/8 e 2/10; 1/5, 2/10 e 3/15	Siim	Não	Não	Não
Teste de Generalização 2	Ver no texto	Sim	Sim	Sim	Não
Teste de relato	Relações do teste general.2	Não	Sim	Não	Não
Avaliação Final	Ver no texto	Sim	Sim	Sim	Sim

Os controles foram formados pelos quarto, quinto e sexto grupos e serviram como comparação para os grupos experimentais GEQTC, GEQR e GEQ,

respectivamente. Os grupos controles passaram apenas pelas condições de avaliação inicial e final (de forma semelhante ao Experimento 1).

Resultados

Os dados analisados referem-se aos desempenhos dos participantes dos grupos experimentais (GEQTC, GEQR e GEQ) e controles nas avaliações inicial e final e nas condições de treinos e testes de relações condicionais para os participantes dos grupos experimentais. Foram analisados ainda os relatos verbais que os participantes do grupo GEQR fizeram após algumas das tentativas de treinos e testes de relações condicionais sobre as estratégias por eles utilizadas para a resolução dos problemas fracionários.

O Quadro 7 apresenta o desempenho dos participantes em problemas envolvendo operações simples de divisão e multiplicação. Os participantes acertaram mais problemas de multiplicação do que divisão. Dos 15 participantes, 13 demonstraram 100% de acertos nas questões de multiplicação. Apenas P3 e P5, ambos do grupo Equivalência mais Treino de Composição (GEQTC), tiveram escores menores, em especial, o P5 que acertou apenas 14% dos exercícios. Nas questões de

Quadro 7 - Porcentagem de acertos nas operações matemáticas de multiplicação e divisão para os participantes dos grupos Equivalência mais Treino de Composição (GEQTC), Equivalência e Relato (GEQR) e Equivalência (GEQ).

Grupos	Partic	Multip	Divisão	Grupo	Partic.	Multip	Divisão
GEQTC	P1	100	100	GEQ	P11	100	14
	P2	100	100		P12	100	86
	P3	86	100		P13	100	57
	P4	100	86		P14	100	86
	P5	14	0		P15	100	100
GEQR	P6	100	86	-	-	-	
	P7	100	43	-	-	-	
	P8	100	100	-	-	-	
	P9	100	57	-	-	-	
	P10	100	100	-	-	-	

divisão, apenas seis dos 15 participantes experimentais (P1, P2, P3, P8, P10 e P15) tiveram 100% de acertos. Os demais participantes apresentaram escores inferiores, em

especial, os do grupo Equivalência (GEQ), onde as porcentagens de acertos de quatro dos cinco integrantes, oscilaram entre 14% e 86%. No grupo Equivalência e Relato (GEQR), três dos cinco participantes apresentaram porcentagens de acertos entre 43% e 86%. No grupo Equivalência mais Treino de Composição (GEQTC), P5 não acertou nenhum exercício de divisão. Os dados sugerem que, de modo geral, os participantes apresentaram mais habilidades para resolver problemas de multiplicação do que divisão.

A frequência de acertos no teste de nomeação das frações dos conjuntos B, C e D testadas antes e depois da exposição às condições experimentais programadas para cada grupo de participantes são apresentadas no Quadro 8.

Quadro 8 - Frequência de acerto por participante nos testes de nomeação das frações dos conjuntos de estímulos B,C e D realizados antes e depois da exposição às condições experimentais programadas para os grupos equivalência e treino de composição (GEQTC), equivalência e relato (GEQR) e equivalência (GEQ). (N = 3)

Part.	Antes			Depois		
	B	C	D	B	C	D
GEQTC	P1	1	2	0	0	1
	P2	2	3	3	3	3
	P3	0	0	0	3	3
	P4	0	0	0	3	3
	P5	0	0	0	3	2
GEQR	P6	3	3	3	3	3
	P7	3	0	2	3	3
	P8	3	2	1	3	3
	P9	3	3	1	2	2
	P10	3	3	2	3	3
GEQ	P11	0	0	0	0	0
	P12	3	3	0	3	3
	P13	0	0	0	0	0
	P14	0	0	0	0	0
	P15	3	2	1	3	3

No grupo GEQTC, apenas dois participantes nomearam estímulos dos conjuntos B e C no teste ocorrido antes da exposição às condições experimentais. O participante 1 nomeou uma fração do conjunto B e duas do conjunto C, enquanto P2 nomeou duas frações do conjunto C e todas do B. Os outros três participantes (P3, P4 e P5) não

demonstraram acertos em nenhuma dessas frações. Em relação às frações do conjunto D, P2 nomeou corretamente todas as frações nesse primeiro teste, enquanto os demais membros erraram ou não souberam os nomes de nenhuma das frações. Com relação às frações do conjunto D, observou-se que P2 nomeou corretamente todas as frações ($3/9$, $3/12$ e $3/15$). Os demais participantes não tiveram nenhum acerto quanto aos nomes dessas frações. No teste de nomeação ocorrido após a exposição às condições experimentais, observou-se aumento na frequência de acertos para três dos cinco participantes (P3, P4 e P5), sendo que P3 e P4 nomearam corretamente todas as frações que antes haviam errado. O participante P2 praticamente manteve seu desempenho nas duas avaliações e, curiosamente, P1 diminuiu o número de acertos nos conjuntos B e C e acertou uma fração do conjunto D.

Os participantes do grupo GEQR foram os que nomearam o maior número de frações antes da exposição experimental. Todos os participantes nomearam corretamente as três frações do conjunto B ($1/3$, $1/4$ e $1/5$). Em relação aos estímulos do conjunto C, três dos cinco participantes (P6, P9 e P10) também nomearam corretamente todas as frações. Apenas P7 não acertou o nome de nenhuma dessas frações ($2/6$, $2/8$ e $2/10$). No teste do conjunto D, apenas P6 nomeou corretamente todas as frações ($3/9$, $3/12$ e $3/15$). Contudo, os demais participantes acertaram o nome de pelo menos uma das frações desse conjunto. No teste realizado ao final do experimento, observou-se que os participantes continuaram nomeando corretamente os estímulos do conjunto B e aumentaram o número de acertos nos testes de nomeação dos estímulos dos conjuntos C e D. P6 e P7 acertaram o nome das frações dos três conjuntos de estímulos, enquanto P8 e P10 acertaram todos os nomes das frações dos conjuntos B e C. De forma interessante, P9 que havia acertado todos os nomes dos estímulos dos conjuntos B e C no primeiro

teste, diminui para dois acertos em cada um dos conjuntos no segundo teste. No entanto, aumentou de um para três acertos no teste do conjunto D.

No grupo GEQ, apenas dois participantes nomearam estímulos dos conjuntos B e C no teste realizado antes da exposição às condições experimentais. Os participantes P12 e P15 nomearam todos os membros do conjunto B. Por sua vez, apenas P12 nomeou as três frações do conjunto C, enquanto P15 nomeou apenas duas delas. Os demais participantes erraram ou não souberam nomear nenhum dos membros desses conjuntos. No teste do conjunto D, apenas P15 nomeou corretamente um dos membros componentes desse conjunto. Os demais participantes erraram ou não souberam nomear nenhuma das frações do conjunto D. Resultados semelhantes ocorreram no teste de nomeação realizado após a exposição às condições experimentais programadas. As únicas diferenças foram que P15 nomeou o membro que faltava do conjunto C e P12 e P15 nomearam um dos membros do conjunto D. Em resumo, os dados indicaram que o procedimento de relatar as estratégias utilizadas para resolver os problemas fracionários (grupo GEQR) foi o mais eficaz para aumentar a habilidade de nomear as frações utilizadas nas condições de treino (conjuntos B, C e D), seguido pelo procedimento de fazer o treino de composição das frações (grupo GEQTC). Apenas treinar relações condicionais entre estímulos fracionários pictóricos e numéricos e entre estímulos numéricos e numéricos (GEQ) não teve efeito sobre a resposta de nomear as frações.

A Tabela 19 apresenta a porcentagem e média de acertos nas frações expressas de forma absoluta e relativa nas condições inicial e final para os participantes dos grupos Equivalência e Treino de Composição (GEQTC), Equivalência e Relato (GEQR) e Equivalência (GEQ) e seus respectivos grupos de controle. Em geral, as porcentagens de acertos de todos os participantes foram maiores quando as frações foram expressas de forma absoluta tanto na avaliação inicial quanto na final. Em média, os participantes

dos grupos experimentais demonstraram aumentos da avaliação inicial para final independentemente da forma de apresentação das frações. Por outro lado, nos grupos de controle ocorreram aumentos na média de acertos apenas nos exercícios cujas frações foram expressas de forma relativa, embora esses ganhos tenham sido menores que os

Tabela 19- Porcentagem e média de acertos nas frações expressas de forma absoluta e relativa nas avaliações inicial (AI) e final (AF) para os participantes dos grupos Equivalência e Treino de Composição (GEQTC), Equivalência e Relato (GEQR) e Equivalência (GEQ).

	Grupos Experimentais					Grupos Controles				
	Part.	Absolutas		Relativas		Part.	Absolutas		Relativas	
		A.I	A. F.	AI	A. F.		A.I	A. F.	A. I.	A. F.
GEQTC	P1	60	70	5	5	P16	100	80	20	50
	P2	70	100	15	95	P17	100	90	15	25
	P3	60	90	0	25	P18	20	30	15	10
	P4	80	100	30	95	P19	100	100	10	15
	P5	20	40	20	20	P20	100	100	25	20
	\bar{X}	58	80	14	48	\bar{X}	84	80	17	24
GEQR	P6	70	60	5	90	P21	90	20	0	15
	P7	40	60	5	35	P22	60	100	0	0
	P8	80	90	10	40	P23	90	90	20	5
	P9	80	65	40	70	P24	90	90	15	20
	P10	80	90	50	70	P25	90	90	15	30
	\bar{X}	70	73	22	61	\bar{X}	84	78	10	14
GEQ	P11	30	100	25	0	P26	90	90	15	20
	P12	90	80	20	10	P27	60	50	10	20
	P13	90	100	10	25	P28	40	30	15	0
	P14	80	90	10	25	P29	100	80	10	25
	P15	80	100	20	80	P30	70	50	15	25
	\bar{X}	74	94	17	28	\bar{X}	72	60	13	18

observados nos grupos experimentais. No grupo GEQTC, o aumento foi de 58% para 80% (ganhos de 22 pontos percentuais) para a forma absoluta e de 14% e 48% (ganhos de 34 pontos) para a forma relativa. No grupo GEQR, os aumentos foram de 70% para 73% (3 pontos percentuais) para as frações absolutas e de 22% para 61% (ganhos de 39 pontos) para as relativas. Por sua vez, os aumentos observados no GEQ foram de 74%

para 94% (20 pontos percentuais) na forma absoluta e de 17% para 28% (ganhos de 11 pontos) na forma relativa. Portanto, os maiores aumentos médios na porcentagem de acertos nos exercícios expressos de forma relativa aconteceram nos GEQTC e GEQR, onde os participantes obtiveram ganhos de 34 e 39 pontos percentuais, respectivamente.

Por outro lado, observou-se que a porcentagem média de acertos diminuiu da avaliação inicial para a final em todos os grupos de controle nos problemas em que as frações foram expressas de forma absoluta. As reduções foram de quatro, seis e doze pontos percentuais para os grupos GEQTC, GEQR e GEQ, respectivamente. Diferentemente, quando os problemas foram expressos de forma relativa houve aumento na porcentagem média de acertos em todos os grupos. Contudo, ganhos médios foram de no máximo sete pontos percentuais. No grupo de controle referente ao GEQTC as médias passaram de 17% na avaliação inicial para 24%% na avaliação final. No controle do GEQR passaram de 10% para 78% e no controle do GEQ de 13% para 18%. Portanto, os ganhos observados para os participantes controles dos grupos GEQTC, GEQR e GEQ foram de sete, quatro e seis pontos percentuais, respectivamente.

A análise do desempenho individual dos participantes dos grupos experimentais mostrou que no grupo GEQTC todos os participantes aumentaram os escores da avaliação inicial para a final com frações absolutas, sendo os aumentos observados de no máximo 30 pontos percentuais. No grupo GEQR três participantes tiveram aumentos de no máximo 20 pontos percentuais (P7, P8 e P10), enquanto dois outros (P6 e P9) demonstraram redução no número de acertos. Por sua vez, no grupo GEQ apenas P12 diminuiu o desempenho da avaliação inicial para final. Os demais participantes (P11, P13, P14 e P15) demonstraram aumento nos escores, em especial o P11, cuja média de acertos passou de 30% para 100% (ganhos de 70 pontos).

Quando as frações foram expressas de forma relativa, três participantes do grupo GEQTC (P2, P3 e P4) tiveram aumentos na porcentagem de acertos da avaliação inicial para a final. Destacam-se os participantes P2 e P4 que passaram de 15% e 30% para 95% de acertos, respectivamente. Os participantes P1 e P5 mantiveram os mesmos escores da avaliação inicial na avaliação final (15% e 20%, respectivamente). No grupo GEQR, todos os participantes tiveram aumentos nos escores da avaliação final, em especial o participante P6 que passou de 5% da avaliação inicial para 90% na final. Por sua vez, no grupo GEQ três participantes (P13, P14 e P15) tiveram aumentos na porcentagem de acertos na avaliação final. Destaca-se o participante P15 que apresentou ganhos de 60 pontos percentuais, passando de 20% para 80% de acertos da primeira para a segunda avaliação. Por outro lado, nessa condição observaram-se os aumentos mais discretos entre os três grupos experimentais para os participantes P13 e P14 com ganhos de 15 pontos percentuais da avaliação inicial para a final. Ressalte-se ainda que dois dos cinco participantes (P11 e P12) apresentaram redução na porcentagem de acertos da avaliação inicial para a final, passando de 25% e 20% para 0% e 10%, respectivamente. Tomados em conjunto, os dados sugerem que os desempenhos dos participantes dos grupos GEQTC e GEQR foram superiores aos do grupo GEQ.

No grupo de controle referente ao GEQTC dois participantes (P19 e P20) mantiveram e dois (P16 e P17) diminuíram a porcentagem de acertos da avaliação inicial para a final nos exercícios apresentados de forma absoluta. Apenas P18 demonstrou aumento, passando de 20% para 30% de acertos. No grupo de controle do GEQR, três participantes mantiveram os escores da avaliação inicial para final (P23, P24 e P25), um diminuiu (P21) e outro (P22) aumentou a porcentagem média de acertos. Nesse último caso, os acertos subiram de 60% para 100% (ganhos de 40 pontos). Quatro dos cinco participantes do grupo de controle do GEQ (P27, P28, P29 e P30)

diminuíram seus escores da avaliação inicial para a final. Apenas P26 manteve seu desempenho nas duas avaliações.

Com relação aos desempenhos nos problemas expressos de forma relativa, observou-se que no grupo de controle do GEQTC três participantes apresentaram aumentos na porcentagem de acertos (P16, P17 e P19). Destaca-se o participante P16 que apresentou ganhos de 30 pontos percentuais. Os demais integrantes do grupo (P18 e P20) tiveram redução nos escores da avaliação inicial para a final. No grupo de controle do GEQR três participantes também apresentaram aumentos da avaliação inicial para a final (P21, P24 e P25). Os maiores ganhos foram para os participantes P21 e P25, cujos desempenhos passaram de 0% para 15% e de 15% para 30%, respectivamente. Por último, no grupo de controle do GEQ, quatro dos cinco participantes (P26, P27, P29 e P30) demonstraram aumentos nos escores na avaliação final. Os aumentos observados oscilaram entre 5 e 15 pontos percentuais. Apenas P29 diminuiu seu desempenho e não acertou nenhuma questão relativa na avaliação final.

A porcentagem de acertos nos pré- e pós-testes das condições AB e BC e o número de blocos de treino necessários para os participantes dos grupos experimentais demonstrarem o critério nas condições de treinos AB, BC e AB/BC são apresentados na Tabela 20. Em média, o grupo GEQTC teve a menor porcentagem de acertos entre os três grupos experimentais durante o pré-teste AB (62.2%). A maior porcentagem média foi do grupo GEQ com 97.8%. O desempenho dos participantes do grupo GEQR foi de 73.3% nessa condição.

A análise individual dos resultados mostrou que no grupo GEQTC dois participantes, P2 e P4, acertaram 100% das tentativas no pré-teste AB e não fizeram o treino dessa condição. Já os participantes P1, P3 e P5 apresentaram escores inferiores a 100% e precisaram ser diretamente treinados nessas relações. Todos os três

participantes demonstraram 100% de acertos durante o pós-teste AB em no máximo quatro blocos de tentativas. No grupo GEQR, três dos cinco participantes (P8, P9 e P10) acertaram todas as tentativas no pré-teste e não fizeram o treino direto da relação AB. Apenas os participantes P6 e P7 tiveram escores inferiores a 100% no pré-teste e precisaram de treino direto dessas relações. Após o treino, ambos demonstraram 100%

Tabela 20 - Porcentagem de acertos nos pré- e pós-testes dos treinos AB e BC e número de blocos de treino (NB) realizados nas condições AB, BC e AB/BC para os participantes dos grupos Equivalência mais Treino de Composição (GEQTC), Equivalência e relato (GEQR) e Equivalência (GEQ).

Grupo	Part.	Condição AB			Condição BC			AB/BC NB
		Pré-t.	N	Pós-t.	Pré-t.	N	Pós-t.	
GEQTC	P1	44.4	2	100	88.9	3	100	2
	P2	100	-	-	33.3	2	100	3
	P3	33.3	2	100	33.3	2	100	2
	P4	100	-	-	100	-	-	2
	P5	33.3	4	100	33.3	39	100	2
	\bar{X}	62.2	2.7	100	57.8	11.5	100	2.2
GEQR	P6	55.6	10	100	100	-	-	2
	P7	11.1	2	100	100	-	-	2
	P8	100	-	-	100	-	-	2
	P9	100	-	-	100	-	-	2
	P10	100	-	-	100	-	-	2
	\bar{X}	73.3	6	100	100	-	-	2
GEQ	P11	100	-	-	100	-	-	2
	P12	100	-	-	77.8	4	100	4
	P13	100	-	-	33.3	4	100	2
	P14	100	-	-	55.5	7	100	2
	P15	88.9	2	100	100	-	-	2
	\bar{X}	97.8	-	-	73.3	5	100	2.4

de acertos. Destaca-se o fato de que P7 apresentou, entre todos os grupos, o menor escore no pré-teste (11.1%) e que P6 precisou de 10 blocos de tentativas de treino para demonstrar o critério de aprendizagem. Por sua vez, os participantes do grupo GEQ apresentaram os maiores escores no pré-teste AB. Quatro dos cinco participantes (P11, P12, P13 e P14) tiveram 100% de acertos e não fizeram o treino direto dessa condição.

Apenas P15 precisou do treino AB, mas demonstrou o critério com o mínimo de blocos de treino exigidos (2).

Na condição BC, a maior porcentagem média de acertos ocorreu para o grupo GEQR (100%) seguido pelo GEQ (73.3%) e GEQTC (57.8%). Quatro dos cinco participantes do grupo GEQTC (P1, P2, P3 e P5) apresentaram desempenhos menores que 100% e precisaram de treino direto dessas relações, em especial, os participantes P2, P3 e P5 que acertaram apenas 33.3% das tentativas. Todos, no entanto, apresentaram 100% de acertos durante o pós-teste após fazerem no máximo três blocos de tentativas de treino. No entanto, destaca-se o desempenho do participante P5 que precisou de 39 blocos para acertar 100% das tentativas durante o treino direto das relações BC.

No grupo GEQR, todos os participantes acertaram 100% das tentativas durante o pré-teste BC, o que os dispensou do treino direto dessas relações. No grupo GEQ, dois participantes, P11 e P15, acertaram 100% das tentativas e não fizeram o treino BC. Três outros participantes (P12, P13 e P14) tiveram escores abaixo de 100% e foram diretamente treinados nessas relações tendo apresentado o critério em no máximo sete blocos de tentativas.

A análise conjunta dos três grupos experimentais (GEQTC, GEQR e GEQ) na condição de treino AB/BC mostrou que a média de blocos de tentativas para os participantes demonstrarem o critério foi próximo a dois. Do total de 15 participantes experimentais, 13 apresentaram 100% de acertos em no máximo dois blocos de tentativa (critério mínimo exigido). Apenas P2 do grupo GEQTC e P12 do GEQ precisaram ser expostos a um número maior de blocos e acertaram todas os exercícios com 3 e 4 exposições, respectivamente.

A Tabela 21 apresenta a porcentagem de acertos por bloco de tentativas realizadas durante os testes e treinos das condições BA/CB (simetria) e AC/CA (transitividade e equivalência) para os participantes dos grupos GEQTC, GEQR e GEQ. As médias das porcentagens de acertos dos dois primeiros blocos na condição de teste BA/CB (simetria) oscilaram entre 90% e 100% para os participantes dos três grupos experimentais. Na condição de teste AC/CA (transitividade e equivalência) essa média oscilou entre 80% e 95%.

Os dados individuais observados na condição de teste BA/CB (simetria) mostraram que quatro dos cinco participantes do grupo GEQTC (P1, P2, P3 e P4), tiveram 100% de acertos nos dois blocos de tentativas exigidos como critério. Apenas P5 precisou de treino direto dessas novas relações após fazer 13 blocos de testes com insucesso. Contudo, ele demonstrou o critério após fazer quatro blocos de treino. Resultados semelhantes foram observados no grupo GEQR. Quatro dos cinco participantes (P7, P8, P9 e P10) tiveram 100% de acertos em dois blocos de tentativas realizados. Apenas P6 precisou de treino direto após reduzir seu desempenho do primeiro para o segundo bloco. No entanto, apresentou todas as relações ensinadas em dois blocos de tentativas. No grupo GEQ, todos os participantes tiveram 100% de acertos na condição de teste BA/CB. Quatro dos cinco participantes (P11, P12, P14 e P15) demonstraram 100% de acertos nos dois blocos de tentativas realizados. O participante P13 teve também 100% de acertos, mas precisou de quatro blocos de tentativas para demonstrar o critério.

Na condição de teste AC/CA (transitividade e equivalência), observaram-se resultados semelhantes aos do teste BA/CB (simetria) entre os participantes dos grupos GEQTC, GEQR e GEQ. No grupo GEQTC, quatro dos cinco participantes tiveram 100% de acertos no teste AC/CA. Enquanto P1, P2 e P3 acertaram todas as relações em

no máximo dois blocos de tentativas, P4 acertou em três blocos realizados. Por sua vez, P5, de forma semelhante ao teste BA/CB, não demonstrou o critério no teste AC/CA e precisou do teste direto dessas relações. Contudo, apresentou 100% de acertos em

Tabela 21 - Porcentagem de acertos por bloco de tentativa (B) e médias nos testes e treinos das condições BA/CB (simetria) e AC/CA (transitividade e equivalência) para os participantes dos grupos E-quivalência e Treino de Composição (GEQTC), Equivalência e Relato (GEQR) e Equivalência (GEQ).

Grupo	Par	Simetria													Transitividade/equivalência												
		Teste													Treino				Teste					Treino			
		Blocos													Blocos				Blocos					Blocos			
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	1	2	3	4	1	2	3	4	5	1	2	3	4
GEQTC	P1	100	100	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	89	100	-	-	-	-	-	-	-
	P2	100	100	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	100	100	-	-	-	-	-	-	-
	P3	100	100	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	89	100	-	-	-	-	-	-	-
	P4	100	100	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	78	89	100	-	-	-	-	-	-
	P5	67	78	78	78	78	78	78	78	78	78	78	89	78	89	89	78	100	44	78	44	-	-	56	100	-	-
		93	95	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	80	93	72	-	-	-	-	-	-	
GEQR	P6	89	78	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	78	100	-	-	56	78	67	-	-	67	89	78	100
	P7	100	100	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	89	100	-	-	-	-	-	-	-
	P8	100	100	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	89	100	-	-	-	-	-	-	-
	P9	100	100	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	89	100	-	-	-	-	-	-	-
	P10	100	100	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	100	100	-	-	-	-	-	-	-
		98	95	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	85	95	-	-	-	-	-	-	-	
GEQ	P11	100	100	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	89	100	-	-	-	-	-	-	-
	P12	100	100	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	79	87	79	-	-	100	100	-	-
	P13	100	89	89	100	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	67	78	78	78	100	-	-	-	-
	P14	100	100	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	78	100	-	-	-	-	-	-	-
	P15	100	100	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	100	100	-	-	-	-	-	-	-
		100	98	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	83	93	78	-	-	-	-	-	-	

apenas dois blocos de tentativas exigidos como critério. No grupo GEQR, também quatro dos cinco participantes demonstraram 100% de acertos em no máximo dois blocos de tentativas. No entanto, enquanto P7, P8 e P9 apresentaram aumentos crescentes do primeiro para o segundo bloco de tentativas, P10 acertou 100% das relações nos dois blocos a que foi submetido. Apenas P6, como aconteceu no teste BA/CB, precisou de treino nessa condição por não demonstrar o critério em três blocos de tentativas. No entanto, precisou de apenas três blocos de treino direto para acertar 100% das relações dessa condição. No grupo GEQ, quatro dos cinco participantes (P11, P13, P14 e P15) acertaram 100% das tentativas durante a condição de teste. Os

participantes P11, P14 e P15 demonstraram o critério em dois blocos de tentativas, enquanto P13 apresentou acertos crescentes em cinco blocos realizados. Apenas P12 precisou de treino direto dessas relações após apresentar redução na porcentagem de acertos em três blocos de tentativas. Contudo, apresentou 100% de acertos em dois blocos de treino direto, o que é o número mínimo de blocos a ser feito nessa condição. Esses resultados permitem afirmar que, excetuando-se os participantes P5 (GEQTC), P6 (GEQR) e P12 (GEQ), todos os demais formaram três classes de equivalência de três membros cada (A1B1C1, A2B2C2 e A3B3C3). Em outras palavras, eles formaram três classes de equivalência entre os estímulos pictóricos, suas representações absolutas e suas representações relativas. Por exemplo, agruparam a figura de $1/3$, com a fração $1/3$ e $2/6$. O mesmo ocorreu com as frações $1/4$ e $1/5$.

A Tabela 22 apresenta a porcentagem e as médias de acertos nos pré- e pós-testes da condição AD, a porcentagem de acertos por bloco no teste de expansão da rede D-(ABC) e o número de blocos realizados na condição de treino AD para os participantes dos grupos Equivalência e Treino de Composição (GEQTC), Equivalência e Relato (GEQR) e Equivalência (GEQ). Em média, os participantes do grupo Equivalência tiveram a maior porcentagem de acertos no pré-teste AD (88.9%), seguidos pelos do grupo Equivalência mais Relato (84.5%). Os participantes do grupo Equivalência mais Treino de Composição foram os que demonstraram menor desempenho (55.6%) nessa condição.

No grupo GEQTC, apenas um participante (P1) acertou todas as tentativas no pré-teste AD. Os outros quatro integrantes tiveram escores que oscilaram entre 22.2% e 66.7%. No grupo GEQR, dois dos cinco participantes (P8 e P10) acertaram 100% das tentativas nessa condição, sendo que entre os demais participantes os valores oscilaram entre 66.7% e 77.8%. Por sua vez, no GEQ três dos cinco participantes acertaram 100%

das tentativas e apenas dois, P12 e P14, demonstraram desempenhos entre 66.7% e 77.8%. Todos os participantes dos grupos GEQTC, GEQR e GEQ que necessitaram do treino direto das relações AD demonstram 100% de acertos no pós-teste após a exposição a no máximo três blocos de tentativas, exceto o participantes P14 do grupo GEQ que precisou ser exposto a 19 blocos para demonstrar o critério.

Tabela 22- Porcentagem e média de acertos nos pré e pós-testes da condição AD, porcentagem de acertos por bloco no teste D-(ABC) e número de blocos realizados na condição de treino AD (N) para os participantes dos grupos Equivalência e Treino de Composição (GEQTC), Equivalência e Relato (GEQR) e Equivalência (GEQ).

Grupo	Part.	Condição AD			Teste D-(ABC)				
		Pré-t.	N	Pós-t.	B1	B2	B3	B4	B5
GEQTC	P1	100	-	-	80	73.3	-	-	-
	P2	33.3	2	100	60	60	66.7	46.7	-
	P3	55.6	2	100	46.7	40	-	-	-
	P4	66.7	2	100	80	80	86.7	80	-
	P5	22.2	3	100	53.3	26.7	-	-	-
	\bar{X}	55.6	2.2	100	64	56	77	63	-
GEQR	P6	77.8	3	100	73.3	80	73.3	-	-
	P7	77.8	2	100	66.7	73.3	60	-	-
	P8	100	-	-	80	73.3	-	-	-
	P9	66.7	2	100	80	73.3	-	-	-
	P10	100	-	-	80	93.3	86.7	-	-
	\bar{X}	84.5	2.3	100	76	78.7	44	-	-
GEQ	P11	100	-	-	60	66.7	66.6	60	-
	P12	77.8	2	100	66.7	60	-	-	-
	P13	100	-	-	66.7	80	86.7	90	80
	P14	66.7	19	100	46.7	33.3	-	-	-
	P15	100	-	-	73.3	73.3	80	80	60
	\bar{X}	88.9	10.5	100	62.7	62.7	77.8	76.7	70

Com relação à média de blocos realizados na condição de treino AD, observou-se que os participantes dos grupos GEQTC e GEQR precisaram de aproximadamente duas exposições (critério mínimo exigido) para aprender as novas relações. Por outro lado, no GEQ essa média subiu para 10.5. Contudo, esse valor, provavelmente, foi

decorrente do pequeno número de participantes que fizeram esse treino e do número de blocos que o participante P14 precisou fazer para demonstrar o critério (19).

Na condição de teste de expansão da rede, nenhum participante entre os três grupos experimentais (GEQTC, GEQR e GEQ) obteve 100% de acertos nas relações apresentadas. Em geral, ocorreu redução na porcentagem média de acertos para todos os participantes dos três grupos ao longo dos blocos de testes realizados. No grupo GEQTC, os maiores índices de acertos observados estiveram na casa dos 80% para apenas dois dos cinco participantes (P1 e P4). Entre os demais integrantes do grupo os escores variaram entre 26.7% e 73.3%. No grupo GEQR os escores observados no teste D-(ABC) variaram entre 70% e 80%, em especial, para os participantes P6, P8, P9 e P10. Apenas P7 apresentou índices de acerto na casa de 60%. As menores porcentagens de acertos no teste de expansão da rede ocorreram entre os participantes do grupo GEQ, cujos valores variaram entre 33.3% e 66.7 para quatro dos cinco participantes (P11, P12, P13 e P14). Apenas P15 apresentou desempenhos maiores que oscilaram entre 73.3% e 80% de acertos. Em resumo, os desempenhos observados no teste de expansão da rede mostraram que, em geral, os menores desempenhos ocorreram entre os participantes do grupo GEQ e os maiores escores apareceram entre os integrantes do grupo GEQR. Todos os participantes dos três grupos experimentais apresentaram declínio no número de blocos em no máximo cinco blocos de tentativas, sendo que para sete deles (P1, P3, P5, P8, P9, P12 e P14) a redução na porcentagem de acertos ocorreu logo no segundo bloco.

As porcentagens de acertos por bloco de tentativas na condição de treino direto da expansão da rede (ou treino de expansão das classes) para os participantes dos grupos equivalência mais treino de composição (GEQTC), equivalência mais relato (GEQR) e equivalência (GEQ) é apresentada na Tabela 23. Todos os participantes dos três grupos

experimentais aprenderam as relações ensinadas e demonstraram índices crescentes na porcentagem média de acertos ao longo dos blocos realizados.

No grupo GEQTC, o número de blocos que os participantes precisaram ser expostos para demonstrar o critério variou entre 5 e 17. Desempenhos semelhantes foram observados nos grupos GEQR e GEQ, onde o número de blocos necessários para os participantes acertarem 100% das tentativas variou entre 4 e 15, exceto para o participante P14 que precisou ser exposto a 25 blocos para demonstrar o critério. Em resumo, apesar de nenhum participante dos três grupos experimentais ter demonstrado a expansão das classes de equivalência de três membros (ABC) previamente formadas, todos adquiriram essas relações quando ensinados diretamente.

Tabela 23 - Porcentagem de acertos por bloco de tentativas na condição de treino de expansão da rede para os participantes dos grupos Equivalência e Treino de Composição (GEQTC), Equivalência e Relato (GEQR) e Equivalência (GEQ).

	Part	Blocos																								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
GEQTC	P1	87	80	87	80	100	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	P2	67	53	53	40	40	60	73	60	87	73	80	87	80	80	87	87	100	-	-	-	-	-	-	-	-
	P3	27	47	73	67	67	73	53	60	73	93	93	100	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	P4	87	80	67	67	80	80	87	93	93	93	93	100	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	P5	33	53	40	67	60	53	60	67	80	67	67	87	100	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	\bar{X}	60	63	64	64	69	66	68	70	83	81	83	93	90	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
GEQR	P6	67	87	67	60	80	87	80	87	93	93	93	80	80	87	100	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	P7	60	60	67	73	73	67	60	67	73	60	67	86	100	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	P8	87	80	87	93	100	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	P9	67	67	87	80	80	80	87	87	87	87	100	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	P10	87	93	93	93	100	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	\bar{X}	74	77	80	80	87	78	76	80	84	80	87	83	90	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
GEQ	P11	47	80	67	100	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	P12	60	80	67	93	80	73	80	73	87	87	80	87	87	100	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	P13	80	67	80	67	73	80	73	80	87	87	80	100	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	P14	67	73	67	53	67	73	87	67	60	47	53	80	60	80	73	80	80	80	93	87	80	87	80	87	100
	P15	67	93	100	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	\bar{X}	64	79	76	78	73	75	80	73	78	74	71	87	73	83	86	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

A Tabela 24 apresenta a porcentagem e a média da porcentagem de acertos nos teste de generalização 1 (TG1) e 2 (TG2) para os participantes dos grupos Equivalência mais Treino de composição (GEQTC), Equivalência e Relato (GQER) e Equivalência (GEQ). Em média, os participantes dos grupos GEQTC, GEQR e GEQ tiveram escores

maiores no teste de generalização 1 do que no testes de generalização 2. Enquanto no teste de generalização 1 os índices médios foram de no mínimo 85% de acertos (91% para o GEQTC, 100% para o GEQR e 85% para o GEQ,), no teste de generalização 2 os escores ficaram próximos da casa dos 50% (49.2% para o GEQTC, 57.5% para o GEQR e 50% para o GEQ).

Tabela 24 - Porcentagem e média de acertos nos testes de generalização 1 (TG1) e 2 (TG2) para os participantes dos grupos Equivalência e Treino de Composição (GEQTC), Equivalência mais relato (GEQR) e Equivalência (GEQ).

	Partic.	Condições	
		TG1	TG2
GEQTC	P1	100	54.2
	P2	100	66.7
	P3	88.3	29.2
	P4	100	70.8
	P5	66.7	25
	\bar{X}	91	49.2
GEQR	P6	100	62.5
	P7	100	50
	P8	100	62.5
	P9	100	50
	P10	100	62.5
	\bar{X}	100	57.5
GEQ	P11	100	20.8
	P12	91.7	80
	P13	66.7	33.3
	P14	66.7	29.2
	P15	100	86.7
	\bar{X}	85.0	50

A análise dos dados individuais mostrou que dos 15 participantes dos três grupos experimentais, 10 tiveram 100% de acertos no teste de generalização 1. No grupo GEQTC, três participantes (P1, P2 e P4) acertaram todas as tentativas, enquanto P3 e P5 acertaram 88.3% e 66.7%, respectivamente. No grupo GEQR, todos os participantes demonstraram 100% de acertos. Por sua vez, no GEQ apenas os participantes P11 e P15 acertaram todas as tentativas., enquanto P13 e P14 tiveram 66.7% de acertos, P12, teve 91.7%.

No teste de generalização 2, nenhum participante acertou 100% das tentativas. No GEQTC, os participantes demonstraram escores de acertos que variaram entre 25% e 70.8%. No GEQR, os valores individuais oscilaram entre 50% e 62.5% de acertos e no GEQ os índices ficaram entre 20.8% e 86.7%. Em resumo, os resultados mostraram que os participantes dos três grupos tiveram escores maiores no teste de generalização 1 do que no teste de generalização 2, sendo que o GEQR apresentou ainda maior homogeneidade nos desempenhos do que os participantes dos grupos GEQTC e GEQ, em especial, no primeiro teste de generalização.

A Tabela 25 apresenta a porcentagem de acertos e de erros ocorridos em cada relação testada na condição de teste de expansão da rede (ou das classes já formadas) para os grupos Equivalência mais Treino de Composição (GEQTC), Equivalência e Relato (GEQR) e Equivalência (GEQ). Com relação à porcentagem de acertos, os dados mostraram que no GEQTC todas as relações tiveram índices abaixo de 100%. Em oito das 14 relações testadas os participantes demonstraram escores maiores que 70% (D1A1, D2A2, B1D1, B2D2, B3D3, D1B1, D2B2 e D3B3). Os menores índices ocorreram para as relações C1D1, C2D2 e D2C2 com 14%, 29% e 7% de acertos, respectivamente. Nas demais relações os valores ficaram próximos à casa dos 50%. No Grupo GEQR, em quatro das 14 relações testadas os participantes tiveram 100% de acertos (B2D2, B3D3, D1B1 e D3B3). Em metade das 14 relações (D1A1, D2A2, B1D1, D2B2, C3D3, D1C1 e D3C3) as porcentagens de acertos ficaram acima de 70%. Os menores escores aconteceram para as relações C1D1 e D2C2, cujos valores estiveram na casa de 20%. No grupo GEQ, não houve 100% de acertos em nenhuma das relações testadas. Em metade das 14 relações testadas (D1A1, B1D1, B2D2, B3D3, D1B1, D3B3 e C3D3) as porcentagens de acertos estiveram acima de 70%. Os menores

valores ocorreram nas relações C1D1, D2C2 e D3C3, cujos índices ficaram na casa de 20%. Nas demais relações os escores variaram entre 50% e 67%.

Tabela 25 - Porcentagem de acertos (A) e erros em cada relação testadas para os participantes dos grupos equivalência mais treino de composição (GEQTC), equivalência e relato (GEQR) e equivalência (GEQ) na condição de teste de expansão da rede D-(ABC).

Relação	GEQTC			GEQR			GEQ		
	A	Erros Alternativas		A	Erros Alternativas		A	Erros Alternativas	
D1A1 (3/9-1/3F)	82	A2(1/4F)	A3(1/5F)	87	A2(1/4F)	A3(1/5F)	96	A2(1/4F)	A3(1/5F)
D2A2 (3/12-1/4F)	79	A1(1/3F)	A3(1/5F)	73	A1(1/3F)	A3(1/5F)	50	A1(1/3F)	A3(1/5F)
D3A3 (3/15-1/5F)	-	A1(1/3F)	A2(1/4F)	-	A1(1/3F)	A2(1/4F)	-	A1(1/3F)	A2(1/4F)
B1D1 (1/3-3/9)	86	D2(3/12)	D3(3/15)	93	D2(3/12)	D3(3/15)	88	D2(3/12)	D3(3/15)
B2D2 (1/4-3/12)	71	D1(3/9)	D3(3/15)	100	D1(3/9)	D3(3/15)	75	D1(3/9)	D3(3/15)
B3D3 (1/5-3/15)	86	D1(3/9)	D2(3/12)	100	D1(3/9)	D2(3/12)	96	D1(3/9)	D2(3/12)
D1B1 (3/9-1/3)	79	B2(1/4)	B3(1/5)	100	B2(1/4)	B3(1/5)	87	B2(1/4)	B3(1/5)
D2B2 (3/12-1/4)	86	B1(1/3)	B3(1/5)	80	B1(1/3)	B3(1/5)	67	B1(1/3)	B3(1/5)
D3B3 (3/15-1/5)	71	B1(1/3)	B2(1/4)	100	B1(1/3)	B2(1/4)	92	B1(1/3)	B2(1/4)
C1D1 (2/6-3/9)	14	D2(3/12)	D3(3/15)	27	D2(3/12)	D3(3/15)	25	D2(3/12)	D3(3/15)
C2D2 (2/8-3/12)	29	D1(3/9)	D3(3/15)	53	D1(3/9)	D3(3/15)	63	D1(3/9)	D3(3/15)
C3D3 (2/10-3/15)	64	D1(3/9)	D2(3/12)	87	D1(3/9)	D2(3/12)	71	D1(3/9)	D2(3/12)
D1C1 (3/9-2/6)	57	C2(2/8)	C3(2/10)	80	C2(2/8)	C3(2/10)	46	C2(2/8)	C3(2/10)
D2C2 (3/12-2/8)	7	C1(2/6)	C3(2/10)	20	C1(2/6)	C3(2/10)	21	C1(2/6)	C3(2/10)
D3C3 (3/15-2/10)	57	C1(2/6)	C2(2/8)	75	C1(2/6)	C3(2/10)	29	C1(2/6)	C3(2/10)

Com relação aos erros, os dados mostraram que no grupo GEQTC os participantes erraram escolhendo exclusivamente a comparação com o menor valor numérico no denominador da fração em três das 14 relações testadas (B3D3, D1B1 e C1D1). Destaca-se a relação C1D1 onde 86% dos erros foi na comparação D2. Em outras cinco relações (D2A2, B2D2, D3B3, C3D3 e D2C2), os erros foram distribuídos entre as duas comparações incorretas, mas as porcentagens continuaram maiores nas

alternativas que apresentaram os menores valores numéricos nos denominadores das frações. Destaca-se a relação D2C2 onde 79% dos erros ocorreu na comparação C1. Portanto, em oito das 14 relações testadas (D2A2, B2D2, B3D3, D1B1, D3B3, C1D1, C3D3 e D2C2) as porcentagens de erros foram maiores nas frações com os menores denominadores. Em cinco relações (D1A1, B1D1, C2D2, D1C1 e D3C3) as escolhas ocorreram na comparação que apresentou o maior valor numérico no denominador. Nas relações D1A1 e B1D1, os erros aconteceram pela escolha de apenas uma das comparações. No grupo GEQR, em sete das 14 relações testadas (D1A1, D2A2, B1D1, D2B2, C1D1, D1C1 e D2C2) os erros aconteceram de forma exclusiva pela escolha das comparações cujos denominadores apresentaram os menores valores numéricos. Destacam-se as relações C1D1 e D2C2 onde os escores foram de 73% e 80%, respectivamente. Na relação D3C3 as respostas incorretas foram distribuídas entre duas alternativas, mas a maior porcentagem de erros também foi na fração com o menor denominador. Portanto, em oito das 14 relações testadas (D1A1, D2A2, B1D1, D2B2, C1D1, D1C1, D2C2 e D3C3) as porcentagens de erros foram maiores nas frações que apresentaram os menores denominadores. Apenas em duas relações (C2D2 e C3D3) as porcentagens de respostas erradas foram maiores nas comparações cujos denominadores tinham valor numérico maior. No grupo GEQ, os participantes erraram pela escolha exclusiva da comparação com o menor valor numérico em quatro relações (B2D2, B3D3, D1B1 e D3B3). Em outras seis relações (D2A2, B1D1, C1D1, C3D3, D1C1, D2C2) os erros foram distribuídos entre as duas comparações incorretas, mas continuaram mais frequentes nas frações com os menores denominadores. Portanto, em 10 das 14 relações (D2A2, B1D1, B2D2, B3D3, D1B1, D3B3, C1D1, C3D3, D1C1 e D2C2) as porcentagens de respostas incorretas foram maiores nas comparações onde foi programada a fração com o menor valor numérico. Em apenas três relações (D1A1,

C2D2 e D3C3) as escolhas aconteceram com maior frequência na comparação com o maior valor numérico no denominador da fração. Em síntese, observou-se maior porcentagem de erros nas comparações onde as frações apresentaram os menores denominadores nos três grupos experimentais.

A porcentagem de acertos e de erros para cada relação apresentada na condição de teste de generalização 1 para os participantes dos grupos Equivalência mais Treino de Composição (GEQTC), Equivalência e Relato (GEQR) e Equivalência (GEQ) é apresentada na Tabela 26.

Tabela 26 - Porcentagem de acertos (A) e erros em cada relação testada para os participantes dos grupos equivalência mais treino de composição (GEQTC), equivalência e relato (GEQR) e equivalência (GEQ) na condição de teste de generalização 1.

Relação	GEQTC			GEQR			GEQ	
	A	Erros		A	Erros		A	Erros
		Alternativas		Alternativas		Alternativas	Alternativas	Erros
E1F1 (1/2-2/4)	100	F2(2/12) 0	F3(2/14) 0	F2(2/12) 100	F3(2/14) 0	F2(2/12) 90	F3(2/14) 10	
E2F2 (1/6-2/12)	80	F1(2/4) 20	F3(2/14) 0	F1(2/4) 100	F3(2/14) 0	F1(2/4) 100	F3(2/14) 0	
E3F3 (1/7-2/14)	100	F1(2/4) 0	F2(2/12) 0	F1(2/4) 100	F2(2/12) 0	F1(2/4) 100	F2(2/12) 0	
F1E1 (2/4-1/2)	80	E2(1/6) 0	E3(1/7) 20	E2(1/6) 100	E3(1/7) 0	E2(1/6) 90	E3(1/7) 10	
F2E2 (2/12-1/6)	80	E1(1/2) 0	E3(1/7) 20	E1(1/2) 100	E3(1/7) 0	E1(1/2) 60	E3(1/7) 20	
F3E3 (2/14-1/7)	100	E1(1/2) 0	E2(1/6) 0	E1(1/2) 100	E2(1/6) 0	E1(1/2) 70	E2(1/6) 30	

No grupo GEQTC ocorreu 100% de acertos em metade das seis relações testadas (E1F1, E3F3 e F3E3). Nas outras três relações as porcentagens de acertos foram iguais a 80%. No grupo GEQR, os participantes acertaram 100% das tentativas em todas as relações e no grupo GEQ houve 100% de acertos em apenas duas relações (E2F2 e E3F3). Nas outras quatro relações os valores oscilaram entre 60% e 90%.

Com relação aos erros, os dados mostraram que no GEQTC os participantes erraram escolhendo exclusivamente uma das comparações incorretas em três relações

(E2F2, F1E1 e F3E3). Apenas na relação E2F2 os erros se concentraram na fração com o menor denominador. Nas outras duas (F1E1 e F2E2) eles aconteceram pela escolha do denominador com o maior valor. Por sua vez, no grupo GEQ todos os erros aconteceram nas alternativas com os maiores valores numéricos nos denominadores das frações (relações E1F1, F1E1 e F3E3). Em síntese, nas seis relações em que ocorreram erros nos três grupos experimentais as escolhas incorretas concentraram-se sempre em uma única alternativa. Diferindo dos resultados anteriores, os erros, apesar de menos freqüentes, aconteceram pela escolha da comparação com maior valor numérico no denominador em cinco relações.

A Tabela 27 apresenta a porcentagem de acertos e de erros ocorridos nas relações apresentadas na condição de teste de generalização 2 para os participantes dos grupos Equivalência mais Treino de Composição (GEQTC), Equivalência mais Relato (GEQR) e Equivalência (GEQ). No grupo GEQTC, não houve 100% de acertos em nenhuma das 12 relações testadas. Os maiores escores ocorreram nas relações E1G1 e G3E3, cujos índices foram iguais a 80% e 70%, respectivamente. Em quatro outras relações (E3G3, G2E2, F1G1 e F3G3) os índices estiveram na casa de 60% e em três outras (G1E1, G1F1 e G3F3) na casa de 40%. As menores porcentagens de acertos ocorreram nas relações F2G2 e G2F2 com valores de 10% e 20%, respectivamente. No grupo GEQR, houve 100% de acertos em apenas uma das 12 relações testadas (E1G1). Em seis outras relações (E2G2, E3G3, G1E1, G3E3, F3G3 e G3F3) as porcentagens de acertos ficaram acima de 70%. Destacam-se ainda as relações F2G2 e G1F1 onde não houve nenhum acerto (0%). No grupo GEQ, houve 100% de acertos apenas na relação E1G1. Em sete das 12 relações as porcentagens de acertos estiveram no máximo na casa dos 50% (E2G2, E3G3, G1E1, G2E2, F1G1, F2G2 e G2F2). Destaca-se a relação F2G2

cujo escore foi de 20%. O segundo maior escore de acertos aconteceu na relação F3G3 (70%). Nas relações G3E3, G1F1 e G3F3 observaram-se índices de 60% de acertos.

Tabela 27 - Porcentagem de acertos (A) e erros em cada relação testada para os participantes dos grupos Equivalência mais Treino de Cópia (GEQTC), Equivalência e relato (GEQR) e Equivalência (GEQ) na condição de teste de generalização 2.

Relação	GEQTC		GEQR		GEQ				
	A	Erros Alternativas	A	Erros Alternativas	A	Erros Alternativas			
E1G1 (1/2-3/6)	80	G2(3/18) 0	G3(3/21) 20	100	G2(3/18) 0	G3(3/21) 0	100	G2(3/18) 0	G3(3/21) 0
E2G2 (1/6-3/18)	50	G1(3/6) 40	G3(3/21) 10	70	G1(3/6) 20	G3(3/21) 10	50	G1(3/6) 50	G3(3/21) 0
E3G3 (1/7-3/21)	67	G1(3/6) 20	G2(3/18) 13	73	G1(3/6) 13	G2(3/18) 7	53	G1(3/6) 13	G2(3/18) 33
G1E1 (3/6-1/2)	40	E2(1/6) 60	E3(1/7) 0	70	E2(1/6) 10	E3(1/7) 20	30	E2(1/6) 70	E3(1/7) 0
G2E2 (3/18-1/6)	60	E1(1/2) 10	E3(1/7) 30	70	E1(1/2) 20	E3(1/7) 10	40	E1(1/2) 0	E3(1/7) 60
G3E3 (3/21-1/7)	70	E1(1/2) 20	E2(1/6) 10	80	E1(1/2) 0	E2(1/6) 20	60	E1(1/2) 20	E2(1/6) 20
F1G1 (2/4-3/6)	60	(G2(3/18) 40	G3(3/21) 0	50	(G2(3/18) 50	G3(3/21) 0	40	(G2(3/18) 50	G3(3/21) 10
F2G2 (2/12-3/18)	10	G1(3/6) 70	G3(3/21) 20	0	G1(3/6) 100	G3(3/21) 0	20	G1(3/6) 50	G3(3/21) 30
F3G3 (2/14-3/21)	60	G1(3/6) 30	G2(3/18) 10	70	G1(3/6) 20	G2(3/18) 10	70	G1(3/6) 0	G2(3/18) 30
G1F1 (3/6-2/4)	40	F2(2/12) 50	F3(2/14) 10	0	F2(2/12) 100	F3(2/14) 0	60	F2(2/12) 30	F3(2/14) 10
G2F2 (3/18-2/12)	20	F1(2/4) 30	F3(2/14) 50	50	F1(2/4) 10	F3(2/14) 40	50	F1(2/4) 20	F3(2/14) 30
G3F3 (3/21-2/14)	40	F1(2/4) 20	F2(2/12) 40	70	F1(2/4) 0	F2(2/12) 30	60	F1(2/4) 40	F2(2/12) 0

A análise dos erros mostrou que no grupo GEQTC os participantes erraram escolhendo exclusivamente uma das comparações em apenas duas relações (G1E1 e F1G1). Em seis relações os erros foram distribuídos entres as duas comparações incorretas, mas as porcentagens de erros continuaram maiores nas alternativas cujas frações apresentaram os menores denominadores (E2G2, E3G3, G3E3, F2G2, F3G3 e G1F1). Portanto, em oito das 12 relações (E2G2, E3G3, G1E1, G3E3, F1G1, F2G2, F3G3 e G1F1) os erros aconteceram com maior freqüência pela escolha da comparação onde estava programada a fração com o menor valor numérico no denominador.

Destacam-se as relações G1E1, F2G2 e G1F1 com índices de erros de 60%, 70% e 50%, respectivamente. Em apenas quatro relações os erros foram mais frequentes pela escolha das comparações com maior valor no denominador da fração (E1G1, G2E2, G2F2 e G3F3). No grupo GEQR, os participantes erraram pela escolha exclusiva da comparação com o menor valor no denominador da fração em três relações (F1G1, F2G2 e G1F1). Em quatro relações os erros foram distribuídos entre as duas comparações incorretas, mas as porcentagens de respostas incorretas também foram maiores nas frações com os menores denominadores (E2G2, E3G3, G2E2 e F3G3). Portanto, as porcentagens de erros foram maiores nas alternativas que apresentaram os menores denominadores em sete das 12 relações testadas (E2G2, E3G3, G2E2, F1G1, F2G2, F3G3 e G1F1). Destacam-se as relações F2G2 e G1F1 onde 100% dos erros ocorreram em uma única comparação (G1 e F2, respectivamente). Em outras quatro relações as porcentagens de escolhas incorretas foram maiores nas frações com os maiores denominadores (G1E1, G3E3, G2F2 e G3F3). No grupo GEQ, os participantes erraram pela escolha exclusiva da comparação com o menor valor numérico no denominador em três relações (E2G2, G1E1 e G3F3). Em outras três relações os erros foram distribuídos entre as duas comparações incorretas, mas as porcentagens de erros continuaram maiores nas frações com os menores denominadores (F1G1, F2G2 e G1F1). Portanto, em metade das relações testadas os erros aconteceram com maior frequência pela escolha da comparação onde o denominador tinha o menor valor numérico (E2G2, G1E1, F1G1, F2G2, G1F1 e G3F3). Destaca-se a relação G1E1 na qual a porcentagem de erros foi de 70%. Em outras quatro relações as porcentagens de erros foram maiores nas comparações com os maiores valores nos denominadores das (E3G3, G2E2, F3G3 e G2F2). Apenas na relação G2E2 erros aconteceram pela escolha exclusiva da comparação com o maior valor numérico no denominador da fração (60%).

Em resumo, houve tendência das porcentagens de erros acontecerem com maior frequência pela escolha da comparação com o menor valor numérico no denominador das frações nos três grupos experimentais.

A Tabela 28 apresenta a porcentagem de acertos nas questões apresentadas durante a avaliação inicial e final considerando-se a natureza pictórica (figura) ou numérica das frações contidas nos enunciados dos exercícios e nas respostas para os grupos Equivalência mais Treino de Composição (GEQTC), Equivalência e Relato (GEQR) e Equivalência (GEQ). Os resultados foram avaliados considerando-se quatro categorias: enunciado com frações numéricas e respostas com frações numéricas (N/N), enunciado com frações numéricas e respostas com figuras (N/F), enunciado com figuras e respostas com frações numéricas (F/N) e enunciado e respostas com frações na forma de figuras (F/F).

Na avaliação inicial, a maior variabilidade observada entre as quatro categorias ocorreu no grupo GEQTC com os escores de acertos oscilando entre 4% e 20%. O maior índice de acertos ocorreu quando os enunciados apresentaram frações numéricas e as respostas frações na forma de figuras (20%). O menor escore ocorreu para enunciados feitos com frações na forma de figuras e respostas com frações numéricas. Portanto, a amplitude observada nesse grupo foi de 16 pontos. Nos grupos GEQR e GEQ a porcentagem média de acertos nas quatro categorias oscilou entre 20% e 28%, exceto para a categoria F/N no grupo GEQ. A amplitude na porcentagem de acertos verificada no GEQR foi de oito pontos (28% para a categoria N/N e 20% para N/F). No grupo GEQ a amplitude foi de quatro pontos (16% para a categoria N/F e 20 para as demais categorias).

Na avaliação final, as maiores variabilidades observadas nas porcentagens médias de acertos aconteceram nos grupos GEQTC e GEQR. Nos dois grupos as

maiores diferenças ocorreram entre exercícios que apresentaram frações na forma de figuras nos enunciados e frações numéricas nas respostas e exercícios que apresentaram enunciados e repostas com frações numéricas. No grupo GEQTC a diferença foi de 16 pontos, tendo ocorrido 44% de acertos na categoria F/N e 60% na F/F. No grupo GEQ esse valores variaram entre 28% e 72%, para as categorias F/N e F/F, resultando numa diferença de 34 pontos percentuais.

Tabela 28 - Porcentagem de acertos nas questões que apresentaram relações número-número (N/N), número-figura (N/F), figura-número (F/N) e figura-figura (F/F) durante as avaliações inicial e final para cada participante dos grupos Equivalência e Treino de Composição (GEQTC), Equivalência e Relato (GEQR) e Equivalência (GEQ).

	Partic.	Avaliação Inicial				Avaliação Final			
		N/N	N/F	F/N	F/F	N/N	N/F	F/N	F/F
GEQTC	P1	0	20	0	0	0	20	20	0
	P2	0	40	0	20	80	100	100	100
	P3	0	0	0	0	20	20	20	60
	P4	40	20	0	40	100	100	80	100
	P5	40	20	20	20	0	40	0	40
	\bar{X}	16	20	4	16	40	56	44	60
GEQR	P6	20	0	40	0	40	40	40	100
	P7	0	20	0	0	0	60	0	80
	P8	40	0	0	0	100	0	40	20
	P9	20	20	60	60	40	80	40	100
	P10	60	60	20	60	100	100	20	60
	\bar{X}	28	20	24	24	56	56	28	72
GEQ	P11	40	40	20	0	0	0	0	0
	P12	20	20	20	20	0	0	20	0
	P13	0	0	20	20	60	0	20	20
	P14	0	40	0	40	0	40	40	40
	P15	40	0	20	20	80	100	40	100
	\bar{X}	20	20	16	20	28	28	24	32

A comparação das porcentagens médias de acertos entre as avaliações inicial e final para as quatro categorias de exercícios mostrou que os maiores aumentos na porcentagem média de acertos ocorreram para as categorias onde os enunciados e respostas foram feitos apresentando-se figuras fracionárias (F/F). No grupo GEQTC observou-se ganho de 44 pontos percentuais na porcentagem média de acertos com os escores passando de 16% para 60%. No grupo GEQR, o maior ganho foi de 48 pontos

percentuais com os valores subindo de 24% para 72%. No grupo GEQ, o ganho nessa categoria foi de apenas 12 pontos percentuais.

O segundo maior ganho na porcentagem média de acertos ocorreu na categoria onde os enunciados apresentaram fração numérica e as respostas com frações na forma de figuras (N/F). Nesse caso, os ganhos foram de 36 pontos nos grupos GEQTC e GEQR, nos quais os índices passaram de 20% para 56%. No grupo GEQ, o ganho foi de apenas oito pontos percentuais nessa categoria. Na categoria F/N, na qual as perguntas apresentaram enunciados com figuras e as respostas frações numéricas, o maior ganho na porcentagem média de acertos ocorreu para o grupo GEQTC, onde os escores subiram de 4% para 44% (ganho de 40 pontos). Nos grupos GEQR e GEQ, os ganhos foram de apenas 4 e 8 pontos percentuais, respectivamente. A categoria com os menores ganhos na porcentagem média de acertos foi a que apresentou exercícios com enunciados e respostas contendo frações expressas de forma numérica (N/N). O grupo GEQR teve o maior ganho nessa categoria com os escores passando de 28% para 58% (ganho de 28 pontos), seguido pelo grupo GEQTC com ganho de 24 pontos, passando de 16% para 40% de acerto. O grupo GEQ teve ganhos de apenas oito pontos percentuais.

A análise dos dados individuais mostrou que três dos cinco participantes do grupo GEQTC (P2, P3 e P4) apresentaram aumentos em todas as categorias de questões da avaliação inicial para a final. Dentre eles, destacam-se os participantes P2 e P4 cujos acertos na AF alcançaram 100% em três das quatro categorias (N/F, F/N e F/F para P2 e N/N, N/F e F/F para P4). O participante P1 apresentou as mesmas porcentagens de acertos nas duas avaliações e P5 reduziu para zero a porcentagem de acertos nas categorias N/N e F/N. No grupo GEQR, apenas dois dos cinco participantes (P9 e P10) apresentaram aumentos nas porcentagens médias de acertos em todas as categorias.

Entre os demais participantes, destacam-se os resultados de P6 e P7 na categoria F/F cujos escores subiram de 0% para 100% e de 0% para 80%, respectivamente, da avaliação inicial para a final. O participante P8 obteve ganhos de 60 pontos percentuais, subindo de 40% para 100% de acertos nessa categoria. Por outro lado, no grupo GEQ observou-se as maiores reduções nas porcentagens de acertos da avaliação inicial para a final entre os três grupos experimentais nas quatro categorias de perguntas. Dois dos cinco participantes (P11, P12, P13 e P14) diminuíram ou mantiveram seus desempenhos da primeira para a segunda avaliação para todas as categorias, exceto P13 na categoria N/N, cujos escores subiram de 0% para 60%. Apenas o participante P15 apresentou aumentos sistemáticos da avaliação inicial para a final nas quatro categorias de perguntas, em especial, nas categorias N/F e F/F, cujos índices de acertos subiram de 40% para 80% e de 20% para 100%, respectivamente. Em resumo, os resultados mostraram que os grupos GEQTC e GEQR foram os que, de forma geral, apresentaram os maiores ganhos nas quatro categorias de exercícios durante a avaliação final. A categoria de exercícios onde os enunciados e as perguntas apresentaram frações na forma de figuras foi onde ocorreram os maiores ganhos na porcentagem de acertos, seguida pela categoria F/N (para o grupo GEQTC) e N/F para os grupos GEQTC e GEQR. A categoria com menores ganhos foi a N/N, em especial, para os grupos GEQTC e GEQR.

A Tabela 29 apresenta a frequência de acertos e dos relatos sobre a descrição das contingências ou, em outras palavras, das regras ensinadas pela escola como estratégia para solucionar problemas sobre equivalência entre frações. As medidas foram feitas em apenas algumas tentativas das condições de treino AB, BC e AD e das condições de testes e treinos (quando necessário) das condições de simetria (BA/CB), transitividade e

equivalência (AC/CA), generalização 1, generalização 2 e de expansão das classes entre os participantes do grupo Equivalência e Relato (GEQR).

Tabela 29 - Frequência de acertos (A), de relatos totais (RLT) e parciais (RLP) das contingências descritas pela regra ensinada na escola regular para a solução de problemas sobre equivalência de frações colhidos em em tentativas de sonda nos pré- e pós-testes das condições de treino AB, BC e AD e testes de de simetria (BA/CB), transitividade/equivalência (AC/CA), generalização 1, generalização 2 e expansão das classes para os participantes do grupo equivalência e relato (GEQR).

Part	Pré-teste			Pós-teste			Pré-teste			Pós-teste		
	A	RLT	RLP	A	RLT	RLP	A	RLT	RLP	A	RLT	RLP
AB (n = 3)						BC (n = 3)						
P6	2	1	0	3	2	0	3	0	0	-	-	-
P7	0	0	3	3	0	3	3	0	3	-	-	-
P8	3	3	0	-	-	-	3	3	0	-	-	-
P9	3	3	0	-	-	-	3	3	0	-	-	-
P10	3	3	0	-	-	-	3	3	0	-	-	-
BA/CB (n = 6)						AC/CA (n = 6)						
P6	6	2	0	6	0	2	2	0	0	6	0	0
P7	6	0	2	-	-	-	5	5	0	-	-	-
P8	6	2	0	-	-	-	6	6	0	-	-	-
P9	6	3	0	-	-	-	6	3	0	-	-	-
P10	6	6	0	-	-	-	6	6	0	-	-	-
Generalização 1 (n = 6)						AD (n = 3)						
P6	6	0	0	-	-	-	3	0	0	3	1	0
P7	6	0	0	-	-	-	2	1	0	3	2	0
P8	6	6	0	-	-	-	3	3	0	-	-	-
P9	6	3	0	-	-	-	3	0	0	3	0	0
P10	6	6	0	-	-	-	3	2	0	-	-	-
Teste de expansão (n = 14)						Generalização 2 (n = 12)						
P6	10	6	0	13	8	0	8	4	0	-	-	-
P7	11	5	0	14	3	0	7	1	0	-	-	-
P8	11	7	0	13	5	0	8	4	0	-	-	-
P9	11	0	0	13	0	0	7	0	0	-	-	-
P10	11	6	0	13	7	0	5	4	0	-	-	-

Os relatos foram considerados em duas categorias. Relatos totais (RLT) quando os participantes descreveram toda a regra e relatos parciais (RLP) quando a descrição apresentou parte da regra ensinada na escola. Por exemplo, diante da fração $1/3$ como

amostra e $2/6$ como comparação, um relato considerado total seria o participante descrever que multiplicou os números um e três da amostra por dois. Por outro lado, um relato foi considerado parcial quando o participante descreveu que multiplicou os números dois e três. Os resultados mostraram que três dos cinco participantes acertaram todas as escolhas das comparações e relataram totalmente a regra na condição AB (P8, P9 e P10). Um dos participantes (P6) acertou duas das três tentativas, mas relatou a regra corretamente em apenas uma delas. O outro participante, P7, errou as três tentativas apesar de descrever parcialmente a regra que solucionaria o problema. No pós-teste realizado após o treino das relações condicionais, os participantes P6 e P7 acertaram todas as tentativas, mas apenas P6 passou a descrever corretamente a regra, enquanto P7 continuou a fazer apenas descrições parciais.

Na condição de treino BC houve o acerto de todas as comparações nas tentativas de pré-teste. No entanto, como ocorreu na condição AB, apenas os participantes P8, P9 e P10 descreveram corretamente a regra, sendo que P6 não fez nenhuma descrição correta e P7 fez descrições apenas parciais. Não houve necessidade de treino direto nessa condição porque todos os participantes demonstraram o critério para mudança de condição no pré-teste. Sendo assim, não foram colhidos os relatos do pós-teste.

Todos os participantes acertaram todas as escolhas nas tentativas de sonda no pré-teste das relações BA/CB (simetria). No entanto, apenas um (P10) relatou totalmente a regra que a escola ensinou pra resolver os problemas fracionários. Os demais participantes descreveram a regra corretamente em no máximo metade das tentativas, sendo que um (P7) fez apenas descrições parciais em duas delas. Apenas P6 fez o treino dessa condição e seu desempenho em relação ao comportamento de descrever a regra mudou de duas descrições totais para duas parciais.

Resultados semelhantes ocorreram na condição de teste de transitividade e equivalência (AC/CA). Três dos cinco participantes escolheram as comparações corretas em todas as tentativas de sonda apresentadas no pré-teste dessa condição (P8, P9 e P10) e um acertou cinco delas (P7). Contudo, P6 diminuiu seu escore de acertos nas escolhas das comparações passando de seis para duas tentativas corretas. Depois do treino direto dessa relação ele acertou as escolhas, mas não fez nenhum relato da regra no pós-teste. No entanto agora P8 e P10 relataram totalmente a regra em todas as tentativas, enquanto P7 aumentou o número de relatos totais de zero para cinco.

No teste de generalização 1 todos os participantes escolheram as comparações corretas em todas as tentativas de sonda do pré-teste. Os participantes P8 e P10 continuaram a relatar totalmente a regra em todas as tentativas. Contudo, o participante P7 que havia feito relatos corretos e totais em cinco das seis tentativas na condição AC/CA, agora não fez nenhum relato correto. O participante P6, apesar de aumentar o índice de acertos nas escolhas das comparações, continuou sem fazer nenhuma descrição correta.

Os resultados observados no pré-teste da condição AD mostraram que todos os participantes escolheram corretamente todas as comparações nas tentativas de sonda que fizeram. Exceção se fez ao participante P7 que acertou duas das três tentativas. Contudo, apenas P8 relatou totalmente a regra nas três tentativas. Os participantes P6 e P9 não fizeram nenhum relato correto. Três dos cinco participantes fizeram o pós-teste dessa condição realizado após o treino direto das relações. Todos eles acertaram as comparações nas tentativas de sonda, mas apenas P6 e P7 aumentaram os acertos nos relatos, mas em no máximo duas tentativas. O participante P9 que havia feito todos os relatos corretos de forma total no pré-teste não acertou nenhuma vez no pós-teste.

Na condição de teste de expansão das classes de equivalência os participantes escolheram as comparações corretas na maior parte das tentativas de sonda apresentadas. Os participantes P7, P8, P9 e P10 acertaram 11 das 14 tentativas, enquanto P6 acertou 10. Por outro lado, quatro deles (P6, P7, P8 e P10) acertaram no máximo metade dos relatos que fizeram. O participante P9, por sua vez, não acertou nenhum relato. Todos os participantes fizeram o pós-teste dessa condição após o treino direto das relações. Apesar de todos eles apresentarem aumentos nos índices de acertos na escolhas que fizeram, mantiveram o índice de relatos corretos observados no pré-teste. Na última condição programada, o teste de generalização 2, quatro dos cinco participantes (P6, P7, P8 e P9) acertaram as comparações em mais da metade das tentativas que fizeram. No entanto, relatos totais corretos ocorreram em no máximo quatro das 12 tentativas programadas nessa condição para os participantes P6, P8 e P10. Os demais integrantes do grupo acertaram no máximo uma vez a descrição da regra. Em resumo, os dados mostraram que o desempenho de acertar a escolha das comparações programadas em todas as condições não apresentou correlação positiva com a resposta de descrever as contingências presentes na regra de três ensinada na escola para solucionar problemas sobre equivalência entre frações para dois participantes (P6 e P7) nas condições de treino AB e BC. O participante P10 foi o único a descrever a regra de três em todos os exercícios apresentados nas condições de simetria e transitividade/equivalência. Nessa última condição, o participante P8 também descreveu a regra corretamente ao resolver os problemas fracionários. De forma semelhante ao teste de transitividade/equivalência, apenas P8 e P10 relataram totalmente as contingências descritas pela regra de três na condição de teste de generalização 1, o que ocorreu apenas para P8 no treino AD. Nos testes de expansão e generalização 2, todos os participantes relataram totalmente as contingências descritas pela regra de três em no

máximo metade das tentativas. Em síntese, pelo menos para dois participantes (P6 e P7) pode-se afirmar que a descrição das contingências contidas na regra de três não foi observada na resolução dos exercícios apresentados em nenhuma das condições programadas, embora tenham, de forma geral, acertado pelo menos metade das tentativas a que foram expostos.

A Tabela 30 apresenta a porcentagem de relatos feitos pelos participantes do grupo Equivalência e Relato (GEQR) sobre as estratégias por eles adotadas para a resolução dos problemas fracionários. Os relatos foram colhidos em tentativas das condições de pré- e pós-teste AB, BC e AD, BA/CB (simetria), AC/CA (transitividade/equivalência), expansão e testes de generalização 1 e 2. As estratégias relatadas foram categorizadas de acordo com as operações que os participantes descreveram ter utilizado para resolver os exercícios e foram divididas em oito categorias: resolver os problemas multiplicando ou dividindo os membros da fração (M/D), somar ou subtrair os membros da fração (S/S), contar as partes das figuras fracionárias (Cont.), escolher uma comparação porque não tinha outra que julgava correta, ou seja, por exclusão (Excl.), relatar que a escolha foi devido a acertos ou reforços obtidos em exercícios anteriores (Refor) e dizer que não sabia explicar como resolver os exercícios ou ainda relatar a realização de algum tipo de operação matemática de forma incorreta (Outros). A análise feita a seguir diz respeito apenas às estratégias usadas pelos participantes para tentar resolver os exercícios. Isso quer dizer que nem sempre os participantes acertaram o exercício. Os resultados mostraram que as estratégias de contagem (Cont) e exclusão (Excl) foram as mais utilizadas na condição AB. Durante o pré-teste, a contagem (Cont) foi utilizada em 81% das vezes para resolver os exercícios e no pós-teste em 86% dos casos. A exclusão foi adotada ainda em 12% dos problemas no pré-teste e em 14% no pós-teste. A categoria soma e

subtração ocorreu em 6% dos exercícios no pré-teste. As demais estratégias não foram relatadas.

Na condição BC, 80% dos exercícios foram resolvidos por meio das operações de multiplicação ou divisão e 20% por meio da soma ou subtração durante o pré-teste. As outras estratégias não foram relatadas por nenhum participante. Como todos os componentes do grupo demonstraram o critério no pré-teste eles não fizeram o treino direto das relações BC e, portanto não houve o pós-teste.

Excetuando-se a categoria outros (Out.), todas as demais foram relatadas pelos participantes para solucionar os problemas no pré-teste da condição BA/CB (simetria). As categorias mais relatadas foram soma ou subtração (S/S) e contagem (Cont) com 35% e 30% de registros, respectivamente. No pós-teste da condição ocorreu um aumento para a categoria S/S cujos relatos de uso dessa categoria subiram pra 50%, sendo que o uso da contagem diminuiu para 8% e aumentou descrições afirmando que as escolhas ocorreram em função do reforço passado (Refor) que passou de 17% para 25%. Operações de multiplicação ou divisão foram usadas em apenas 13% dos exercícios no pré-teste e não houve nenhuma menção ao seu uso no pós-teste.

Na condição AC/CA (transitividade/equivalência) a estratégia de maior índice de uso no pré-teste foi a multiplicação e divisão (M/D) com 53% de ocorrência. Em seguida, vieram as operações de soma e subtração (S/S) e outros (Out) com 23% e 17%, respectivamente. No pós-teste observaram-se mudanças na escolhas das estratégias relatadas pelos participantes. Segundo os participantes, 42% dos problemas foram resolvidos em função do reforço passado (Refor) obtido durante o treino direto da condição. As operações de somar e subtrair (S/S) e exclusão (Excl.) foram adotadas em 29% dos exercícios restantes.

As operações de multiplicar ou dividir (M/D) e outros (Out) foram as mais relatadas tanto no pré-teste quanto no pós-teste da condição AD, ou seja, quando os participantes não conseguiram resolver ou, pelo menos tentar resolver os exercícios por meio das operações de multiplicação ou divisão, eles não souberam descrever a estratégia adotada ou realizaram alguma outra operação, inclusive de multiplicação ou divisão, porém, de forma incorreta. Todas as categorias de operações foram adotadas na resolução dos problemas durante o pré-teste da condição de teste D-(ABC), ou teste de expansão das classes. A categoria Outros, ou seja, a resolução de exercícios por meio de operações matemáticas incorretas ou a resolução sem o participante descrever a operação utilizada, foi relatada em 48% dos problemas. Sendo que 14% dos exercícios foram resolvidos por meio das operações de multiplicação. Em outros 21% os participantes relataram soma ou subtrair e divisão e 10% por meio da contagem das partes das figuras. No pós-teste, realizado após o treino direto das relações D-(ABC), os participantes apresentaram mudanças nas porcentagens dos relatos sobre as estratégias usadas na resolução dos problemas. A categoria multiplicar ou dividir foi agora a mais adotada para a solução dos exercícios com 57% de ocorrências. O reforço anterior foi relatado por 19% dos participantes como estratégia para resolver os problemas. A categoria outros (Out) diminuiu de 48% para 19% de casos.

Durante os testes de generalização 1 os participantes resolveram os exercícios praticamente de duas maneiras. Em uma, aplicaram a multiplicação ou divisão das frações em 50% dos exercícios e, em outra, somaram ou subtraíram para resolver os exercícios (47%) deles. Por outro lado, no teste de generalização 2, os relatos mais frequentes não descreveram adequadamente as operações que os participantes fizeram (41% na categoria outros). Os relatos mencionando o uso de multiplicação ou divisão vieram em segundo lugar com 33% dos problemas e em terceiro lugar as operações de

somar ou subtrair com 17% de ocorrências. Em resumo, a análise dos relatos que os participantes fizeram sobre as operações por eles realizadas para resolver os exercícios mostrou que, de forma geral, as estratégias de multiplicar ou dividir (M/D) e contagem (Cont.) foram as mais frequentes nas condições de treino BC e AD e testes de simetria, transitividade/equivalência, expansão das classes e generalização 1 e 2. Ainda, com o aumento do tamanho das classes, a partir da condição de treino AD, houve também o aumento de relatos na categoria outros, o que significa que os participantes não souberam explicar as operações utilizadas ou relataram cadeias de respostas incompatíveis com as que a regra de três descreve.

Tabela 30 - Porcentagem em que as estratégias foram utilizadas pelos participantes do grupo equivalência e relato (GEQR) para a solução dos problemas fracionários nos pré- e pós-testes das condições AB, BC, AD, BA/CB (simetria), AC/CA (transitividade e equivalência), expansão das classes e nos testes de generalização 1 e 2. As estratégias foram categorizadas em: multiplicar e dividir (M/D), somar e subtrair (S/S), contagem (Cont), exclusão (excl), Reforço passado (Refor) e outros (out).

	M/D	S/S	Cont.	Refor	Excl.	Out.	M/D	S/S	Cont.	Refor	Excl.	Out.
	AB						BC					
Pre-t	0	6	81	0	12	0	80	20	0	0	0	0
Pós-t	0	0	86	0	14	0	0	0	0	0	0	0
	BA/CB (Simetria)						AC/CA (Transit/Equival.)					
Pre-t	13	35	30	17	4	0	53	23	3	0	3	17
Pós-t	0	50	8	25	0	16	0	29	0	42	29	0
	AD						Expansão					
Pre-t	40	6	6	0	0	47	14	21	10	3	3	48
Pós-t	44	11	0	0	0	44	57	5	0	19	0	19
	Generalização 1						Generalização 2					
Teste	50	47	0	0	3	0	33	17	0	8	0	41

Discussão

Os objetivos propostos para o Experimento 3 foram investigar os efeitos das condições: 1) de treino exclusivo de relações condicionais entre estímulos fracionários pictóricos e numéricos e entre estímulos fracionários numéricos e numéricos segundo o paradigma de Sidman e Taiby (1982); 2) de treino de composição das frações em conjunto com o treino de relações condicionais e, 3) de treino de relações condicionais em conjunto com o relato das estratégias utilizadas para a resolução dos problemas fracionários sobre: a) a formação de classes de equivalência com estímulos fracionários; b) a expansão das classes de equivalência de estímulos formadas e a generalização para novas situações e c) a resolução de problemas fracionários do tipo lápis e papel. Um quarto objetivo desse experimento foi verificar se houve correspondência entre as estratégias descritas pelos participantes para resolver os problemas fracionários durante os treinos e testes de relações condicionais e as estratégias ensinadas pela escola regular.

Os resultados mostraram que 13 dos 15 participantes experimentais (P1, P2, P4, P6, P7, P8, P9, P10, P11, P12, P13, P14 e P15) acertaram todos os problemas de multiplicação aplicados no início do experimento. Por outro lado, apenas seis participantes (P1, P2, P3, P8, P10 e P15) tiveram 100% de acertos nos exercícios de divisão, enquanto outros quatro (P4, P6, P12 e P14) acertaram 86% dos exercícios (Quadro 7). Em geral, os participantes apresentaram maiores porcentagens de acertos durante as condições de avaliação inicial e final quando as frações foram expressas na forma absoluta do que na relativa. No grupo onde houve o treino de relações condicionais em conjunto com a solicitação dos relatos das estratégias utilizadas para resolver os problemas fracionários (grupo GEQR) foi onde ocorreu o maior aumento na frequência de acertos no pós-teste da nomeação das frações. O grupo onde houve o

treino de relações condicionais mais o treino de composição das frações (GEQTC) foi o que apresentou o segundo melhor desempenho nesse teste (Quadro 8). Apenas os participantes dos grupos experimentais apresentaram aumentos sistemáticos na porcentagem de acertos observada na avaliação final tanto em questões com frações expressas na forma absoluta quanto na forma relativa. Durante a avaliação final os maiores ganhos nas frações expressas na forma relativa ocorreram para os grupos equivalência e relato (GEQR) e equivalência mais treino de composição (GEQTC), sendo os escores médios do primeiro grupo cinco pontos a mais que os do segundo (ver Tabela 19). Apenas seis participantes experimentais (P1, P3 e P5 do GEQTC, P6 e P7 do GEQR e P15 do GEQ) precisaram passar pelo treino da condição AB e, nesse caso, P1, P3 P7 e P15 demonstraram as relações diretamente ensinadas com a exposição a dois blocos de tentativas. Na condição BC, os participantes P1, P2, P3, P5, P12, P13 e P14 precisaram de treino direto das relações testadas. Contudo, como no treino AB aprenderam as relações com a exposição a no máximo sete blocos de tentativas (exceto P4 que precisou de 39). Na condição de treino AB/BC (ou treino misto) a 13 dos 15 participantes (P1, P3, P4, P5, P6, P7, P8, P9, P10, P11, P13, P14 e P15) apresentaram o critério com a exposição ao número mínimo de blocos (2) exigidos pelo procedimento (ver Tabela 20). As relações de simetria (BA/CB) e transitividade/equivalência (AC/CA) foram prontamente apresentadas durante o teste dessa condição pelos participantes P1, P2, P3, P4, P7, P8, P9, P10, P11, P13, P14 e P15. Apenas três participantes (P5, P6 e P12) precisaram de treino direto dessas relações, mas demonstraram as relações com a exposição a no máximo quatro blocos de tentativas (ver Tabela 21). Apenas quatro participantes dos três grupos experimentais demonstraram o critério na condição AD (P1, P8, P10, P11 e P15). Os outros 10 participantes fizeram o treino direto das relações e demonstraram o critério em no

máximo três blocos de tentativas, exceto P14 (GEQ) que precisou de 19 exposições. Os participantes dos grupos GEQR foram os que apresentaram maiores porcentagens de acertos na condição de teste de expansão da rede ou das classes de equivalência formadas (D-ABC). Contudo, todos os participantes dos três grupos experimentais apresentaram decréscimos na porcentagem de acertos ao longo dos blocos realizados nessa condição (ver Tabela 22). Todos os participantes dos três grupos experimentais demonstraram as relações ensinadas diretamente na condição de treino de expansão da rede ou das classes formadas (D-ABC). Porém, nove participantes dos três grupos experimentais (P2, P3, P4, P5, P6, P7, P12, P13 e P14) precisaram de 12 ou mais blocos de tentativas para a aquisição dessas relações (ver Tabela 23). Em geral, os resultados obtidos nos testes de generalização 1 e 2 mostraram que os participantes dos três grupos demonstraram maiores escores no primeiro teste, em especial no GEQR, onde todos tiveram 100% de acertos. Os desempenhos dos testes de generalização 2 foram sistematicamente inferiores aos do teste de generalização 1, em especial, para os grupos GEQTC e GEQ (ver Tabela 24). Os resultados observados na condição de teste de expansão da rede mostraram tendência para que as escolhas das comparações incorretas acontecessem nas frações que apresentaram o denominador com o menor valor numérico (ver Tabela 25). Resultados semelhantes foram encontrados na análise de erros cometidos na condição de teste de generalização 1 (ver Tabela 26) e teste de generalização 2 (ver Tabela 27). De forma geral, a categoria de exercícios com enunciados e respostas expressas por frações na forma de figuras foi onde ocorreu a maior porcentagem de acertos nos três grupos experimentais, tanto na avaliação inicial quanto na final, em especial, nos grupos GEQTC e GEQR. Por outro lado, as menores porcentagens de acertos entre os três grupos experimentais ocorreram na categoria onde os enunciados e as respostas apresentaram frações expressas na forma numérica (ver

Tabela 28). Observou-se descrição total da regra de três ensinada pela escola regular durante as condições de treinos e testes de relações condicionais nas condições de treino AB e BC apenas para os participantes P8, P9 e P10. O participante P8 apresentou ainda descrições totais nas condições de testes de transitividade/equivalência e de generalização. O participante P10 descreveu totalmente as contingências nas condições de simetria, transitividade/equivalência e teste de generalização. Nas demais condições, as descrições ocorreram apenas de forma parcial ou nem mesmo ocorreram (ver Tabela 29). Com relação às estratégias adotadas pelos participantes do grupo GEQR para a resolução dos exercícios fracionários, as categorias Multiplicar e dividir (M/D) e Somar e Subtrair (S/S) foram as que apresentaram maiores porcentagens de relatos nas condições de treino AB e BC, testes de simetria e transitividade/equivalência e teste de generalização 1. Por outro lado, nas condições de treino AD, e testes de expansão e de generalização 2 as maiores porcentagens de acertos ocorreram na categoria Outros (Out). Esses resultados mostraram que à medida que as classes de estímulos aumentaram, a frequência de respostas na categoria “outras” (outras operações) também aumentou, o que indica que os participantes não sabiam como resolver os exercícios (ver Tabela 30).

Os resultados dos testes de divisão e multiplicação mostraram que 13 dos 15 participantes (P1, P2, P4, P6, P7, P8, P9, P10, P11, P12, P13, P14 e P15) souberam solucionar todos os problemas simples de multiplicação antes do início do experimento, mas apenas seis deles (P1, P2, P3, P8, P10 e P15) tiveram 100% de acertos nas questões que requeriam a resposta de dividir para resolver os exercícios, o que sugere que eles demonstraram maior dificuldade para dividir. Esse fato é importante, pois como apontam tanto a literatura operante quanto a da área de matemática, para que os alunos resolvam problemas de equivalência entre frações é necessário que eles apresentem o

comportamento de multiplicar e dividir (Projeto Arirabá, 2006). Esses dados sugerem que a dificuldade apresentada pelos alunos durante a avaliação inicial para resolver os problemas fracionários pode ser devido a ausência dessa habilidade. Uma sugestão para experimentos futuros é incluir dentre os critérios de seleção dos participantes um melhor desempenho na resolução de problemas de divisão. Assim, seriam escolhidos como participantes alunos com baixo rendimento em problemas fracionários, mas com bom desempenho em problemas simples de multiplicação e divisão, o que eliminaria um possível viés relacionado à ausências dessas habilidades.

Os resultados dos testes de nomeação realizados antes e depois das condições experimentais específicas a que cada grupo foi submetido mostraram que o treino de nomeação realizado junto com o treino de composição das frações foi uma forma eficaz para ensinar os nomes das frações aos participantes do grupo GEQTC. Contudo, nomear as frações não foi uma condição necessária para a derivação de novas relações não ensinadas diretamente como na formação de classes de equivalência com estímulos fracionários, na expansão das classes de equivalência formadas e na generalização para novas situações, uma vez que, de forma geral, os três grupos experimentais apresentaram desempenhos semelhantes nessas condições. Apesar de ainda não ser uma questão consensual, os dados do presente estudo encontram respaldo em parte da literatura sobre a origem das classes de equivalência que desconsideram a linguagem ou mais especificamente o comportamento verbal, aqui entendido como a nomeação dos estímulos, como uma variável necessária para a formação de classes de equivalência (Sidman, 1990).

Por outro lado, os ganhos ocorridos na avaliação final observados entre os participantes do grupo onde se pediu relatos sobre como eles resolveram os problemas fracionários sugerem que as perguntas feitas durante as condições de treinos e testes das

relações condicionais entre os estímulos fracionários podem ter atuado como uma variável facilitadora na resolução dos problemas do tipo lápis e papel (avaliações inicial e final) principalmente quando os exercícios apresentaram frações expressas na forma relativa. Esses resultados encontram respaldo em dados da literatura que mostraram o efeito de perguntas sobre o comportamento de seguir regras. Silva e Albuquerque (2006) demonstraram como a manipulação de perguntas pode modificar o seguimento de uma regra. O pior desempenho nesse estudo foi observado entre os participantes que não receberam perguntas. Os dois grupos que foram indagados ao longo do procedimento apresentaram desempenhos superiores aos do primeiro grupo. Embora não se possa afirmar que o comportamento de solucionar os problemas ocorreu em função do controle por regras, é possível que o comportamento dos participantes estivesse, pelo menos em parte, sob o controle da regra ensinada na escola para resolver problemas sobre equivalência entre frações. Conforme afirma Baum (2006), dificilmente um comportamento vai estar exclusivamente sob controle de contingências ou de regras. É muito provável que a interação entre contingências e regras esteja presente na maior parte das respostas emitidas por humanos. Isso sugere a possibilidade de que o desempenho dos participantes na avaliação final tenha sido influenciado pelas perguntas feitas pelo experimentador durante o treino e teste das relações condicionais entre os estímulos fracionários, embora não tenham ocorridos diferenças marcantes entre os três grupos experimentais quanto à formação de classes de equivalência, a expansão dessas classes e a generalização para novas situações.

Os desempenhos observados durante a avaliação inicial replicaram os resultados dos Experimentos 1 e 2 e estão de acordo com a literatura da área ao evidenciar que alunos de início do sexto ano do ensino fundamental (anteriormente quinta série) conseguem resolver problemas fracionários com frações expressas de forma absoluta,

mas apresentam dificuldade para resolvê-los quando as frações são expressas na forma relativa (e.g., Carraher e Schliemann, 1992; Santos, 1999). Por outro lado, os ganhos sistemáticos na porcentagem de acertos observados na avaliação final, em especial nos exercícios que apresentaram frações expressas na forma relativa, mostraram que o procedimento de treino de relações condicionais foi eficaz para ensinar novas relações entre estímulos aos participantes dos grupos experimentais, o que corrobora dados da literatura (e.g., Sidman & Tailby, 1982). No entanto, cabe ressaltar que esse procedimento foi adotado com exclusividade apenas para o grupo GEQ. Para os outros dois grupos experimentais, GEQTC e GEQR, esse procedimento foi utilizado em conjunto com outras manipulações. No primeiro caso, adotou-se o treino de composição das frações e no segundo, o relato das estratégias utilizadas pelos participantes para resolver os exercícios fracionários. Os dados mostraram que os maiores ganhos médios observados na avaliação final ocorreram para os participantes do grupo GEQR e em seguida para os do grupo GEQTC. O menor ganho foi para o grupo onde os participantes passaram apenas pelo treino de relações condicionais segundo o paradigma de equivalência proposto por Sidman e Tailby (1982). Esses resultados indicaram, portanto, que solicitar a descrição das estratégias adotadas pelos participantes e fazer o treino de composição das frações produziu um ganho médio maior que o procedimento de treinar apenas relações condicionais entre estímulos arbitrários. No grupo GEQR, apesar da correspondência entre o fazer e dizer ter ocorrido com maior frequência apenas para os participantes P8, P9 e P10, foi onde se observou o maior ganho médio na porcentagem de acertos na avaliação final. Isso pode ser devido ao efeito provocado pelos estímulos discriminativos das próprias perguntas apresentadas pelo experimentador durante o registro do relato verbal solicitado durante os treinos e testes das relações condicionais. Há que se considerar a possibilidade de que o simples ato de

perguntar aos participantes como eles resolviam os problemas criou condição para que eles se comportassem em relação aos estímulos presentes na situação, ou seja, responderem aos estímulos (figuras ou frações numéricas) ou a propriedades desses estímulos programados como amostras e comparações. Além disso, alguns participantes descreveram pelo menos parte das contingências presentes na regra de três, o que de forma geral, pode ter aumentado os ganhos médios verificados nesse grupo. De acordo com essa hipótese, pode-se supor que ganhos maiores poderiam ser obtidos caso os participantes descrevessem as contingências contidas na regra de três de forma mais completa. Em estudos futuros seria interessantes investigar o efeito que um procedimento que programasse a descrição completa da regra de três antes dos treinos das relações condicionais teria sobre a solução de problemas fracionários.

Uma possível explicação para o maior desempenho dos participantes do grupo que fez treino de composição (GEQTC) das frações em relação àqueles que fizeram apenas o treino de relações condicionais (GEQ) pode ser o fato de que, ao compor as frações, os participantes ficaram sob controle de unidades menores que formam as frações, as quais são estímulos necessários para identificar as figuras ou representações numéricas relacionadas a cada objeto composto. Por exemplo, compor a fração $\frac{2}{6}$ possibilitou que os participantes ficassem sob controle de uma parte do objeto apresentada na cor azul, no caso dois toquinhos azuis, e relacioná-lo ao numerador da fração numérica e também sob o controle de todos os toquinhos juntos, no caso os dois azuis e mais os quatro brancos, e relacioná-los ao denominador da fração. A literatura aponta que crianças com história de dificuldade em leitura e escrita apresentaram considerável melhora nessas habilidades após passarem por treino de composição de palavras a partir de unidades mínimas (letras) (Hanna et al., 1994). Pode-se supor que esses efeitos tenham ocorrido também no ensino de frações, uma vez que as unidades

mínimas das frações são as partes em que o inteiro foi dividido. É importante ressaltar que o procedimento exigiu que os participantes fizessem a composição sucessiva de diferentes frações e que, após a composição, as frações (modelos) ficavam acessíveis aos participantes, o que permitiu ocorrer as correções necessárias das respostas de composição. Composições corretas eram socialmente reforçadas pelo experimentador e as incorretas eram refeitas. Esse fato permitiu que eles fizessem, a partir de solicitações orais do experimentador, comparações entre elas. Ao compará-las foi possível que os participantes discriminassem que as partes constituintes das frações, no caso os toquinhos relacionados aos numeradores e denominadores, poderiam ser compostos de diferentes maneiras, por exemplo, divididos em números diferentes de partes, mas que na realidade apresentavam um mesmo tamanho. Nesse caso, pode-se dizer que os participantes tiveram oportunidade de observar e discriminar que diferentes composições fracionárias podem apresentar um mesmo valor relativo. Em outras palavras, o treino de composição aumentou a possibilidade de que os participantes, concretamente, discriminassem que $1/3$ tem o mesmo valor relativo que $2/6$. Nas palavras de Silva e Almouloud (2008), é possível que esse procedimento tenha permitido aos participantes compreender as operações fracionárias como representações de figuras ou objetos planos e a aplicação do referencial parte-todo como fundamento para compreender o conceito de proporção, o que segundo esses autores é uma condição imprescindível para que a aprendizagem ocorra.

Apesar dos dados indicarem algum efeito do procedimento de composição das frações sobre o desempenho dos participantes na resolução dos problemas fracionários, é importante destacar uma diferença existente entre a aquisição das respostas de leitura e escrita e a de conceitos fracionários. Enquanto que no treino de composição ou cópia programado para a aquisição da escrita é possível haver correspondência formal e

funcional, com predominância para a formal, entre as unidades de controle e os produtos das respostas, no treino de composição das frações a correspondência é essencialmente funcional, visto que não há semelhanças físicas entre os estímulos utilizados. Por exemplo, há pouca correspondência formal entre um retângulo dividido em três partes iguais com uma marcada e a fração $1/3$ ou $2/6$. Também não há semelhança formal, ou se há ela é mínima, entre as frações $1/3$ e $2/6$. Portanto, as relações são predominantemente simbólicas, o que pode dificultar a aprendizagem do conceito de magnitude relativa entre frações apenas pelo treino de composição, uma vez que esse conceito também é abstrato. Assim, é possível que a aprendizagem de frações necessite de controle discriminativo adicional, como no caso do uso de regras para ensinar essas relações simbólicas ou abstratas. Seria interessante que em estudos posteriores fosse avaliado o efeito que a manipulação de regras sobre como resolver problemas fracionários e do treino de composição poderia ter sobre a aquisição do conceito de proporção.

Os resultados mostraram que nove dos 15 participantes experimentais (P2, P4, P8, P9, P10, P11, P12, P13 e P14) acertaram todas as relações no pré-teste da relação AB. Esses resultados corroboram dados da literatura sobre a facilidade que alunos de início do sexto anos (antiga quinta série) têm para resolver problemas fracionários programados de forma absoluta e dificuldade para resolvê-los quando são expressos na forma relativa (Carraher & Schliemann, 1996, Santos, 1996, Santos, 1999). Relações são consideradas absolutas quando apresentam correspondência direta entre as figuras e as frações numéricas. Por exemplo, no presente estudo quando os participantes estavam diante de um retângulo dividido em três partes iguais com uma das partes pintadas em azul e as outras duas na cor branca os participantes facilmente relacionaram a parte azul com o numerador e as três partes com o denominador da fração. Nesse caso, a única

tarefa necessária para a resolução dos problemas foi a contagem das partes dos objetos, para em seguida, relacionar os resultados aos numeradores e denominadores das frações, o que pode ter facilitado o acerto dos participantes. Esse fato pode justificar ainda o pequeno número de blocos que os participantes necessitaram fazer no treino que fizeram nessa condição.

A maior variabilidade observada na porcentagem de acertos na condição de pré-teste BC em relação ao pré-teste AB, em especial no grupo GEQTC, pode ser função do tipo de relação que foi programada nessa condição. Enquanto na condição AB as relações eram absolutas ou literais, na condição BC os participantes entraram em contato pela primeira vez com apresentações relativas entre frações. No caso do grupo GEQTC, pode-se ainda relacionar a queda no desempenho no pré-teste BC em relação à condição AB ao fato do grupo apresentar a menor média de acertos em problemas com frações relativas na avaliação inicial. De acordo com Carraher et al. (1986), a maior dificuldade observada na condição BC pode ser devido à necessidade dos participantes compararem as duas frações para resolverem os problemas relativos. Em outras palavras, não basta apenas contar as partes dos objetos ou figuras fracionárias, como na relação AB, mas relacionar uma fração com a outra. Assim, o menor desempenho na condição BC pode ser devido à ausência dessa habilidade no repertório dos participantes. Os desempenhos dos participantes do grupo GEQR na condição BC estão em desacordo com a literatura, uma vez que todos os participantes demonstraram 100% de acertos. Isso porque, o pré-teste BC apresentou frações expressas na forma relativa. Resultados semelhantes foram obtidos no Experimento 1 no grupo instrução programada (GIP).

O fato de todos os participantes apresentarem as relações programadas para a condição de treino AB/BC com a exposição a poucos blocos de tentativas pode ser

atribuído à existência das relações AB e BC, demonstrada durante o pré-teste ou adquirida durante os treinos diretos a que foram submetidos anteriormente. Esses dados sugerem, como aponta literatura (e.g., Mackay, 1991; Catânia, 1999), que o procedimento de escolha de acordo com o modelo usado nos treinos AB e BC foi uma forma eficaz de estabelecer relações arbitrárias entre os estímulos quando os participantes não demonstraram previamente essas relações.

Os dados deste experimento replicaram os achados dos Experimentos 1 e 2 e também confirmaram a possibilidade de aquisição de resposta sob controle discriminativo condicional sem a necessidade de treino direto de cada relação a ser adquirida (Sidman & Cresson 1973/1994; Sidman & Tailby, 1982). Os participantes P1, P2, P3, P4, P7, P8, P8, P9, P10, P11, P12, P13 e P15 apresentaram as relações arbitrárias das condições BA/CB (simetria) e AC/CA (transitividade/equivalência) sem a necessidade de exposição ao treino direto. Quando foi necessário o treino direto, os participantes apresentaram as relações com a exposição a no máximo quatro blocos de tentativas. Esses resultados sugerem que os treinos anteriores das relações AB e BC foram eficientes para estabelecer as condições para que as novas relações derivassem no repertório dos participantes. Assim, pode-se considerar que as relações AB e BC, previamente apresentadas pelos participantes ou diretamente ensinadas a eles quando necessário, foram pré-requisitos para as novas relações, o que está de acordo com o trabalho e a discussão proposta por Sidman et al. (1985). Nesse trabalho, os autores analisaram quais seriam as relações necessárias como pré-requisitos para a derivação de relações não ensinadas diretamente. No caso das relações de transitividade (AC) e equivalência (CA), as quais os autores trataram como relações de dois estágios, a aquisição das relações AB e BC seriam necessárias para a ocorrência de transitividade e equivalência. De forma semelhante ao estudo de Sidman et al. (1985), o presente

trabalho também treinou e testou relações entre estímulos arbitrários. Enquanto no primeiro caso os estímulos usados foram letras gregas, o presente experimento usou como estímulos figuras e números fracionários sem similaridade física entre eles. Na ausência de similaridade física entre os estímulos pode-se supor que a variável responsável pela aquisição direta e indireta de novas relações seja a consequência reforçadora apresentada contingentemente à emissão da resposta..

A maior parte dos participantes dos três grupos experimentais (P2, P3, P4, P5, P6, P7, P9, P12 e P14) não apresentou as relações AD durante o pré-teste dessa condição (esses resultados também foram observados nos experimentos 1 e 2). Uma possível explicação para esses resultados é a natureza relativa das relações testadas na condição AD. Nessa condição, como na relação BC, as frações usadas como estímulos de amostra e comparação foram apresentadas na forma relativa, o que dificultou aos participantes compreender que, por exemplo, uma figura dividida em três partes iguais sendo uma parte pintada na cor azul e as demais na cor branca, poderia ser representada pela fração $3/9$. No entanto, os participantes apresentaram essas relações com a exposição a poucos blocos de tentativas, o que confirma a eficiência do procedimento de pareamento com o modelo para ensinar relações entre estímulos dissimilares (Mackay, 1991).

Os decréscimos observados nos desempenhos de todos os participantes dos três grupos experimentais ao longo dos blocos de tentativas durante os testes de expansão das classes de equivalência também foram observados nos Experimentos 1 e 2 do presente estudo. Esses resultados estão em desacordo com a literatura sobre formação de classes de equivalência de estímulos (de Rose, 1993). O trabalho de Sidman et al. (1985) demonstrou a formação de classes de equivalência de três membros com estímulos considerados arbitrários e, após o treino adicional entre um dos estímulos

dessas classes e novos membros, houve a expansão das classes já formadas, sendo observada a constituição de classes de até seis membros. Ao discutirem os resultados consideraram que o treino prévio de certas relações foi uma condição necessária para a ocorrência da expansão das classes já estabelecidas. No presente estudo, os testes avaliaram se ocorreu a expansão das classes de três membros para classes de quatro membros, portanto, avaliou a formação de classes menores que as do trabalho de Sidman et al. (1985). De forma semelhante, o procedimento aqui adotado também assegurou que os participantes demonstrassem relações de simetria, transitividade e equivalência antes dos testes de expansão. Mesmo assim, os resultados mostraram que a expansão não aconteceu. Os dados sugerem que o treino das relações consideradas por Sidman et al. (1985) como pré-requisitos para expansão das classes de equivalência não foi uma condição suficiente para sua ocorrência quando as relações treinadas e testadas envolveram estímulos fracionários. No entanto, todas as relações não demonstradas na condição de expansão das classes foram apresentadas quando elas foram diretamente treinadas, o que reafirma a condição do procedimento de pareamento com o modelo como estratégia eficiente para estabelecer relações entre estímulos dissimilares ou arbitrários (Mackay, 1991; de Rose, 1993).

Apesar de nenhum dos participantes dos três grupos experimentais ter demonstrado desempenhos compatíveis com a expansão das classes de equivalência, os participantes P1, P2, P4, P6, P7, P9, P9, P10, P11 e P15 (10 dos 15 componentes dos três grupos) demonstraram a aquisição de novas relações entre frações que não haviam sido apresentadas em momento algum do experimento, em especial, no teste de generalização 1 e para o grupo que fez o relato das estratégias adotadas para a resolução dos problemas fracionários (GEQR). Por outro lado, no teste de generalização 2 observou-se o decréscimo dos desempenhos dos participantes quando frações

inusitadas, diferentes daquelas usadas no teste de generalização 1, foram apresentadas, inclusive para o grupo GEQR. Uma possível explicação para a diferença nos desempenhos demonstrados pelos participantes nos testes de generalização 1 e 2 pode ser a natureza das frações que foram apresentadas em cada condição. No teste de generalização 1, todos os exercícios poderiam ser resolvidos diretamente pela multiplicação ou divisão das frações por um mesmo número. Por outro lado, no teste de generalização 2 a solução dos exercícios exigia a emissão de uma cadeia comportamental maior. Por exemplo, dividir o numerador pelo número 2 e o denominador pelo número 3, para em seguida comparar os resultados dessas operações e verificar se eles foram iguais, para só depois apontar a resposta considerada correta.

A maior parte dos erros cometidos pelos participantes dos três grupos experimentais replicaram os resultados observados nos Experimentos 1 e 2. De forma geral, observou-se tendência dos erros acontecerem com maior frequência pela escolha da alternativa incorreta onde estava programada fração com o menor valor numérico no denominador. De acordo com dados da literatura, o conceito ou o referencial de metade pode facilitar a compreensão dos alunos de que duas frações numericamente diferentes podem ter um mesmo valor relativo e assim resolverem problemas sobre proporção (Spinillo, 1992). Para que problemas dessa natureza sejam resolvidos é necessário que os alunos simplifiquem cada fração isoladamente para posteriormente compará-las, o que Spinillo (1993) denominou como operações de primeiras e segundas ordens, respectivamente. De forma semelhante aos dois experimentos anteriores, uma possibilidade de explicar esses resultados é o fato de que as operações de simplificação, em especial quando o denominador foi mais facilmente dividido por dois (referencial de metade), terem sido programados nas alternativas que apresentaram numeradores com valores numéricos menores.

A maior porcentagem de acertos observada durante a avaliação final nos problemas que apresentaram figuras, especialmente quando elas apareciam tanto no enunciado quanto nas alternativas, chama atenção pela natureza relativa apresentada entre os estímulos das questões e sugere uma análise mais detalhada sobre as possíveis formas adotadas para resolvê-las. Uma das possíveis formas de solucioná-las seria, em primeiro lugar, transformar cada figura em uma fração numérica. Para tanto, os participantes deveriam contar o número de partes em que o inteiro foi dividido e colocar o resultado no denominador e o número de partes tomadas ou marcadas no numerador. Em seguida comparar as frações numéricas encontradas. Caso elas fossem diferentes os participantes deveriam simplificá-las para compará-las novamente. Uma segunda possibilidade seria os participantes compararem as figuras diretamente, considerando tanto o total de partes em que o inteiro foi dividido, como o número de partes marcadas em cada figura. Uma maneira de fazer isso seria sobrepor uma figura sobre a outra e compará-las. Ressalte-se que todos os elos da cadeia, ou parte dela, poderiam ocorrer tanto de forma pública quanto privada (Baum, 2006). Cabe observar que, independentemente das respostas terem ocorrido de forma pública ou privada, a primeira estratégia exige a emissão de uma cadeia maior para que os participantes resolvam os problemas fracionários, o que sugere, em princípio, que seria uma estratégia com um custo maior da resposta, ou de uma forma mais simples falando, uma resposta mais difícil. Contudo, no presente experimento não foi solicitado aos participantes a descrição das estratégias utilizadas para resolver os exercícios nas avaliações inicial e final. Sugere-se que em estudos futuros essas estratégias sejam investigadas junto aos participantes.

Para compreender o porquê dos participantes do grupo GEQR demonstrar baixos índices de relatos das contingências de reforçamento descritas pela regra de três

ensinada pela escola regular como forma de resolver problemas fracionários, mas ao mesmo tempo apresentar aumentos na porcentagem de acertos na avaliação final, é necessário levar em consideração evidências empíricas existentes na literatura quanto à independência entre o dizer e o fazer (Simonassi, 1997; 1999). De forma geral, os dados mostraram que descrever as contingências não foi uma condição necessária para a resolução do problema. No presente estudo, observaram-se casos em que os participantes: 1) resolveram exercícios e descreveram a regra de três, 2) resolveram exercícios e descreveram alguma outra regra (diferente da regra de três ensinada na escola), 3) resolveram exercícios e não descreveram nenhuma regra e 4) não resolveram os exercícios e não descreveram a regra. Em relação ao primeiro caso, pode-se dizer que o comportamento de acertar (ou fazer) dos participantes ocorreu junto com a descrição da regra (dizer), ou seja, eles acertaram e relataram quais foram as condições necessárias e suficientes para o acerto. Ao escolher a fração de comparação correta para uma dada amostra o participante relatou qual foi a operação realizada para encontrar a resposta, por exemplo, dobrar ou multiplicar os valores por dois. Em outras palavras, os participantes demonstraram o que a literatura tem denominado como comportamento cômico. Quanto ao segundo e terceiro casos, os participantes demonstram que o comportamento de acertar (ou fazer) esteve basicamente sob controle das contingências e foi independentemente do comportamento do relato da regra de três (dizer), ou seja, eles acertaram, mas não relataram as contingências descritas pela regra de três e demonstraram o que é denominado como comportamento não cômico. Por sua vez, a quarta possibilidade exemplifica o caso em que o fazer dos participantes não esteve sob controle nem das contingências e nem da descrição da regra (Simonassi, 1997).

Nos casos em que a descrição da regra de três não ocorreu deve-se levar em consideração a possibilidade de que os participantes podem não ter feito a descrição

devido a um déficit no seu próprio repertório verbal, ou seja, eles não tinham respostas precorrentes necessárias para fazer a descrição, como em alguns casos onde foi observada a ausência de nomeação das frações usadas nas condições de treinos e testes de relações condicionais. Um segundo ponto que deve ser avaliado é o nível de compreensão dos participantes em relação aos próprios enunciados das questões programadas nas avaliações inicial e final. Em relação ao primeiro ponto, apesar dos participantes terem sido avaliados quanto à habilidade de nomear as frações, não houve um treino consistente para aqueles que não demonstraram essa resposta ou a demonstraram de forma parcial. Apesar de não ser uma questão consensual, há indicativos na literatura de que nomear pode facilitar a formação de classes de equivalência (Dugdale & Lowe, 1990), o que, como decorrência, pode também facilitar a formação de conceitos. Sugere-se, portanto, que em experimentos futuros o procedimento assegure nomeação correta de todas as frações antes do treino das relações condicionais.

Monteiro e Medeiros (2002) apresentaram evidências indicativas de que a contagem oral pode ser um pré-requisito para a aquisição do conceito de números em crianças pré-escolares³. Segundo os autores, a função da resposta chamada de contagem oral corresponderia à função da resposta chamada de nomeação no ensino da leitura e da escrita. Nesse estudo, alunos de uma escola da rede pública de ensino com idades entre 5 e 6 anos aprenderam os conceitos dos números de um a nove. O ensino se deu por meio do procedimento de escolha de acordo com o modelo entre diferentes conjuntos de estímulos. O conjunto A foi composto por números (ex. 1, 2, 3), o B por quantidades de

³ Na literatura matemática existem diferentes conceitos para número e numeral. Alguns autores conceituam número como a idéia de quantidade inerente a um conjunto de objetos, enquanto numeral é toda representação escrita ou falada de um número. Outros autores conceituam número como o símbolo representante de um numeral (por exemplo, o número 2) e numeral como toda representação escrita em palavras de uma quantidade (por exemplo, o numeral dois).

bolinhas (ex. o, oo, ooo), o C por numerais impressos (um, dois, três), o D por numerais auditivos (“um”, “dois”, “três”), O E por desenhos de casas, borboletas, sapinhos e carrinhos (nove de cada classe), o F foi a nomeação oral dos estímulos e o G foi a montagem de um jogo de dominó adaptado com os estímulos anteriores desenhados. Dois participantes compuseram o grupo experimental e passaram pelo ensino de contagem, no qual, por meio do procedimento de pareamento com o modelo, foram estabelecidas seqüências ou cadeias de resposta-número através da emissão das palavras UM, DOIS, TRÊS, etc, enquanto os participantes apontavam para cada um dos elementos de um conjunto. Com base nesse procedimento, os participantes adquiriram a resposta de apontar numa ordem seqüencial, o que caracteriza a contagem. Três outros participantes não passaram por essa condição e compuseram o grupo de controle. Os resultados mostraram que, de forma geral, o ensino da contagem oral aumentou o desempenho dos participantes do grupo experimental na maioria das relações simbólicas testadas após os treinos das relações AB e AC (BA, CA, CB, DB, DC, DA e nos testes de generalização). No teste de nomeação oral de números (relação AF), os desempenhos foram maiores entre os participantes do grupo experimental (o GE teve 100% de acertos e o GC apenas 22%). No teste de nomeação oral de conjuntos (relação BF), os desempenhos do grupo experimental também foram superiores ao do grupo de controle, embora um dos participantes do GC tenha demonstrado resultados acima da média. No teste de nomeação oral de numerais (relação CF), que exigiu o comportamento de leitura, o qual não foi ensinado diretamente a nenhum grupo, os desempenhos foram baixos para ambos os grupos. Como esses resultados indicaram que o grupo experimental teve desempenhos superiores aos do GC nos testes que envolveram conhecimento dos números e contagem oral de bolinhas, os autores sugeriram que a nomeação oral dos estímulos pode ter sido uma variável facilitadora para a aquisição

dessas relações. Monteiro e Medeiros (2002) consideraram, conforme sugestão de Horne e Lowe (1996), que a resposta de nomeação envolveria a combinação das funções de falante e ouvinte numa mesma pessoa e que, nesse caso, a criança treinada a nomear pode mais facilmente emitir a resposta-número na presença de outros conjuntos numericamente semelhantes ao que ela foi ensinada diretamente. Concluíram ressaltando a importância da contagem oral (nomeação) para a emergência de relações de equivalência não ensinadas diretamente.

Quanto ao segundo ponto, o nível de compreensão que os participantes possuem dos enunciados das questões, deve-se levar em consideração que no presente experimento o repertório verbal inicial dos participantes não foi avaliado previamente em relação à compreensão dos termos dos enunciados, o que torna difícil fazer alguma afirmação mais categórica quanto a ausência ou não dessa habilidade. No entanto, pode ser interessante, que em experimentos futuros seja avaliada previamente a compreensão que os participantes têm de termos com “equivalente”, “corresponde” e “sombreado”, os quais estiveram presentes nos enunciados das avaliações iniciais e finais.

O maior índice de relatos sobre as operações adotadas pelos participantes na resolução dos problemas fracionários na condição AB apontaram que a contagem foi a mais frequente. Esses resultados podem ser facilmente compreendidos quando se considera a natureza das relações apresentadas nesses problemas. Nessa condição, os estímulos de amostra foram figuras representativas de frações e os de comparação foram as representações numéricas dessas figuras expressas de forma absoluta. Portanto, os exercícios poderiam ser prontamente resolvidos pela resposta de contar todas as partes em que a figura foi dividida e colocar no denominador da fração e o número de partes marcadas ou tomadas no numerador. Pode-se supor que a resposta de reconhecer

numeradores e denominadores das frações, ou saber o que eles são já fazia parte do repertório dos participantes.

A predominância das operações de multiplicar ou dividir observada na condição BC também pode ser explicada pelo tipo de relação programada nessa condição. Os estímulos de amostras foram expressões numéricas absolutas das frações pictóricas, enquanto os estímulos de comparação foram as primeiras expressões numéricas relativas dessas frações. Em todas as relações apresentadas os problemas poderiam ser resolvidos levando-se em consideração o referencial de metade, o que, segundo a literatura facilita a resolução de problemas sobre magnitude relativa entre frações (Spinillo, 1992). Assim, os problemas poderiam ser resolvidos aplicando-se o conceito de dobro ou metade. Por exemplo, responder que $1/3$ é o dobro de $2/6$ ou que $2/6$ é metade de $1/3$.

Essa mesma possibilidade de explicação pode ser levantada para compreender os resultados observados nos teste de simetria (BA/CB) e transitividade/equivalência (AC/CA). Como o participante P6 foi o único que fez o treino direto dessas duas condições e, portanto, o único a fazer pós-teste, os dados do pré-teste podem ser mais fidedignos para analisar as operações que os participantes adotaram como estratégia para resolver os exercícios. No caso da condição de simetria, há de se considerar que em metade dos exercícios os problemas apresentaram figuras (relações BA), os quais poderiam ser resolvidos por meio da resposta de contar, sendo que a única diferença entre esse teste e a condição AB foi a inversão das funções dos estímulos. No caso do teste de transitividade e equivalência (AC/CA), predominou a escolha das operações de multiplicação, o que pode ser explicado pelo fato de uma mesma resposta, multiplicar o número de partes em que as figuras foram divididas pelo número dois, ser uma estratégia eficiente para solucionar os problemas.

No pré-teste da condição AD e no teste de expansão das classes os relatos sobre as operações adotadas para a resolução dos problemas se polarizaram em duas categorias: Multiplicar ou Dividir e Outras. No caso da condição AD, esses resultados indicaram que o treino direto das relações a que dois participantes foram expostos (P12 e P14) não foi uma condição suficiente para que o comportamento de dizer se modificasse, uma vez que 44% dos relatos continuaram na categoria de “Outras” estratégias após o treino. No entanto, dados diferentes foram observados nos relatos obtidos na condição de teste de expansão das classes, na qual todos os participantes foram submetidos ao treino direto das relações. Após o treino houve modificação nos relatos que os participantes fizeram sendo que a maior frequência passou da categoria Outros do pré-teste para a categoria M/D (multiplicar ou dividir) no pós-teste. Isso indica que o treino do fazer pode ter modificado o dizer dos participantes. Tomados em conjunto, os relatos das operações usadas pelos participantes para resolverem os exercícios nas condições AD e teste de expansão das classes são inconclusivos sobre o efeito do treino direto dessas relações sobre a descrição das estratégias adotadas para a resolução dos exercícios.

Os resultados observados na condição de teste de generalização 1, onde predominou a escolha das operações de multiplicar ou dividir (M/D) e de somar ou subtrair (S/S), podem ser explicados em função da maior facilidade dos participantes em dobrar ou somar as duas frações apresentadas nos exercícios, visto que em todos eles a amostra sempre foi a metade da comparação ou vice-versa. Assim, o conceito de metade pode ter sido o referencial que ajudou os participantes a resolverem os problemas e identificar a estratégia adotada. Contudo, quando esse referencial não pode ser aplicado, como no caso da maioria das tentativas da condição de teste de generalização 2 as estratégias não foram corretamente identificadas (41% na categoria Outros).

Com relação aos resultados observados nos relatos que os participantes fizeram sobre as estratégias utilizadas para resolver os exercícios fracionários, é importante ressaltar que a literatura operante aponta que a descrição das contingências (o dizer) não é uma variável necessária para o fazer (Bandura, 1973). Simonassi, Oliveira e Sanábio (1994) e Simonassi, Froes e Sanábio (1995) apresentaram evidências empíricas que sustentam que a descrição das contingências realmente não é uma condição necessária para o fazer. Portanto, é perfeitamente possível que participantes saibam como fazer, mas não saibam descrever o porquê estão fazendo. Em outras palavras, descrever as contingências (dizer) não é uma condição previa para a resposta de fazer, sendo os acertos dos participantes estabelecidos e mantidos pela exposição direta às contingências. Pode-se dizer, portanto, que os comportamentos de fazer, dizer e pensar só operam, no sentido de fazer uma classe produzir outra, caso houver interdependência entre elas.

Considerando os objetivos propostos para o experimento 3 pode-se afirmar que:

a) ocorreu formação de classes de equivalência de estímulos para os três grupos experimentais; b) não houve expansão das classes de equivalência previamente formadas para nenhum dos três grupos experimentais. Os desempenhos nos testes de generalização foram maiores para o grupo onde os relatos sobre as estratégias para resolver os problemas fracionários foram solicitados (GEQR), seguido pelo grupo GEQTC. A menor porcentagem de acertos ocorreu para o grupo que fez treino exclusivo em relações condicionais (GEQ). Todos os grupos apresentaram índices menores na porcentagem de acertos durante o teste de generalização 2 e, c) os grupos GEQTC, onde houve o treino de composição das frações e GEQR, onde os relatos sobre as estratégias adotadas pelos participantes para solucionar os problemas fracionários foram solicitados, apresentaram maiores porcentagens de acertos na resolução de

problemas do tipo lápis e papel (avaliação inicial e final). A menor porcentagem de acertos ocorreu para os participantes do grupo que fez apenas treino em relações condicionais (GEQ).

Discussão Geral

O presente trabalho teve como objetivo geral investigar relações entre variáveis ambientais e comportamentais que facilitassem a aquisição do conceito de equivalência entre frações e a resolução de problemas que exigem o raciocínio proporcional em três experimentos. Os estudos analisaram o efeito do treino de relações condicionais entre estímulos fracionários realizados a partir do procedimento de pareamento com o modelo e a proposta de equivalência de estímulos apresentada por Sidman e Taiby, (1982) em conjunto com diferentes variáveis sobre a aquisição do conceito de proporção. No Experimento 1 a variável de interesse foi o ensino com instruções programadas sobre como resolver problemas fracionários. No Experimento 2 estudou-se o efeito do treino com material concreto e no Experimento 3 investigou-se o efeito do treino de composição das frações e da descrição das estratégias que os participantes adotaram para resolver os problemas envolvendo relações condicionais entre estímulos fracionários. Em todos eles avaliaram-se como as classes de equivalência de estímulos foram formadas, se houve expansão das classes de equivalência de estímulos formadas, se ocorreu a generalização para novas situações e como foram os desempenhos apresentados nas avaliações do tipo lápis e papel (Avaliações Inicial e Final) sobre problemas fracionários que foram programadas para antes e depois da exposição às variáveis independentes investigadas em cada experimento.

No Experimento 1, todos os participantes do GIP, três do GEQ (P8, P9 e P10) e quatro do GIPEQ (P11, P12, P14 e P15) demonstraram desempenhos compatíveis com a formação de três classes de equivalência entre os estímulos fracionários dos conjuntos A, B e C. Desempenhos semelhantes ocorreram no Experimento 2 para quatro participantes do GMCEQ (P6, P7, P8 e P10) e todos do GEQ. Por sua vez, no

Experimento 3 quatro participantes do GEQTC (P1, P2, P3 e P4), quatro do GEQR (P7, P8, P9 e P10) e quatro do GEQ (P11, P13, P14 e P15) também demonstraram a formação de três classes de equivalência de três membros cada (ABC). Portanto, pode-se dizer que 32, dos 40 participantes dos grupos experimentais dos três experimentos, demonstraram a formação de três classes de estímulos entre uma figura representativa de uma fração (estímulos pictóricos), uma fração numérica representante dessa figura expressa na forma absoluta (conjunto B) e uma fração numérica expressa na forma relativa (conjunto C). Assim, considerando-se os desempenhos observados nos testes de transitividade e equivalência, pode-se dizer que todos esses participantes aprenderam a responder de forma intercambiável em três classes de estímulos A1B1C1, A2B2C2 e A3B3C3. Para analistas do comportamento, esses participantes demonstraram a formação de conceitos, onde cada classe corresponderia a um conceito específico. Segundo de Rose (1993), um conceito é uma classe de estímulos. Assim, alguém apresenta um comportamento conceitual quando responde de uma mesma maneira a estímulos de uma classe, mas responde de outra maneira a estímulos fora dessa classe. Segundo o autor, estímulos podem ser agrupados numa classe quando eles compartilham similaridades físicas ou funcionais. Nesse último caso, embora os estímulos sejam fisicamente diferentes eles possuem uma mesma função. A aquisição de uma mesma função para estímulos diferentes pode se dar quando uma mesma resposta é reforçada na presença de cada estímulo que compõe a classe ou quando são ensinadas relações arbitrárias entre estímulos via pareamento com o modelo. No presente estudo, após serem exposto ao treino de relações condicionais entre estímulos fracionários pictóricos e numéricos e entre estímulos fracionários numéricos e numéricos, por meio do procedimento de pareamento com o modelo, os participantes responderam de uma mesma maneira a estímulos dissimilares independentemente de

serem apresentados como amostras ou comparações. Em outras palavras, na presença da figura de $1/3$ como amostra eles escolheram a fração $1/3$ e $2/6$ como comparações e vice-versa, na presença da fração numérica $1/3$ como amostra eles escolherem a fração numérica $2/6$ e a figura de $1/3$ como comparações e vice-versa e na presença da fração numérica $2/6$ como amostra eles escolheram a fração $1/3$ e a figura de $1/3$ como comparações e vice-versa. Os mesmos desempenhos ocorreram para as frações $1/4$ e $1/5$. Assim, pode-se afirmar que as funções de um dos estímulos foram transferidas para os demais membros da classe. Esses resultados comprovam dados da literatura que mostram que o procedimento de pareamento com o modelo é uma forma eficaz para estabelecer relações arbitrárias entre estímulos (Mackay, 1991) e possibilita que analistas do comportamento estudem os chamados processos superiores de maneira sistematicamente organizada a partir da interação do organismo com o meio ambiente (Sidman & Taiby, 1982; de Rose, 1993).

Apesar de 32 dos 40 participantes dos grupos experimentais dos três experimentos terem formado as três classes de equivalência de três membros cada uma com os estímulos fracionários, eles não demonstraram a expansão das classes quando novos treinos de relações condicionais foram feitos entre um dos membros das classes estabelecidas e um novo membro. Conforme aponta a literatura, quando um conjunto de estímulos constitui-se também numa classe de estímulos espera-se que as funções exercidas por um dos membros sejam transferidas para os demais membros da classe quando esse novo estímulo é pareado com um dos membros da classe já constituída (Sidman, 1982; Sidman et al., 1985; de Rose, 1993). No entanto, quando um novo estímulo, por exemplo, a fração D1 ($3/9$) foi pareada com o estímulo pictórico representativo de $1/3$ (A1) os participantes apresentaram desempenhos decrescentes quando as possíveis novas relações foram testadas (D1A1, D1B1, B1D1, D1C1 e

C1D1), ou seja, não ocorreu a expansão das classes de equivalência de três membros formadas para classes de equivalência de quatro membros (A1B1C1D1, A2B2C2D2 e A3B3C3D3). Em outras palavras, pode-se dizer que não ocorreu a transferência de funções entre os membros antigos e o novo membro a ser inserido na classe.

A literatura evidencia que o procedimento de pareamento com o modelo é um procedimento eficiente para formar e expandir classes de equivalência bem maiores do que as propostas no presente estudo. Sidman (1982) demonstrou a formação de classes de estímulos de quatro membros. Em outro estudo, Sidman et al. (1985) demonstraram a formação de classes de equivalência de seis membros a partir do treino entre um dos membros das classes estabelecidas e um novo estímulo para a maioria dos participantes. Nesse experimento, os autores ensinaram relações condicionais entre conjuntos de estímulos arbitrários. Em ambos os trabalhos os autores discutiram a necessidade do treino prévio de algumas relações antecedentes como pré-requisitos para que a expansão das classes ocorra. Por exemplo, para ocorrer as relações DB e BD sem treino direto é necessário assegurar que os participantes tenham adquirido as relações AB, AC e DC. Essas relações foram denominadas como sendo de quatro estágios. Em outras palavras, consideraram que a existência de relações de simetria e transitividade/equivalência foi uma condição que viabilizou a expansão das classes. Concluíram que se a inclusão de novos membros nas classes já estabelecidas não foi por semelhança física entre os estímulos deve ter sido em função do efeito reforçador. Contudo, os resultados do presente trabalho não confirmaram esses dados. O procedimento adotado nos três experimentos programados assegurou que os participantes demonstrassem as relações de simetria, transitividade e equivalência antes de passarem pelo treino adicional entre um dos membros das classes formadas e um novo estímulo. O critério adotado exigiu que eles demonstrassem 100% de acertos antes de mudarem de condição em todas as

relações treinadas e testadas. Mesmo assim, nenhum participante dos grupos experimentais dos três experimentos realizados demonstrou a expansão das classes. Em outras palavras, o presente estudo evidenciou que a expansão das classes formadas não ocorreu com os estímulos fracionários (arbitrários) utilizados nas condições de treinos e testes das relações condicionais e que, pelo menos com estímulos fracionários, a demonstração das relações de simetria, transitividade e equivalência pode ser uma variável necessária, mas não foi uma variável suficiente para que a expansão das classes formadas ocorresse.

Sidman et al. (1985) sugeriram um procedimento de superaprendizagem para as relações consideradas como pré-requisitos quando a expansão das classes de equivalência não ocorrer. Implícita na sugestão dos autores encontra-se a possibilidade de que os critérios adotados como indicadores de aquisição das relações de linha de base, apesar de exigirem sempre 100% de acertos para que os participantes prosseguissem para a próxima condição, não tenham sido suficientes para assegurarem as relações consideradas como pré-requisitos necessários para a expansão da rede de relações. A partir dessa possibilidade, sugere-se que em experimentos posteriores sejam adotados critérios ainda mais rigorosos de acertos nos blocos de tentativas antes que o participante mude de condição. Contudo, apesar do critério adotado no presente estudo poder ser considerado rigoroso, ele necessariamente não explicita as variáveis que controlaram o comportamento dos participantes. Conforme sugere de Rose (2004), é necessário identificar as variáveis que estão funcionalmente relacionadas ao comportamento. Em seu estudo, crianças aprenderam a selecionar uma única seta virada para a direita apresentada em meio a outras viradas para a esquerda. Quando as posições das setas foram invertidas em situação de teste, parte das crianças escolheu a única seta virada para a esquerda e parte escolheu qualquer uma das outras setas. O autor observou

que, mesmo após todos os participantes demonstrarem o critério adotado durante as condições de treino, eles variaram o comportamento durante as condições de testes, indicando que durante os treinos os participantes aprenderam a responder a variáveis diferentes, portanto, pode-se dizer que eram comportamentos diferentes, uma vez que as relações funcionais de controle eram também diferentes. Nessa perspectiva, pode-se questionar sobre as possíveis fontes de controle das respostas dos participantes do presente estudo. Os dados dos relatos colhidos junto aos participantes do grupo GEQR do Experimento 3 permitem supor que os comportamentos dos participantes desse grupo estiveram sob controle de diferentes variáveis em diferentes tentativas de uma mesma condição. Em alguns relatos, o participante descreveu que a escolha do estímulo de comparação em uma tentativa ocorreu em função de uma operação matemática, por exemplo, ao multiplicar a fração por um determinado número. Na mesma condição, uma tentativa cuja estratégia matemática ensinada na escola para a resolução do problema era também a multiplicação o participante descreveu que a escolha ocorreu em função do reforço anterior. Esse fato evidencia que o comportamento de escolher de um mesmo participante pôde ser controlado por diferentes variáveis em tentativas e condições diferentes, o que pode ter ocorrido também entre os comportamentos de diferentes participantes. Portanto, apesar de apresentarem o mesmo critério exigido para mudar de condição, é possível que os participantes tenham aprendido respostas diferentes. Isso significa que o comportamento dos participantes pode estar sob controle de variáveis irrelevantes para a solução dos problemas e que as relações consideradas como pré-requisito realmente não foram adquiridas. Seria interessante que em outros estudos o procedimento avaliasse as possíveis variáveis às quais os participantes estão respondendo e só prosseguisse para o próximo passo quando houvesse segurança de

que a resposta de acerto indicasse que a solução dos problemas ocorreu em função das variáveis relevantes para a situação.

Ressalte-se que a literatura registra a ocorrência de expansão das classes mesmo quando os treinos e testes de relações condicionais envolveram estímulos considerados arbitrários. No caso do trabalho de Sidman et al. (1985), por exemplo, os estímulos utilizados foram letras gregas, as quais seriam pelo menos em princípio, desconhecidas para os participantes. No entanto, no presente estudo os treinos ocorreram com estímulos que os participantes já haviam tido contato na escola regular e, como observado no experimento 3, muitos deles inclusive nomeavam corretamente a maior parte desses estímulos. Portanto, embora fossem considerados arbitrários, pode-se dizer que os estímulos não eram necessariamente desconhecidos dos participantes. No entanto, o conhecimento prévio e a nomeação, pelo menos parcial dos estímulos fracionários, não viabilizaram a expansão das classes de equivalência. Esse fato sugere que a nomeação, ao contrário do que apontou, pelo menos inicialmente, parte da literatura da área (e.g., Dugdale & Lowe, 1990), não foi uma variável necessária para formação e expansão das classes de equivalência.

Horne e Lowe (1996) discutiram mais detalhadamente o papel da nomeação na formação de classes de estímulos equivalentes e a consideraram como uma variável que capacita sujeitos humanos a terem sucesso em testes para equivalência de estímulos em tarefa de pareamento com o modelo. O ponto central dessa proposta é a ênfase no comportamento do ouvinte e a concepção do indivíduo como falante e ouvinte de si mesmo. Segundo os autores, a nomeação surge a partir de relações muito particulares entre comportamento e ambiente e desenvolve-se a partir de comportamentos pré-lingüísticos. Inicialmente, aprende-se a ser ouvinte para depois aprender a ser falante. Aprender a ser ouvinte significa que o comportamento está sob controle discriminativo

de estímulos produzidos pelo comportamento do falante, ou mais precisamente, sob controle de uma classe de estímulos produzidos pela comunidade verbal, o que possibilita ao ouvinte aprender a responder a uma série de relações entre estímulos auditivos produzidos por outros e pelo próprio responder do ouvinte. Essa é a classe particular que posteriormente o ouvinte aprenderá a chamar como um “nome”. Inicialmente, o ouvinte aprende a responder a estímulos produzidos pelo comportamento de um outro falante, o que é um passo importante para que ele se torne um falante e ouvinte dele mesmo.

O comportamento ecóico tem um papel inicial fundamental na aquisição da resposta de nomear por ser um dos precursores da função de ouvinte. Na avaliação de Horne e Lowe (1996), ao nomear ocorre a interação das funções de falante e ouvinte, ou seja, essas funções ocorrem numa mesma pessoa. Nessa perspectiva, o comportamento ecóico favorece ou faz parte das condições em que os objetos ou eventos do ambiente passam a controlar o comportamento verbal, o que dá origem ao que é denominado como nomeação. Dito de outra forma, o comportamento ecóico é uma condição que favorece que eventos ou objetos do ambiente entre numa relação funcional com o comportamento verbal, o que possibilita a ocorrência de novos tipos de relações verbais, como por exemplo, o tato.

Para Horne e Lowe (1996) é importante diferenciar o tato da resposta de nomeação. Enquanto no tato ocorre a aquisição de uma resposta na presença de um objeto ou evento particular, a nomeação envolve o estabelecimento de relações de bidirecionalidade entre uma classe de objetos ou eventos e o comportamento falante-ouvinte que esses objetos ou eventos ocasionam. Essa fusão do comportamento de falante e ouvinte estabelece uma nova relação qualitativa bidirecional no repertório comportamental do aprendiz. Portanto, nessa visão, o aprendiz não responde

simplesmente a um estímulo auditivo produzido pelo comportamento de outra pessoa, como no caso de um comportamento de ouvinte pré-verbal, nem simplesmente ecoa um estímulo vocal e nem vocaliza quando vê um objeto ou evento. A resposta de nomeação tem efeito sobre o restante do comportamento do indivíduo que está além do tatear, do ecoar e do próprio comportamento de ouvinte. Em outras palavras, enquanto o tato apresenta-se como uma relação unidirecional entre o estímulo e o responder, a nomeação apresenta-se como um comportamento simbólico.

No modelo proposto por Horne e Lowe (1996), nomes dizem respeito não a um objeto ou evento único, mas a uma classe de eventos ou objetos. Esse fato tem uma importante implicação para o desenvolvimento de novos comportamentos não treinados diretamente. Dessa maneira, ao ser ensinado a responder nomeando de uma nova forma um dos elementos de uma classe, o aprendiz pode passar a nomear alguns outros itens sem treino direto. Em outras palavras, nomeação é uma forma de gerar relações derivadas ou emergentes. Assim, ao se ensinar um nome comum a um membro de uma classe de estímulos diferentes um aprendiz pode selecionar um outro membro singular da classe sem ter sido diretamente ensinado. Por exemplo, na presença de um par de objetos alguém aprende a dizer “dois”, o que por sua vez invoca o comportamento previamente estabelecido de ouvinte de selecionar o numeral 2. De forma semelhante, na presença do numeral 2 ele aprende selecionar um par de objetos na presença de diferentes conjuntos de objetos. Posteriormente, ele pode aprender que a palavra impressa dois é também nomeada como “dois” e quando na presença da palavra impressa dois pode selecionar dois objetos. Portanto, ao ensinar o uso do nome comum “dois” para cada um dos três estímulos (número 2, dois objetos e o numeral dois), seis novas relações comportamentais podem emergir por meio do comportamento de ouvinte engendrado pelo nome comum. Esse fenômeno tem sido chamado como equivalência de

estímulos, e a nomeação comum, que é uma forma muito básica de nomeação, pode contribuir para sua ocorrência. Em resumo, nomeação é uma relação comportamental bidirecional de ordem superior que combina comportamento de falante e ouvinte numa mesma pessoa, não requer reforçamento dos comportamentos de falante e ouvinte para cada novo nome e que se relaciona a classes de objetos ou eventos.

A partir da proposta de Horne e Lowe (1996), pode-se supor que na aprendizagem de frações, ocorrem processos semelhantes. Diante da fração numérica $1/3$ o aluno aprende a dizer “um terço” e pode selecionar, por exemplo, uma bolinha azul que pertence a um conjunto de mais duas bolinhas brancas. Em seguida, ela pode ensinar a dizer “um terço” na presença da palavra impressa um terço e a selecionar a mesma bolinha branca do conjunto. A partir desse treino, os alunos podem aprender a responder de forma intercambiável entre os estímulos auditivos “um terço”, a forma numérica $1/3$ e a forma escrita $1/3$. E mais, a partir da aprendizagem do repertório de ouvinte para o estímulo “um terço”, os alunos podem vocalizar e selecionar um terço de outros objetos em contextos diferentes. No presente estudo, a nomeação de cada fração foi apenas testada e não foi consistentemente ensinada aos participantes, o que pode não ter possibilitado a aquisição de ouvintes para esses estímulos, ou seja, a resposta não ficou sob controle discriminativo de uma outra pessoa e, muito menos, do próprio aprendiz. Em estudos posteriores seria interessante investigar o efeito de um treino mais consistente de nomeação sobre a aquisição de classes de estímulos cujos membros recebessem um nome comum.

Os participantes de todos os grupos experimentais dos três estudos do presente trabalho demonstraram nitidamente desempenhos superiores nos primeiros testes de generalização quando seus escores foram comparados com os acertos obtidos nos segundos testes a que foram submetidos. Uma possível explicação para esses resultados

pode ser a natureza das relações apresentados no teste de generalização 1. Em todas as tentativas programadas nessa condição os exercícios puderam ser resolvidos por meio das operações de multiplicação ou divisão pelo número 2. Em outras palavras, os valores constantes nas frações numéricas apresentadas nessa condição facilitaram aos participantes usar o referencial de metade como estratégia para fazerem o julgamento proporcional ao compararem as frações. Segundo Spinillo (1992), crianças demonstram maior facilidade para resolver problemas que exigem o raciocínio proporcional quando os valores apresentados nos problemas podem ser facilmente comparados com o referencial de metade. Comumente as crianças usam os limites de “mais que metade”, “menos que metade” e “igual à metade” como referenciais para compararem diferentes quantidade ou valores. No caso do teste de generalização 1, todos os estímulos fracionários apresentados ora como amostras ora como comparações poderiam ser comparados a partir da percepção desses referenciais. Por exemplo, diante da fração numérica $1/2$ como amostra e tendo as frações $2/12$ e $2/4$ como comparações, os participantes provavelmente julgaram com maior facilidade que $1/2$ é “igual à metade” de $1/4$ ou que $1/6$ é igual à metade de $2/12$, uma vez que um é metade de dois, no caso dos denominadores e 2 e 6 são metades de 4 e 12, respectivamente, no caso dos denominadores.

Há ainda a possibilidade de que as escolhas das comparações possam ter ficado sob controle de apenas parte dos estímulos fracionários em algumas das condições programadas nesse estudo. Em outras palavras, as respostas podem ter ficado apenas sob o controle dos valores apresentados no denominador, os quais foram os únicos valores que diferiram entre as comparações apresentadas, visto que os numeradores das frações sempre foram constantes em todas as condições programadas nos três experimentos. A resposta a essa questão pode ser obtida em estudos que manipulassem

os valores numéricos apresentados entre os estímulos de comparação. Em experimentos futuros seria interessante apresentar comparações com os mesmos denominadores e variando os numeradores. Por exemplo, diante da fração numérica $1/2$ o participante teria que escolher entre os estímulos de comparação $1/4$, $2/4$ e $3/4$. Por outro lado, a possibilidade de usar essas operações como estratégia para solucionar os problemas fracionários no teste de generalização 2 foi menor, uma vez que as relações entre as frações apresentadas nessa condição não favoreceram aos participantes discriminarem a aplicabilidade do referencial de metade como estratégia para resolverem os exercícios.

Outra possibilidade de explicação para o maior índice de acertos que os participantes tiveram ao resolver exercícios sobre discriminação condicional apresentados na condição de teste de generalização 1 é o fato desses exercícios exigirem apenas multiplicação ou divisão das frações por um mesmo número, no caso o número dois. Assim, a cadeia comportamental requerida se manteve constante, o que aumentou a estereotipia da resposta e aumentou o número de acertos dos participantes. Portanto, pode-se hipotetizar que a redução na estereotipia da resposta foi uma variável que facilitou a resposta dos participantes. Estudos sugerem que o comportamento humano dificilmente ocorre de forma aleatória, mesmo quando solicitado para que assim aconteça (Hunziker, Lee, Ferreira, Silva e Carmori, 2002). Portanto, é esperado que as pessoas apresentem algum grau de sistematização na forma como respondem ao interagir com o meio, a não ser que contingências especiais atuem sobre essas respostas e aumentem o nível de variabilidade comportamental. Pitaluga (2009) demonstrou que os comportamentos de variação ou repetição, observados em cadeias comportamentais apresentadas por humanos adultos em situações de resolução de problema, dependem de quais contingências estiveram em vigor durante as fases de linha de base e de treino a que foram submetidos. Os dados indicaram que variação ou repetição são respostas

operantes e, como tais, são estabelecidas e mantidas pelas contingências programadas, ou seja, essas respostas podem ser compreendidas de acordo com o modelo de seleção por conseqüências.

As contingências podem ter um efeito controlador sobre o comportamento maior que as regras. Hunziker et al. (2002) demonstraram que as contingências foram mais poderosas que o controle por regras na produção de variabilidade, ou seja, regras podem provavelmente gerar mais estereotipia do que contingências. Portanto, uma possibilidade é que, durante os exercícios apresentados no teste de generalização 1, o comportamento dos participantes ficou sob o controle da regra que a escola ensinou sobre como resolver problemas relacionados ao conceito de equivalência fracionária (Projeto Arirabá, 2006) e aumentou, assim, a estereotipia do comportamento dos participantes, o que nesse caso, resultou em maior número de acertos. No entanto, no teste de generalização 2 a resolução dos exercícios exigiu maior variabilidade comportamental dos participantes. Nessa condição, eram necessárias operações de multiplicação e divisão envolvendo diferentes valores numéricos ao longo dos blocos de tentativas programados, o que pode ter diminuído a porcentagem de acertos dos participantes, uma vez que exigiu a variação dos valores numéricos a serem empregados em cada tentativa dessa condição, ou seja, ao contrário do teste de generalização 1 onde todos os problemas poderiam ser resolvidos usando o número dois nas operações matemáticas, no teste de generalização 2 os valores variaram de tentativa a tentativa.

A maior parte dos erros cometidos pelos participantes de todos os grupos dos três experimentos do presente estudo nas condições de teste de expansão da rede e testes de generalização 1 e 2 ocorreu pela escolha da fração usada como estímulo de comparação onde estava programado o denominador com o menor valor numérico. Esses resultados claramente indicam o controle que os estímulos numéricos de menor

valor exerceram sobre a escolha que os participantes fizeram. Em estudos posteriores seria interessante programar como estímulos de comparação frações com valores numéricos mais próximos nos denominadores das frações e observar o efeito dessa manipulação sobre as escolhas dos participantes.

Os resultados obtidos nos testes do tipo lápis e papel que avaliaram a resolução de problemas aplicados antes das condições experimentais (avaliação inicial) mostraram que os participantes dos grupos experimentais 1, 2 e 3 acertaram mais os problemas que apresentaram relações entre frações expressas de forma absoluta e erraram os exercícios onde elas foram expressas na forma relativa. De forma semelhante, os desempenhos observados nos pré-testes da condição AB foram sistematicamente superiores aos da condição BC para todos eles. Esses resultados corroboram dados da literatura que mostraram que crianças de sexto ano (anteriormente quinta série) do ensino fundamental conseguem resolver problemas matemáticos com frações expressas de forma absoluta ou literal, mas demonstram dificuldade para solucionar problema que exigem o conceito de proporção, como no caso em que as frações são expressas de forma relativa (Carragher & Schliemann, 1992; Santos 1999). Os maiores índices de acertos em exercícios envolvendo relações absolutas entre frações (aquelas envolvendo relações entre frações expressas de forma pictórica e numérica) podem ser devido ao comportamento que a criança tem que emitir na situação. Basicamente, a criança pode resolver problemas dessa natureza contando. Para isso, ela precisa ter adquirido como pré-requisito uma rede de relações (nome, numeral e o próprio conjunto de elementos) o qual é comumente denominado como comportamento de contar (Carmo & Prado, 2004). Por exemplo, diante do desenho de uma barra dividida em três partes iguais com uma das partes marcadas é pedido a uma criança que represente numericamente a fração dessa figura. Nesse caso, considerando-se que a criança também tenha os conceitos de

numerador e denominador, a tarefa da criança consiste em contar o total de partes em que o inteiro foi dividido e colocar o resultado como denominador e o total de partes marcadas como numerador. Nesse caso, ela colocaria o número um como numerador e o três como denominador e comporia a fração $1/3$. Embora os experimentos realizados no presente estudo não tenham avaliado previamente a habilidade de contar dos participantes é possível que os mesmo já tivessem essa resposta em seus repertórios, visto que o ensino dessa habilidade ocorre nos primeiros anos da escola regular ou até mesmo de maneira informal no contexto familiar. Por outro lado, quando os problemas apresentaram expressões relativas entre grandezas fracionárias o comportamento de contar, embora necessário, torna-se insuficiente. Agora, uma criança diante de uma figura dividida em seis partes iguais sendo que duas dessas partes foram marcadas poderá representá-la pela fração $2/6$, a qual é uma expressão absoluta da referida figura. Contudo, de acordo com a literatura (Carraher & Schliemann, 1992; Santos 1999) é comum encontrar dificuldade por parte das crianças em representar essa figura também pela fração $1/3$. Em outras palavras, as crianças não compreendem que as frações $1/3$ e $2/6$, embora numericamente diferentes, representam grandezas com uma mesma magnitude relativa.

Carmo e Prado (2004) discutiram questões relacionadas às variáveis consideradas como pré-requisitos fundamentais do comportamento matemático. Os autores consideraram que as características do atual sistema decimal de notação matemática exigem uma nova forma das pessoas se comportarem em relação às propriedades numéricas do ambiente. A relação biunívoca historicamente adequada, por exemplo, representar 10 animais com 10 pedras cedeu lugar para símbolos numéricos. Agora 10 animais são representados pelo número 10. Assim, surgiu a necessidade de adquirir o comportamento simbólico numérico ou comportamento conceitual numérico.

A proposta de equivalência de estímulos iniciada por Sidman (1971) representou um importante passo para a psicologia compreender uma parte do comportamento simbólico a partir da interação entre comportamento e meio ambiente, e possibilitou estudar formas de ensino que vão além do que foi diretamente ensinado. Essa possibilidade merece atenção especial quando se discute a aprendizagem do conceito de equivalência de frações, uma vez que essas classes são, em princípio, ilimitadas ($1/3$, $2/6$, $3/9$ e assim por diante). Fica, portanto, evidente a necessidade de o professor dirigir sua atenção para formas de ensino que torne o aprendizado mais eficiente. Carmo e Prado (2004) apontaram ainda a formação de uma rede de relações entre nome-numeral, nome-conjunto e conjunto-nome e nome-conjunto (transitividade/equivalência) como uma condição fundamental para a aquisição de conceitos matemáticos. Atualmente, comportamentos emitidos em relação aos símbolos ocorrem da mesma forma que os comportamentos emitidos em relação às coisas simbolizadas. Objetos, sons e símbolos passaram a ser usados de forma intercambiáveis e tornaram-se uma classe de estímulos equivalentes. Embora os autores não tenham feito referência direta a conceitos matemáticos ou relações entre estímulos matemáticos mais complexos, pode-se levantar a possibilidade de que os participantes dos experimentos em questão não apresentassem ainda uma rede de relações mais ampla envolvendo nome da fração, as diferentes possibilidades de representações fracionárias numéricas e a representação pictórica da fração, o que justificaria a maior dificuldade que eles apresentaram para resolver problemas de natureza relativa.

Em resumo, pode-se dizer que os problemas fracionários apresentados aos participantes na forma absoluta poderiam ser resolvidos pela emissão de uma cadeia comportamental menor envolvendo basicamente a contagem das partes das figuras apresentadas. Por outro lado, os problemas envolvendo frações expressas na forma

relativa exigiram a emissão de uma cadeia comportamental maior, especialmente nos problemas que apresentaram figuras, nos quais os participantes deveriam além de contar, também dividir e multiplicar. Cabe ainda ressaltar que muito da cadeia comportamental envolvida na resolução desses problemas ocorreu de forma privada, o que dificultou ainda mais compreender as estratégias que os participantes adotaram para solucioná-los.

Os participantes dos grupos experimentais dos três experimentos discutidos no presente estudo demonstraram aumentos sistemáticos na resolução dos problemas apresentados de forma relativa da avaliação inicial para a final. Os maiores ganhos ocorreram para os participantes do grupo que fez treino de relações condicionais em conjunto com treino de instruções programadas (GIPEQ) do Experimento 1, no qual os participantes demonstraram ganhos de 69 pontos percentuais ao final do experimento. Esses resultados encontram respaldo tanto na literatura sobre ensino com instrução programada (Skinner, 1972) quanto no de equivalência de estímulos (Sidman & Cresson, 1973/1994) como forma de programar contingências para a aquisição de novas respostas. Um ponto em comum entre as duas propostas de ensino é o cuidado em respeitar o ritmo individual de cada aluno e assegurar que o aprendiz demonstre a aquisição de respostas consideradas como pré-requisitos para comportamentos posteriores. Assim, ao se programar o ensino prévio de resposta que são partes de uma cadeia comportamental que exercem a função de precorrentes para a solução de um determinado problema aumenta-se a probabilidade de obter sucesso na execução da tarefa (Baum, 2006). Os exercícios propostos para o grupo que passou pelo treino com instrução programada podem ter ensinado aos participantes identificar as representações fracionárias apresentadas nos problemas, simplificá-las por meio das operações de divisão e multiplicação e a escrever a nova resposta ou fração que ele encontrou. Essas

habilidades são essenciais para a resolução de problemas sobre equivalência de frações e o maior domínio sobre elas pode representar melhor desempenho em tarefas nas quais elas se fizerem necessário, como no caso de tarefas sobre julgamento proporcional, razão e probabilidade.

Ainda em relação ao melhor desempenho do grupo GIPEQ, deve-se levar em consideração que o treino com instruções programadas apresentou de forma gradual aos participantes as instruções constantes na regra de três para solucionar problemas sobre equivalência entre frações. Esse resultado está de acordo com os de Albuquerque e Ferreira (2001) que demonstraram que a extensão da regra pode ser uma variável inversa à probabilidade dela ser seguida, ou seja, que quanto maior a extensão da regra menor a probabilidade dela controlar o comportamento do ouvinte. Possivelmente uma regra que descreve um número extenso de respostas dificulta o controle individual de cada uma delas, o que, por sua vez, tornar o encadeamento necessário para a emissão da resposta solução também mais difícil.

A literatura evidencia há muito tempo que comumente os alunos preferem usar estratégias próprias em detrimento a regra de três ensinada pela escola para resolver problemas fracionários (e.g. Carraher, Carraher & Schliemann, 1982; Carraher et al., 1986; Carraher et al., 1986). Nesses estudos, os autores questionaram a eficácia da regra de três como estratégia algorítmica para resolver problemas fracionárias. Sugeriram que os alunos não a compreendem e que a escola deveria dar mais atenção ao ensino de operações multiplicativas. De fato, saber multiplicar e dividir são comportamentos precorrentes necessários para a resolução de problemas fracionários e devem merecer atenção da escola. Contudo, os dados desses trabalhos permitem levantar outra possibilidade. Pode ser que os alunos não entendam a regra de três pela forma como ela é ensinada na escola. No Experimento 1 do presente estudo, as instruções dadas aos

participantes apresentaram passo a passo cada resposta descrita pela regra de três que é necessária para resolver os exercícios fracionários. Assim, se os participantes não completassem um determinado passo o experimentador auxiliava-os a responder corretamente esse passo e só depois então prosseguiam para o próximo.

A preferência dos alunos por estratégias próprias em detrimento à regra de três (Carragher et al., 1982) pode ser devido a efeitos do próprio controle instrucional. Conforme sugeriram Catania et al. (1982), comportamentos estabelecidos por regras podem apresentar maior insensibilidade a mudanças nas contingências do que comportamentos adquiridos pelo efeito direto das conseqüências. Assim, como o ensino do conceito de equivalência entre frações ocorre na escola basicamente por regras o comportamento dos alunos pode se tornar insensível quando as contingências mudam em novos contextos. Considerando-se que, pelo menos em princípio, as classes de equivalência formadas por estímulos fracionários são infinitas, pode ser possível que a resolução de problemas fracionários exija, pelo menos em parte, que o comportamento varie. Santos et al. (2004) demonstraram que uma história de treino em variação comportamental pode interferir na sensibilidade do seguimento da regra, especialmente quando a mudança nas contingências é sinalizada. Com base nesses achados pode-se sugerir que a exposição às contingências tenha maior ênfase nas etapas iniciais do ensino do conceito de proporção. Bertoni (2008) fez sugestão nesse sentido quando defendeu que no ensino de frações devem-se usar materiais que façam parte da realidade do aluno, o que significa maior possibilidade de que na vida diária o conceito seja utilizado, ou seja, que as contingências naturais assumam o controle do comportamento dos alunos. Dessa forma, como o ensino de frações é baseado em controle instrucional pode apresentar como conseqüência maior estereotipia comportamental, o que pode resultar em maior índice de insucesso dos alunos na

solução de problemas fracionários por meio da regra de três, o que pode fazer com que eles procurem alternativas para solucioná-los. Com base no estudo de Santos et al. (2004), uma estratégia que merece ser testada é a apresentação de instruções que sinalizassem aos alunos quais comportamentos deveriam emitir para que eles resolvessem um determinado problema, em especial no início da aprendizagem. Por exemplo, uma instrução que sinalizasse que eles deveriam resolver um problema usando a operação de multiplicação, ou até mesmo qual a multiplicação deveria fazer. E ainda, sinalizar que o próximo problema seria resolvido por outra operação. Assim, eles seriam expostos a condições que favoreceriam uma maior variabilidade comportamental, o que poderia gerar maior sucesso para eles.

Considerando que uma das funções da regra é colocar o indivíduo em contato com as contingências de reforçamento (Skinner, 1978), é possível que ao seguir as instruções que descreveram passo a passo as respostas necessárias para a solução dos problemas fracionários durante os treinos os participantes do grupo GIPEQ foram aumentando o número de acertos e assim, gradualmente, seus comportamentos passaram de um possível controle exercido inicialmente por regras e contingências para um controle pela regra. Albuquerque e Ferreira (2001) demonstraram que o comportamento foi sensível à extensão em que a regra foi apresentada aos participantes. Os resultados mostraram que quanto maior a regra, ou seja, quanto maior a cadeia comportamental descrita pela regra, menor a probabilidade dela ser seguida. Em geral, a regra ensinada na escola para resolver problemas sobre equivalência entre frações descreve que o aluno deve multiplicar ou dividir uma das frações do problema e comparar o resultado encontrado com a outra fração. Se os resultados forem iguais, as frações serão equivalentes. Contudo, comumente os exercícios propostos pela escola para ensinar o conceito de equivalência entre frações não especificam passo a passo as respostas

necessárias para resolver os problemas, como olhar para a fração, multiplicar ou dividir os denominadores e numeradores das frações por um dado número e comparar os resultados. No entanto, no Experimento 1 do presente estudo não houve a solicitação para que os participantes dos grupos que fizeram treino com instruções programadas descrevessem como resolveram os problemas fracionários. Sugere-se que em experimentos posteriores sejam colhidos relatos dos participantes sobre como resolveram os problemas antes e após os treinos com instruções programadas. Assim, seria possível avaliar com maior precisão se houve ou não o controle pela regra. Contudo, com base nos resultados já existentes na literatura e observados no presente estudo, seria interessante que os exercícios propostos pela escola descrevessem individualmente, após o enunciado completo do problema, cada passo necessário para solucioná-lo, pois assim, aumentaria a probabilidade do comportamento dos alunos ficarem sob o controle da regra.

Ainda há que se considerar que o grupo GIPEQ passou também pelo treino de relações condicionais realizado segundo o paradigma proposto por Sidman e Taiby (1982) o qual também ensina relações precorrentes consideradas necessárias para que novas relações derivem dos treinos anteriores. Desta forma, a exposição às duas formas de ensino pode ter aumentado os acertos dos participantes tanto nos exercícios apresentados na forma de relações condicionais quanto nas questões do tipo lápis e papel propostos ao final do experimento.

Os participantes do grupo instrução programada (GIP) do Experimento 1 e dos grupos Equivalência mais Treino de Composição (GEQTC) e Equivalência e Relato (GEQR), ambos do Experimento 3, apresentaram ganhos semelhantes que oscilaram entre 38 e 39 pontos percentuais. Uma possível explicação para o menor ganho do grupo GIP em relação ao grupo GIPEQ pode ser devido ao tipo de resposta que o

procedimento de instrução programada ensinou, o qual descreveu apenas respostas referentes à tarefa de simplificação envolvendo a operação de divisão ou à de multiplicar denominadores e numeradores das frações. Embora sejam necessárias, essas respostas podem não ser suficientes para resolver problemas sobre equivalência entre frações, uma vez que o conceito de proporção é relacional e exige a comparação entre diferentes medidas. Spinillo (1993) chamou essas comparações de relações de primeiras e segundas ordens e defende que para identificar que duas frações são equivalentes é necessário comparar a relação dos valores de cada fração (primeira ordem) e só depois comparar os resultados (segunda ordem). As instruções por si só não ensinaram essas relações explicitamente, o que pode ter acontecido por meio do treino de relações condicionais. Em estudos futuros, seria interessante manipular o tipo de instrução apresentada aos participantes e investigar o efeito de instruções sobre como resolver tarefas programadas na forma de relações condicionais na aquisição do conceito de proporção ou equivalência entre frações.

Por sua vez, o grupo GEQTC, no qual os participantes fizeram o treino de composição das frações, apresentou ganhos semelhantes aos dos grupos que fizeram apenas treino de relações condicionais nos problemas relativos da avaliação final. Uma possibilidade de explicação desses resultados pode ser a natureza do material usado para compor as frações. No presente estudo, as frações foram compostas por toquinhos coloridos que eram montados em forma de barras de chocolate. Segundo Lopes (2008) o uso de pseudos-problemas sobre pizzas e barras de chocolate não é eficiente para a aprendizagem de conceitos fracionários. Igualmente, considera que o conceito de equivalência de frações é um dos mais importantes da matemática em função de sua aplicação em problemas cotidianos importantes da vida. Contudo, a metodologia de ensino baseada em grades retangulares é insuficiente para que as crianças compreendam

fração como um número racional. Lopes (2008) propõe que a aprendizagem ocorra a partir de problemas encontrados no cotidiano e que explorem o referencial de metade e o sentido de palavras pertencentes ao dia-a-dia dos alunos que tenham a idéia de parte contida nas frações, por exemplo, terço (de rezar), quinto (dos infernos) e novena (de rezar). E ainda, que explicita a idéia e o sentido de palavras com a mesma raiz de frações (fração, fratura, etc). De acordo com Bertoni (2008), o método de contar e pintar figuras é limitado para o ensino de frações. Por esse método as crianças aprendem que o número total de partes corresponde ao denominador e o número pintado ao denominador, mas não aprendem o significado relacional desse novo número, uma vez que não houve quantificação. Seguindo essa linha de raciocínio do autor, uma possibilidade de estudos futuros seria investigar o efeito do treino de composição de frações a partir de materiais pertencentes ao contexto natural das crianças sobre a aprendizagem de frações.

De forma geral, os menores ganhos, tanto nos problemas do tipo lápis e papel quanto nos que foram apresentados por meio do procedimento de pareamento com modelo, ocorreram para os participantes dos grupos programados no Experimento 2, onde houve o manuseio de material concreto, independentemente de terem sido realizados junto com treino em equivalência de estímulos (GMC e GMCEQ). Apesar de a literatura sugerir que a aprendizagem de conceitos fracionários possa ser facilitada pelo manuseio de material concreto (Piaget, 1983, Chiosi, 1984, Bezuk, 1988), os dados do presente estudo não comprovaram essa relação. Uma possibilidade de explicar a possível inconsistência entre a proposição piagetiana e os resultados do presente experimento pode ser a natureza diferente das tarefas que foram programadas nos estudos realizados por Piaget e as do presente trabalho. Em seus estudos, as tarefas adotadas por Piaget consistiram em comparações de quantidades entre diferentes

conjuntos de estímulos, por exemplo, comparar recipientes com diferentes quantidades de líquidos e diferentes quantidades de cartas de baralho. Nessas tarefas, os participantes sempre tiveram a oportunidade de resolver os problemas tendo à disposição os objetos concretos diretamente envolvidos na solução. Os precorrentes, como olhar os recipientes com líquidos e olhar e contar o número de cartas, necessários para a resolução dos problemas eram emitidos na presença dos objetos reais. Isso significa que conceitos como “mais” e “menos” em relação às diferentes formas de recipientes utilizados eram formados sem a necessidade de estímulos simbólicos que fizessem a mediação entre os estímulos do contexto e a resposta a ser adquirida. No entanto, no presente trabalho o conceito a ser aprendido pelos participantes, no caso o conceito de proporção (ou de equivalência entre frações), apresentou essa relação direta entre os estímulos do contexto e a resposta apenas quando as frações foram expressas na forma absoluta, ou seja, é possível relacionar diretamente uma figura de uma barra dividida em três partes iguais com uma das partes destacada com a representação numérica $1/3$, mas não é possível fazer essa mesma representação de forma direta para a fração $3/9$, embora $1/3$ e $3/9$ sejam proporcionalmente equivalentes. Enquanto que no primeiro caso o símbolo numérico $1/3$ é abstraído da figura concreta da barra, no segundo caso a abstração não ocorre de maneira direta. No entanto, o ensino de que essa mesma barra pode ser representada pela fração $3/9$ não ocorre em relação ao objeto concreto, mas em relação a outro símbolo abstrato que é a fração $1/3$. Assim, o conceito de proporção entre diferentes frações numéricas se dá pelo ensino de relações entre símbolos de uma linguagem abstrata, o que pode dificultar a aprendizagem do conceito.

Teixeira (2010) encontrou resultados que permitem questionar as proposições piagetianas referentes às funções mediadoras de atividades práticas na aquisição do raciocínio lógico matemático. Seu estudo analisou os componentes verbais do repertório

matemático elementar em um programa organizado dentro de um modelo de contingências tríplices e dividido em duas partes. A primeira parte envolveu relações numéricas de quantidades variando de um a cinco e a segunda de seis a 10. O programa foi aplicado na forma de texto datilografado com toda a situação de ensino redigida por extenso e apresentado em unidades contendo passos compostos pela seqüência de atividades e exercícios que deveriam ser feitos. A primeira unidade trabalhou a aquisição do princípio de propriedade comum. Nessa parte do programa, a tarefa da criança era ouvir, ecoar e verbalizar as expressões: um conjunto de ... ; elemento de um conjunto; pertence e não pertence ao conjunto. Em seguida, o programa trabalhou o princípio lógico de correspondência um-a-um ou termo-a-termo, onde a criança assinalava correspondência entre elementos dos conjuntos. A tarefa era ouvir, ecoar e verbalizar expressões limite gráfico, conjuntos equivalentes e conjuntos não equivalentes, a partir da constatação, ou não, de correspondência um-a-um entre elementos dos conjuntos comparados. Em seqüência, foram apresentadas quantidades (de um a cinco) por símbolo oral, dando início à resposta de contagem propriamente, introduzindo a aquisição do princípio lógico do número como propriedade de conjuntos equivalentes. Para tanto, a criança devia ouvir, ecoar, contar junto com a professora, contar sozinha, assinalar elementos de conjunto enquanto contava, identificava e nomeava quantidades. No próximo passo, as crianças aprenderam a representar quantidades por símbolos gráficos (numeral). A tarefa exigida foi a nomeação das quantidades. Treinos adicionais foram realizados solicitando das crianças ouvirem e ecoarem numerais antes de nomeá-los. Em seguida, foram ensinadas a identificar rapidamente os elementos de um conjunto, para depois, aprenderem a ordenar conjuntos, números e numerais (princípio lógico de transitividade). Nesse caso, a tarefa foi exibir expressões verbais do tipo: esse conjunto, número ou numeral é “um mais”,

“um menos” que outro; vem “antes” ou “depois” de outro; está “entre” outros dois. Na segunda parte do programa as crianças aprenderam noções de quantidade zero verbalizando a expressão conjunto vazio. Em seguida, ouviram, ecoaram, contaram junto com a professora ou sozinhas, assinalaram elementos enquanto contaram e nomearam novas quantidades de seis a dez. no próximo passo ordenaram números e numerais de um a 10 (precursor de transitividade) de forma semelhante ao que ocorreu na primeira parte, para em seguida, aprender escrever todos esses numerais. Na seqüência, trabalhou-se a noção de agrupamento (precursor de divisão), solicitando às crianças que ouvissem, ecoassem e verbalizassem as expressões como; “esse conjunto tem x elementos e é formado por y sub-conjuntos”. Completando o programa introduziu-se a contagem de dois-em-dois; três-em-três, as noções de números pares, ímpares e numerais ordinais e cardinais. Segundo a autora, os dados dão suporte empírico para se afirmar que a aquisição do repertório matemático elementar decorre da aquisição de um tipo arbitrário de linguagem. Portanto, esse repertório deve ser ensinado e contingenciado nos programas escolares. Os sistemas convencionais e o pensamento matemático se impõem a partir do próprio contingenciamento do comportamento verbal matemático.

A tarefa realizada pelo grupo que fez o treino com material concreto em conjunto com o de equivalência de estímulos (GMCEQ – Experimento 2) e pelo grupo que fez o treino de composição das frações em conjunto com de equivalência de estímulos (GEQTC – Experimento 3) foram semelhantes. Em ambos, os participantes manipularam os mesmo toquinhos e formaram objetos representativos de frações. No entanto, a manipulação de material concreto parece ter sido mais eficiente quando a composição esteve presente. Uma possível explicação para esse resultado pode ser a diferença no controle das respostas que ocorreu em cada grupo. Enquanto a

manipulação do material feita pelos participantes do grupo GMCEQ esteve sob controle de instruções orais fornecidas pelo experimentador, a manipulação do material feita pelos participantes do grupo GEQTC esteve sob controle de modelos apresentados na forma de figuras e que estiveram presentes durante toda a construção, o que permitiu que os participantes corrigissem suas respostas quantas vezes julgassem necessário até a cópia ficar idêntica ao modelo. Em outras palavras, no treino de composição ou cópia os estímulos modelos (figuras) apresentaram correspondência formal com o produto da resposta (objeto construído), enquanto no treino com instrução não houve correspondência formal entre as instruções orais (antecedentes) e a resposta (objetos construídos). Isso sugere que a presença de correspondência formal entre os estímulos e as respostas observadas no grupo GEQTC pode ter facilitado a aprendizagem dos participantes.

O professor deve ser cauteloso ao programar o ensino de frações por meio da manipulação de material concreto (Thompson, 1994). O autor justifica seu cuidado por considerar uma tarefa muito difícil para as crianças compreender conceitos matemáticos em material manipulável, visto que esses conceitos estão no campo das idéias ou abstrações, portanto no campo simbólico. Recentemente, Bertoni (2008) discutiu os atuais métodos utilizados para o ensino e aprendizagem de conceitos fracionários. Questionou ainda o motivo pelo qual o uso de materiais manipuláveis como fichas, canudos e pizzas não viabiliza a construção de números fracionários. O autor sugeriu que o importante é a criança compreender que uma fração, por exemplo, $\frac{2}{4}$ representa uma só entidade e que para isso é necessário o apoio e clareza da linguagem usada no ensino. Por exemplo, para a criança compreender que um inteiro menos um quarto é igual a três quartos é necessário antes que ela domine todos os conceitos individuais envolvidos no problema. Para isso, sugeriu que ao invés de usar figuras de materiais

arbitrários como pizzas e canudos o professor deveria utilizar contextos mais próximos da realidade dos alunos como exercícios envolvendo sanduíches e laranjas. De acordo com essa proposta, o autor assume que figuras de sanduíches e laranjas, por exemplo, já fazem parte da linguagem cotidiana das crianças e, desta forma, a aprendizagem de conceitos fracionários seria mais fácil. Uma possibilidade para experimentos futuros é manipular a natureza das figuras usadas tanto nas condições de testes e treinos das relações condicionais quanto nas questões apresentadas nas avaliações iniciais e finais.

A literatura recente enfatiza a necessidade de considerar a natureza simbólica do conceito de proporção e a necessidade do apoio da linguagem ao se programar as condições para seu ensino na escola regular (Carmo, 2004; Lopes, 2008; e Bertoni, 2008). A análise do comportamento dispõe de um arcabouço teórico e empírico útil para responder questões referentes à linguagem, ou como preferem os analistas comportamentais, comportamentos simbólicos. Em outras palavras, é possível e promissor realizar estudos funcionais sobre a aquisição e manutenção de comportamentos simbólicos, como no caso do conceito de proporção, e identificar quais são as condições necessárias para que respostas simbólicas dessa natureza sejam adquiridas. Um caminho promissor para responder questões dessa ordem pode ser investigar a função mediadora da linguagem ou comportamento verbal sobre a aquisição de conceitos matemáticos simbólicos e abstratos, enquanto uma rede de relações entre estímulos ambientais. Por exemplo, investigar como o comportamento verbal pode viabilizar a formação de uma classe de estímulos ou conceito entre as representações numéricas de cada fração, os nomes das frações e os estímulos concretos que eles representam.

Os baixos escores observados nos testes de expansão das classes de equivalência e de generalização 2 realizados nos três experimentos permitem questionar a

compreensão que os participantes tiveram do conceito de proporção, uma vez que respostas que foram adquiridas por meio de treino direto ou indireto pela exposição ao procedimento de pareamento com o modelo (treinos AB, BC e AD) não ocorreram quando novas relações entre estímulos já expostos aos participantes no procedimento foram testadas (expansão) e quando novas relações entre estímulos ainda não expostos foram avaliadas (generalização). Conforme sugeriu de Rose (2004), a avaliação do que comumente é denominado como compreensão exige medidas de respostas em situações diferentes das quais o ensino direto ocorreu. No contexto escolar, pode-se, por exemplo, pedir aos alunos que, após a aprendizagem de um determinado conteúdo ou conceito, que ele dê exemplos ou explique o que foi dito ou lido com outras palavras. Dessa forma, o professor tem maior segurança para afirmar que o aluno compreendeu o conteúdo. Ainda assim, o autor sugeriu a necessidade de uma análise minuciosa das variáveis que controlam o comportamento dos alunos para que o professor saiba a que situação ambiental eles estão realmente respondendo. Exemplifica sua preocupação com o estudo onde crianças aprenderam a escolher uma seta virada para a direita em meio a várias outras viradas na posição contrária. Em seguida, quando testadas em uma nova condição, na qual as setas encontravam-se em posições invertidas, parte das crianças continuou a escolher a seta singular, ou seja, aquele único estímulo em posição contrária, e parte continuou a escolher outra seta qualquer. Interessante notar que apesar de todas as crianças demonstraram o critério no momento da aprendizagem inicial elas demonstraram ter aprendido respostas diferentes no teste final. Esses resultados lançam dúvidas sobre o que os participantes realmente aprenderam durante as condições de treino de relações condicionais realizados nos três experimentos do presente estudo e sobre quais seriam as variáveis que controlaram suas respostas corretas, visto que todos eles apresentaram os critérios nas condições iniciais de aprendizagem, mas nas

condições de teste de expansão, generalização 2 e na avaliação final não demonstraram habilidade para responder quando as condições apresentadas se modificaram. Em resumo, caso os participantes tenham aprendido respostas diferentes a generalização pode ter ficado comprometida.

Considerando-se os objetivos propostos pelo conjunto de experimentos realizados no presente estudo pode-se afirmar que: a) os participantes de todos os grupos demonstraram a formação de classes de equivalência de três membros entre os estímulos fracionários dos conjuntos A, B e C; b) não ocorreu a expansão das classes formadas para nenhum dos grupos dos três experimento e em todos eles os desempenhos nos testes de generalização 1 foram superiores aos do teste de generalização 2 e, c) os maiores ganhos nos testes do tipo lápis e papel realizados ao final de cada experimento ocorreram para os participantes que fizeram o treino de instrução programada em conjunto com o treino de relações condicionais GIPEC). Os desempenhos observados para os grupos que fizeram o treino de equivalência junto com o treino de composição (GEQTC) e o que fez relato das estratégias adotadas para resolver os exercícios fracionários (GEQR) sugerem que esse procedimento deva ter mais atenção em estudos futuros. Os piores desempenhos ocorreram para os participantes que manipularam material concreto como parte dos treinos para a aquisição do conceito de proporção (GMC e GMCEQ). Os resultados permitem sugerir que seria interessante que as atividades destinadas aos alunos por seus professores para a aprendizagem do conceito de equivalência entre frações ou de proporção fossem programadas a partir da interação entre instruções programadas e o treino de relações condicionais. Permitem sugerir ainda que pedir aos alunos que descrevam a forma como eles resolveram os problemas fracionários propostos nas atividades escolares pode ser uma estratégia promissora para ajudar os alunos a resolverem problemas fracionários e

aumentar a compreensão de que frações numericamente diferentes podem representar valores de uma mesma magnitude. Por último, as explicações sobre os conceitos fracionários dadas oralmente pelos professores poderiam ser reforçadas por tarefas onde os alunos comporiam as frações como parte das atividades diárias de ensino.

Certamente, o ensino do conceito de proporção é um desafio para os educadores. Conforme sugeriu Teixeira (2010), um caminho interessante para encontrar respostas a esse problema é considerar o papel do comportamento verbal na aquisição de repertórios matemáticos. Segundo ela, um conjunto arbitrário de regras lógicas tem para o comportamento matemático a mesma importância que um conjunto de regras gramaticais tem para o comportamento verbal oral e escrito. Portanto, cabe aos educadores e pesquisadores comprovarem a função do componente verbal no comportamento matemático e desenvolver estratégias que facilitem a aprendizagem desses conceitos, dentre eles, o de proporção. Dessa forma, será dado um passo para que os alunos não vejam, conforme sugeriu Vianna (2008), a aprendizagem de frações como a “Hora do vampiro”.

Referências

- Albuquerque, R. A. e Melo, R. M. (2005). Equivalência de estímulos: conceito, implicações e possibilidades de aplicação. Em A. Rodrigues e M. R. Ribeiro (orgs). *Análise do comportamento: pesquisa, teoria e aplicação* (pp 245 – 264). Porto Alegre: ArtMed.
- Albuquerque, L. C. e Ferreira, K. V. D. (2001). Efeitos de regras com diferentes extensões sobre o comportamento humano. *Psicologia: reflexão e crítica*, 14 (1), 143-155.
- Amato, S. dos R. A. (1988). Um novo currículo de matemática para o 1º grau. Em N. E. Bertoni (coord). *Projeto pra melhoria do ensino de ciência e matemática*. Universidade de Brasília – Departamento de matemática.
- Bahiano, C. E. (S/D, 13 de junho). *Números racionais e irracionais*. Retirado em 13 de maio de 2009 do site www.mat.ufb.br/extensao/obmep/estagio_obmep/apostilaIII.pdf.
- Bandura, A. (1979). *Controle simbólico das modificações do comportamento*. Rio de Janeiro: Interamericana.
- Baum, W. M. (1999). *Compreender o behaviorismo: ciência, comportamento e cultura*. Porto Alegre: ArtMed.
- Bem-chaim, B. Ilany, B. S. e Keret, Y. (2008). “Atividades investigativas autênticas” para o ensino de razão e proporção na formação de professores de matemática par os níveis elementar e médio. *Bolema*, 21 (31), 129-139.
- Bertoni, N. E. (2008). A construção do conhecimento sobre número fracionário. *Bolema*, 21, (31), 209-237.
- Bezuk, N. S. (1988). Fractions in the early childhood mathematics curriculum. *Arithmetic teacher*, 35 (6), 56-60.
- Carmo, J. S. (2000). O conceito de número como rede de relações. Em R. R. Kerbauy (org). *Sobre comportamento e cognição: Conceitos, pesquisa, aplicação, a ênfase no ensinar, na emoção e no questionamento clínico*, V5, (pp. 97-113). Santo André: SET.
- Carmo, J. S. (2003, 30 de maio). O conceito de número e sua aprendizagem segundo estudantes de matemática, pedagogia e pós-graduação em educação: um estudo comparativo. Retirado em 30 de maio de 2009 do site www.nead.unama.br/site/bibdigital/pdf/artigos_revista/32.pdf.
- Carmo, J. S. e Prado, P. S. T. (2004). Fundamentos do comportamento matemático: a importância dos pré-requisitos. Em M.M. C. Hubner e M. Marinotti (org). *Análise do comportamento para educação: contribuições recentes*. Santo André: Esetec.

- Carraher, T. N. Carraher, D. W. e Schlieman, A. D. (1982). Na vida dez; na escola, zero: os conceitos naturais da aprendizagem da matemática. *Cadernos de pesquisa*, 42, 79-86.
- Carraher, T. N. Carraher, D. W. e Schlieman, A. D. (1986). Proporcionalidade na educação científica e matemática: desenvolvimento cognitivo e aprendizagem. *Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos*, 67, 586-602.
- Carraher, T. N., Carraher, D. W., Schliemann, A. D. e Ruiz, E. R. L. (1986). Proporcionalidade na educação científica e matemática: quantidades medidas por razões. *Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos*, 67, 93-107.
- Carraher, D. W. e Schliemann, A. D. (1992). A compreensão de frações como magnitudes relativas. *Psicologia: Teoria e Pesquisa*, 8, 67-78.
- Catania, A. C. Mathews, B. A. e Shimoff, E. (1982). Instructed versus shaped human verbal behavior: interactions with nonverbal responding. *Journal of Experimental Analysis of Behavior*, 38, 233-248.
- Catânia, A. C. (1999). *Aprendizagem: comportamento, linguagem e cognição*. Porto Alegre: ArtMed.
- Chiosi, L. (1984). Fractions revisited. *Arithmetic teacher*, 31 (8), 46-47.
- Coelho, D. S. (2000). *Comportamento precorrente auxiliar: efeitos de contingências programadas de reforço no treino sobre o desenvolvimento em sessões de recombinação*. Tese de Doutorado não publicada, Universidade de Brasília, Distrito Federal.
- De Rose, J. C., Souza, D. G., Rossito, A. L. e De Rose, T. M. S. (1989). Aquisição de leitura após história de fracasso escolar: equivalência de estímulos e generalização. *Psicologia: Teoria e Pesquisa*, 5, 325-346.
- De Rose, J. C. (1993). Classes de estímulos: implicações para uma análise comportamental da cognição. *Psicologia: Teoria e Pesquisa*, 9, 283-303.
- De Rose, J. C., Kato, O. M., Thé, A. P. e Kledaras, J. B. (1997). Variáveis que afetam a formação de classes de estímulos: estudos sobre efeitos do arranjo de treino. *Acta Comportamental*, 5, 143-163.
- De Rose, J. C. (2004). Além da resposta correra: controle de estímulos e o raciocínio dos alunos. Em M. M. C. Hubner e M. Marinotti (org). *Análise do comportamento para educação: contribuições recentes* (pp 103-113) Santo André: ESETEC.
- De Rose, J. C. (2005). Análise comportamental da aprendizagem de leitura e escrita. *Revista Brasileira de Análise do Comportamento*, 1 (1), 29-50.
- De Rose, J. C. (2010). Prefácio. Em J. S. Carmo e P. S. T. Prado (orgs). *Relações simbólicas e aprendizagem da matemática*. (pp 49-68). Santo André: ESETEC.

- Dugdale, N. e Lowe, C. F. (1990). Naming and stimulus equivalence. Em D. E. Blackman e H. Lejeune (orgs), *Behavior analysis in theory and practice: contributions and controversies* (pp. 113-137). London: UK: Lawrence Erlbaum Associates.
- Educar (S/D, junho). Frações, problemas e material concreto. Retirado em 29 de junho de 2009 do site www.educarsc.usp.br/matematica/n5let2.htm.
- Fields, L., Verhave, T. e Fath, S. (1984). Stimulus equivalence and transitive associations: a methodological analysis. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, 42, 143-157.
- Fieds, L e Verhave, T. (1987). The structure of equivalence classes. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, 48, pp. 317 – 332.
- Gertge, V. S. (2009, maio). A construção do número. Retirado em 03 de maio de 2009 do site www.colegiodombosco.net/novoartigo-detalhes?id=25&page=1.
- Green, G. (2010). A tecnologia de controle de estímulos no ensino de equivalências número quantidade. Em J. S. Carmo e P. S. T. Prado (orgs). *Relações simbólicas e aprendizagem da matemática*. (pp 7-12). Santo André: ESETec.
- Goulart, I. B. (1983). *Piaget: experiências básicas para utilização pelo professor*. Petrópolis: Ed. Vozes.
- Guerra, R. B. e Silva, F. H. S. (2008). As operações com frações e o princípio da contagem. *Bolema*, 21, (31), 41-54.
- Hanna, E. S., de Souza, D. G., De Rose, J. C. C. e Borges, M. M. (1994). Ensino de cópia afeta o desempenho em ditado: evidências sobre o desenvolvimento de interdependência entre repertórios de leitura e escrita. *Anais do V Simpósio de Pesquisa e Intercâmbio Científico da ANPPEP*, Caxambu, pp. 21 – 22.
- Haydu, V. B.; costa, L. P. e Pullin, e. M. M. P. (2006). Resolução de problemas aritméticos; efeito de relações de equivalência entre três diferentes forma de apresentação dos problemas. *Psicologia: reflexão e crítica*, 19 (1), 44-52.
- Horne, P. J. e Lowe, C. F. (1996). On the origins of naming and others symbolic behavior. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, 65, 185-241.
- Hunziker, M. H. L., Lee, V. P. Q., Ferreira, C. C, Silva, A. P. e Caramori, F. C. (2002). Variabilidade comportamental em humano: efeito de regras e contingências. *Psicologia: Teoria e Pesquisa*, 18, 139-147.
- Jacob, L. S. (2004). Treino de resolução de problemas. Em C. N. de Abreu e H. J. Guilhard (orgs.). *Terapia comportamental e cognitivo-comportamental: práticas clínicas*, (pp. 344 – 3510. São Paulo: Roca .
- Keller, F. s. (1983). Adeus mestre! Em R. R. Kerbauy (org). *Coleção grandes cientistas sociais*, 41, São Paulo: Ática.
- Lynch, D. C. e Cuvo, A. J. (1995). Stimulus equivalence instruction of fraction-decimal relations. *Journal of applied Behavior Analysis*, 28, 115-126.

- Levington, H. B.; Neff, N. A. e Cihon, T. M. (2009). The effects of teaching precurent behavior on children's solution of multiplication and division word problems. *Journal of the Experimental Analysis Behavior*, 42 (2), 361-367.
- Lopes, A. J. (2008). O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes ensinar frações. *Bolema*, 21, (31), 1-22.
- Mackay, H. A. (1991). Conditional stimulus control. Em I. H. Iversen e K. A. Lattal (orgs). *Experimetal analysis of behavior* (pp. 301-349). Amsterdam: Elsevier.
- Magina, S. e Campos, T. (2008). A fração nas perspectivas do professor e do aluno dos dois primeiros ciclos do ensino fundamental. *Bolema*, 21, (31), 23-40.
- Medeiros, J. G., Vettorazi, A., Kliemann, A., Kurban, L. e Mateus, M. S. (2007). Emergência conjunta dos comportamentos de ler e escrever palavras e identificar números após o ensino em separado desses repertórios. *Psicologia: ciência e profissão*, 27, 4 -21.
- Millenson, J. R. (1967). *Princípios de análise do comportamento*. Brasília: Coordenada.
- Miranda, D. (2009, junho). *Frações*. Retirado em 29 de junho de 2009 do site <http://www.brasilecola.com/matematica/fracao.htm>.
- Monteiro, G. e Medeiros, J. G. (2002). A contagem oral como pré-requisito para a aquisição do conceito de número com crianças pré-escolares. *Estudos de Psicologia*, 7 (1), 73 0 90.
- Ninness, C., Dixon, M., Barnes-Holmes, D., Rumph, R., McCuller, G., Ford. A. M., et al.. (2006). Transformation of mathematical and stimulus functions. *Journal of Applied Behavir Analysis*. 39, pp 299 – 321.
- Ninness, C., Dixon, M., Barnes-Holmes, D., Ruhfelot, R. A., Rumph, R., McCuller, G., et al. (2009). Constructing and derinving reciprocal trigonometrics relations: a functional analysis approach. *Journal of Applied Behavir Analysis*, 42 (2) , pp. 191 – 208.
- Nico, Y. C. (2001). O que é auto-controle, tomada de decisão e resolução de problema na perspectiva de B. F. Skinner. Em H. J. Gulharde, M. B. B. P., Madi, P. P. Queiroz e M. C. Scoz (ors). *Sobre comportamento e cognição: expondo a variabilidade*, v. 7, (pp 62-70). Santo André: ESETec.
- Oliveira, A. J. N.; Carvalho, M. C. F. e Figueiredo, R. M. E. (20001). Contagem e aquisição de relações entre número e quantidade em crianças com idade escolar. Em R. M. E. Figueiredo, L. C. C. Silva, U. R. Soares e R. Silva Barros (orgs). *Ensino da leitura, escrita e conceitos matemáticos*. (pp. 25-48). Belem: FIDES/UNAMA.
- Oliveira-Castro, J. M. e Campos, A. P. M. (2004). Comportamento precorrente auxiliar: efeitos do número de dimensões discriminativas da tarefa. *Psicologia: Teoria e Pesquisa*, 20 (2), 191-199.
- Piaget, J. (1983). A epistemologia genética. *Coleção os pensadores*. São Paulo: Abril Cultural.

- Pitaluga, T. O. (2009). Efeitos de construção de história relativa aos estudos de variação e repetição. Dissertação de mestrado não publicada. Pontifícia Universidade Católica de Goiás, Goiânia.
- Projeto Arirabá - Matemática/Obra coletiva (2006). *Manual do professor: quinta série*. São Paulo: Editora Moderna.
- Santos, A. C. G. (1996) *Aprendizagem do conceito de proporção e o paradigma de equivalência de estímulos*. Dissertação de mestrado não publicada. Universidade de Brasília, Distrito Federal.
- Santos, A. C. G. Souza, A. V. Bay, C. K. (1997). Aprendizagem do conceito de proporção: interação entre equivalência de estímulos e instruções. *Anais do XXVII Reunião anual de Psicologia da Sociedade Brasileira de Psicologia*.
- Santos, A. C. G. (1999). Equivalência de frações: como anda a compreensão dos alunos? *Estudos: Revista da Universidade Católica de Goiás*, 26,(2), 233-249.
- Santos, A. C. G. ; Silva, C. H. N. E. ; Oliveira, E. L. (1999). Aprendizagem no conceito de proporção e o paradigma de equivalência de estímulos: efeito do treino numérico-numérico sobre o desempenho generalizado. *Anais da XXIX Reunião Anual da Sociedade Brasileira de Psicologia*. Campinas. pp. 83.
- Santos, J. G. W., Paracampo, C. C. P. e Albuquerque, L. C. (2004). Análise dos efeitos da história de variação comportamental sobre o seguimento de regras. *Psicologia: reflexão e crítica*, 17 (3), 15-22.
- Sidman, M. (1994). *Equivalence relations and behavior: a research story*. Author Cooperative, Inc: Boston, Massachusets.
- Sidman, M. e Cresson, O. (1994). *Equivalence relations and behavior: a research story*. Author Cooperative, Inc. Boston: Massachusets.
- Sidman, M. e Tailby, W (1982). Conditional discrimination vs. matching to sample: an expansion of the testing paradigm. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, 37, 5-22.
- Sidman, M., Kirk, B. e Willson-Morris, M. (1985). Six-member stimulus classes generated by conditional-discrimination procedure. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior* , 37, pp 5-22.
- Sidman, M. (1990). Equivalence relations: where do they came from? Em D. E. Blackman e H. Lejeune (eds). *Behavior analysis in theory and practice: contributions and controversies*, (pp 93 -113) London, UK: Erbauns.
- Skinner, B. F. (1978). *O comportamento verbal*. São Paulo: Cultrix: Edusp.
- Silva, F. M. e Albuquerque, L. C. (2006). Efeitos de perguntas e de histórias experimentais sobre o seguir regras. *Psicologia: Teoria e Pesquisa*, 22, (2), 133-142.

- Silva, M. J. F. e Ag Almouloud, A. S. (2008). As operações com números racionais e seu significados a partir da concepção parte-todo. *Bolema*, 21, (31), 55-78.
- Silva, A. M. (2009, junho). *A concepção de frações por alunos nos anos finais do ensino fundamental e do ensino médio*. Retirado em 29 de junho de 2009 do site www.anped.org.br/reunioes/31ra/2poster/GT19-4658--Int.pdf.
- Simonassi, L. E. Oliveira, C. I. Sanabio, E. T. (1994). Descrições sobre possíveis relações entre contingências programadas e formulação de regras. *Estudos*, 21 (3/4), 97-112.
- Simonassi, L. E., Froes, A. C. e Sanábio, E. T. (1995). Contingências e regras: considerações sobre comportamentos conscientes. *Estudos*, 22 (3/4), 189-199.
- Simonassi, L. E. (1997). Aquisição de consciência como condição para melhora de desempenho? Em R. A. Banaco (org.). *Sobre comportamento e cognição: Aspectos teóricos, metodológicos e de formação em análise do comportamento e terapia cognitivista*, v. 1, (pp. 277-282). São Paulo: ARBytes.
- Simonassi, L. E. (1999). Cognição: contato com contingências e regras. *Revista Brasileira de Terapia Cognitiva*, 1 (1), 83-93.
- Simonassi, L. E. e Cameschi, C. E. (2003). O episódio verbal e a análise de comportamentos verbais privados. *Revista Brasileira de Terapia comportamental e Cognitiva*, 5, (2), 105-119.
- Skinner, B. F. (1972). *Tecnologia do ensino*. São Paulo: EPU.
- Skinner, B. F. (1978). *Ciência e comportamento humano*. São Paulo: Martins Fontes.
- Skinner, B. F. (1980). Contingências de reforço. In: *Coleção Os Pensadores*. São Paulo: Editora Abril Cultural.
- Skinner, B. F. (1982). *Sobre o behaviorismo*. São Paulo: Cultix/Edusp
- Skinner, B. F. (1991). *Questões recentes na análise comportamental*. Campinas: Papyrus.
- Spinillo, A. G. (1992). A importância do referencial de metade e o desenvolvimento do conceito de proporção. *Psicologia: Teoria e Pesquisa*, 8, 305-317.
- Spinillo, A. G. (1993). As relações de primeira ordem em tarefas de proporção: uma outra explicação quanto às dificuldades das crianças. *Psicologia: Teoria e Pesquisa*, 9, 349-364.
- Teixeira, A. M. S. (2010). Componentes verbais do repertório matemático elementar. Em J. S. Carmo e P. S. T. Prado (orgs). *Relações simbólicas e aprendizagem da matemática*. (pp. 159 - 172). Santo André: ESETEc.

- Teixeira, A. R. (2001). A formação de conceitos no cotidiano da sala de aula de uma escola reiligiosa. Dissertação de mestrado não publicada, Universidade Católica de Goiás, Goiânia.
- Teixeira, A. M. S. (2006). *Análise de contingências em programação de ensino infantil: liberdade e efetividade na educação*. Santo Ande, SP: ESETec.
- Thompson, P. W. (1994). Concret materials and teaching for mathematical understanding. *Arithmetic Teache*, 41, (9), 556 -558.
- Tinoco, L. A. A. e Lopes, M. L. (1994). Frações: dos resultados de pesquisa à prática em sala de aula. *Revista Brasileira de Educação Matemática*, 2, 13-18.
- Todorov, J. C. (1989). A psicologia como estudo de interações. *Psicologia: Teoria e Pesquisa*, 5, 325-347.
- Whaley, D. L. e Malott, R. W. (1980). *Princípios elementares do comportamento*. São Paulo: EPU.
- Vianna, C. R. (2008). A hora da fração: pequena sociologia dos vampiros na educação matemática. *Bolema*, 21, (31), 161-181.

Anexo A

Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

Pontifícia Universidade Católica de Goiás
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pró-graduação
Departamento de Psicologia

Consentimento de Participação

Eu, _____, RG nº _____,
CPF nº _____ abaixo assinado, concordo com a participação do meu filho
_____ na pesquisa: _____

fui devidamente informado (a) e esclarecido (a) pelos aplicadores, alunos do curso de psicologia da Pontifícia Universidade Católica de Goiás. Também fui informado (a) sobre o estudo, os procedimentos adotados e os possíveis riscos e benefícios decorrentes da participação do (a) meu (minha) filho (a). Foi-me garantido que posso retirar meu consentimento a qualquer momento, em que isto leve a qualquer penalidade.

Local e data: _____

Nome do responsável: _____

Assinatura do responsável: _____

Testemunhas

Presenciamos a solicitação de consentimento e o esclarecido sobre o estudo e o aceite da do sujeito para participar.

Nome: _____

Assinatura: _____

Nome: _____

Assinatura: _____

Pontifícia Universidade Católica de Goiás
Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa
Departamento de Psicologia

Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

Convidamos seu filho (a) para participar como voluntário de um estudo sobre aprendizagem de frações. Nosso objetivo é compreender quais são as principais dificuldades para aprender o conceito de equivalência de frações e, assim, propor formas alternativas para seu ensino.

O estudo será realizado por alunos voluntários da Universidade Católica de Goiás. Inicialmente, avaliaremos por meio de um questionário a compreensão atual que seu filho tem do conceito de equivalência de frações e, posteriormente, aplicaremos uma série de atividades na forma de exercícios escolares para que ele resolva. Todos os procedimentos ocorrerão na escola do seu filho (a), a qual já autorizou a realização do estudo.

Os resultados obtidos nesse estudo poderão trazer benefícios para seu filho ao reforçar a compreensão de um dos conceitos matemáticos mais difíceis de ser aprendidos nessa etapa da vida acadêmica em que ele se encontra. Como nosso objetivo é ajudar toda comunidade acadêmica, os dados poderão ser divulgados, mas serão sempre mantidas em sigilo as identidades dos participantes. Não há previsão de nenhum tipo de remuneração para seu filho (a) e a qualquer momento ele poderá encerrar sua participação no estudo, sem nenhum ônus para você ou para ele.

Caso permita a participação do seu filho (a) neste estudo, assine no final deste documento, que está em duas vias. Uma delas é sua, e a outra do aluno responsável pelo estudo. Em caso de recusa, você não será penalizado de forma alguma. Em caso de dúvidas, você poderá procurar, a qualquer momento, um dos alunos ou o Prof. Antonio Carlos G. Santos, responsáveis por este estudo.

Telefone para contato: _____ Antonio Carlos

Antonio Carlos G. Santos

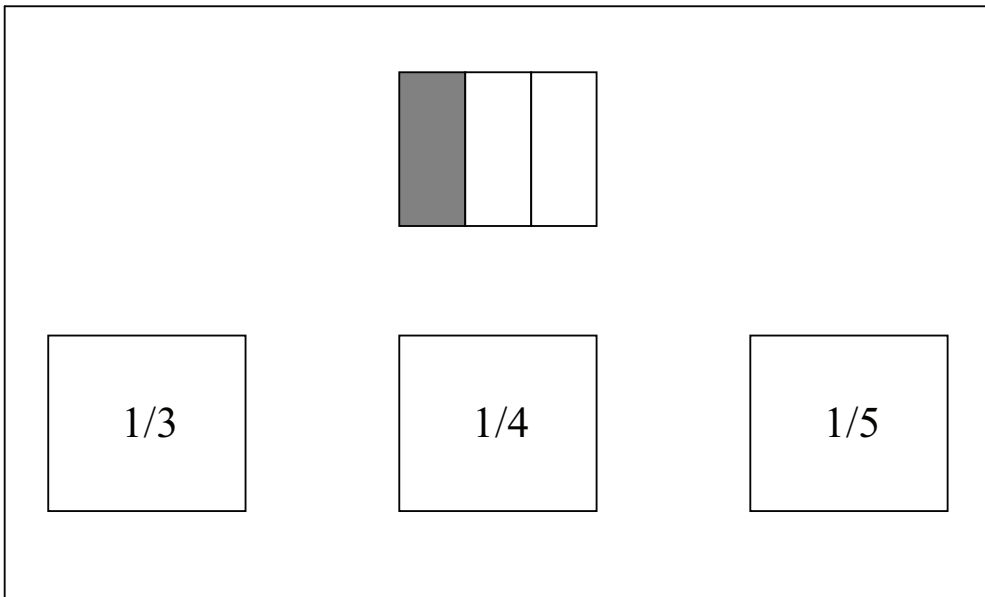
Aluno responsável

Responsável pelo participante

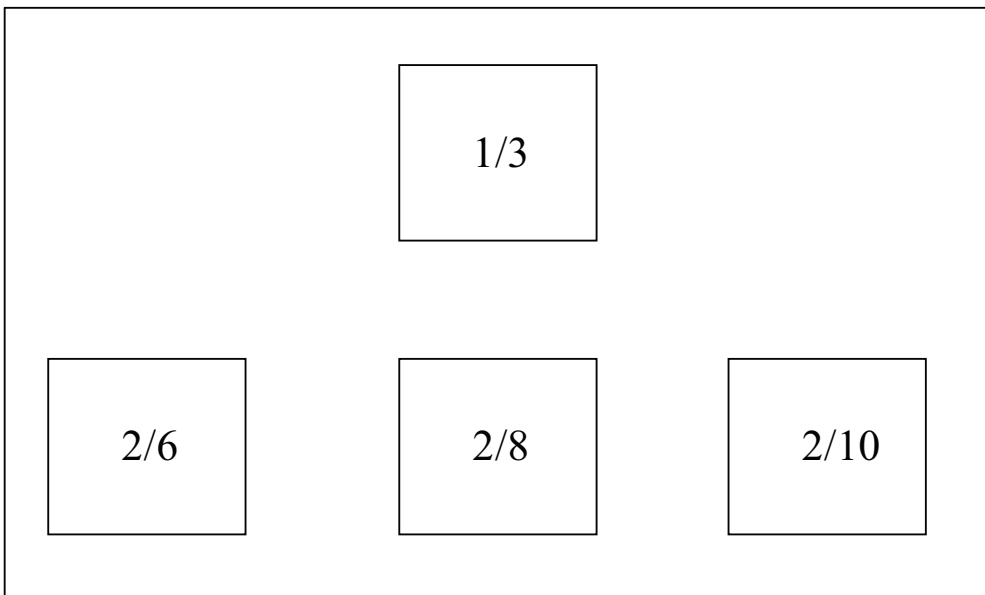
Anexo B

Exemplos reduzidos do material apresentados nas pastas para o treino de relações condicionais entre estímulos fracionários pictóricos e numéricos e numéricos e numéricos de acordo com o procedimento de pareamento com o modelo.

Treino AB



Treino BC



Anexo C

Exemplos de apostilas para treinos com instrução programada

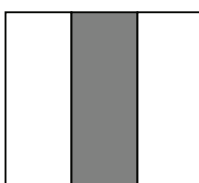
Treino de Instrução Programada da condição AB.

Nome:.....

Condição:.....

Data:/...../.....

01) Represente com uma fração a figura abaixo seguindo as instruções A, B, C e D.



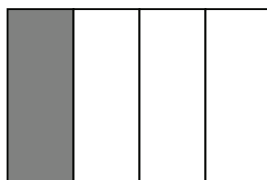
A) Conte o número de partes sombreadas da figura acima e escreva na parte superior do quadrado ao lado.

B) Conte o número de partes em que a figura acima foi dividida e coloque na parte inferior do quadrado ao lado.

C) Escreva novamente a fração que você encontrou no quadrado ao lado

D) A fração que representa a figura acima é:

02) Represente com uma fração a figura abaixo seguindo as instruções A, B, C e D.



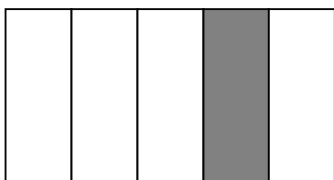
A) Conte o número de partes sombreadas da figura acima e escreva na parte superior do quadrado ao lado.

B) Conte o número de partes em que a figura acima foi dividida e coloque na parte inferior do quadrado ao lado.

C) Escreva novamente a fração que você encontrou no quadrado ao lado

D) A fração que representa a figura acima é:

03) Represente com uma fração a figura abaixo seguindo as instruções A, B, C e D.



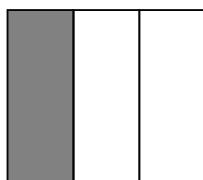
A) Conte o número de partes sombreadas da figura acima e escreva na parte superior do quadrado ao lado.

B) Conte o número de partes em que a figura acima foi dividida e coloque na parte inferior do quadrado ao lado.

C) Escreva novamente a fração que você encontrou no quadrado ao lado

D) A fração que representa a figura acima é:

04) Represente com uma fração a figura abaixo seguindo as instruções A, B, C e D.



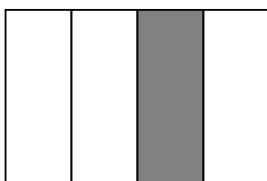
A) Conte o número de partes sombreadas da figura acima e escreva na parte superior do quadrado ao lado.

B) Conte o número de partes em que a figura acima foi dividida e coloque na parte inferior do quadrado ao lado.

C) Escreva novamente a fração que você encontrou no quadrado ao lado

D) A fração que representa a figura acima é:

05) Represente com uma fração a figura abaixo seguindo as instruções A, B, C e D.



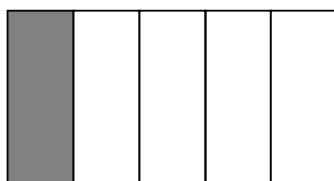
A) Conte o número de partes sombreadas da figura acima e escreva na parte superior do quadrado ao lado.

B) Conte o número de partes em que a figura acima foi dividida e coloque na parte inferior do quadrado ao lado.

C) Escreva novamente a fração que você encontrou no quadrado ao lado

D) A fração que representa a figura acima é:

06) Represente com uma fração a figura abaixo seguindo as instruções A, B, C e D.



A) Conte o número de partes sombreadas da figura acima e escreva na parte superior do quadrado ao lado.

B) Conte o número de partes em que a figura acima foi dividida e coloque na parte inferior do quadrado ao lado.

C) Escreva novamente a fração que você encontrou no quadrado ao lado

D) A fração que representa a figura acima é:

Treino de Instrução Programada da condição BC.

Nome:.....
Condição:..... Data:/...../.....

01) Encontre uma fração equivalente à fração $1/3$ seguindo as instruções A,B,C e D.

A) Multiplique o número um que está no numerador da fração acima por dois e coloque o resultado na parte superior do quadrado ao lado.

B) Multiplique o número três que está no denominador da fração acima por dois e coloque o resultado na parte inferior do quadrado ao lado.

C) Escreva novamente a fração que você encontrou no quadrado ao lado.

--

D) A fração equivalente a $1/3$ é:

02) Encontre uma fração equivalente à fração $\frac{1}{4}$ seguindo as instruções A,B,C e D.

A) Multiplique o número um que está no numerador da fração acima por dois e coloque o resultado na parte superior do quadrado ao lado.

B) Multiplique o número quatro que está no denominador da fração acima por dois e coloque o resultado na parte inferior do quadrado ao lado.

C) Escreva novamente a fração que você encontrou no quadrado ao lado.

--

D) A fração equivalente a $\frac{1}{4}$ é:

03) Encontre uma fração equivalente à fração $\frac{1}{5}$ seguindo as instruções A,B,C e D.

A) Multiplique o número um que está no numerador da fração acima por dois e coloque o resultado na parte superior do quadrado ao lado.

B) Multiplique o número cinco que está no denominador da fração acima por dois e coloque o resultado na parte inferior do quadrado ao lado.

C) Escreva novamente a fração que você encontrou no quadrado ao lado.

--

D) A fração equivalente a $\frac{1}{5}$ é:

04) Encontre uma fração equivalente à fração $\frac{1}{3}$ seguindo as instruções A,B,C e D.

A) Multiplique o número um que está no numerador da fração acima por dois e coloque o resultado na parte superior do quadrado ao lado.

B) Multiplique o número três que está no denominador da fração acima por dois e coloque o resultado na parte inferior do quadrado ao lado.

C) Escreva novamente a fração que você encontrou no quadrado ao lado.

--

D) A fração equivalente a $\frac{1}{3}$ é:

05) Encontre uma fração equivalente à fração $\frac{1}{4}$ seguindo as instruções A,B,C e D.

A) Multiplique o número um que está no numerador da fração acima por dois e coloque o resultado na parte superior do quadrado ao lado.

B) Multiplique o número quatro que está no denominador da fração acima por dois e coloque o resultado na parte inferior do quadrado ao lado.

C) Escreva novamente a fração que você encontrou no quadrado ao lado.

—

D) A fração equivalente a $\frac{1}{4}$ é:

06) Encontre uma fração equivalente à fração $\frac{1}{5}$ seguindo as instruções A,B,C e D.

A) Multiplique o número um que está no numerador da fração acima por dois e coloque o resultado na parte superior do quadrado ao lado.

B) Multiplique o número cinco que está no denominador da fração acima por dois e coloque o resultado na parte inferior do quadrado ao lado.

C) Escreva novamente a fração que você encontrou no quadrado ao lado.

--

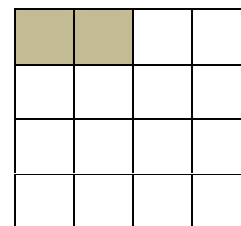
D) A fração equivalente a $\frac{1}{5}$ é:

Anexo D

Provas de avaliação inicial e avaliação final

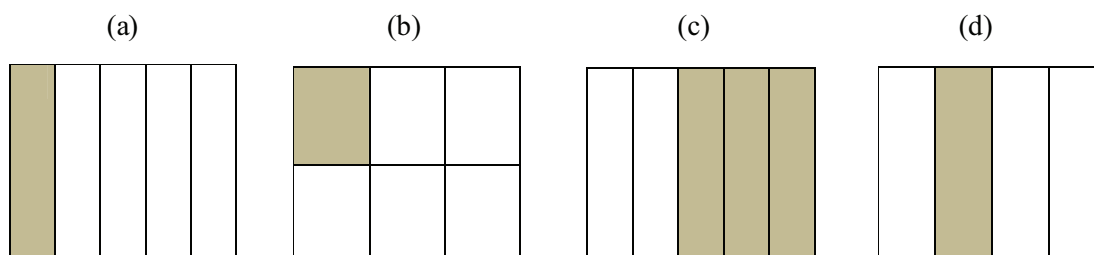
Nome: _____
 Idade: _____ Série: _____
 Colégio: _____
 Endereço: _____
 Telefone: _____

1) Marque a alternativa que corresponde (equivale) à parte sombreada
 na figura ao lado.

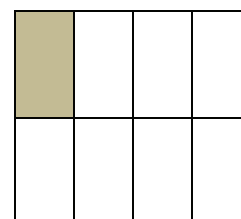


- a) $\frac{3}{15}$ b) $\frac{1}{8}$ c) $\frac{12}{24}$ d) $\frac{1}{5}$

2) Marque a alternativa que corresponde (equivale) a $\frac{1}{5}$:

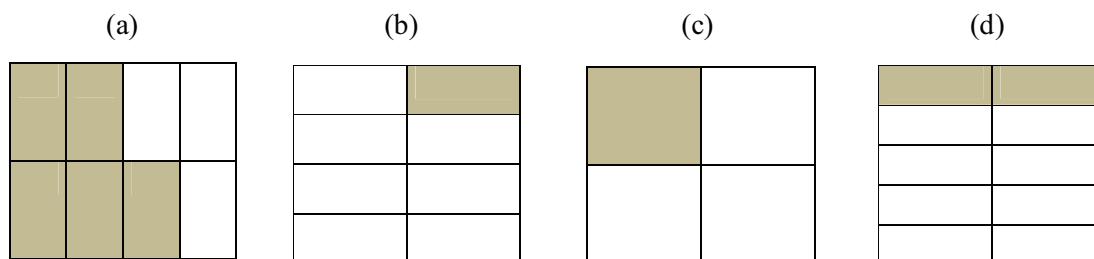


3) Marque a alternativa que corresponde (equivale) à parte sombreada
 na figura ao lado.

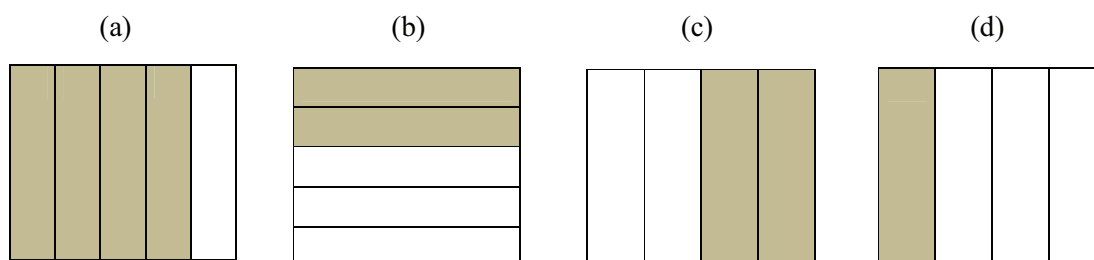


- b) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{4}{9}$ c) $\frac{1}{8}$ d) $\frac{4}{8}$

4) Marque a alternativa que corresponde (equivale) a $\frac{1}{8}$.



5) Marque a alternativa que corresponde (equivale) a $\frac{1}{4}$.



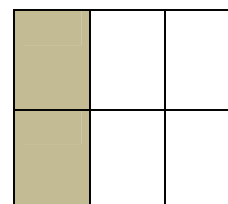
6) Marque a alternativa que corresponde às partes sombreadas na figura ao lado.

a) $\frac{1}{6}$

b) $\frac{1}{3}$

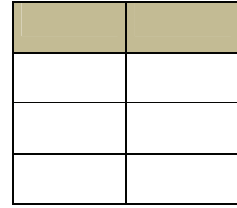
c) $\frac{2}{4}$

d) $\frac{4}{6}$



7) Marque a alternativa que corresponde às partes sombreadas na figura ao lado.

- a) $\frac{3}{20}$ b) $\frac{5}{15}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{2}{6}$

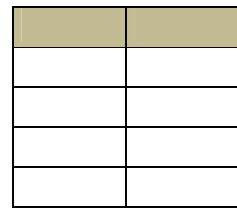


8) Marque a alternativa que corresponde a $\frac{1}{4}$.

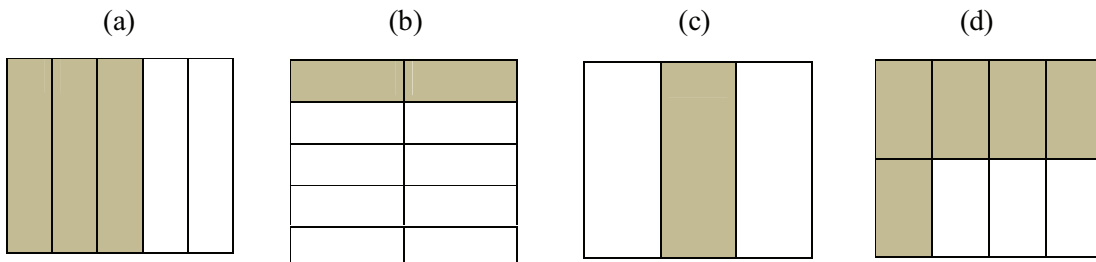
- a) $\frac{4}{12}$ b) $\frac{5}{20}$ c) $\frac{2}{4}$ d) $\frac{1}{12}$

9) Marque a alternativa que corresponde às partes sombreadas na figura ao lado.

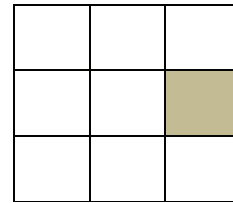
- a) $\frac{2}{6}$ b) $\frac{3}{10}$ c) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{2}{8}$



10) Marque a alternativa que corresponde a $\frac{1}{5}$.



11) Marque a alternativa que corresponde à parte sombreada na figura ao lado.

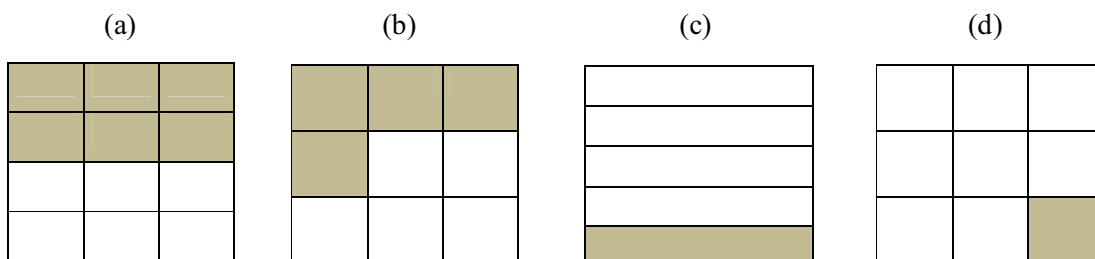


- a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{9}$ c) $\frac{3}{6}$ d) $\frac{5}{9}$

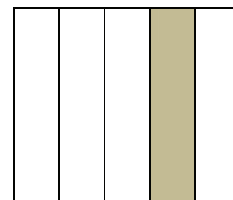
12) Marque a alternativa que corresponde a $\frac{1}{9}$.

- a) $\frac{3}{9}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{4}{36}$ d) $\frac{12}{16}$

13) Marque a alternativa que corresponde a $\frac{1}{9}$.

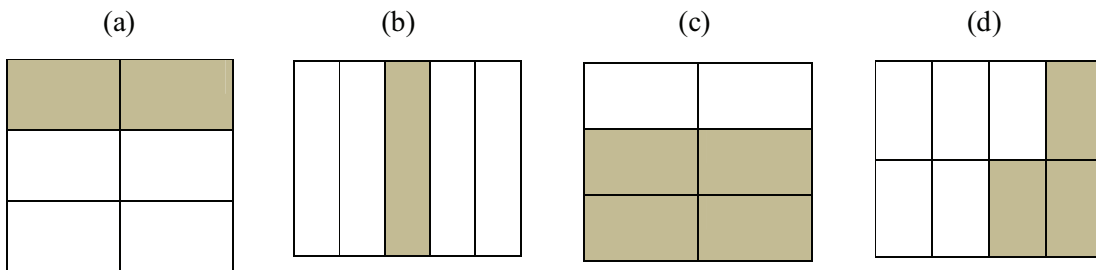


14) Marque a alternativa que corresponde à parte sombreada na figura ao lado.

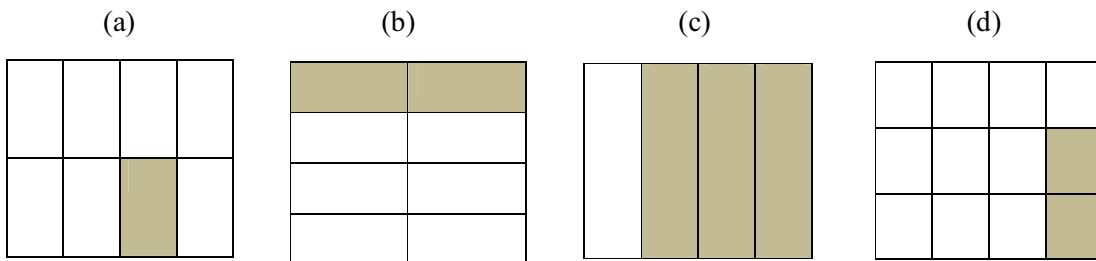
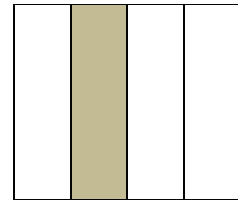


- a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{5}{15}$ c) $\frac{4}{6}$ d) $\frac{1}{4}$

15) Marque a alternativa que corresponde à parte sombreada na figura ao lado.



16) Marque a alternativa que corresponde à parte sombreada na figura ao lado.

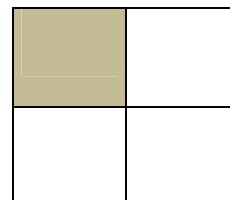


17) Marque a alternativa que corresponde a $\frac{1}{8}$.

- a) $\frac{4}{32}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{3}{8}$ d) $\frac{4}{8}$

18) Marque a alternativa que corresponde às partes sombreadas na figura ao lado.

- a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{2}{4}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{4}$

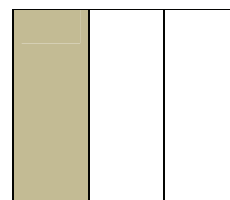


19) Marque a alternativa que corresponde a $\frac{1}{5}$.

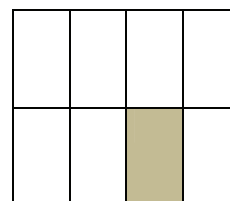
- a) $\frac{2}{6}$ b) $\frac{1}{20}$ c) $\frac{4}{20}$ d) $\frac{3}{5}$

20) Marque a alternativa que corresponde às partes sombreadas na figura ao lado.

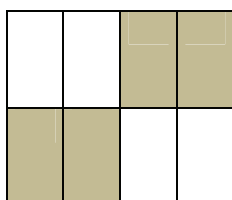
- a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{3}{3}$



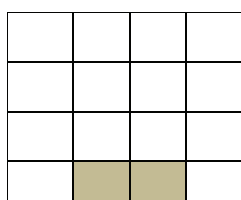
21) Marque a alternativa que corresponde à parte sombreada na figura ao lado.



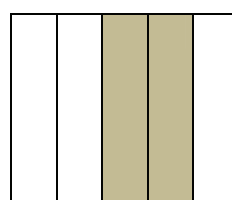
(a)



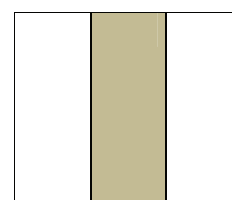
(b)



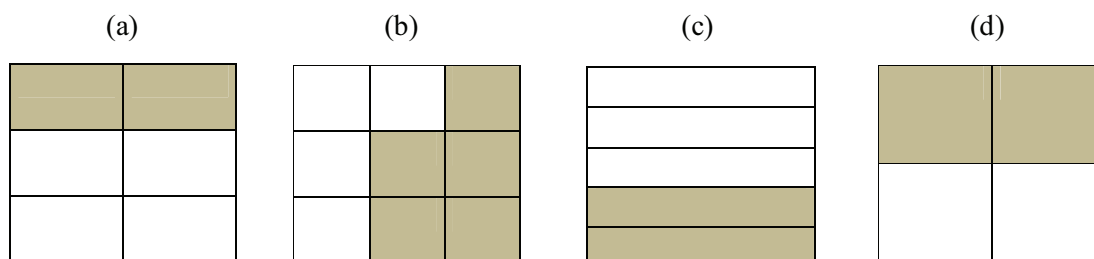
(c)



(d)



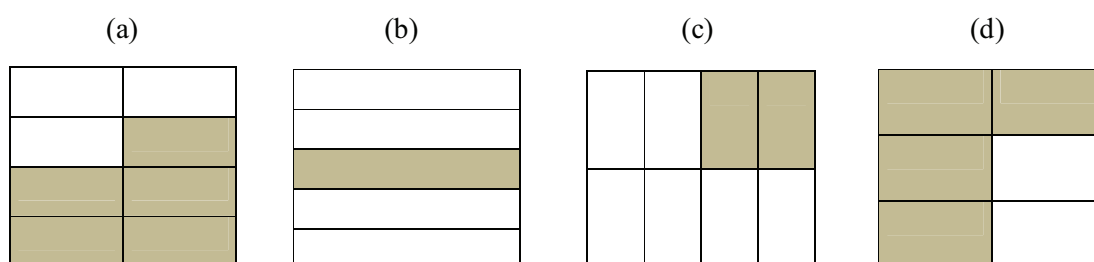
22) Marque a alternativa que corresponde a $\frac{1}{3}$.



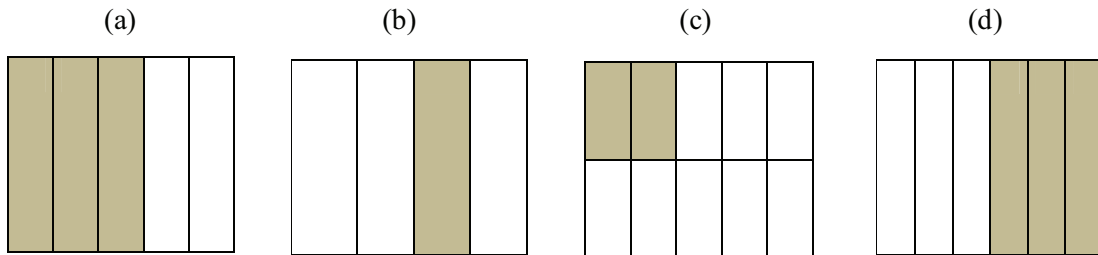
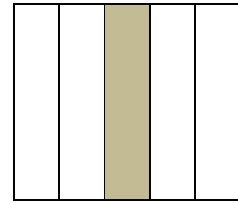
23) Marque a alternativa que corresponde a $\frac{1}{3}$.

- a) $\frac{4}{12}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{5}{20}$

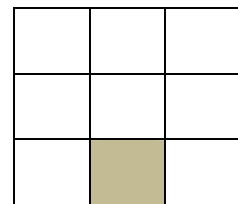
24) Marque a alternativa que corresponde a $\frac{1}{4}$.



25) Marque a alternativa que corresponde à parte sombreada na figura ao lado.

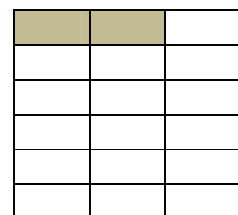


26) Marque a alternativa que corresponde à parte sombreada na figura ao lado.

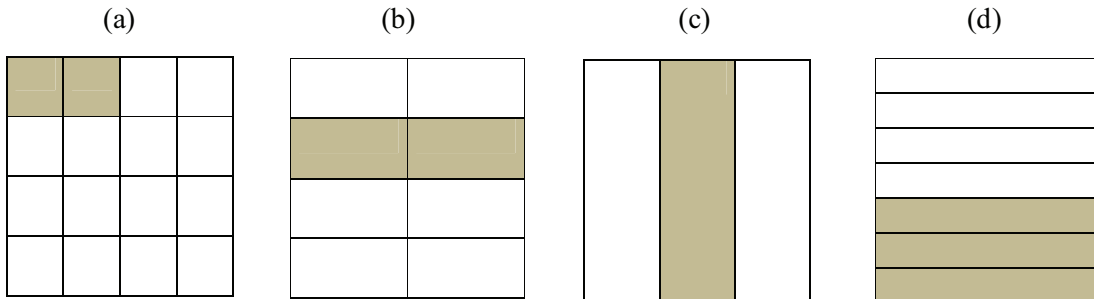


27) Marque a alternativa que corresponde às partes sombreadas na figura ao lado.

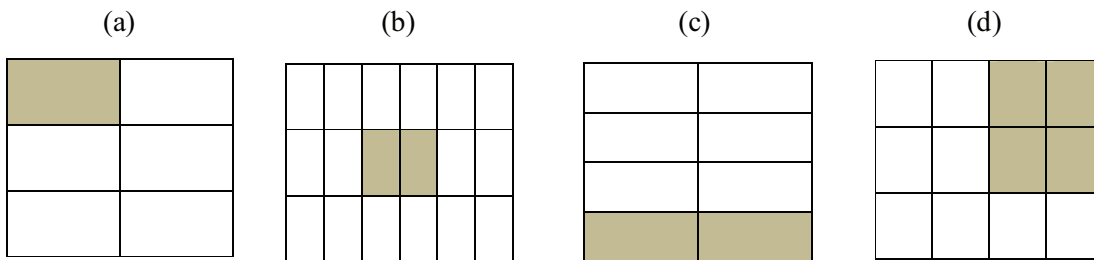
- a) $\frac{1}{8}$ b) $\frac{3}{20}$ c) $\frac{5}{27}$ d) $\frac{1}{9}$



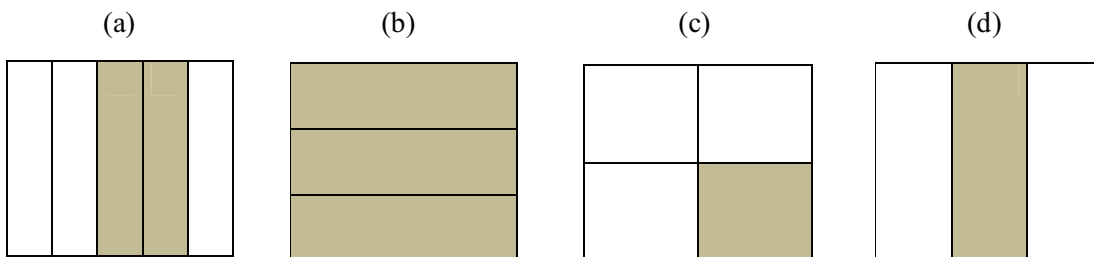
28) Marque a alternativa que corresponde a $\frac{1}{8}$.



29) Marque a alternativa que corresponde a $\frac{1}{9}$.



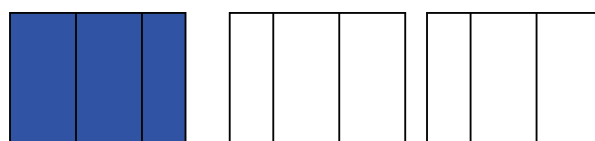
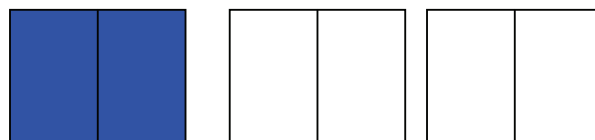
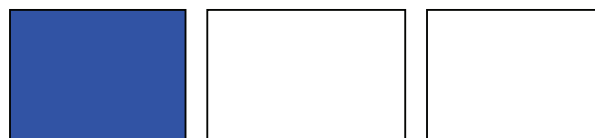
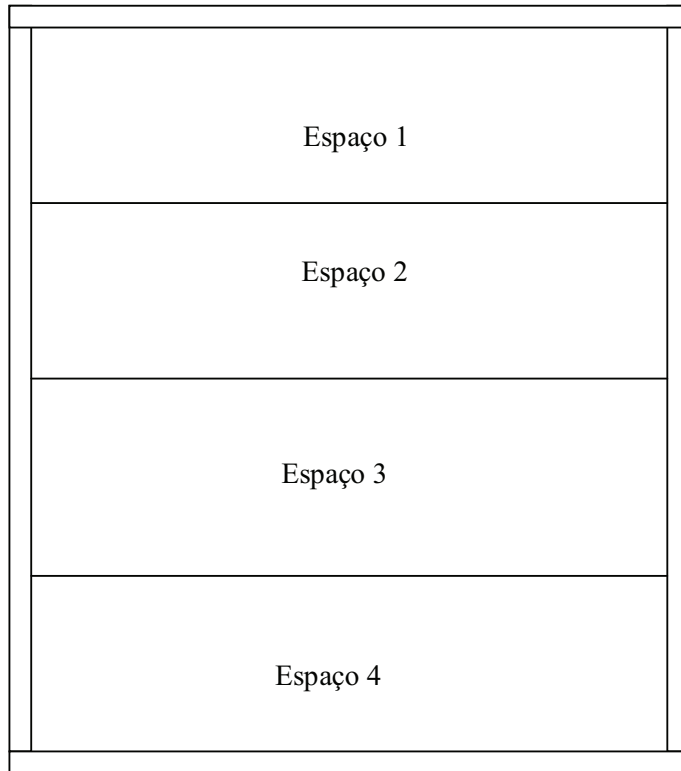
30) Marque a alternativa que corresponde a $\frac{1}{3}$.



Anexo E

Ilustração do tabuleiro e dos tocos usados nos treinos com material concreto
e de composição das frações.

Ilustração do tabuleiro usado nos treinos com material concreto e de composição das frações



Anexo F

Ilustração dos estímulos usados durante os treinos de composição e teste de nomeação.

