PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE GOIÁS

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
ESCOLA DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES E HUMANIDADES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO *STRICTO SENSU* EM EDUCAÇÃO

ALINE MOTA DE MESQUITA ASSIS

ATIVIDADE DE ESTUDO DO CONCEITO DE TRANSFORMAÇÃO LINEAR NA PERSPECTIVA DA TEORIA DO ENSINO DESENVOLVIMENTAL DE V. V. DAVYDOV

GOIÂNIA

2018

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE GOIÁS
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
ESCOLA DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES E HUMANIDADES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO *STRICTO SENSU* EM EDUCAÇÃO

ALINE MOTA DE MESQUITA ASSIS

ATIVIDADE DE ESTUDO DO CONCEITO DE TRANSFORMAÇÃO LINEAR NA PERSPECTIVA DA TEORIA DO ENSINO DESENVOLVIMENTAL DE V. V. DAVYDOV

Tese apresentada à Banca Examinadora de Defesa do Programa de Pós-Graduação em Educação da Pontifícia Universidade Católica de Goiás como requisito parcial para obtenção do título de Doutora em Educação, sob a orientação da Prof.ª Dr.ª Beatriz Aparecida Zanatta e coorientação do Prof. Dr. Duelci Aparecido de Freitas Vaz.
Linha de Pesquisa: Teorias da Educação e Processos Pedagógicos
Área de Concentração: Educação e Sociedade

GOIÂNIA

2018

A848a Assis, Aline Mota de Mesquita
Atividade de estudo do conceito de transformação linear na perspectiva da teoria do Ensino Desenvolvimental de V. V. Davydov. [manuscrito] : Aline Mota de Mesquita Assis.-- 2018.
235 f.; 30 cm

Texto em português com resumo em inglês
Tese (doutorado) - Pontifícia Universidade Católica de Goiás, Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Educação, Goiânia, 2018
Inclui referências, f. 171-179

1. Professores - Ensino desenvolvimental - Formação. 2. Educação - Álgebra linear - Estudo e ensino. 3. Matemática - Estudo e ensino – Formação de conceitos. 4. Educação - Teoria histórico-cultural. I.Zanatta, Beatriz Aparecida. II.Vaz, Duelci A. de F - (Duelci Aparecido de Freitas). III.Pontifícia Universidade Católica de Goiás. IV. Título.

CDU: 37.016:512(043)

ATIVIDADE DE ESTUDO DO CONCEITO DE TRANSFORMAÇÃO LINEAR NA PERSPECTIVA DA TEORIA DO ENSINO DESENVOLVIMENTAL DE V. V. DAVYDOV

Tese de Doutorado do Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Educação da Pontifícia Universidade Católica de Goiás, aprovada em 30 de agosto de 2018.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Beatriz Aparecida Zanatta / PUC Goiás (Presidente)

Duelci Aparecido de Freitas Vaz

Prof. Dr. Duelci Aparecido de Freitas Vaz / PUC Goiás (Coorientador)

Profa. Dra. Raquel Aparecida Marra da Madeira Freitas / PUC Goiás

Prof. Dr. José Carlos Libâneo / PUC Goiás

Prof. Dr. Wellington Lima Cedro / UFG

Prof. Dr. Glen Cezar Lemos / IFG

Prof. Dr. Made Júnior Miranda / PUC Goiás (Suplente)

Prof. Dr. Nilton Cezar Ferreira / IFG (Suplente)

À minha família:

Alex, Artur e Alisson

AGRADECIMENTOS

Ao meu Deus santo, justo e fiel, que sempre existiu e sempre existirá, que me guiou e conduziu por todo o caminho me suprindo com fé, esperança e paciência. A Ele seja toda a glória pelos séculos dos séculos, amém.

A minha família que tanto amo, meu esposo Alex que sempre me incentivou nessa caminhada; ao meu filho Artur que mesmo sendo uma criança tão pequena compreendeu meus momentos de renúncia em prol desta pesquisa e ao meu próximo filho, Alisson, que ainda nem chegou a este mundo e já me enche de força e alegria.

Aos meus pais Neuza e Divino que mesmo à distância me acompanharam e apoiaram, dando o suporte e o auxílio necessário sempre que precisei.

A minha irmã Taína e sua família, minha cunhada Sarah, minha sogra Maria Fátima e meu sogro Benedito por toda ajuda que dispensaram a mim e a minha família durante os momentos de aula e produção da tese.

A minha orientadora Prof.ª Dra. Beatriz Aparecida Zanatta e ao meu coorientador Prof. Duelci Aparecido de Freitas Vaz que tanto se empenharam pelo desenvolvimento desta pesquisa, compartilhando seus valiosos conhecimentos e experiências, compreendendo minhas limitações e me ajudando a crescer e a desenvolver. Vocês foram fundamentais em todo o processo de planejamento, execução e escrita desta pesquisa.

Aos professores integrantes da banca examinadora pela disponibilidade e atenção à leitura desta tese, contribuindo significativamente com ela: Dr. José Carlos Libâneo, Dra. Raquel Aparecida Marra da Madeira Freitas, Dr. Wellington Lima Cedro e Dr. Glen Cezar Lemos.

Aos professores integrantes do Programa de Pós-Graduação em Educação da Pontifícia Universidade Católica de Goiás que ministraram alguma disciplina a mim durante o curso, contribuindo com empenho para a minha formação.

Aos meus colegas do curso de Doutorado que serviram de apoio para a construção do conhecimento durante o período das disciplinas e me ensinaram com suas valiosas experiências no campo da educação.

Ao professor colaborador que não mediu esforços em dedicar seu tempo e empenho ao estudo de uma nova teoria de ensino, ao planejamento e à execução das aulas que constituíram a pesquisa de campo.

Aos sujeitos desta pesquisa que se dispuseram voluntariamente a participar de todo o processo com paciência e disposição, se empenhando para a aprendizagem de um novo conteúdo e de uma nova forma de pensar a Matemática.

Ao Instituto Federal de Goiás – Câmpus Goiânia – pela abertura e recepção desta pesquisa tornando-se a escola campo.

Ao Instituto Federal de Goiás enquanto instituição de ensino da qual sou docente e concedeu o afastamento integral de minhas atividades para a total dedicação a este curso.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Goiás (FAPEG) pelo apoio financeiro concedido.

A todos que me acompanharam desde a expectativa pela aprovação no processo seletivo e que contribuíram de alguma forma para a realização deste trabalho. Mesmo não tendo seus nomes listados, vocês têm meu sincero reconhecimento.

Pelo que Davi louvou ao Senhor perante a congregação toda e disse: Bendito és tu, Senhor, Deus de Israel, nosso pai, de eternidade em eternidade. Teu, Senhor, é o poder, a grandeza, a honra, a vitória e a majestade; porque teu é tudo quanto há nos céus e na terra; teu, Senhor, é o reino, e tu te exaltaste por chefe sobre todos. Riquezas e glória vêm de ti, tu dominas sobre tudo, na tua mão há força e poder; contigo está o engrandecer e a tudo dar força. Agora, pois, ó nosso Deus, graças te damos e louvamos o teu glorioso nome. Porque quem sou eu, e quem é o meu povo para que pudéssemos dar voluntariamente estas coisas? Porque tudo vem de ti, e das tuas mãos to damos. Porque somos estranhos diante de ti e peregrinos como todos os nossos pais; como a sombra são os nossos dias sobre a terra, e não temos permanência. (1 Crônicas 29: 10-15)

RESUMO

Este trabalho, inscrito na linha de pesquisa Teorias da Educação e Processos Pedagógicos, tem como principal foco investigativo o processo de ensino-aprendizagem do conceito algébrico de transformação linear, fundamentando-se na teoria do ensino desenvolvimental de V. V. Davydov. A questão que se buscou esclarecer foi: que repercussões teriam, no processo de formação de conceitos pelos alunos, o ensino do conceito de transformação linear fundamentado na teoria histórico-cultural, em específico, na teoria do ensino desenvolvimental de Davydov? Especificamente, objetiva-se: analisar a história do desenvolvimento lógico do conceito de transformação linear a fim de apreender as relações nele presentes e o tipo de movimento mental que ele contém para identificar as ações mentais a serem contempladas no planejamento e na condução da atividade de estudo; proceder à realização da atividade de estudo mediante o desenvolvimento de um experimento didático formativo; apreender, no decorrer processo de ensino-aprendizagem do conceito de transformação linear, elementos que indicam mudanças qualitativas e quantitativas no desenvolvimento do pensamento do aluno. Para tanto, realizou-se uma pesquisa que consistiu em um experimento de ensino, baseado nos pressupostos de Davydov, em uma turma de Álgebra Linear do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – Câmpus Goiânia, desenvolvido com quatorze alunos do curso de Bacharelado em Engenharia Elétrica e seguindo a estrutura da atividade de estudo proposta por Davydov. Os procedimentos para a coleta dos dados foram: roteiro de entrevista semiestruturada com o professor, questionário sociocultural dos alunos, instrumento de avaliação diagnóstica, plano de ensino experimental e roteiro de observação direta não participante. A análise dos dados enfoca o processo de formação de conceitos e os elementos intervenientes nesse processo a partir das seguintes categorias: transformação dos dados da tarefa na condução da identificação do princípio geral do conceito de transformação linear; da modelação à transformação de um modelo para o conceito de transformação linear e o uso do conceito de transformação linear como ferramenta mental. Os resultados obtidos revelaram: motivação dos alunos durante o ensino experimental; compreensão dos conceitos algébricos, após a análise lógico-histórica, pela maioria dos sujeitos da pesquisa; indícios de progresso da zona de desenvolvimento proximal dos alunos no que tange aos conceitos de matriz, função e espaço vetorial, considerados aqui como os pré-requisitos para a formação do conceito de transformação linear, desenvolvendo a capacidade de pensar a Matemática de acordo com a forma de pensar desta ciência; indícios de mudanças qualitativas no desenvolvimento do pensamento teórico dos sujeitos da pesquisa quanto ao conceito de transformação linear. A principal contribuição desta pesquisa consistiu em mostrar um caminho alternativo de organização do ensino do conceito de transformação linear, consequentemente, da Álgebra Linear. Acredita-se que, mesmo com as contradições presentes na estrutura curricular dos cursos das áreas de Ciências Exatas e da Terra e Engenharias, bem como na formação escolar dos alunos, é possível realizar um ensino embasado na teoria do ensino desenvolvimental e contribuir para a formação do pensamento teórico da maioria dos alunos.

Palavras-chave: Ensino desenvolvimental. Ensino de Álgebra Linear. Formação de conceitos matemáticos. Teoria histórico-cultural. Transformação Linear.

ABSTRACT

This work falls into the category of research into Theories of Education and Pedagogical Processes, and has as its main investigative focus, the teaching-learning process according to the algebraic concept of linear transformation, based on V.V. Davydov´s theory of developmental teaching. The question it seeks to clarify is : what are the repercussions for teaching the concept of linear transformation, based on the historical-cultural theory, in specific, Davydov's developmental theory, in the process of concept formation by students? Specifically, it aims to analyze the history of the logical development of the concept of linear transformation in order to grasp the relations present in it and the forms of mental movement displayed, towards identifying the mental actions to be contemplated in the planning and conduct of the activity of study; to carry out the study activity through the development of a didactic formation experiment to understand, in the course of the teaching-learning process of the concept of linear transformation, elements that indicate qualitative and quantitative changes in the development of student thinking. To this end research was carried out that consisted of a teaching experiment in a class of Linear Algebra at the Federal Institute of Education, Science and Technology of Goiás - Câmpus Goiânia, based on the assumptions of Davydov. This was completed with fourteen students of the Bachelor in Electrical Engineering graduate course and done so according to the structure of the study activity proposed by Davydov. The procedures for collecting the data were as follows: a written record of semistructured interviews with the teacher, socio-cultural questionnaires completed by the students, a diagnostic instrument for evaluation, an experimental teaching plan and the notes from non-participant direct observers. Data analysis focuses on the process of concept formation and the elements involved in this process from the following categories: transformation of task data into the identification of the general principle of the concept of linear transformation; from modeling to transformation of a model to the concept of linear transformation and the use of the concept of linear transformation as a mental tool. The results showed: the motivation of students during the experimental teaching; an understanding of algebraic concepts after logical-historical analysis by the majority of the research subjects; indicators of the zone of proximal development of the students in relation to the concepts of matrix, function and vector space - considered here as the prerequisites for the formation of the concept of linear transformation, developing the ability to think Mathematically according to the logic of this science; evidence of qualitative changes in the development of theoretical thinking of the research subjects, again, regarding the concept of linear transformation. The main contribution of this research was to show an alternative way of organizing the teaching of the concept of linear transformation, and consequently Linear Algebra. It is believed that even with the contradictions present in the curricular structure of the courses in the areas of the exact and world sciences and in engineering, as well as in the students' school formation, it is possible to carry out teaching based on the theory of developmental teaching and contribute to the theoretical thought formation in the majority of students.

Keywords: Developmental teaching. Teaching Linear Algebra. Formation of mathematical concepts. Historical-cultural theory. Linear transformation.

LISTA DE QUADROS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Este estudo tem como foco investigativo o processo de ensino-aprendizagem do conceito de transformação linear, um conceito algébrico, contido na ementa da disciplina Álgebra Linear, em cursos da Educação Superior, fundamentada nos pressupostos teóricos da teoria-histórico-cultural, em específico, da teoria do ensino desenvolvimental de V. V. Davydov[1]. O interesse pela investigação do ensino-aprendizagem do conceito de transformação linear está diretamente relacionado com a prática profissional da pesquisadora como professora da disciplina Álgebra Linear no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – Câmpus Goiânia, bem como com as conversas com outros professores da disciplina, onde se constatou a enorme dificuldade enfrentada pelos alunos em aprender seus conceitos, além da dificuldade dos professores em encontrar caminhos possíveis para resolver este problema.

Alguns caminhos foram percorridos pela pesquisadora, como trabalhar com diferentes representações matemáticas dos conceitos, mostrando, por exemplo, a representação algébrica e geométrica do mesmo conceito e trabalhar com aplicações dos conteúdos, mostrando onde é possível utilizar os conceitos, mas todas as possibilidades deixaram falhas significativas na aprendizagem dos conteúdos. Ao fazer uma análise da situação, a pesquisadora verificou que o que lhe faltava era uma base teórica que respaldasse sua metodologia de ensino, pois mesmo tendo uma graduação em Licenciatura em Matemática, os demais cursos realizados pela pesquisadora, Especialização e Mestrado, se restringiram ao campo específico da ciência Matemática.

Foi quando surgiu a necessidade de voltar seus estudos em nível de doutorado para questões didáticas que lhe proporcionassem o amparo e o conhecimento necessários para a melhoria do seu trabalho, consequentemente, do desenvolvimento de suas pesquisas. Este estudo situa-se, portanto, no campo da metodologia de ensino de Álgebra Linear com a agregação de contribuições da psicologia histórico-cultural e da didática para tratar de um modo específico de organização do ensino: o ensino desenvolvimental proposto por V. V. Davydov.

A Álgebra Linear é um campo da Matemática que tem por finalidade estudar os espaços vetoriais e as transformações lineares entre esses espaços, relacionando esses conteúdos à teoria

[1] Neste trabalho, a forma adotada para grafar o nome deste estudioso será Davydov, salvo as referências bibliográficas que terão a grafia utilizada na obra em questão.

matricial. Nos últimos anos, com a evolução da ciência, ela se tornou parte essencial dos conhecimentos fundamentais exigidos dos matemáticos, engenheiros, físicos e outros cientistas que trabalham com tecnologias, estando ligada a diversos domínios do conhecimento matemático, como, por exemplo, a equações diferenciais, geometria, sistemas de equações lineares, análise etc., domínios estes diretamente necessários aos cursos das áreas de Ciências Exatas e da Terra e Engenharias, sejam nas disciplinas de Matemática ou nas disciplinas específicas de cada curso. Exemplificando, a Álgebra Linear está presente em estudos sobre previsões climáticas, previsões genéticas, reações químicas, circuitos elétricos, vibrações mecânicas, mecânica quântica, estruturas metálicas, crescimento populacional, óptica, teorias da informação e comunicação etc. Várias destas aplicações, além de outras, podem ser encontradas em Anton e Rorres (2001).

Devido a esse contexto, pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem de Álgebra Linear têm tomado lugar significativo nos estudos em Educação Matemática. Pesquisadores como Cardoso (2014), Coimbra (2008), Dorier (1995; 2002), França (2007), Furtado (2010), Oliveira (2005), Padredi (2003) e Uhlig (2003) estão preocupados com as metodologias utilizadas e com a aprendizagem significativa, bem como com os motivos que geram os altos índices de repetência e desistência nessa disciplina. Entretanto, segundo Furtado e Cabral (2011), tal preocupação só surgiu recentemente nos anos 1990 e de forma bem tímida, fato que podemos constatar no trabalho de Celestino (2000).

Uma dificuldade enfrentada no ensino-aprendizagem de Álgebra Linear surge no momento de contextualização dos conteúdos. Tal dificuldade é decorrente da necessidade de conhecimento aprofundado, pelo aluno, das disciplinas específicas do curso, uma vez que ela está inserida nos primeiros períodos das grades curriculares destes cursos, momento em que o aluno ainda não adquiriu conhecimentos necessários para que possa utilizá-los em situações práticas.

Outra dificuldade presente nesse processo surge já no início do curso quando, ao exemplificar espaços vetoriais, o professor utiliza o $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)\ ;\ x_i \text{ é } um\ número\ real\ para\ todo\ i,\ com\ 1 \leq i \leq n\}$) como generalização do $\mathbb{R}^2$ (espaço em duas dimensões) e do $\mathbb{R}^3$ (espaço em três dimensões) e isso ocorre mesmo dando interpretações geométricas para esses dois espaços e construindo de forma dedutiva o conjunto $\mathbb{R}^n$. Entretanto, o problema se agrava quando se chega à transformação linear, uma vez que, até o momento, o aluno só trabalhou com funções das quais era possível esboçar gráficos para facilitar a compreensão, fato que nem sempre ocorre quando os espaços não possuem interpretação geométrica.

Furtado e Cabral (2011) ao realizarem uma pesquisa empírica qualitativa para investigar de que forma os conceitos[2] básicos de Álgebra Linear eram assimilados pelos alunos, constataram que a maior dificuldade apontada por eles era a abstração presente no curso de Álgebra Linear, 65% dos alunos apontaram isso explicitamente e apenas 29% disseram que a falta de aplicações era um dificultador. O que mais surpreendeu foi o fato de que os alunos não souberam reconhecer uma transformação linear. Esta constatação revela um desafio para a organização e a condução do processo de ensino-aprendizagem dessa disciplina, uma vez que, como os conceitos não estão sendo apropriados pelos alunos, eles não desenvolvem processos mentais que conduzem a uma síntese do objeto algébrico em estudo.

Nas publicações que abordam o tema da formação de conceitos matemáticos na perspectiva da teoria histórico-cultural e na teoria do ensino desenvolvimental, é também recorrente o reconhecimento de que o ensino de Matemática não tem conseguido contribuir para a solução de importantes problemas ligados à aprendizagem. Isso ocorre porque os conteúdos e os métodos de ensino se orientam, predominantemente, para a formação do pensamento empírico, baseado na lógica formal, que, embora importante, acaba sendo insuficiente, porque deixa de promover a formação do pensamento teórico dos alunos.

Em busca de estudos sobre a metodologia de ensino de Álgebra Linear, no levantamento realizado junto ao Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES, à Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD) e aos Anais do Simpósio Internacional de Pesquisas em Educação Matemática – SIPEM, da primeira à sexta edição, dentro das publicações do Grupo de Trabalho Educação Matemática no Ensino Superior (GT-04),[3] foram identificadas oito pesquisas, sendo três dissertações e cinco teses, relacionadas à metodologia de ensino da disciplina Álgebra Linear (Apêndice U). O que se constatou foi uma diversidade das abordagens teóricas que tratam de um conteúdo específico da Álgebra Linear ou da disciplina como um todo. O fato de 50% das pesquisas priorizarem o objeto transformação linear configura o reconhecimento desse objeto enquanto ponto central, do qual se originam e para o qual os demais conceitos dessa disciplina convergem.

Em relação à fundamentação teórica-conceitual, destaca-se, dentre essas pesquisas, o predomínio da Teoria dos Registros de Representações Semióticas. Seis trabalhos, ou seja, 75% das pesquisas correspondem a esta abordagem. O que demonstra preocupação com a

[2] Para Furtado e Cabral (2011), conceitos são as informações que se espera que o aluno saiba e que são colocadas em uma rede de relações com outras informações já adquiridas.
[3]Especificações sobre o GT-04 da SBEM podem ser encontradas no link: http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/index.php/grupo-de-trabalho/gt/gt-04.

compreensão e com o avanço qualitativo do processo de ensino-aprendizagem em contraposição às abordagens tradicionais do ensino-aprendizagem de Álgebra Linear. As demais pesquisas fundamentam-se na Sequência Fedathi, Alavanca Meta, Modelo Teórico dos Campos Semânticos, Teoria Cognitiva da Aprendizagem Multimídia, Teoria dos Campos Conceituais e Teoria das Situações Didáticas, sendo que, em alguns trabalhos, elas são utilizadas em conjunto com a Teoria dos Registros de Representações Semióticas, exceto nas as pesquisas de Fontenelle (2013) e Silva (2015).

Em relação às propostas de ensino apresentadas pelos autores destas pesquisas, verificou-se que, ao buscarem na teoria cognitiva, particularmente na perspectiva de cunho construtivista, cujo marco explicativo para o processo de ensino-aprendizagem fundamenta-se em diversas correntes psicológicas como a psicologia genética, a teoria sociointeracionista e a atividade significativa, ou seja, em Piaget e Vygotsky[4], elas têm como foco o aluno e seus processos de aprendizagem. Esses estudos investigam o como aprender, a importância da atividade mental construtiva do aluno no processo de aquisição do conhecimento, em oposição à unidade ensino-aprendizagem, conteúdo e forma, processo e produto, tal como postulam Vygotsky, Davydov e seus seguidores.

Nessa perspectiva, as pesquisas, ainda que fundamentadas em referenciais teóricos distintos, destacam a importância da atividade construtiva do aluno no processo de aquisição do conhecimento, sendo expressiva a produção fundamentada na abordagem piagetiana. Na produção analisada é comum a referência a termos como interação social, linguagem, uso de símbolos, interiorização, atividade, atividade cognitiva, aprendizagem de conceitos e mediação. O que expressa, de acordo com a perspectiva construtivista, a complementariedade de princípios explicativos do desenvolvimento e da aprendizagem humana como grande síntese de teorias do campo da psicologia, não só diferentes, mas também opostas, como as de Piaget e Vygotsky. Todavia, é questionável uma complementariedade entre a teoria de Piaget e a teoria histórico-cultural, uma vez que ambas partem de matrizes do conhecimento distintas.

Para Piaget (1983, p. 224) a transmissão social do conhecimento, embora seja um dos fatores do desenvolvimento, não é suficiente para produzi-lo. Segundo o autor, "[...] para que uma transmissão seja possível entre o adulto e a criança ou entre o meio social e a criança educada, é necessário haver assimilação pela criança do que lhe procuram inculcar do exterior". Nessa perspectiva, as discussões apresentadas nas teses e dissertações levantadas, que se fundamentaram na epistemologia genética, partiram do pressuposto de que a ação do sujeito

[4] Neste trabalho, a forma adotada para grafar o nome deste estudioso será Vygotsky, salvo as referências bibliográficas que terão a grafia utilizada na obra em questão.

sobre o objeto é a força motriz a partir da qual se originam sucessivamente as estruturas cognitivas responsáveis pelo desenvolvimento humano. Diferentemente, Vygotsky considera o meio externo como conjunto de relações sociais e culturais, em um contexto histórico, como base do desenvolvimento mental do indivíduo. Para ele, o social é condição para o desenvolvimento cognitivo do indivíduo, condição para a existência da humanidade, porém, não se limita às relações entre os homens, pois abrange toda a história de desenvolvimento do ser humano e seu processo de apropriação da história e da cultura e suas transformações.

Em relação à metodologia de ensino, na análise das teses e dissertações (Apêndice U), verificou-se que 87,5% das pesquisas recorreram às tecnologias para a aprendizagem de conceitos, seja por meio de vídeos digitais ou *softwares* de geometria dinâmica. Sem dúvida, o uso das tecnologias é um instrumento importante utilizado pelo professor para mediar o processo de formação de conceito pelo aluno. Todavia, com base nos autores e nas pesquisas apoiadas na teoria histórico-cultural, consideramos que o simples uso da tecnologia como ponto de partida para que os alunos percebam os objetos e expliquem os resultados de suas observações, pelos meios mais diversos de representações que surgem da ação do sujeito sobre o objeto de estudo, não é suficiente para impulsionar o desenvolvimento do pensamento teórico, cuja base é seu conteúdo, do qual derivam os métodos para organizar o ensino.

O pensamento teórico não opera com representações gerais, mas com os próprios conceitos, que "[...] reproduzem o desenvolvimento do processo formativo do sistema, da integridade, do concreto e somente dentro desse processo revela as peculiaridades e conexões dos objetos singulares" (DAVÝDOV, 1982, p. 308-309, tradução nossa). É questionável, portanto, o entendimento de que a inserção da tecnologia no ensino, vista apenas como um elemento do conjunto de procedimentos e técnicas de ensino, gera uma maior interação e motivação nos alunos e desperta o interesse pela aprendizagem. Isso se verifica em relação à metodologia de ensino da Álgebra Linear, que se aproxima do modo como a lógica formal assume a relação entre a abstração, a generalização e os conceitos e, por conseguinte, a formação do pensamento empírico.

A resolução de problemas, como orientação metodológica, também se fez presente nos trabalhos que se ocuparam em mostrar as contribuições dessa estratégia no planejamento dos estudos dos conceitos da disciplina Álgebra Linear. As pesquisas indicam que as situações-problema foram contextualizadas a partir do curso em que a disciplina está inserida e que elas favorecem a aprendizagem dos alunos e viabilizam, por meio da participação ativa na discussão das soluções encontradas ou verificando a formalização do conteúdo feita pelo professor, condições para os estudantes construírem o significado sobre o objeto em estudo. Contudo, o fato dessa proposta priorizar o lado externo, periférico, da aprendizagem do aluno, impossibilita estabelecer as conexões internas ou nexos conceituais da Álgebra linear no processo de elaboração do pensamento dos alunos. Restringir "[...] a aprendizagem apenas à participação em interações sociais não é suficiente para essa interiorização, porque a aprendizagem envolve uma transformação interior, uma mudança qualitativa nos processos cognitivos, requerendo uma atividade psicológica interna" (LIBÂNEO, 2015, p. 6). Ela tem uma base social e histórica em que "um processo interpessoal é transformado num processo intrapessoal" (VYGOTSKY, 1991, p. 41).

Nesse sentido, a posição defendida nesta pesquisa é a de que, ao ensinar por conceitos, o professor deve planejar "[...] condições de aprendizagem para que os alunos trilhem mentalmente o caminho investigativo que deu existência àquele conteúdo, ajudando-os a conhecerem o conceito em sua gênese e fatores condicionantes" (FREITAS, 2010, p. 12). O problema consiste, portanto, "[...] em algo a ser investigado para que se descubra, mais que sua solução, sua gênese" (FREITAS, 2010, p. 12). Nesse processo, "[...] o que os alunos precisam descobrir, não é a resolução imediata do problema, mas as condições de origem do conceito que estão aprendendo, o qual, inclusive, servirá para a resolução, mas servirá sobremaneira, para que adquiram um modo de pensamento" (FREITAS, 2010, p. 13). Dessa forma, há êxito no ensino por problemas quanto à promoção do desenvolvimento mental dos alunos e à sua contribuição para desenvolver as personalidades deles como sujeitos ativos.

Considerando que a formação de conceitos científicos, como formularam Vigotski (2001) e Davydov (1988), está na base do processo de desenvolvimento do pensamento dos alunos, permitindo ir além de uma aprendizagem com dimensão puramente quantitativa para alcançar a dimensão qualitativa, é relevante focalizar o problema da formação de conceitos, especificamente do conceito de transformação linear. Essa opção justifica-se por algumas razões teóricas e práticas. Primeiramente, pelo fato da teoria histórico-cultural, especificamente a teoria do ensino desenvolvimental formulada por Davydov, considerar que o processo de ensino-aprendizagem envolve a apropriação pelo indivíduo de conhecimentos e modos de ação acumulados na experiência social e histórica da humanidade. O que implica, segundo Vygotski (1991), a transição de conhecimentos do plano social externo (atividade social coletiva) para o plano individual interno, propiciando, por conseguinte, o desenvolvimento de processos internos de interiorização, em que o social se incorpora no individual.

A dinâmica deste processo envolve a formação de conceitos teóricos para além dos conceitos empíricos, cuja peculiaridade consiste em promover, por meio do ensino, o desenvolvimento do pensamento dos alunos, introduzindo-os no domínio do caráter abstrato e generalizante dos saberes, de modo que aprendem formando abstrações, generalizações e conceitos, que constituem a base do processo de desenvolvimento do pensamento teórico dos alunos. Nesse sentido, aponta caminhos para o professor organizar a atividade de ensino como processo que contribui para que o aluno forme em sua mente os conceitos relacionados ao objeto de estudo que ele aprende. O que, conforme mencionado anteriormente, constitui um desafio para o processo de ensino-aprendizagem de Álgebra Linear, especificamente na aprendizagem do conceito de transformação linear.

Em segundo lugar, são inexistentes pesquisas sobre a formação do conceito científico de transformação linear numa perspectiva dialética, embora sejam significativos os estudos sobre conceitos da Álgebra Linear, como sistema linear, base e dimensão, fundamentados em perspectivas teórico-metodológicas que pouco têm contribuído para, efetivamente, se refletir em mudanças nas práticas pedagógicas e, consequentemente, no processo de aprendizagem dos alunos. Em razão disso, se faz necessário investigar, problematizar e desenvolver estudos que contribuam para uma reflexão mais crítica acerca da formação de conceitos. A escolha pelo conceito de transformação linear se deu pelo fato de que ele, considerado em uma rede de conceitos, ocupa lugar central, sendo, portanto, essencial para a construção e estruturação de outros conceitos dentro da própria Álgebra Linear, bem como em outras áreas da Matemática e fora da Matemática.

Entende-se que a teoria do ensino desenvolvimental em muito pode contribuir para organizar e viabilizar o ensino de conceitos da Álgebra Linear, especificamente do conceito de transformação linear e ajudar os alunos a desenvolver o pensamento cognitivo, por meio da apropriação dos conteúdos teóricos, de modo a formarem o conceito teórico desse objeto para lidar nas diferentes situações concretas da vida prática. Assim, a presente investigação busca lançar um foco sobre o problema da formação de conceitos, privilegiando, para isso, o contexto concreto de uma sala de aula do curso de Bacharelado em Engenharia Elétrica do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – Câmpus Goiânia.

Ressalta-se, então, a problemática da relação entre o modo de organização do ensino do conceito de transformação linear e a formação do pensamento teórico pelos alunos. Essa problemática, por sua vez, aponta a necessidade de esclarecimento para a seguinte questão: que repercussões teriam, no processo de formação de conceitos pelos alunos, o ensino do conceito de transformação linear fundamentado na teoria histórico-cultural, em específico, na teoria do ensino desenvolvimental de Davydov?

Norteada por esta questão, a pesquisa partiu do pressuposto de que a teoria do ensino desenvolvimental pode ajudar a desenvolver o pensamento teórico acerca do conceito de transformação linear a partir dos conceitos teóricos fundamentais da Álgebra Linear, porém, considerando que, concretamente, o curso de Bacharelado em Engenharia Elétrica e a formação do professor colaborador não estão orientados nesta perspectiva. Assim, a práxis desse tipo de ensino pode revelar contradições.

Outra questão a ser considerada é que os estudantes têm, em geral, ainda que se possa verificar a presença de outras formas de ensino, uma vida escolar marcada pelo ensino fundamentado na lógica formal. Chegam ao curso de graduação habituados a um método de pensamento calcado na definição, memorização e reprodução mecânica de conteúdos e conceitos matemáticos.

Assim, esta pesquisa teve como objetivo principal compreender e analisar as contribuições e os desafios da teoria histórico-cultural, em específico, da teoria do ensino desenvolvimental, para o ensino de Álgebra Linear e sua aplicação prática, tendo em vista a aprendizagem do conceito de transformação linear por alunos do curso de Bacharelado em Engenharia Elétrica do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás (IFG) – Câmpus Goiânia. Esta meta se desdobra nos seguintes objetivos específicos: analisar a história do desenvolvimento lógico do conceito de transformação linear a fim de apreender as relações nele presentes e o tipo de movimento mental que ele contém para identificar as ações mentais a serem contempladas no planejamento e na condução da atividade de estudo; apreender, no decorrer processo de ensino-aprendizagem do conceito transformação linear, elementos que indicam mudanças qualitativas e quantitativas no desenvolvimento do pensamento do aluno; demostrar as peculiaridades da teoria do ensino desenvolvimental para organização do ensino do conceito transformação linear e sua contribuição para o desenvolvimento intelectual dos alunos.

A presente pesquisa orienta-se por pressupostos da teoria histórico-cultural a partir de L. S. Vygotsky e seus seguidores, particularmente da teoria do ensino desenvolvimental formulada por V. V. Davydov. Dentre os conceitos básicos destas abordagens foram priorizados: ensino-aprendizagem, atividade de estudo, zona de desenvolvimento proximal, mediação, funções psicológicas superiores, pensamento empírico, pensamento teórico e formação de conceitos.

Para investigar a aprendizagem do conceito transformação linear foi realizado um experimento didático formativo de acordo com os princípios da teoria do ensino desenvolvimental. O experimento formativo é uma intervenção pedagógico-didática por meio de um plano intencional que visa interferir nas ações mentais dos alunos e provocar mudanças em seus níveis de desenvolvimento mental (DAVYDOV, 1988). Ele consiste na experimentação teórica e metodológica do processo de ensino-aprendizagem no contexto da sala de aula, especificamente, na formação do conceito de transformação linear. Foi realizado por um professor colaborador com formação específica em Matemática que ministrava a disciplina de Álgebra Linear no curso de Bacharelado em Engenharia Elétrica do IFG – Câmpus Goiânia.

Para a coleta de dados, recorreu-se à avaliação diagnóstica, à observação das aulas, à gravação das aulas em áudio e vídeo, às atividades realizadas pelos alunos e à entrevista com o professor. O objetivo da avaliação diagnóstica foi identificar a zona de desenvolvimento proximal dos alunos no que tange aos conteúdos de matriz, função e espaço vetorial, oferecendo subsídios para a elaboração do planejamento de ensino e para a execução das aulas. A entrevista visou delinear o perfil do professor, apreendendo o seu entendimento acerca da formação de conceitos matemáticos e dos problemas do ensino de Álgebra Linear.

O plano de ensino sobre o conceito de transformação linear foi organizado, com a participação do professor colaborador, com base nas orientações propostas por Davydov (1988) para a realização das aulas. A observação das aulas teve como foco o seguinte roteiro: contexto da sala de aula, ações de ensino do professor e ações de aprendizagem dos alunos. Teve como referência categorias e conceitos tanto da teoria histórico-cultural, quanto da teoria do ensino desenvolvimental, tais como: interação, mediação, zona de desenvolvimento proximal, interiorização, apropriação, atividade de aprendizagem, formação do pensamento empírico e do pensamento teórico, desenvolvimento cognitivo e formação de conceitos. A observação *in loco* permitiu uma ampla variedade de descobertas, de percepções, de representações, de sentimentos e de aprendizagens a respeito do objeto de investigação.

A análise enfocou o processo de formação de conceitos, os elementos intervenientes nesse processo e as categorias de análise organizadas a partir das ações de aprendizagem de Davydov (1988): transformação dos dados da tarefa na condução da identificação do princípio geral do conceito de transformação linear; da modelação à transformação de um modelo para o conceito de transformação linear; o uso do conceito de transformação linear como ferramenta mental. Buscou-se, com esta pesquisa, além da apropriação e da interiorização do conceito de transformação linear por parte dos alunos, oferecer uma análise com elementos que auxiliem na compreensão das fragilidades do ensino deste conceito e fornecer elementos que sirvam como referência aos professores de Matemática que buscam promover uma melhor aprendizagem de seus alunos, particularmente a aprendizagem do conceito de transformação linear.

Desta forma, o texto da presente tese, pautada na teoria histórico-cultural, enfocando os pressupostos davydovianos para um ensino que priorize o desenvolvimento integral do aluno, está organizado para conter, além da introdução e das considerações finais, quatro capítulos estruturados conforme a discriminação a seguir. O primeiro capítulo aborda o lógico-histórico do conceito de transformação linear, seguido de uma breve delineação da trajetória da disciplina Álgebra Linear. Inicia destacando a formação desta disciplina, seguindo uma discussão sobre seus elementos constitutivos, situando o conceito de transformação linear em meio aos demais conceitos que a compõem. Finaliza com a discussão sobre o lógico-histórico no processo de ensino-aprendizagem, seguida da apresentação do lógico-histórico dos conceitos que integram a disciplina Álgebra Linear.

No segundo capítulo, partindo do pressuposto teórico de que a finalidade do ensino da Álgebra Linear é a formação do pensamento teórico dos estudantes, apresenta-se as contribuições de Vygotsky, Davydov e Kopnin, necessárias à construção do objeto de estudo e ao alcance dos objetivos da pesquisa, apresentando as colaborações desses autores sobre a formação de conceitos e sobre a importância e a necessidade de valorizar a dimensão história dos conteúdos matemáticos em sala de aula.

O terceiro capítulo apresenta o lócus, os resultados gerais da avaliação diagnóstica e a organização do experimento didático formativo, o qual se realizou no período de janeiro e fevereiro de 2017, no Instituto Federal de Goiás – Câmpus Goiânia, em uma turma de Álgebra Linear do curso de Bacharelado em Engenharia Elétrica. Inicia com uma breve descrição da instituição e do curso em que a pesquisa foi realizada, seguida da apresentação do perfil do professor colaborador, enfatizando sua formação, experiência docente e o modo de pensar o ensino de Matemática e de Álgebra Linear, em específico, e a contextualização dos sujeitos da pesquisa nos seus aspectos sociocultural e educacional que interferem diretamente no processo de ensino-aprendizagem. Em seguida, expõe a análise da avaliação diagnóstica aplicada com o intuito de identificar a zona de desenvolvimento proximal dos alunos e estabelecer as bases reais do desenvolvimento intelectual que amparará o desenvolvimento do experimento didático formativo. Por último, aborda a organização do ensino do conceito de transformação linear utilizado no experimento didático, descriminando o plano de ensino, sua estruturação e fundamentação teórica, seguido de um detalhamento dos procedimentos metodológicos das ações expressas por Davydov (1988) como sendo elementos constitutivos da tarefa de aprendizagem a serem cumpridas pelos alunos.

No quarto e último capítulo, encontra-se a descrição aprofundada e a análise do processo de ensino-aprendizagem do conceito de transformação linear para alunos do curso de Bacharelado em Engenharia Elétrica do IFG – Câmpus Goiânia, tendo como fundamento teórico-metodológico a teoria do ensino desenvolvimental. A análise dos dados da pesquisa foi orientada pelas seguintes categorias: transformação dos dados da tarefa na condução da identificação do princípio geral do conceito de transformação linear; da modelação à transformação de um modelo para o conceito de transformação linear; o uso do conceito de transformação linear como ferramenta mental. Estas categorias foram analisadas destacando os momentos do experimento que mostram a ascensão do pensamento do aluno indo do abstrato ao concreto, com a formação do conceito de transformação linear, indicando os indícios de formação e desenvolvimento do pensamento teórico, bem como do pensamento matemático dos alunos.

1 O LÓGICO-HISTÓRICO DO CONCEITO DE TRANSFORMAÇÃO LINEAR

Na atividade de ensino, particularmente de Álgebra Linear, o lógico-histórico tem como principal função auxiliar o pensamento, tanto daquele que ensina quanto daquele que aprende, a movimentar-se no sentido de encontrar as verdades que são relativas, porque são definidas e redefinidas, continuamente, a partir de definibilidades próprias de cada conceito. A história, com suas várias vertentes historiográficas, assume o papel de elo entre a causalidade dos fatos e a possibilidade de criação de novas definibilidades do conceito que permitam compreender a realidade estudada.

Quando se fala em inserir a história do objeto no processo de ensino-aprendizagem dele, não se trata da sua história puramente factual com o intuito de apenas saber o que se passou até chegar à constituição de determinado objeto, como uma simples acumulação de fatos históricos, mas como uma fonte de diálogo que possibilite ligar o presente ao passado, constituindo uma história segundo o olhar daquele que a faz, incorporando novas fontes e vozes a esse diálogo e tornando conexo o que antes parecia desconexo e incomensurável. Destaca-se, nesse sentido, a contribuição de autores como Kopnin (1978), Vygotski (1991) e Davydov (1988, 1988a), que buscam compreender o conceito como desdobramento da história, tendo em vista captar elementos que permitam apreender as formas de pensamento, de linguagem e o sistema de conexões que geram o conceito, a saber, a sua essência. Esses autores afirmam que o lógico, isto é, a essência de determinado conhecimento se constitui na história e exige o conhecimento da história desse objeto. Kopnin (1978, p. 183-184, grifos do autor) escreve:

> Por histórico subentende-se o processo de mudança do objeto, as etapas de seu surgimento e desenvolvimento. O histórico atua como objeto do pensamento, o reflexo do histórico, como conteúdo. O pensamento visa à reprodução do processo histórico real em toda a sua objetividade, complexidade e contrariedade. O lógico é o meio através do qual o pensamento realiza essa tarefa, mas é o reflexo do histórico em forma teórica, vale dizer, é a reprodução da essência do objeto e da história do seu desenvolvimento no sistema de abstrações. O histórico é primário em relação ao lógico, a lógica reflete os principais períodos da história. O pensamento não deve simplesmente fotografar o processo histórico real com todas as suas casualidades, ziguezagues e desvios. O pensamento não é obrigado a seguir cegamente o movimento do objeto em toda parte. Por isso *o lógico é o histórico libertado das casualidades que o perturbam*.

O lógico, portanto, "[...] reflete não só a história do próprio objeto como também a história do seu conhecimento" (KOPNIN, 1978, p. 186). Daí a unidade entre o lógico e o histórico ser premissa necessária para a compreensão do processo de movimento do pensamento, da criação da teoria científica. O problema da correlação entre o pensamento individual e o social resolve-se à base do conhecimento dialético do histórico e do lógico. Em seu desenvolvimento intelectual individual, o homem repete em forma resumida toda a história do pensamento humano. "*A unidade entre o lógico e o histórico é premissa metodológica* indispensável na solução de problemas da inter-relação do conhecimento e da estrutura do objeto e conhecimento da história de seu desenvolvimento" (KOPNIN, 1978, p. 186, grifos do autor).

Kopnin (1978) e Davydov (1988, 1988a) defendem que só é possível compreender bem um objeto quando se descobre sua essência que está diretamente ligada ao seu desenvolvimento histórico. Como afirma Kopnin (1978, p. 185, grifos do autor), "[...] a reprodução da *essência* desse ou daquele fenômeno no pensamento constitui ao mesmo tempo a *descoberta da história* desse fenômeno, [...] a teoria de qualquer objeto não pode deixar de ser também a sua história".

Com essa preocupação, Miguel e Miorim (2011), ao defenderem a importância de considerar, no ensino de Matemática, a dimensão histórica em interdependência com os aspectos lógicos do conhecimento, propõem considerar no processo de ensino-aprendizagem desta matéria:

> (1) a matemática como uma criação humana; (2) as razões pelas quais as pessoas fazem matemática; (3) as necessidades práticas, sociais, econômicas e físicas que servem de estímulo ao desenvolvimento das ideias matemáticas; (4) as conexões existentes entre matemática e filosofia, matemática e religião, matemática e lógica, etc.; (5) a curiosidade estritamente intelectual que pode levar à generalização e extensão de ideias e teorias; (6) as percepções que os matemáticos têm do próprio objeto da matemática, as quais mudam e se desenvolvem ao longo do tempo; (7) a natureza de uma estrutura, de uma axiomatização e de uma prova. (MIGUEL; MIORIM, 2011, p. 53)

Trabalhar com a unidade dos aspectos histórico e lógico do conceito no ensino de Matemática constitui um modo de pensar os conhecimentos matemáticos considerando o seu processo de produção, ou seja, como produto da atividade humana diante das necessidades objetivas enfrentadas pelos homens. Em atividades de ensino, o lógico-histórico dos conceitos configura-se como unidade dialética entre ensino-aprendizagem, uma vez que tal movimento compõe, de forma articulada e interdependente, os componentes fundamentais do processo ensino-aprendizagem, objetivos, conteúdos e métodos, os quais são dimensionados pelas interações que se desencadeiam entre os três elementos fundamentais do ensino: o objeto do conhecimento, o professor e o estudante.

Nesse processo para que o caminho didático formulado por Davydov (1988) possa ser implementado, o autor recomenda que antes de proceder à organização do plano de ensino, o professor deve, de acordo com a área de conhecimento e com a especificidade do conteúdo, realizar a análise lógica e histórica do conteúdo a fim de identificar as relações nele presentes, o movimento mental que ele contém e a lógica científica que o governa. A partir dessa análise, o professor poderá, segundo Freitas (2011, p. 83), "[...] criar as ações necessárias ao aluno para que reproduza criativamente o conceito, tornando-o uma 'ferramenta' própria". Uma vez delineadas essas ações, os princípios gerais de sua estruturação, assim como as relações e nexos essenciais que determinam as peculiaridades do objeto, seu caráter específico e universal, o professor poderá planejar a atividade de estudo dos seus alunos tendo em vista a formação do pensamento teórico. Chaiklin (1999) também postula que o estudo aprofundado do conteúdo a ser ensinado é pré-condição para o planejamento do ensino desenvolvimental.

Em síntese, para que o aluno consiga pensar teoricamente utilizando o conceito de transformação linear como ferramenta mental, é preciso que o professor "analise sua origem e desenvolvimento no campo científico que integra, identifique as relações nele presentes, o tipo de movimento mental que ele contém e a lógica cientifica que governa" (FREITAS, 2011, p. 83). Somente a partir disso ele poderá planejar ações necessárias ao aluno para que ele possa se apropriar "[...] dos procedimentos lógicos e investigativos com os quais os pesquisadores trabalham ao formular o conhecimento do objeto" (FREITAS, 2011, p. 73). Assim, apropriar-se do lógico-histórico do conceito de transformação linear é premissa básica para a formação do conceito.

O mencionado posicionamento impõe para a presente pesquisa a necessidade de proceder à análise lógico-histórica do conceito de transformação linear. Como afirma Davydov (1988, p. 166-167) "ao iniciar o domínio de qualquer matéria curricular os alunos, com a ajuda dos professores, analisam o conteúdo do material curricular e identificam nele a relação geral principal [...]". Para que isto ocorra, é preciso uma estrutura da atividade que inclua uma tarefa de aprendizagem, as ações de aprendizagem e avaliação, visando à compreensão das relações conceituais e estruturais do conteúdo de ensino.

A partir desse entendimento o capítulo foi organizado com o objetivo de apresentar a historicidade da disciplina Álgebra Linear e o movimento lógico-histórico do conceito de transformação linear, articulado ao processo de desenvolvimento do pensamento teórico dos alunos.

1.1 A disciplina Álgebra Linear

A Álgebra Linear enquanto disciplina de um curso de graduação nas universidades americanas é, segundo Katz (1995), relativamente nova, tendo apenas algumas décadas de idade, embora a origem de muitos conteúdos relacionados a ela date de séculos atrás. Talvez seja esse um motivo, segundo o autor, pelo qual seus conteúdos em um programa de um curso típico de Álgebra Linear seguem a ordem do seu desenvolvimento histórico mais estreitamente do que a ordem de muitos outros cursos de graduação. Entretanto, somente a partir da década de 1930 que seus conteúdos foram reunidos como temos hoje, conforme explica Katz (1995, p. 347, tradução nossa):

> Tais resultados foram, em certo sentido, no ar nas últimas décadas do século XIX, mas eles não seriam unidos no que é hoje reconhecido como o material constitutivo de um primeiro curso em álgebra linear – a união dos resultados sobre a solução de sistemas de equações lineares, determinantes, matrizes, transformações lineares e espaços vetoriais – até a década de 1930.

Dorier (2000, p. 56, tradução nossa), detalhando este fato, relata:

> No início dos anos 1930, a apresentação axiomática[5] dos espaços vetoriais tornou-se predominante em dois grandes campos da matemática: análise funcional e álgebra [...] No entanto, os aspectos algébricos e analíticos da teoria axiomática dos espaços vetoriais permaneceram por um tempo desconectados até que, em 1941, Israil Gelfand introduziu a noção de álgebra de Banach.

Assim, na década de 1940, já parecia óbvio que todos os problemas lineares se assemelhavam tanto que olhá-los sob o ponto de vista axiomático se tornava natural e pensar por meio de uma estrutura axiomática era a melhor maneira de modelar situações lineares, fato que conduziu a abordagem axiomática a se tornar a abordagem padrão entre 1930 e 1950, tornando-se um dogma que ninguém mais questionou (DORIER, 2000). Esta revolução na forma de tratar a Álgebra Linear teve grande impulso, principalmente na França, a partir da criação do grupo Nicolas Bourbaki, um grupo formado por matemáticos empenhados em transformar a Matemática e seu ensino por meio da expansão de uma álgebra axiomática, também conhecida como Álgebra Moderna. Sua influência foi tão forte na educação francesa que revolucionou o ensino da época e a teoria dos espaços vetoriais desempenhou um papel

[5] É uma teoria que tem como base um conjunto de axiomas a partir do qual obtém-se outros resultados, tais como lemas, proposições e teoremas. Os axiomas, segundo Eves (2011), são afirmações assumidas inicialmente como verdadeiras em um determinado discurso, das quais procedem todas as demais afirmações deste discurso.

central nessa transformação, pois era vista como parte de uma nova álgebra, mais estruturada e formal, que renovaria o ensino da geometria.

No Brasil, pressupõe-se que a disciplina Álgebra Linear foi estruturada após a chegada de alguns membros do grupo Bourbaki na Universidade de São Paulo por períodos intermitentes entre os anos de 1945 a 1966. Nesta universidade, foi implantado o primeiro curso de graduação específico em Matemática (Bacharelado e Licenciatura), oficialmente regulamentado em 1934. Entretanto, há registros que mostram a existência de cursos de formação de professores de Matemática antes desta data, como afirma Gomes (2016):

> Embora saibamos que houve ensino de Matemática desde muito antes, na Colônia, no Império e nas primeiras décadas da República, tendo existido, portanto, professores responsáveis por esse ensino em diversos níveis, o primeiro curso de Matemática estabelecido entre nós foi o da Universidade de São Paulo (USP), no ano de 1934. (GOMES, 2016, p. 425-426)

Este curso tornou-se referência para a implementação de vários outros cursos no país, de forma que as disciplinas ministradas nesta instituição de ensino foram tomadas como referência para a criação das matrizes curriculares dos novos cursos. Conforme registra Gomes (2016, p. 432), "[...] a proposta da FNFi [Faculdade Nacional de Filosofia], praticamente a mesma da USP, orientou a implementação de cursos de Matemática, a partir de 1939, em diversas cidades, em instituições públicas e privadas". Por isso, e por ter sido a universidade a receber professores do grupo dos Bourbaki que priorizavam a álgebra, pressupõe-se que o primeiro curso de Álgebra Linear no país tenha surgido lá. Segundo Pires (2006), oficialmente, a disciplina foi implantada no curso de Matemática da referida universidade no ano de 1968. Entretanto, desde 1953 (ano a partir do qual a autora teve acesso aos documentos que fundamentaram sua tese), os conteúdos que hoje temos estruturados na disciplina de Álgebra Linear já eram trabalhados em uma disciplina denominada Complementos de Geometria, que pertencia ao 2º ano do curso de Matemática (Licenciatura ou Bacharelado).

> Nesta cadeira, no 2º ano, em Complementos de Geometria, pode-se dizer, embora não esteja explicitado no programa, tratar-se de Álgebra Linear. São contemplados no conteúdo programático: espaço vetorial, transformações lineares sobre um espaço vetorial, matrizes, determinantes, espaço vetorial normado, álgebra de Grassmann e suas aplicações ao estudo dos subespaços de um espaço vetorial, entre outros. (PIRES, 2006, p. 340)

Quanto aos livros didáticos, o primeiro autor que procurou estruturar conteúdos para Álgebra Linear em um livro foi B. L. van der Waerden em seu *Moderne Algebra* publicado em 1930. Katz (1995) relata que van der Waerden

> [...] dedicou um capítulo inteiro à chamada “álgebra linear”, uma área que [...] vinha emergindo em diversos contextos dentro da literatura matemática ao longo da segunda metade do século XIX, mas que recebeu seu primeiro tratamento unificado e axiomático em Moderne Algebra como o estudo de módulos sobre um anel em conjunto com seus homomorfismos (isto é, transformações lineares). (KATZ 1995, p. 372-373, grifos do autor, tradução nossa)

Mais tarde, em 1941, Garret Birkhoff e Saunders MacLane publicaram seu *Survey of Modern Algebra* e, em 1942, surgiu o *Finite-Dimensional Spaces* de Paulo R. Halmos. Estes foram os primeiros livros a apresentar as teorias algébricas para alunos de graduação. Em 1947, o grupo francês Nicolas Bourbaki publicou o segundo capítulo do Livro II de seu *Eléments de mathématique*, cujo título é *Algèbre linéaire*. Estes três últimos livros tiveram, por muito tempo, uma grande influência sobre a teoria axiomática de espaços vetoriais e toda a teoria advinda dessa axiomatização que se enquadrava nos conceitos de linearidade da Álgebra, sendo úteis tanto para o ensino quanto para o desenvolvimento da própria Matemática. Após estes, e com a estruturação da Álgebra Linear enquanto disciplina, outros livros surgiram, já específicos para esta disciplina, como o *Linear Algebra* de Kenneth Hoffman e Ray Alden Kunze em 1961.

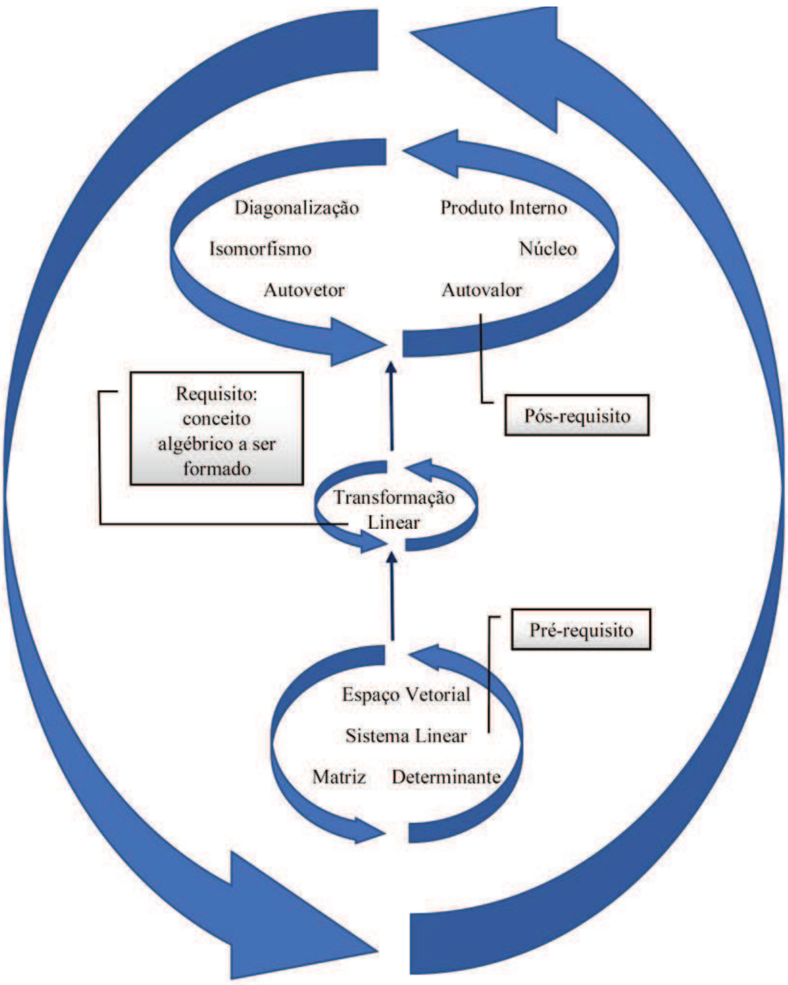
Na atualidade, a Álgebra Linear é uma disciplina básica não apenas para a Matemática, como também para grande parte dos cursos das grandes áreas de Ciências Exatas e da Terra e Engenharias, sendo os conceitos estudados nesta disciplina necessários para o desenvolvimento de outros conceitos relacionados às áreas específicas de cada curso. Visto que o objetivo geral do ensino da Álgebra Linear é a apropriação do conhecimento algébrico como elemento que potencializa a formação matemática dos estudantes, necessário se faz que o ensino desta disciplina contemple os nexos conceituais e a essência do conhecimento algébrico, o que requer um modo de organização do ensino que possibilite a apropriação desta forma de conhecimento, a formação e o desenvolvimento do pensamento teórico dos estudantes (DAVYDOV, 1988).

1.2 O conceito de transformação linear no sistema conceitual da Álgebra Linear

Tradicionalmente, a estrutura da disciplina de Álgebra Linear é constituída pela hierarquia sistemática dos seguintes conceitos: matriz, sistema linear, espaço vetorial, transformação linear, autovalor, autovetor, diagonalização e produto interno, além de outros conceitos que deles derivam.

Todos esses conceitos se inter-relacionam e dependem uns dos outros para se constituírem. A exemplo disso, a aprendizagem do conceito de espaço vetorial tem como pré-condição básica o conhecimento dos conceitos de matriz e sistema linear, a aprendizagem do conceito de transformação linear requer a apropriação dos conceitos de matriz, de sistema linear e de espaço vetorial que se encontram na base desta hierarquia. Por sua vez, a aprendizagem do conceito de autovalor tem como pré-condição o aprendizado dos conceitos de matriz, sistema linear, espaço vetorial e transformação linear, e assim sucessivamente. Nesse sistema, o conceito de transformação linear ocupa lugar central. É a partir dele que se estruturam os demais conceitos da disciplina como autovalor, autovetor, diagonalização e produto interno, sendo inevitável o conhecimento dos conceitos estudados anteriormente a ele, a saber, matriz, sistema linear e espaço vetorial. E, nesse movimento de interpendência conceitual, estão contidas as características e particularidades da totalidade da disciplina Álgebra, conforme demostra a Figura 1.

Figura 1 – Mapa conceitual da disciplina Álgebra Linear



Fonte: Elaborado pela autora.

Reforçando esse entendimento, Uhlig (2003) afirma ser o conceito de transformação linear a essência da Álgebra Linear, uma vez que por meio deste conceito derivam-se os demais conceitos desta disciplina. Em sua proposta, Uhlig (2002) argumenta que o ponto de partida para o ensino da Álgebra Linear deve ser o conceito de transformação linear e não o conceito de matriz como comumente é feito. Como esclarece o autor:

> Não conhecemos todos os possíveis assuntos e conceitos que poderiam ser considerados 'fundamentais' para que possamos construir a maior parte da Álgebra Linear elementar de cada um. Não temos tal lista. No momento, temos apenas um candidato para esse papel: "*Transformações Lineares*". Essa noção satisfaz nosso requisito básico de ser fundamental para todo o campo. Ou seja, as transformações lineares podem ser usadas para apresentar e ajudar a explicar a maioria dos outros assuntos, conceitos e áreas da Álgebra Linear elementar. (UHLIG, 2003, p. 152, destaques do autor, tradução nossa)

Para o autor, por ser a forma algébrica de uma transformação linear definida e baseada em uma equação, a Álgebra Linear é uma parte natural da Álgebra e, evidentemente, "[...] esta equação fundamental deve servir bem como o núcleo conceitual e o início de nossos estudos e ensino" (UHLIG, 2003, p. 153, destaques do autor, tradução nossa). Assim, o conceito de transformação linear é a base unificadora, o eixo desta disciplina.

Uma característica das transformações lineares que intensifica sua importância é que, dependendo do conjunto que é escolhido como domínio e/ou contradomínio ($\mathbb{R}^2$ou $\mathbb{R}^3$), é possível fazer uma associação geométrica por meio de gráficos em duas ou três dimensões como o caso das rotações e reflexões no plano, que já sejam familiares aos alunos, advindos da Matemática do ensino médio ou mesmo de disciplinas da educação superior como Geometria Analítica e Cálculo Diferencial e Integral. Essa é a proposta dos trabalhos de Karrer (2006), Santos (2013), Arrebola (2013) e Silva (2015), enfatizando a importância das transformações lineares.

Com efeito, o conceito de transformação linear é fundamental para a averiguação da aprendizagem dos conceitos já estudados, pois, a todo o momento, podem-se revisar detalhes da composição destes conceitos, esclarecendo as dúvidas que ainda permanecem. E como já explanado, o conceito de transformação linear também é fundamental na construção de novos conceitos inerentes à disciplina de Álgebra Linear, sendo uma base para eles. É do conceito de transformação linear que procede boa parte das aplicações nas diversas áreas do conhecimento, como Matemática, Engenharias e Física, dentre outras. Sua utilização em situações particulares envolve também o conhecimento de outros conceitos a ele conexos, o que o torna um conceito de destaque dentro deste campo.

Nesse sentido, compartilha-se da posição de Uhlig (2003), segundo a qual, o conceito de transformação linear é a essência da Álgebra Linear, a partir do entendimento de que os conceitos desta disciplina

> [...] estão em indissolúvel inter-relação; a diferença entre conceitos isolados é relativa, sob determinadas condições um conceito se converte em outro, mas mesmo assim essa diferença existe, reflete a estabilidade relativa e a precisão qualitativa dos objetos, dos fenômenos, da realidade. "Cada conceito está em certa *relação*, em determinada conexão *com todos* os demais" – escreveu Lênin. (KOPNIN 1978, p. 211, grifos do autor)

Ciente de que o conceito de transformação linear, pela sua natureza científica, ocupa um lugar definido no sistema de conceitos da Álgebra Linear que determina a sua relação com outros conceitos, pode-se construir, considerando a relação dialética do sistema conceitual da Álgebra Linear, a Figura 2 como expressão das conexões do conceito de transformação linear. Conexões estas que expressam a lógica, a história, as abstrações e as formalizações do ato de pensar que conduziram o homem, em sua constituição enquanto humano, à formação do pensamento teórico do conceito de transformação linear (SOUSA, PANOSSIAN, CEDRO, 2014).

Figura 2 – Conexões do conceito de transformação linear

Fonte: Elaborado pela autora a partir do lógico-histórico do conceito.

Com esse entendimento, recorremos ao estudo de registros históricos de autores do campo da Educação Matemática e da Matemática que, isoladamente, podem ser considerados como singularidades, mas que foram criados a partir da gênese histórico-cultural do conceito de transformação linear.

1.3 Os conceitos da Álgebra Linear na perspectiva lógico-histórica

Os conceitos básicos da Álgebra Linear que contribuem para a formação do conceito de transformação linear são: matriz, sistema linear, determinante e espaço vetorial. A ordem estabelecida para a apresentação do lógico-histórico destes conceitos não segue aquela dada nos livros didáticos, mas sim a ordem de seu surgimento histórico considerando as contradições e o contexto de cada um deles, afinal,

> *Os conceitos da ciência surgem da necessidade da atividade prática dos homens*; a limitação da prática histórico-social determina a limitação dos nossos conceitos sobre o mundo exterior [...] Mas nem todos os conceitos da ciência são gerados imediatamente pelas necessidades da atividade produtiva do homem. Muitos deles, os matemáticos, por exemplo, surgem para satisfazer às necessidades do desenvolvimento de outras ciências (mecânica, física, etc.); alguns são gerados pelas necessidades internas da própria ciência como meio do sucessivo desenvolvimento desta. Em suma, porém, todo o sistema de conceitos dessa ou daquela ciência é gerado pela prática multiforme do homem. (KOPNIN, 1978, p. 208-209, grifos do autor)

1.3.1 Os conceitos de sistema linear e determinante

A Álgebra Linear, como é conhecida atualmente, é fruto de um processo histórico que começou há cerca de 4000 anos atrás com os babilônicos resolvendo sistemas de equações lineares com duas equações e duas incógnitas. Os babilônicos eram um dos povos da antiguidade que viveram às margens dos rios Tigre e Eufrates, local de terras férteis propícias à agricultura e à engenharia (útil para construir canais e reservatórios de água) e, por ser rota de grandes caravanas, era uma região também propícia ao desenvolvimento do comércio, fato que levou os babilônicos a se tornarem um dos povos mais desenvolvidos economicamente e cientificamente da época (EVES, 2011). Por tudo isso, eles eram familiarizados com todos os tipos de contratos legais, como notas promissórias, recibos, faturas, créditos, juros simples, juros compostos, hipotecas e escrituras de venda e endossos (EVES, 2011). Todo esse contexto social e econômico levou os babilônicos a criarem uma álgebra avançada capaz de resolver os problemas emergentes. Assim, por volta do ano 2000 a.C., eles resolviam equações quadráticas, cúbicas e biquadradas (de grau quatro) utilizando tábulas de calcular, uma de suas especialidades (eles eram exímios calculistas), faziam várias tábulas que eram bases para seus cálculos. De acordo com Eves (2011), encontrou-se uma tábula com muitos problemas que levam à resolução de equações cúbicas da forma $x^3 + x^2 = b$, as quais podem ser resolvidas utilizando a tábula que fornece uma sequência de valores de $n^3 + n^2$. Ainda segundo esse autor, registros de 1600 a.C., nas tábulas da coleção Yale, catalogam centenas de problemas não resolvidos envolvendo sistemas de equações que resultam em equações biquadradas e até mesmo uma equação de grau 6. Como exemplo desses sistemas tem-se:

$$\begin{cases} xy = 600 \\ 150(x-y) - (x+y)^2 = -1000 \end{cases}$$

que leva a uma equação de grau quatro tanto em x como em y e

$$\begin{cases} xy = a \\ \dfrac{bx^2}{y} + \dfrac{cy^2}{x} + d = 0 \end{cases}$$

que leva a uma equação de grau seis tanto em x como em y.

Ainda falando de sistemas de equações lineares, por volta do ano 200 a.C., os chineses resolviam sistemas de ordem dois e três e foram os precursores do método de eliminação de Gauss utilizado para resolver sistemas lineares, o qual só se tornaria conhecido no século XIX. Exemplos sobre o método utilizado pelos chineses podem ser encontrados nos *Nove capítulos sobre a arte da matemática*. Segundo Bertolini (2007), não se sabe ao certo de quem é sua autoria, mas a hipótese mais aceita é a que ele foi escrito por vários autores, sendo datado do início século I d.C. e traz problemas do cotidiano dos chineses envolvendo questões sobre engenharia, topografia, comércio e tributação. Como exemplo de um desses problemas, Eves (2011) traz o Problema 1 do Capítulo VIII:

> Três feixes de uma colheita de boa qualidade, dois feixes de uma de qualidade regular e um feixe de uma de má qualidade são vendidos por 39 dou. Dois feixes de boa, três de regular e um de má são vendidos por 34 dou. Um feixe de boa, dois de regular e três de má são vendidos por 26 dou. Qual o preço do feixe para cada uma das qualidades? (EVES, 2011, p. 268)

Este problema resulta em um sistema de equações lineares com três equações e três incógnitas, cujo método de resolução utilizado pelos chineses se assemelha ao método de eliminação de Gauss (O'CONNOR; ROBERTSON, 2016a).

Segundo alguns historiadores matemáticos, o estudo moderno de sistemas de equações lineares pode ter se originado com o alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) em 1693 quando este criou, na Europa, a noção de determinante justamente para resolver sistemas lineares (KLEINER, 2007). Entretanto, dez anos antes, em 1683, o japonês Takakazu Seki Kowa (1642 – 1708) já havia calculado determinantes de matrizes de ordens dois, três, quatro e cinco (escritas em forma de tabelas como os chineses faziam), mas ele os usava para resolver equações e não sistemas (EVES, 2011; O'CONNOR; ROBERTSON, 2016a).

Leibniz foi engajado em causas religiosas (um reflexo da reforma protestante) e filosóficas e, por ter sido um diplomata, viajava muito, tudo isso o fez conhecer vários estudiosos por toda Europa e o levou a trocar correspondências com a maioria deles, sejam eles matemáticos ou não. Em uma de suas correspondências ao matemático francês Guillaume de l'Hôpital (1661 – 1704), datada justamente do ano de 1693, Leibniz diz que ocasionalmente ele utilizava números para indicar linhas e colunas em um sistema de equações, escrevendo na forma

$$\begin{cases} 10 + 11x + 12y = 0 \\ 20 + 21x + 22y = 0 \\ 30 + 31x + 32y = 0 \end{cases}$$

e que, se este sistema tinha solução, então

$$10 \cdot 21 \cdot 32 + 11 \cdot 22 \cdot 30 + 12 \cdot 20 \cdot 31 = 10 \cdot 22 \cdot 31 + 11 \cdot 20 \cdot 32 + 12 \cdot 21 \cdot 30.$$

Na linguagem moderna, o número 12 no sistema representa a linha 1 e a coluna 2 ou, em símbolos, a_{12} e a igualdade acima nos diz que se um sistema tem solução, então seu determinante é nulo. Esta é a primeira aparição do conceito de determinante na Europa (BOYER, 1974; O'CONNOR; ROBERTSON, 2016a).

Note que o conceito de determinante não nasceu ligado ao conceito de matriz quadrada como temos hoje nos livros didáticos, isso veio posteriormente com a evolução da teoria de matrizes. Este fato mostra que nem todo conteúdo matemático, como descrito nos livros didáticos atuais, obedece ao mesmo desenvolvimento histórico de sua criação.

Leibniz, l'Hôpital e vários outros cientistas viveram em um período que a história denomina de Idade Moderna, datada de 1453 (com a tomada de Constantinopla pelos turcos otomanos) até 1789 (com o início da Revolução Francesa), sendo este um período específico da história do Ocidente, que foi marcado por grandes conquistas territoriais, como, por exemplo, o descobrimento da América (1492) e também do Brasil (1500), além de fatos importantes como a Reforma Protestante na Alemanha (1517 a 1648) e a Revolução Puritana (guerra civil) na Inglaterra (1642 a 1660). Na década de 1670, a Europa estava relativamente tranquila, sendo alguns dos fatos mais importantes as conquistas territoriais por parte da Inglaterra e a expansão do comércio com a transição do feudalismo para o capitalismo. Nesse período, iniciou a grande disputa entre Leibniz e Newton (1643 – 1727) pela prioridade da descoberta do cálculo diferencial e integral, a qual não será detalhada aqui por fugir do objetivo deste texto. Como Newton era inglês, os matemáticos da Inglaterra se alinharam a ele e os demais matemáticos europeus juntaram-se a Leibniz. Com isso, a Inglaterra se fechou para o desenvolvimento científico à sua volta enquanto que na Europa o cálculo se desenvolvia de forma significativa, pois as notações introduzidas por Leibniz eram bem mais simples que as notações de Newton, gerando na Inglaterra um desenvolvimento matemático mais lento, uma vez que as notações de Newton não permitiam fluidez dos cálculos (MILIES, 2004). Entretanto, esse isolamento da Inglaterra, que, segundo Eves (2011) retardou o progresso matemático no país por quase um século, gerou bons frutos, como se pode constatar no grande número de ideias originais que surgiram posteriormente, como, por exemplo, as criações de Peacock, Cayley, Sylvester e Hamilton, que serão, mesmo que brevemente, a seguir, analisadas.

1.3.2 O conceito de matriz

A teoria de matrizes, como a temos hoje, foi introduzida pelo inglês Arthur Cayley (1821 – 1895) em um artigo publicado no ano de 1855, porém o nome "matriz" havia sido introduzido pelo também inglês James Joseph Sylvester (1814 – 1897) cinco anos antes, em 1850, mas esse nome só obteve reconhecimento após os trabalhos de Cayley. Dentre outros fatos, Cayley observou que as matrizes "comportam-se como entidades individuais"; reconheceu sua utilidade na resolução de sistemas de equações lineares; definiu a soma e o produto de pares convenientes de matrizes retangulares, bem como o produto de uma matriz por um escalar, sendo este um número real ou complexo; introduziu a matriz identidade e a inversa de uma matriz quadrada, mostrando como relacionar estes conceitos com a solução de sistemas de equações lineares de ordem n específicos (KLEINER, 2007).

Nessa época, havia na Inglaterra uma grande preocupação com a forma e a estrutura em álgebra, o que gerou um processo de transição da álgebra aritmética (uma álgebra direcionada aos números) para a álgebra simbólica (relacionada com as grandezas em geral, utilizando símbolos), processo este iniciado por Georg Peacock (1791 – 1858), em 1830, com sua obra *Treatise on Algebra*. Uma álgebra abstrata parecia totalmente inconcebível no início do século XIX, ainda mais considerando que na Universidade de Cambridge, na Inglaterra, um dos maiores centros universitários da época e local de trabalho de Peacock, havia uma tendência tão conservadora da álgebra que eles tinham dificuldades para aceitar a validade dos números negativos (BOYER, 1974).

Enquanto a Inglaterra encontrava-se resistente aos avanços da álgebra, no restante da Europa os matemáticos estavam investigando uma representação gráfica para os números complexos (BOYER, 1974). As pesquisas em álgebra caminhavam no sentido de produzirem conjuntos que lhes possibilitassem desenvolver cálculos mais avançados. O mundo exigia uma nova teoria para abarcar os avanços que estavam surgindo, como o desenvolvimento das frotas navais, do comércio marítimo e da indústria mecânica, tudo isso como influência da Primeira Revolução Industrial, datada de 1760 a 1860, com início na Inglaterra, mas com reflexos em todo o mundo. Este acontecimento trouxe ao mundo grandes mudanças, em especial à Europa que era o continente que continha os grandes países desenvolvidos da época, como a Inglaterra, em específico, o centro desta revolução. Várias mudanças estavam ocorrendo nesse período, como o surgimento de um capitalismo industrial com o crescimento sistemático das indústrias; a urbanização crescente, com a população saindo da zona rural e adentrando as cidades; o sistema manufatureiro sendo modificado com a inserção das máquinas; os avanços tecnológicos, com a expansão das máquinas nas indústrias; uma visão de mundo mais mecanicista etc. (EVES, 2011). No quesito científico, houve um grande desenvolvimento e avanço da ciência, principalmente naquelas relacionadas às exigências tecnológicas; na Matemática, o século XIX foi um século de grande produção e desenvolvimento.

Diante deste contexto, a teoria de matrizes desenvolvida por Cayley já havia dado uma grande contribuição para o desenvolvimento da Matemática, pois por meio dela obteve-se uma estrutura algébrica que rompia com os padrões da época: era um conjunto de elementos não comutativos. Surgiu, assim, mais uma álgebra não comutativa, a primeira foi a álgebra dos quatérnios, criada por Hamilton em 1843.

1.3.3 Os conceitos de espaço vetorial e transformação linear

O surgimento dos conceitos de espaço vetorial e transformação linear estão intimamente relacionados, sendo difícil a distinção do momento exato da formalização de cada um deles. Para compreendermos este processo, faz-se necessário o entendimento de sua necessidade, o que percorre o caminho do surgimento do conjunto dos quatérnios, bem como apreender o contexto social, cultural, econômico e político no qual viveu Grassmann, aquele que é considerado o criador destes conceitos, bem como o de Peano, o matemático que tornou conhecida a teoria desenvolvida por Grassmann.

William Rowan Hamilton (1805 – 1865) era um professor universitário irlandês que vivenciou o período de transição da álgebra aritmética para a álgebra simbólica, além disso, o auge de sua vida científica se deu em plena Revolução Industrial, momento de grandes transformações econômicas, sociais, culturais e científicas. No século XVII, a Irlanda foi colonizada pela Inglaterra, e, no início do século XIX, houve a união da Irlanda (na época não havia a separação entre a Irlanda e a Irlanda do Norte) com a Grã-Bretanha (ilha formada pela Inglaterra, Escócia e País de Gales), formando o Reino Unido da Grã-Bretanha e Irlanda. Por isso, a Irlanda, na época de Hamilton, passava por todas as mudanças ocasionadas pela Revolução Industrial, consequentemente, as pesquisas que Hamilton desenvolvia visava o aprimoramento tecnológico emergente, de onde surgiu a necessidade de trabalhar com vetores.

A noção mais antiga de vetor, segundo Kleiner (2007), vem da física, remontando aos pensadores da Grécia antiga que o interpretavam com um "apelo geométrico e intuitivo muito forte para auxiliar a análise de problemas físicos" (TÁBOAS, 2010, p. 2). Segundo Kleiner (2007) e Táboas (2010), os gregos antigos já utilizavam os conceitos de vetor e soma de vetores (regra do paralelogramo) associados a grandezas físicas como velocidade e força.

Na Matemática, a noção de vetor se originou com a representação geométrica dos números complexos, introduzida, independentemente, por vários autores no final do século XVIII e início do século XIX, a qual era feita apenas como pontos ou segmentos de retas orientados no plano. Enquanto astrônomo, Hamilton precisou trabalhar com rotações no plano e os números complexos, com sua representação gráfica, lhe ofereciam a teoria matemática primordial para tal; porém, ele precisava associar essa teoria à teoria de vetores, foi então que, em 1835, ele definiu os números complexos algebricamente como pares ordenados de números reais, com as operações usuais de adição, multiplicação e multiplicação por escalar, assim como temos hoje (KLEINER, 2007). Deste modo, Hamilton conseguiu associar números complexos com a representação vetorial.

Entretanto, com o avanço da ciência, surgiu a necessidade de expandir a teoria existente na época para um espaço tridimensional. Nessa época, os cientistas já tinham a noção de tal espaço, pois desde a época de Euclides, quando este lançou o seu *Elementos de Euclides* por volta do ano 300 a.C., os gregos já conheciam sólidos geométricos e tinham uma geometria em três dimensões (BOYER, 1974; EVES, 2011). Segundo Eves (2011), no Livro XIII dos Elementos de Euclides, o autor remete a criação de alguns sólidos regulares aos pitagóricos e outros a Teeteto, reportando o surgimento destes sólidos a séculos anteriores ao século III a.C.

Diante da necessidade de uma álgebra tridimensional, Hamilton, assim como outros cientistas, partiu em busca de um espaço com dimensão três. Hamilton tentou criar uma terna de números a partir dos números complexos, entretanto, depois de vários anos de estudo, ele chegou à conclusão de que isso não era possível tomando como referência as propriedades já estabelecidas dos números complexos. Era preciso abandonar a condição de comutatividade para encontrar a solução procurada, porém, as almejadas ternas não foram descobertas, mas sim quádruplas (4-uplas). Surgiu, assim, o conjunto dos quatérnios em 1843, que são quádruplas de números da forma $a + bi + cj + dk$, onde $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ (EVES, 2011). Após estruturar a teoria dos quatérnios, Hamilton construiu uma álgebra de vetores tridimensionais imersa em seu sistema de quatérnios, representando-os na forma $ai + bj + ck$, onde $a,\ b$ e c são números reais e $i,\ j$ e k são unidades dos quatérnios, sendo estes os precursores para uma base do espaço tridimensional euclidiano (KLEINER, 2007).

1.3.3.1 Hermann Günther Grassmann, o "criador" da Álgebra Linear

Os matemáticos da primeira metade do século XIX continuavam suas pesquisas com o intuito de estabelecer conjuntos de vetores com mais de duas dimensões e alavancar as pesquisas emergentes. A Revolução Industrial, com inserção das máquinas nas indústrias, exigia novas tecnologias que, sem o avanço científico da Matemática, em específico da Álgebra, eram impossíveis de serem concretizadas.

Um pouco alheio a todo o universo matemático das grandes universidades onde era produzido todo o saber científico que ganhava notoriedade na época, o alemão Hermann Günther Grassmann (1809 – 1877), teólogo, matemático autodidata e professor de uma escola secundária, lançou em 1844 um livro (GRASSMANN, H., 1878) intitulado *Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik* (A teoria da extensão linear, um novo ramo da matemática). Entretanto, o reconhecimento de seu trabalho não veio e sua obra foi completamente ignorada por seus contemporâneos.

Grassmann viveu em uma época em que a Alemanha ainda não existia enquanto país, pois seus Estados[6] ainda não estavam unificados. O que existia era a Confederação Germânica formada por 39 Estados independentes entre si, tendo o Império Austríaco e o Reino da Prússia como seus maiores e mais importantes membros. Stettin, a cidade natal de Grassmann, localizava-se no Estado da Prússia e, hoje, ela localiza-se na Polônia. Nos séculos XVIII e XIX houve várias revoluções em todo o mundo em função da disseminação dos ideais iluministas, um reflexo da revolução industrial, na qual os iluministas defendiam a democracia, o liberalismo econômico e o racionalismo, rompendo com o absolutismo monárquico e com a força que a Igreja exercia sobre a população.

Dentre essas revoluções estão: a Revolução Americana de 1776, a Revolução Francesa de 1789, a Revolução do Porto (Portugal) em 1820 e a Inconfidência Mineira (Brasil) em 1889. Na Alemanha, várias guerras ocorreram influenciadas por esse movimento e com o intuito de unificar os Estados alemães, fato que ocorreu em 1871. Dentre essas guerras, têm-se as Revoluções de 1848 dos Estados Alemães, também conhecida por Revolução de Março, que visava unificar os Estados alemães e dar liberdade à população. Neste ano, Grassmann, em devoção fiel à casa real, reivindicou sua atividade no campo político, levantando-se contra a luta revolucionária de Berlim, onde, juntamente com seu irmão Robert, fundou um jornal no qual eram discutidas questões polêmicas como as recém-estabelecidas Constituições do Império Romano, do Estado Prussiano e da Igreja da Prússia (GRASSMANN, J., 2011).

Durante este período de revoluções, as ideias comunistas de Marx e Engels tomam força na Alemanha, reunindo os trabalhadores em prol das defesas de seus direitos e da constituição dos proletariados enquanto classe social. Em 1848, Marx e Engels lançam o Manifesto do Partido Comunista, um dos tratados políticos de maior repercussão mundial, que visava instruir os operários e comunistas em como proceder diante da revolução que aproximava, a saber, a revolução em prol da unificação alemã.

Mesmo em meio a esse cenário de guerras e revoluções, lutando por seus ideais políticos, Grassmann não desistiu da sua Teoria das Extensões e estava convencido de que ela era importante e que seu fracasso deveria ser atribuído à sua forma de apresentação, que constava de uma linguagem não convencional para a área, pois era muito filosófica e pouco matemática. Ele, então, resolveu reeditar todo seu trabalho dando um aspecto mais matemático

[6] Entenda Estado conforme a definição do Dicionário Michaelis, como sendo uma "nação politicamente organizada por leis próprias", um "conjunto das estruturas institucionais que asseguram a ordem e o controle de uma nação", um "regime político" e "cada um dos territórios de certos países". Assim, os impérios, reinos, principados e ducados que juntos formavam a Confederação Germânica são considerados Estados, conforme esta definição.

ao texto e incorporar algumas ideias que não foram publicadas na primeira versão (GRASSMANN, J., 2011).

Lançou-se, em 1862, a segunda versão (GRASSMANN, H., 1862) da Teoria da Extensão (*Die Ausdehnungslehre*), a qual conta com uma escrita menos filosófica e com linguagem mais aceita pelos matemáticos de toda a teoria da versão de 1844 acrescida de uma seção denominada *Funktionenlehre* (Teoria de Funções), que, segundo Liesen (2011) é o acréscimo mais notável feito por Grassmann e que cobre aproximadamente 400 páginas do seu novo trabalho. Porém, mais uma vez, seu trabalho não teve o reconhecimento que tanto esperava. Com o desaparecimento do fundo filosófico que rompeu com o obstáculo inicial e superficial para a leitura de sua obra, surgiu a grande dificuldade de compreender e aceitar o conteúdo matemático exposto por Grassmann. Além disso, a obra não permitia uma leitura parcial da teoria, sendo necessário lê-la desde a primeira página a fim de compreender o significado de qualquer conceito (DORIER, 1995).

Com tantos fracassos com suas publicações, seu sonho de ter uma carreira acadêmica se desmoronou e Grassmann interrompeu seu trabalho com a Matemática, passando a se dedicar à música e à linguística, trabalhando com o sânscrito, o grego, o lituano etc. Após um lapso de dez anos, em 1872, ele retomou seus trabalhos com a Matemática ao saber que havia matemáticos estudando e aplicando suas obras a novas teorias e, há apenas dois dias antes de sua morte, em 1877, Grassmann recebeu a notícia de que sua teoria passaria a ser divulgada por meio de palestras proferidas por um professor em Dresden (GRASSMANN, J., 2011).

Apesar de todo esse insucesso, a teoria de Grassmann continha as bases de uma teoria que estava prestes a emergir no cenário algébrico, tais como, espaço vetorial, dependência linear, base, dimensão, transformação linear, autovalor, autovetor, diagonalização e produto interno, dentre outros. Devido a isso, Grassmann é considerado por muitos o "criador da Álgebra Linear".

Vale ressaltar que, segundo J. Grassmann (2011), durante sua formação acadêmica em Berlin, em teologia, Grassmann somente teve contato com filósofos e teólogos influenciados pela reforma protestante, podendo ter sido influenciado diretamente por Schleiermacher, pois em muitos de seus trabalhos não publicados foram encontrados trechos de obras deste professor. J. Grassmann (2011) diz ainda que Grassmann não ouviu nenhuma palestra matemática, nem mesmo durante seu curso de graduação, e que o contato dele com esta ciência se deu por meio das obras de seu pai, Justus Günther Grassmann, que era professor de Matemática e Física em uma escola secundária de Stettin, a mesma onde Grassmann tornou-se professor. Segundo Whitehead (1898), acredita-se que Grassmann, ao escrever a segunda versão de sua Teoria da

Extensão, não tinha conhecimento nem mesmo do clássico livro de memórias sobre matrizes de Cayley que havia sido publicado em 1858. Para Dorier (1995), Grassmann fez sua teoria independente do resto da Matemática, baseando-se apenas nas regras elementares de raciocínio matemático.

1.3.3.2 Contribuições de Grassmann e Peano

Na versão de 1862 da Teoria da Extensão, em específico na parte inédita deste trabalho, a *Funktionenlehre*, há uma seção intitulada *Ganze Funktionen ersten Grades. Quotient* (Funções completas de primeiro grau. Quociente), na qual Grassmann lida com o objeto matemático que ele chama de *Bruch* ou *Quotient* (Fração ou Quociente). Em linguagem moderna, a "fração" de Grassmann seria chamada de uma transformação linear de um espaço vetorial de dimensão finita (LIESEN, 2011) e é definida no item 377 de sua obra.

> **377. Definição.** Se $a_1, a_2, \dots, a_n$ são magnitudes de primeira ordem (ou ordem (*n – 1*)) em um domínio principal de ordem n e *não há nenhuma outra relação numérica de outro modo*, eu denoto como *fração (quociente)*
> $$Q = \frac{(b_1, b_2, \dots, b_n)}{(a_1, a_2, \dots, a_n)}$$
> a expressão que, multiplicada por $a_1, a_2, \dots, a_n$, produz os valores $b_1, b_2, \dots, b_n$, respectivamente, de modo que
> $$\frac{(b_1, b_2, \dots, b_n)}{(a_1, a_2, \dots, a_n)} a_r = b_r.$$
> Eu chamo $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ de *denominadores* da fração, $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ seus *numeradores* correspondentes e defino duas frações, ou duas expressões numericamente derivadas das frações, iguais uma à outra se, e somente se, elas produzem igualmente quando são multiplicadas por cada magnitude de primeira ordem {ou ordem $(n-1)$}. Se na adição os numeradores são magnitudes de primeira ordem (ou ordem $(n-1)$) e *não há nenhuma outra relação numérica de outro modo*, eu a chamo de fração *inversível*, e, neste caso, se
> $$Q = \frac{(b_1, b_2, \dots, b_n)}{(a_1, a_2, \dots, a_n)},$$
> eu denoto a fração inversa por $\frac{1}{Q}$, isto é, eu defino
> $$\frac{1}{Q} = \frac{(a_1, a_2, \dots, a_n)}{(b_1, b_2, \dots, b_n)}.$$
> (GRASSMANN, 2000, p. 207, tradução nossa, grifos do autor)

Para uma melhor compreensão da definição de Grassmann, Liesen (2011) traduz os principais termos em linguagem atual (a noção de "magnitudes de ordem $(n-1)$" não será considerada por fugir dos conceitos de um curso de Álgebra Linear a nível da Educação Superior):

> "magnitudes de primeira ordem" de Grassmann podem ser consideradas como *vetores* e o "domínio principal de ordem n" é um *espaço vetorial* n*-dimensional*. A suposição que para $a_1, a_2, \dots, a_n$ "não há nenhuma outra relação numérica de outro modo" significa que estes vetores são *linearmente independentes* (portanto, eles formam uma base). [...] "Derivação numérica" significa *combinação linear*. (LIESEN, 2011, p. 313-314, tradução nossa, grifos do autor)

Liesen (2011) ainda explica que, para Grassmann, magnitudes extensivas correspondem às funções, consequentemente, Qa_r é o produto de duas destas magnitudes: uma "função completa do primeiro grau" (Q) e uma "magnitude extensiva de primeira ordem" (a_r). Em toda sua Teoria da Extensão, Grassmann considerou que todos os produtos são multilineares, isto é, linear em cada fator, portanto, Q é uma *transformação linear*, pois, para qualquer $x = x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n$, tem-se que

$$Qx = Q(x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n) = x_1 Q a_1 + \cdots + x_n Q a_n.$$

Segundo Liesen (2011, p. 314, tradução nossa), a linearidade da fração é devida a um desenvolvimento feito anteriormente por Grassmann que, "aparentemente, era tão óbvio para Grassmann que ele não sentia necessidade de mencioná-lo no nº 377". Na segunda parte do item 377, Grassmann define a igualdade de duas frações, podendo assim escrever: "Se $Q_1 x = Q_2 x$ para cada magnitude extensiva x, então $Q_1 = Q_2$. Aqui Q_1 e Q_2 podem ser frações, ou expressões que são 'numericamente derivadas de frações'" (LIESEN, 2011, p. 314, destaques do autor, tradução nossa).

Na terceira e última parte do item 377, Grassmann trata da invertibilidade de uma fração, iniciando com a condição de que, sendo os numeradores $b_1, b_2, \dots, b_n$ da fração Q linearmente independentes, então eles podem ser os denominadores de outra fração. Tomando então os denominadores $a_1, a_2, \dots, a_n$ de Q como numeradores, obtém-se a fração inversa de Q como sendo a fração $\frac{1}{Q}$. Grassmann não demonstra o processo de obtenção de uma fração inversa, o que leva Liesen (2011, p. 314, tradução nossa) a dizer que: "Pode ter sido claro para Grassmann que, neste caso $\frac{1}{Q}(Qa_j) = \frac{1}{Q}b_j = a_j$ e, analogamente, $Q\left(\frac{1}{Q}b_j\right) = Qa_j = b_j, j = 1, \dots n$."

Liesen (2011) chama a atenção para o fato de que a composição de frações $\frac{1}{Q}Q = Q\frac{1}{Q}$ é vista hoje como a aplicação identidade no espaço de dimensão n, mas que Grassmann não se deteve a discutir a composição de frações nesse momento, muito menos explicitou isso em qualquer outra parte da sua obra. "No entanto, a composição de frações está implícita em uma série de locais da *Funktionenlehre*, porque todas as magnitudes extensivas (e, portanto, as frações) podem ser multiplicadas" (LIESEN, 2011, p. 314, grifos do autor, tradução nossa).

Após definir fração, Grassmann (2000) comenta sua linha de pensamento por trás desta definição, enfatizando que é fácil ver essa ideia. Ele escreve que, na Álgebra, a fração $a : b$, com a e b dois números e $b \neq 0$, é a expressão que resulta em a quando multiplicado por b e que em um domínio de ordem n, não basta saber o resultado da multiplicação de uma fração por uma única magnitude extensiva, mas devem ser especificados os resultados da multiplicação de uma fração por n magnitudes que não possuem relação numérica uma com a outra (ou seja, uma base) para que a fração seja completamente definida. Com isso, Grassmann generaliza o quociente algébrico por meio de sua fração. Liesen (2011, p. 315, tradução nossa) analisando esta fala de Grassmann em contexto com toda a sua obra, afirma que "Isto novamente deve ter sido tão óbvio para ele que ele o deixou nesta breve observação; nenhuma prova formal da validade desta construção é dada".

Apesar da criação deste conceito ser de Grassmann, esta teoria, como toda a sua Teoria da Extensão, só obteve reconhecimento, e não foi como esperado, após Giuseppe Peano (1858 - 1932) publicar, em 1888, uma versão condensada de sua própria leitura da Teoria da Extensão intitulada *Geometric Calculus - according to the Ausdehnungslehre of H. Grassmann* (Cálculo Geométrico – de acordo com a teoria da extensão de H. Grassmann). Peano não requereu nenhuma autoria da teoria ali apresentada, pelo contrário, ele deixou bem claro que elas eram de Grassmann e que ele apenas inseriu o seu olhar e interpretação dessas ideias, ficando satisfeito se sua obra servisse para divulgar entre os matemáticos algumas das ideias de Grassmann, as quais, para Peano (1888), superavam o cálculo de Leibniz, Mobius, Belavittis e Hamilton por incorporar as ideias desses autores e apresentar cálculos mais potentes e fórmulas mais simples.

Peano era italiano e foi o matemático mais conhecido de sua época em seu país. A Itália teve um desenvolvimento tímido da álgebra abstrata se comparado com países como a Alemanha e a Inglaterra, sendo que, no final do século XIX, o maior interesse dos matemáticos italianos estava na lógica (BOYER, 1974). Neste período histórico, a Itália estava vivendo, assim com a Alemanha, seu processo de unificação, apesar de estar quase no fim, pois já havia conquistado, em 1870, a última cidade que faltava, Roma, que era a capital do Estado da Igreja Católica e se tornou a capital do país, faltando apenas a Igreja Católica reconhecer o Estado Italiano, o que viria a acontecer apenas em 1929 com o Tratado de Latrão. Foram momentos de guerras e conflitos que resultaram em consequências desastrosas para a população, principalmente para a classe operária, como a grave crise econômica causada pela queda da produção agrícola predominante no país, gerando muito desemprego e camponeses sem terra, com a concentração de terra nas mãos de poucos proprietários, e o lento desenvolvimento industrial. Estes fatores e o aumento considerável da população contribuíram para uma imigração em massa dos italianos por toda a Europa e América. Em meio a toda essa situação devastadora, a fim de fortalecer o país, em 1882, começam-se as conquistas territoriais por parte da Itália com o apoio da Áustria-Hungria e da Alemanha, a Tríplice Aliança, fato que despertou o sentimento colonialista nos italianos, tal como era buscado. Estas conquistas seguiram fortes até 1896 quando a Itália foi vergonhosamente derrotada pela Etiópia, abalando o otimismo dos italianos. A Tríplice Aliança seguiu até o início do século XX, quando ela começou a ser desfeita devido a novas conquistas territoriais.

Foi em meio a este contexto de pós-unificação e início de conquistas territoriais que Peano escreveu o seu Cálculo Geométrico. Ele era professor universitário na região Piemonte, situada na parte norte da Itália, região que mais sofreu com as guerras da unificação e com a queda da produção agrícola. Apesar da importância desta sua obra, ela não recebeu destaque, sendo raramente mencionada dentre suas produções, provavelmente isso se dê pelo fato de Peano ter dito que as ideias ali apresentadas eram de Grassmann, entretanto, esse autor deu sua versão dessas ideias e, segundo Liesen (2011), seus escritos mostram que ele lidou com um material que vai muito além do de Grassmann, principalmente em sua forma de tratar as transformações lineares, esclarecendo todas as ambiguidades e amarrando pontas soltas, como no caso da composição de transformações.

Outro momento em que Peano mostra ter avançado na teoria de Grassmann é em seu tratamento do conceito de espaço vetorial. Em meio à busca de Hamilton por um conjunto de dimensão maior que dois e sua descoberta dos quatérnios em 1843, Grassmann, em sua primeira versão da Teoria da Extensão, em 1844, já apresentava um conjunto com tais características. Na versão de sua obra de 1862, Grassmann apresenta mais claramente sua definição de um *domínio principal de ordem* n, que hoje chamamos de *espaço vetorial de dimensão* n, iniciando o processo de axiomatização de uma estrutura linear. Entretanto, segundo Dorier (1995), a definição de Grassmann contém alguns equívocos, como meras convenções da operação multiplicação e a redundância incorporada a propriedades fundamentais das operações, erros que só foram corrigidos quando Peano reformulou a definição de Grassmann em 1888. Nesta reestruturação, Peano passou a chamar tal conjunto de *sistema linear*, sendo esta a primeira estruturação de um conceito mais geral de vetores, com espaços vetoriais abstratos.

> Por algumas décadas, os sistemas de Grassmann e Hamilton competiram por influência. Entre as décadas de 1840 e 1870, o sistema Hamiltoniano era muito mais conhecido na maior parte da Europa do que o Grassmanniano. Entre as décadas de 1870 e 1890, as publicações sobre o sistema Grassmanniano aumentaram substancialmente e [...] Peano fazia parte dessa tendência. (MOORE, 1995, p. 265, tradução nossa)

Peano, em seu Cálculo Geométrico, a fim de tornar sua obra mais aceita entre os matemáticos, dentre outras coisas, enumerou seus resultados, sendo que o de número 75 corresponde à definição de transformação linear.

> **75. Definição.** Uma operação R, a ser realizada sobre cada entidade a de um sistema linear A, é dita *distributiva*, se o resultado da operação R sobre a entidade a, que indicaremos por Ra, é também uma entidade de um sistema linear, e as entidades
> $$R(a+a') = Ra + Ra', \qquad R(ma) = m(Ra)$$
> são verificadas, onde a e a' são entidades quaisquer de um sistema A e m é um número real qualquer. (PEANO, 1888, p. 122, tradução nossa, grifo do autor)

Logo após esta definição, Peano diz que Ra, a função distributiva de a é chamada de *transformação linear*. Em linguagem moderna, uma "entidade" pode ser considerada como um *vetor* e um "sistema linear" como um *espaço vetorial de dimensão finita*. Ele ainda generalizou a definição para um número infinito de vetores: "Se R é uma operação distributiva, $a, b, \dots$ entidades de um sistema A e $m, n, \dots$ números, então $R(ma + nb + \cdots) = mRa + nRb + \cdots$ e $R0 = 0$" (PEANO, 1888, p. 123, tradução nossa).

Organizando melhor as ideias de Grassmann, Peano escreveu no item 76:

> **76.** Introduzimos as seguintes convenções:
> **1.** Se R e S são duas transformações das entidades do sistema A em entidades do sistema linear B, então $R = S$ se $Ra = Sa$ para qualquer que seja a entidade a do sistema A.
> **2.** A multiplicação de entidades de um sistema por um número m é, como foi dito, uma operação distributiva; a indicamos pelo mesmo número m. Portanto, as equivalências $R = 1$ e $R = 0$ dizem que a operação R faz corresponder cada entidade nela mesma ou zero, respectivamente.
> **3.** Se R e S são transformações das entidades a de um sistema A em entidades do sistema linear B, então $(R+S)a = Ra + Sa$. A operação indicada por $R+S$ é também distributiva. A chamaremos de *soma* de duas operações R e S; é uma nova transformação de entidades de A em entidades de B. [...]
> **4.** Se R é uma transformação de entidades a de um sistema A em entidades do sistema B e se S é uma transformação das entidades de B em entidades do sistema C, então $SRa = S(Ra)$. A operação indicada por SR é também distributiva; a chamaremos de *produto* de duas transformações R e S. A operação SR transforma entidades do sistema A em entidades do sistema C. (PEANO, 1888, p. 123-124, tradução nossa, grifos do autor)

Observe que, neste item, Peano avança em relação a Grassmann, explicitando a composição de transformações lineares. E ele ainda define a soma e o produto de duas transformações, além da igualdade. O autor também afirma (sem prova) que vale a associatividade e a distributividade para a composição e define a comutatividade. Em símbolos: $T\,(SR) = (TS)\,R$ (associatividade), $S\,(R + R\,') = SR + SR'$ (distributividade) e $SR = RS$ (comutatividade).

Persistindo em seus avanços a partir de Grassmann, Peano (1888) prova o seguinte resultado que "mostra que o conceito de Grassmann da fração é, de fato, bem definido: uma transformação linear é unicamente determinada quando as imagens $b_1, \dots, b_n$ para uma dada base $a_1, \dots, a_n$ do espaço são especificadas" (LIESEN, 2011, p. 316, tradução nossa).

> **77. Teorema:** Se $a_1, \dots, a_n$ são entidades de um sistema linear A de dimensão n e $b_1, \dots, b_n$ são também entidades de um sistema linear, uma, e somente uma, transformação R do sistema A que satisfaz as condições
> $$Ra_1 = b_1, \dots, Ra_n = b_n$$
> é determinada. (PEANO, 1988, p. 124, tradução nossa)

Em seguida, Peano, assemelhando à escrita de Grassmann, escreve a transformação linear R na forma

$$R = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

e chama $b_1, \dots, b_n$ de *numeradores* e $a_1, \dots, a_n$ de *denominadores*. Ele ainda afirma que se a, b e c são números, então $\begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix} a$ se iguala a $\frac{c}{b}\,a$, "assim, ele relaciona transformações lineares com o quociente em Álgebra" (LIESEN, 2011, p. 316, tradução nossa).

Peano continuou seus escritos definindo o *inverso* da transformação R como

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ b_1 & \dots & b_n \end{pmatrix},$$

com $b_1, \dots, b_n$ entidades linearmente independentes. Finaliza o item 77 com as seguintes fórmulas sem suas demonstrações (fórmulas comuns hoje em dia):

$$R^{-1}R = 1, \qquad RR^{-1} = 1, \qquad (R^{-1})^{-1} = R.$$

Observe que a notação utilizada por Peano para definir uma transformação linear é a mesma utilizada hoje nos livros didáticos, mostrando que a formalização deste conceito se concretiza com Peano, mas não a finalização da teoria que abarca este conceito. Esta contou com as contribuições de Peano e de outros matemáticos posteriores a ele, como Whitehead (1898) em seu *A Treatise on Universal Algebra,* publicado uma década após a obra de Peano, na qual o autor define uma matriz como uma transformação linear, ou na linguagem de Grassmann, como uma fração, identificando-a com a matriz de Cayley.

Tendo como base os conceitos apresentados, inicialmente, na Teoria da Extensão, matemáticos começaram a desenvolver novos conceitos avançando na generalização e abstração da teoria, como é o caso do conceito de espaço vetorial de dimensão infinita. Este teve como impulso inicial a consideração que Peano fez acerca do conjunto das funções polinomiais de uma variável real: “Ele observou que se as funções polinomiais fossem restritas às de grau no máximo n, então elas formariam um sistema linear de dimensão $n + 1$. Mas se considerássemos todas essas funções polinomiais, acrescentou, então o sistema linear teria uma dimensão infinita” (MOORE, 1995, p. 268, tradução nossa). Entretanto, a formalização axiomática deste conceito só veio em 1920 com Banach.

Outros trabalhos também foram feitos tendo como suporte as ideias de Grassmann. Dentre eles, temos a axiomatização de um espaço vetorial normado, dada por Hilbert, a definição de base de uma extensão de um corpo dada por Dedekind e a axiomatização de um espaço vetorial normado completo dada por Banach, todos estes, e vários outros, firmados em bases lançadas por aquele que foi considerado o “criador” da Álgebra Linear.

Portanto, a partir do exposto, pode-se dizer que o nuclear do conceito de transformação linear é: uma aplicação entre espaços vetoriais não vazios cuja imagem da soma de dois vetores é igual à soma das imagens desses vetores e que a imagem de um vetor multiplicado por um escalar é igual a esse escalar multiplicado pela imagem do vetor, sendo o escalar um número real. Este aspecto nuclear será a referência para a organização do plano de ensino e estruturação da atividade de estudo seguindo os pressupostos de Davydov (1988).

2 CONTRIBUIÇÕES DA TEORIA DO ENSINO DESENVOLVIMENTAL PARA O PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE TRANSFORMAÇÃO LINEAR

No presente capítulo, apresentam-se alguns fundamentos teórico-metodológicos considerados por Davydov, necessários à organização do ensino que visa a formação do conceito de transformação linear. Em função da riqueza dos conceitos e premissas que fundamentam esta teoria, abordá-las *per si* foge ao propósito deste capítulo; assim, são apresentadas e discutidas, na primeira parte deste capítulo, as contribuições da teoria do ensino desenvolvimental para o ensino do conceito de transformação linear. Considerando que Davydov, ao desenvolver sua teoria, é extremamente rigoroso no que se refere à observância dos pressupostos da teoria histórico-cultural e sua matriz, o materialismo histórico dialético, considera-se necessário apresentar, inicialmente, uma visão geral da teoria histórico-cultural.

Na segunda parte, apresenta-se a organização do ensino do conceito de transformação linear com base na teoria do ensino desenvolvimental, expondo a análise da avaliação diagnóstica aplicada com o intuito de identificar a zona de desenvolvimento proximal dos alunos e estabelecer as bases reais do desenvolvimento intelectual que amparará o desenvolvimento do experimento didático formativo. Por último, caracteriza-se o experimento didático formativo como opção metodológica da pesquisa, estabelecendo os procedimentos metodológicos utilizados na execução de cada uma das ações de aprendizagem de Davydov e da ação de verificação de aprendizagem por parte do professor.

2.1 A teoria histórico-cultural

A teoria histórico-cultural foi criada pelo russo Lev Semyonovich Vygotsky (1896-1934), o qual teve Aleksandr Romanovitch Luria[7] e Aleksei Nokolaevitch Leontiev[8] como membros de sua equipe de trabalho, com o intuito de criar uma nova abordagem dos processos

---

[7] A. R. Luria (1902-1977): graduado em Ciências Sociais e Medicina, tornou-se colaborador de Vygotsky e intensificou suas pesquisas no campo das funções psicológicas superiores (AKHUTINA, 2015).

[8] A. N. Leontiev (1903-1979): psicólogo, incialmente colaborador de Luria, posteriormente, ambos se tornaram colaboradores de Vygotsky; desenvolveu a teoria da atividade a partir de bases vygotskyanas, defendendo que "o desenvolvimento humano se dá, sobretudo e primeiramente, pela atividade que o homem exerce" (LONGAREZI; FRANCO, 2015, p. 94).

psicológicos humanos a partir do quadro teórico do materialismo dialético e da concepção materialista da história aplicada à psicologia.

Assim, Vygotsky deu os primeiros passos em direção à psicologia histórico-cultural ao colocar em questão as correntes psicológicas, então em vigor, mostrando que tais teorias se fundamentavam em modelos elementaristas, que priorizavam a descrição das formas exteriores de comportamento, entendidas como habilidades mecanicamente construídas, e negavam a consciência, ou em modelos subjetivistas, que concebiam a consciência e os processos interiores desvinculados das condições materiais que os constituíam. Diferenciando-se dessas duas posições, Vygotsky, ao explicar a constituição histórico-social do desenvolvimento psicológico humano no processo de apropriação da cultura mediante a comunicação com outras pessoas, afirmou que as características humanas não estão presentes desde o nascimento do indivíduo, mas resultam da interação dialética do homem com o seu meio histórico-cultural.

Desse modo, ao elaborar uma teoria que compreende a natureza do comportamento humano como parte do desenvolvimento histórico, Vygotsky ofereceu significativas contribuições para o campo educacional no sentido de superar a visão dicotomizada de ensino, aprendizagem e desenvolvimento. Uma delas é que a atividade de ensino-aprendizagem deve ser concebida como um processo contínuo e mutável, que não se realiza de forma única e estática, mas que depende das interferências do meio social e cultural. Como afirma Vigotski (2001), o desenvolvimento cultural, o desenvolvimento histórico e o desenvolvimento social são as forças motrizes de todas as funções mentais humanas.

Para explicar o desenvolvimento da mente humana como construção sócio-histórica e cultural, Vygotsky buscou, no conceito de atividade, desenvolvido por Marx (1974), compreender as relações existentes entre o sujeito e o objeto e, identificar as condições de origem da consciência humana. A categoria atividade foi introduzida na ciência contemporânea pela lógica dialética que, segundo Davydov (1988, p. 21), "[...] examina, a partir de um determinado ponto de vista, a estrutura universal e os esquemas universais da atividade e, o mais importante, o desenvolvimento histórico desta nos processos de reflexão e transformação pelo homem da natureza e de si mesmo", que se dá pela atividade prática produtiva, denominada trabalho. O autor explica que, ao ser utilizado na área filosófico-pedagógica, o conceito de atividade

> [...] significa transformação criativa pelas pessoas da realidade atual. A forma original desta transformação é o trabalho. Todos os tipos de atividade material e espiritual do homem — são derivados do trabalho e carregam em si um traço principal — a transformação criativa da realidade, e ao final também do próprio homem. (DAVIDOV, 1999, p. 1)

A atividade, cuja expressão maior é o trabalho, é a principal mediação nas relações que os homens estabelecem entre si e com o mundo objetivo. Por meio dessas relações, o homem cria os instrumentos necessários à satisfação de suas necessidades materiais e espirituais que, ao serem satisfeitas, geram novas necessidades e, consequentemente, levam à produção de novos instrumentos que servem como mediadores entre sujeito e objeto. Leontiev (2004, p. 80), ao apresentar uma síntese dessa relação entre sociedade, trabalho e natureza, escreve:

> O trabalho se efetua em condições de atividade comum coletiva, de modo que o homem, no seio deste processo, não entra apenas numa relação determinada com a natureza, mas com outros homens, membros de uma dada sociedade. É apenas por intermédio desta relação a outros homens que o homem se encontra em relação com a natureza.

Pode-se concluir, então, que: na relação mediatizada pelos instrumentos de trabalho e pela sociedade, os homens agem sobre a natureza, modificando-a e por ela sendo modificados. Nesse processo, o trabalho humano como atividade social e coletiva, que se realiza por meio da utilização de instrumentos com os quais os homens agem sobre a natureza, leva à modificação da atividade psíquica, a partir da atividade externa, que se transforma em atividade da consciência. Assim, o desenvolvimento do pensamento, como conhecimento humano, ocorreu em união com o desenvolvimento da consciência social por meio da atividade prática humana de transformação da natureza. Como escreve Davydov (1988, p. 27): "A forma inicial de todos os tipos de atividade humana é a prática histórico-social do gênero humano, ou seja, a atividade laboral coletiva, adequada, sensório-objetal, transformadora, das pessoas". Nesse contexto, a consciência, como a concebe Vygotsky, é um aspecto da atividade laboral. "A consciência é o reflexo da realidade, refratada através do prisma das significações e dos conceitos linguísticos, elaborados socialmente" (LEONTIEV, 2004, p. 94).

Nesse processo dialético do desenvolvimento do psiquismo humano, em que a cultura é apropriada mediante a comunicação com outras pessoas, as funções psíquicas superiores nele envolvidas se efetivam primeiramente na atividade externa (interpessoal) que, em seguida, são internalizadas pela atividade individual, regulada pela consciência. No processo de internalização de formas culturais de comportamento da atividade social e historicamente desenvolvidas, há a mediação da linguagem em que os signos adquirem significado e sentido (VIGOTSKI, 1989). Assim, as funções psicológicas superiores são de origem sociocultural e emergem de processos psicológicos elementares, de origem biológica.

> As funções biológicas não desaparecem com a emergência das culturas, mas adquirem uma nova forma de existência: elas são incorporadas na história humana. Afirmar que o desenvolvimento humano é cultural equivale, portanto a dizer que é histórico, ou seja, traduz o longo processo de transformação que o homem opera na natureza e nele mesmo como parte dessa natureza. (PINO, 2000, p. 51)

Ainda em relação às funções psicológicas, é importante registrar que

> Vygotsky fez uma distinção principal entre funções mentais 'inferiores', naturais, como percepção elementar, memória, atenção e vontade, e as funções 'superiores' ou culturais, que são especificamente humanas e que aparecem gradualmente no curso de uma transformação radical das funções inferiores. As funções inferiores não desaparecem numa psique madura, mas são estruturadas e organizadas segundo objetivos sociais e meios de conduta especificamente humanos. (KOZULIN, 2002, p. 117, destaques do autor)

Nessa citação, ressalta-se que Vigotski (2001) não nega a interferência dos processos psicológicos elementares, de origem biológica, no desenvolvimento das funções psicológicas superiores, mas afirma que o desenvolvimento humano é cultural. Isso significa dizer que o desenvolvimento das funções superiores é histórico, que expressa o longo processo de transformação que o homem opera na natureza e nele mesmo como parte dessa natureza. Em suas palavras:

> Podem-se distinguir, dentro de um processo geral de desenvolvimento, duas linhas qualitativamente diferentes de desenvolvimento, diferindo quanto à sua origem: de um lado, os processos elementares, que são de origem biológica; de outro, as funções psicológicas superiores, de origem sociocultural. [...] A história do desenvolvimento das funções psicológicas superiores seria impossível sem um estudo de sua pré-história, de suas raízes biológicas, e de seu arranjo orgânico. (VYGOTSKI, 1991, p. 35)

Conforme mencionado, como o desenvolvimento dessas funções está associado aos processos sociais e culturais, elas são de caráter mediatizado e necessitam, portanto, de instrumentos que estabeleçam as ligações entre a realidade objetiva/externa e o pensamento, o que se realiza pela presença mediadora do signo, o qual "age sobre o indivíduo e não sobre o ambiente" (VYGOTSKY, 1991, p. 29).

A internalização do sistema de signos (linguagem, escrita, sistema de números) culturalmente produzidos, provoca transformações na personalidade, contribuindo para o desenvolvimento individual. A mediação por esses signos se dá pela interação sociocultural dos indivíduos da mesma espécie, principalmente por meio daqueles que são mais experientes e capazes, através da utilização de instrumentos que elevam o pensamento humano.

Vygotski (1991) considera a internalização como um processo que reconstrói internamente uma operação externa, reconstrução esta mediada por signos e operação mediada por outra pessoa. Para o autor, o processo de internalização consiste em uma série de transformações assim descritas:

> a) Uma operação que inicialmente representa uma atividade externa é reconstruída e começa a ocorrer internamente. É de particular importância para o desenvolvimento dos processos mentais superiores a transformação da atividade que utiliza signos, cuja história e características são ilustradas pelo desenvolvimento da inteligência prática, da atenção voluntária e da memória.
> b) Um processo interpessoal é transformado num processo intrapessoal. Todas as funções no desenvolvimento [...] aparecem duas vezes: primeiro, no nível social, e, depois, no nível individual; primeiro, entre pessoas (interpsicológica), e, depois, no interior [...] (intrapsicológica). Isso se aplica igualmente para a atenção voluntária, para a memória lógica e para a formação de conceitos. Todas as funções superiores originam-se das relações reais entre indivíduos humanos.
> c) A transformação de um processo interpessoal num processo intrapessoal é o resultado de uma longa série de eventos ocorridos ao longo do desenvolvimento. O processo, sendo transformado, continua a existir e a mudar como uma forma externa de atividade por um longo período de tempo, antes de internalizar-se definitivamente. Para muitas funções, o estágio de signos externos dura para sempre, ou seja, é o estágio final do desenvolvimento. (VYGOTSKI, 1991, p. 41)

Em se tratando da educação, a fala e a linguagem estão diretamente relacionadas com o processo de aquisição do saber que ocorre por meio de uma atividade prática, pois as palavras faladas ou escritas, em ambos os casos pensadas, agem como elementos mediadores que delineiam este saber. Desta forma, a fala auxilia na organização das funções psicológicas superiores, contribuindo para o desenvolvimento de uma nova organização estrutural da atividade prática. "Assim que a fala e o uso de signos são incorporados a qualquer ação, esta se transforma e se organiza ao longo de linhas inteiramente novas" (VYGOTSKI, 1991, p. 20).

A linguagem é vista por Vigotski (2001), antes de tudo, como um meio de interação social, sendo que suas funções cognitivas e comunicativas constituem a base de uma forma de atividade. É por meio da palavra que surge o pensamento e que o homem pode comunicar-se, sendo uma palavra carregada de significado, o qual é uma função da linguagem e do pensamento (VYGOTSKI, 1991; VIGOTSKI, 2001). Para o autor, as formas superiores de comunicação psicológica humana só são possíveis porque o homem reflete, no pensamento, a realidade de modo generalizado.

> Para se comunicar alguma vivência ou algum conteúdo da consciência a outra pessoa não há outro caminho a não ser a inserção desse conteúdo numa determinada classe, em um grupo de fenômenos, e isto, como sabemos, requer necessariamente generalização. Verifica-se, desse modo, que a comunicação pressupõe necessariamente generalização e desenvolvimento do significado da palavra, ou seja, a generalização se torna possível se há desenvolvimento da comunicação. Assim, as

> formas superiores de comunicação psicológica, inerentes ao homem, só são possíveis porque, no pensamento, o homem reflete a realidade de modo generalizado. (VIGOTSKI, 2001, p. 12)

Desta forma, a mediação exercida pela linguagem possibilita ao homem comunicar-se expressando o seu pensamento sobre a realidade, que foi apreendido e generalizado através do significado da palavra. Assim, o homem torna-se capaz de interferir no contexto social, cultural e histórico de sua realidade. A mediação é, portanto, o processo resultante da intervenção de um elemento em uma relação. Para Vygotski (1991), este elemento é o signo que age por meio de algum instrumento, promovendo a interação do objeto com o indivíduo que resultará na interiorização, na reconstrução interna deste objeto, que é externo, enquanto conceito.

Vigotski (2001) faz distinção entre dois tipos de conceitos: os espontâneos e os científicos. Os conceitos espontâneos são aqueles adquiridos espontaneamente, no dia a dia, em meio ao desenvolvimento humano; já os científicos são aqueles ensinados na escola e que possuem uma base científica que o comprove como autêntico e verdadeiro. Ambos os conceitos passam por um processo de interiorização. Segundo o autor, o desenvolvimento do conceito científico transcorre sob as condições do processo educacional, constituindo uma forma original de colaboração sistemática entre o professor e o aluno, na qual ocorre o amadurecimento das funções psicológicas superiores. Ele ainda afirma que o início da formação dos conceitos científicos se dá quando o aluno assimila pela primeira vez um significado ou termo novo para ele, havendo um duplo movimento entre os conceitos científicos e os conceitos espontâneos.

A formação de conceitos científicos resulta de uma atividade mental complexa com o uso direto de signos nos processos mentais superiores, os quais são incorporados a uma nova estrutura mental, formando uma nova síntese. Assim, os objetos do plano mental são signos internalizados, que substituem os objetos do mundo real por elementos mentais. A linguagem é, então, concebida como o instrumento que possibilita a abstração e a generalização da realidade por meio da atividade mental. Entretanto, o desenvolvimento do conceito científico começa pelo nível que o conceito espontâneo ainda não atingiu em seu desenvolvimento.

Os estudos de Vygotsky mostram dois níveis de desenvolvimento: o nível de desenvolvimento real, constituído pelas funções mentais que se estabeleceram como resultados de ciclos de desenvolvimento já completados e o nível de desenvolvimento potencial, caracterizado pelas situações que podem ser apropriadas pelo aluno por meio do auxílio do professor. A distância entre esses dois níveis é nomeada de zona de desenvolvimento proximal, na qual estão presentes as funções mentais que ainda não amadureceram, mas que poderão amadurecer e se tornar o nível de desenvolvimento real. Assim, “O nível de desenvolvimento real caracteriza o desenvolvimento mental retrospectivamente, enquanto a zona de desenvolvimento proximal caracteriza o desenvolvimento mental prospectivamente" (VYGOTSKI, 1991, p. 58).

Desta forma, a zona de desenvolvimento proximal pauta em saber o que o aluno já domina no campo do conhecimento com o intuito de desenvolver o que está no campo do possível conhecimento, tendo o professor como o colaborador, o mediador, que impulsiona o aluno para o desenvolvimento mental. Isso reafirma a importância das interações sociais para a efetivação da aprendizagem, uma vez que o aluno necessita do professor como o mediador do conhecimento e dos demais alunos para a transformação do conhecimento interpessoal em intrapessoal. Além disso, a zona de desenvolvimento proximal aumenta a eficiência e a utilidade da aplicação de avaliações diagnósticas do desenvolvimento mental relacionado à formação de conceitos, configurando uma oportunidade para os professores verificarem o nível do avanço intelectual dos alunos, bem como de avaliarem sua prática e rever os métodos e atividades que possam corroborar com o desenvolvimento do aluno.

Assim sendo, formar conceito científico é o processo pelo qual a zona de desenvolvimento proximal deve passar para se tornar um nível de desenvolvimento real. Esse processo se inicia com a obtenção da relação universal, da essência desse conceito e é obtida pela análise do desenvolvimento histórico do objeto real que condiz com o conceito a ser formado. Cada objeto possui uma palavra que o denomina, sendo ela carregada de sentidos e significados que são historicamente construídos; logo, esses sentidos e significados se transformam com as variações culturais ao longo da história. Vigotski (2001, p. 400-401) explica isso dizendo que "[...] no curso do desenvolvimento histórico da palavra modificam-se tanto o conteúdo concreto da palavra quanto o próprio caráter da representação e da generalização da realidade na palavra." Consequentemente, o desenvolvimento histórico do conceito é parte inerente ao processo de ensino-aprendizagem que visa o desenvolvimento humano. Davydov (1988, p. 147), corroborando o que afirma Vigotski (2001), escreve:

> Sobretudo deve-se levar em conta que a essência da coisa pode ser revelada só no exame do processo do desenvolvimento de tal coisa. A essência existe só passando por uns e outros fenômenos. Neste plano é comum caracterizar o essencial como o mediatizado, o interno, como base dos fenômenos e a estes como manifestação imediata, externa da essência. Os fenômenos estão como se fossem a superfície das coisas; a essência oculta a observação imediata.

Portanto, pensar o objeto de estudo é pensá-lo em seu desenvolvimento histórico, cerceado do contexto em que surgiu e se desenvolveu até chegar a nós como um produto da ciência que, cientificamente, está concluído, mas que, humanamente, está em constante processo de transformação por meio das abstrações e generalizações subjetivas do indivíduo, mediadas pelos seus signos e instrumentos que estimulam o desenvolvimento.

2.1.1 A teoria do ensino desenvolvimental

Vasili Vasilievich Davydov nasceu em 1930 e morreu em 1998. Membro da Academia de Ciências Pedagógicas, doutor em psicologia, professor universitário, escreveu vários livros, entre eles: *Tipos de generalización en la enseñanza, Problemas de la enseñanza y del desarollo, La enseñanza escolar y el desarollo psiquico.* O estudioso pertence à terceira geração de psicólogos russos e soviéticos que desenvolveram os trabalhos do grupo inicial de Vygotsky realizados nas décadas de 1920 e 1930 do século passado.

Estudos sobre modos de aprender e ensinar realizados por Vigotski (1989, 2001), Leontiev (1983, 2001) e Davydov (1988), produzidos a partir da década de vinte do século XX, revelam importantes contribuições para repensar a aprendizagem conceitual. Desde então, esses autores se preocupavam com o modo pelo qual o ensino poderia propiciar aos alunos a apropriação dos conhecimentos científicos. Provavelmente, por esse motivo, defendiam a escola como lugar social privilegiado para se apropriar e utilizar com êxito os conhecimentos constituídos na história da humanidade, de modo a formar capacidades intelectuais com base nos procedimentos lógicos e investigativos da ciência ensinada. Assim, concebem a educação e o ensino como formas universais de mediação cultural para o desenvolvimento humano, em cujo processo os alunos tenham chances de formular e operar com conceitos.

Essa concepção de educação, que determina a condução do processo de ensino-aprendizagem, coloca como desafio para o professor a tarefa de organizar o ensino de modo que a aprendizagem dos conhecimentos ocorra de forma intencional e sistematizada. Como escreve Moura (2014, apud SOUSA; PANOSSIAN; CEDRO, 2014, p. 10-11):

> [...] ensinar é o ato consciente do educador que assume para si de forma intencional o papel de organizador de situações de ensino que possibilitem a apropriação de conceitos de modo que estes sejam ferramentas simbólicas capazes de munir os sujeitos de instrumentos e modo de usá-los para aprimorar cada vez mais os seus processos de construção da vida. Estes processos, se compreendidos como constante aprimoramento da humanidade, não têm fim.

Nessa perspectiva, o ensino constitui, conforme afirma Davydov (1988), a forma internamente indispensável e geral de desenvolvimento intelectual do aluno por meio da formação de conceitos teóricos. Esse autor, a partir das contribuições de Vygotsky[9], Leontiev[10] e, especialmente, de Elkonin[11], se dedicou à explicação teórica da atividade de estudo[12], sugerindo um modo de organização do ensino voltado para o desenvolvimento intelecutal do aluno. Nessa organização, o conteúdo da atividade de estudo é o pensamento teórico ou conceito. Explicitando essa idéia, Libâneo (2008, p. 61) esclarece que o pensamento teórico ou o conceito:

> [...] não se refere apenas às características e propriedades dos fenômenos em estudo, mas a uma ação mental peculiar pela qual se efetua uma reflexão sobre um objeto que, ao mesmo tempo, é um meio de reconstrução mental desse objeto no pensamento. Nesse sentido, pensar teoricamente é desenvolver processos mentais pelos quais chegamos aos conceitos e os transformamos em ferramentas para fazer generalizações conceituais e aplicá-las a problemas específicos. Como escreve Seth Chaiklin, o conceito significa um conjunto de procedimentos para deduzir relações particulares de uma relação abstrata.

Nesse sentido, a organização do ensino tem por finalidade a assimilação, pelos alunos, do processo investigativo que foi utilizado para a criação dos conceitos, nos quais se encontra incorporado o processo sócio-histórico de sua produção. É o que Davydov (1988) considera apropriação dos procedimentos lógicos e investigativos com os quais os pesquisadores trabalharam/trabalham ao formular o conhecimento de um objeto. Nessa atividade, os alunos devem reproduzir o conhecimento teórico vinculado ao objeto de estudo. A formação do conhecimento teórico situa-se, portanto, no processo investigativo que deu origem ao objeto científico. Desse modo, por meio da aprendizagem de conceitos teóricos, impregnados das capacidades humanas formadas historicamente e objetivadas na cultura material e espiritual, os alunos interiorizam ações mentais de abstração e generalização inerentes ao objeto de estudo. Em outras palavras, assimilam o modo de proceder com esse objeto, de agir com ele por procedimentos lógicos. Sendo assim, o conteúdo do ensino é o conhecimento teórico científico mediado pela ciência e pelo professor que organiza o ensino, propondo tarefas que conduzem

---

[9] Vygotsky estabeleceu a origem social da psique humana e postulou que o período escolar como um todo é o mais fértil para a aprendizagem e o desenvolvimento das funções psicológicas superiores.

[10] Tomando como ponto de partida os estudos de Vygotsky, Leontiev estudou a atividade humana, o trabalho, analisado anteriormente por Marx; criou a teoria geral da atividade e teorizou sobre os componentes estruturais dessa categoria: necessidades, motivos, objetivos, finalidades, ações, procedimentos.

[11] Daniil Borisovich Elkonin (1904-1984): estruturou a periodização do desenvolvimento psíquico e apresentou as principais hipóteses sobre atividade de estudo, a qual, até então, não tinha sido colocada como um problema pela psicologia infantil e pedagógica. "Tudo indica que as ideias de Elkonin [...] converteram-se na plataforma a partir da qual ele mesmo, V. Davidov, A. Márkova e outros desenvolveram seus estudos teóricos e experimentais sobre esse tipo especial de atividade [...]" (AQUINO; CUNHA 2016, p. 176).

[12] "[...] Davydov identificou o conhecimento teórico como o conteúdo central e específico da atividade de aprendizagem dos alunos" (LIBÂNEO; FREITAS, 2015, p. 343).

os alunos à busca das conclusões científicas obtidas com a investigação do objeto, guiadas pelo movimento dialético: movimento do abstrato ao concreto.

Todavia, embora, na década de setenta do século XX, Davýdov (1982) tenha apontado os limites da concepção que o ensino de Matemática até então vigente, atualmente, passados quase cinquenta anos, suas ponderações acerca do caráter empírico dos conteúdos, as habilidades trabalhadas no contexto escolar, aproximando-se, por conseguinte, do modo como a lógica formal conduz a relação entre abstração, a generalização e os conceitos, ainda se fazem presentes na maioria das escolas brasileiras, particularmente na Matemática escolar. Isso acaba por limitar o desenvolvimento do modo de pensar a Matemática pelos estudantes e, por conseguinte, o desenvolvimento humano.

Nesse sentido, Davydov (1988), ao afirmar que o pensamento teórico constitui o objetivo principal da atividade de ensino, critica a escola tradicional, destacando, dentre outros aspectos da formação do pensamento empírico, a concepção de conhecimento que começa por um movimento do sujeito em direção a um objeto empírico e se constitui como expressão verbal das representações derivadas da atividade dos órgãos dos sentidos enlaçada com a vida real. Em outras palavras, como movimento da exterioridade derivada da atividade objetal-sensorial das pessoas, descrita pela categoria da existência. Assim sendo, o conceito é concebido como toda a generalidade abstrata expressa por palavras (DAVÝDOV, 1982). Contudo, o autor observa que esta forma de pensamento conceitual, expressa por palavras ou signos através de uma representação geral, é indispensável, ainda que permaneça limitada a representações gerais articuladas à atividade prática. Nesse sentido, Davydov (1988, p. 126) escreve que:

> Embora o pensamento empírico se realize em categorias da existência presente, suas possibilidades cognitivas são muito amplas. Assegura às pessoas um amplo campo na discriminação e designação das propriedades dos objetos e suas relações, inclusive as que em um momento determinado não são observáveis, mas que se deduzem indiretamente sobre a base de raciocínios.

Ao propor a unidade entre o empírico e o racional como alternativa à superação do pensamento empírico, tendo em vista a formação do pensamento teórico, Davydov (1988, p. 127) argumenta:

> O sensorial e o racional escreve P. Kopnin, não são dois degraus no conhecimento, mas dois momentos, que o penetram em todas as etapas do desenvolvimento. [...] A unidade do sensorial e do racional no processo do conhecimento não significa que um siga o outro, mas que um e outro participam permanentemente em nosso conhecimento. [...] No homem não se pode falar sequer do conhecimento sensorial como tal.

Deste modo, para Davydov (1988), a construção do conhecimento não requer o isolamento dos saberes empírico e teórico, ao contrário, embora com características diferenciadas, esses saberes se complementam no processo de interiorização dos conceitos teóricos, cujo conteúdo específico é a existência mediatizada, refletida, essencial. Como explica Davydov (1988, p. 127-128):

> O pensamento teórico é o processo de idealização de um dos aspectos da atividade objetal-prática, a reprodução, nela das formas universais das coisas. Tal reprodução tem lugar na atividade laboral das pessoas como experimentação objetal sensorial peculiar. Depois, [...] adquire cada vez mais um caráter cognoscitivo, permitindo às pessoas passar, com o tempo, aos experimentos realizados mentalmente. [...] Ter um conceito sobre um objeto significa saber reproduzir mentalmente seu conteúdo, construí-lo. A ação mental de construção e transformação do objeto constitui o ato de sua compreensão e explicação, a descoberta de sua essência.

O movimento do pensamento presente nessas ações segue a direção do geral (abstrato) ao particular (concreto). Como essa ação não se dá de forma mecânica e automática, atingir o concreto requer iniciar o processo por meio das conexões historicamente construídas do objeto, conexões simples das quais deriva o objeto de estudo (DAVYDOV, 1988). Tais conexões devem ser desvendadas em suas objetividades, complexidades e contradições, revelando o movimento do objeto para atingir a sua essência, assegurando a unidade das conexões simples e iniciais e garantindo a apropriação do que é essencial ao objeto em estudo, apreendendo, consequentemente, o que Davydov (1988) chama de nuclear do objeto. Nesse momento, temos a formação do conceito como resultado mental da reunião das abstrações (DAVYDOV, 1988). Para este autor, no referido momento, atingimos o concreto partindo do abstrato, formando o conhecimento teórico, que é tido como uma combinação unificada da abstração inicial, da generalização e dos conceitos teóricos.

Por meio da aquisição de conhecimentos teóricos via conceitos teóricos, desenvolve-se o pensamento teórico no plano das ações mentais, com o qual o aluno torna-se apto a compreender o objeto em movimento, a formar novos conceitos e a pensar por meio desses novos conceitos. O conceito é a ferramenta mental que propicia ao aluno pensar de acordo com as normas da ciência em questão, no caso, da Matemática. Em específico, o conceito possibilita ao aluno pensar algebricamente, dominando o procedimento geral da construção mental do objeto algébrico. Estando de posse de um conceito teórico, ele torna-se apto a deduzir e explicar as manifestações particulares e singulares da base universal desse conceito, construindo o seu sistema de conceitos conforme descreve Vigotski (2001, p. 294):

> Por isso o conceito científico pressupõe necessariamente outra relação com objetos, só possível no conceito, e esta outra relação com o objeto, contida no conceito científico, por sua vez pressupõe necessariamente a existência de relações entre os conceitos, ou seja, um sistema de conceitos. Desse ponto de vista, poderíamos dizer que todo conceito deve ser tomado em conjunto com todo o sistema de suas relações de generalidade, sistema esse que determina a medida de generalidade própria desse conceito [...].

Sintetizando as proposições de Vigotski (2001), Davydov (1988) enfatiza que todo conceito teórico possui um conteúdo e uma forma, sendo o conteúdo os reflexos dos processos de desenvolvimento dos sistemas integrais, das relações entre o universal e o singular, da essência e dos fenômenos; já a forma do conceito é vista como o procedimento de ascensão do abstrato ao concreto e de dedução do singular partindo do universal.

Ressalta-se, então, que é por meio da formação de conceitos que se pode pensar teoricamente e formar novos conceitos, constituindo-se um sistema de conceitos visto como integral em toda a sua cientificidade e subjetividade, elevando a consciência do indivíduo a um nível superior, a saber, a uma consciência teórica que lhe permita pensar cientificamente e desenvolver-se integralmente (social, cultural e historicamente). Em resumo, cabe registrar que, segundo Libâneo (2011), tanto para Vygotsky quanto para Davydov,

> [...] o conceito não se refere apenas às características e propriedades dos fenômenos em estudo, mas a uma ação mental peculiar pela qual se efetua uma reflexão sobre um objeto que, ao mesmo tempo, é um meio de reconstrução mental desse objeto pelo pensamento. Nesse sentido, pensar teoricamente é desenvolver processos mentais pelos quais chegamos aos conceitos e os transformamos em ferramentas para fazer generalizações conceituais e aplicá-las a problemas específicos. Como escreve Seth Chaiklin, o conceito significa um conjunto de procedimentos para deduzir relações particulares de uma relação abstrata. (LIBÂNEO, 2011, p. 94)

Para que o aluno consiga formar um conceito e pensar teoricamente por meio desse conceito, Davydov (1999) elaborou uma estrutura própria para a atividade de estudo, recorrendo aos componentes da atividade humana determinados por Leontiev e seus colaboradores, quais sejam: “as necessidades e os motivos, os objetivos, as condições e meios de seu alcance, as ações e operações” (DAVIDOV, 1999, p. 1). Entretanto, ele avançou em relação a Leontiev ao considerar o desejo como sendo também um elemento psicológico da atividade: “Diferentemente da ideia de Leontiev, o desejo é essencial na estrutura interdisciplinar da atividade [...]. Um desejo é o núcleo básico de uma necessidade” (DAVYDOV, 1999, p. 3).

Por meio da atividade de estudo, o aluno pode apropriar-se do desenvolvimento histórico de um objeto, consequentemente, assimilar a história da humanidade que conduziu ao objeto em questão. Assim, a forma como os conceitos serão apresentados aos alunos interfere na sua forma de ver e lidar com esse objeto, sendo necessária a existência de um procedimento de exposição do conceito que seja diferente do procedimento de investigação dele, mas sem desconsiderar que, na atividade de estudo, o pensamento do aluno deve ser similar ao pensamento dos cientistas "que expõem os resultados de suas investigações por meio das abstrações, generalizações, e conceitos teóricos substantivas, que exercem um papel no processo de ascensão do abstrato ao concreto" (DAVYDOV, 1988, p. 166). Desta forma, a atividade de estudo é fruto do método dialético de ensino e recorre à reprodução mental criativa do objeto de estudo, obtida por meio do percurso que o cientista trilhou ao investigar e formular o conceito científico que se tornou objeto da atividade de estudo.

Davídov e Márkova (1987) apontam os elementos estruturantes da atividade de estudo como sendo as tarefas de estudo, ações de estudo (ou ações de aprendizagem) e as ações de controle e avaliação. A tarefa de estudo "é uma unidade de uma meta (objetivo) e as condições para se atingir esta meta (objetivo) [...]. Estabelecer uma tarefa para um indivíduo é estabelecer uma meta a ser atingida em condições específicas" (DAVYDOV, 1999, p. 4), sendo que "[...] a principal diferença entre esta e outras tarefas consiste em que sua finalidade e resultado são a transformação do próprio sujeito atuante" (DAVÍDOV; MÁRKOVA, 1987, p. 324). Dessa forma, "se as condições para a realização do objetivo forem mudadas, embora o objetivo continue o mesmo, a tarefa é também mudada" (DAVYDOV, 1999, p. 4). As ações de estudo

> [...] orientam-se a individualizar as relações gerais, os princípios guias, as ideias chave da área dada de conhecimentos, a modelar estas relações, a dominar os procedimentos de passagem das relações gerais, a sua concretização e o inverso, os procedimentos de passagem do modelo ao objeto e o inverso, etc. (DAVÍDOV; MÁRKOVA, 1987, p. 325)

Sobre as ações de controle e avaliação, Davidov (1999, p. 4) pontua que: "O controle garante ao aluno uma execução correta das ações de estudo, e a avaliação lhe permite determinar se assimilou ou não (e em qual grau) a forma geral de solução da tarefa de estudo dada" (DAVIDOV, 1999a, p. 5). Por meio da tarefa de estudo, o aluno adquirirá novos conhecimentos teóricos na área estudada, dominando novos procedimentos de ações, resultado das abstrações e generalizações executadas durante a atividade de estudo. Para que isso ocorra, é necessário que a tarefa instigue o pensamento do aluno frente ao desconhecido, a fim de que ele assimile os novos conceitos e procedimentos, permitindo ao aluno descobrir as condições de origem do conhecimento por meio de situações-problema que estejam internamente ligadas "com o nível teórico de assimilação dos conhecimentos e com o pensamento teórico" (DAVYDOV, 1988, p. 174).

Para que o aluno execute uma tarefa de estudo, ele precisa cumprir determinadas ações as quais Davydov (1988) chama de ações de aprendizagem. Estas ações correspondem à finalidade da tarefa e são executadas mediante operações, que são as condições concretas da tarefa. São elas:

> - transformação dos dados da tarefa a fim de revelar a relação universal do objeto estudado;
> - modelação da relação diferenciada em forma objetivada, gráfica ou por meio de letras;
> - transformação do modelo da relação para estudar suas propriedades em "forma pura";
> - construção do sistema de tarefas particulares que podem ser resolvidas por um procedimento geral;
> - controle da realização das ações anteriores;
> - avaliação da assimilação do procedimento geral como resultado da solução da tarefa de aprendizagem dada. (DAVYDOV, 1988, p. 173, destaques do autor)

Em síntese, a organização e a realização da atividade de estudo dos alunos desencadeia o exercício do pensamento teórico, que é um pensamento dialético. Ela se desenvolve por meio de tarefas e estas por meio de ações de aprendizagem organizadas com o intuito de solucionar os problemas propostos na tarefa.

Segundo Davydov (1988), a base sólida para a compreensão da essência do conceito encontra-se em sua gênese. Assim, a organização do ensino exige que o professor, antes de tudo, "[...] se detenha cuidadosamente sobre o conteúdo científico, analise sua origem e desenvolvimento no campo científico que integra, identifique as relações nele presentes, o tipo de atividade mental que ele contém e a lógica científica que o governa" (FREITAS, 2011, p. 83). Para isso, é preciso considerar na organização do ensino dos conceitos: a) a compreensão do processo de pesquisa pelo qual se chegou a esse conteúdo, ou seja, da epistemologia da Matemática que se ensina; b) saber por quais métodos e procedimentos ensinará seus alunos a se apropriarem do conteúdo da Matemática e, especialmente, as ações mentais ligadas a esse conteúdo (LIBÂNEO, 2011). Portanto, ensinar os alunos a pensar dialeticamente importa permitir a eles o exercício desse pensamento no processo de aprendizagem do conceito de transformação linear e o modo de organização do ensino sob o qual esse exercício é viável.

Descobrir, a essência do objeto é um objetivo do ensino que prioriza a formação do pensamento teórico, uma vez que a tarefa desse tipo de pensamento é formar o conceito na mente do aluno por meio dos dados levantados no momento de contemplação e representação do objeto e, assim, reproduzir, omnilateralmente, o sistema de conexões internas que originam o concreto inicialmente dado, a saber, o concreto real, descobrindo, portanto, a sua essência, ao tornar o objeto um objeto inteligível, o que implica uma ação do pensamento sobre o objeto para que ele seja tratado como um "concreto de pensamento". Deste modo, o processo de conhecimento do objeto não compreende o objeto, aprendido pelos sentidos como sendo o objeto do conhecimento científico. Este é a elaboração teórica do que já foi construído teoricamente sobre ele. Logo, conhecê-lo, na perspectiva do materialismo científico, é aproximar-se dele por meio do "concreto de pensamento". Para Marx (1974, p. 228),

> [...] O concreto é concreto por ser a síntese de múltiplas determinações, logo, unidade da diversidade. É por isso que ele é para o pensamento um processo de síntese, um resultado, e não um ponto de partida, apesar de ser o verdadeiro ponto de partida e, portanto, igualmente o ponto de partida da observação imediata e da representação. O primeiro passo reduziu a plenitude da representação a uma determinação abstrata; pelo segundo, as determinações abstratas conduzem à reprodução do concreto pela via do pensamento.

Essa forma de entendimento do objeto de conhecimento indica que um ensino que contribua para a formação de conceitos deve ser organizado de modo a conduzir o aluno por meio do processo de ascensão do abstrato ao concreto (DAVYDOV, 1988).

2.2 Organização da atividade de estudo do conceito de transformação linear

Conforme mencionado, toda a teoria do ensino desenvolvimental é pautada na formação do pensamento teórico, que é o uso de conceitos científicos como ferramenta mental para pensar as relações que permeiam o ensino e a realidade circundante. Assim, a formação de conceitos é o processo que o aluno deve percorrer para atingir esse fim, tendo em vista a formação de ações mentais com alto grau de abstração orientadas à ação no plano da realidade concreta. Para isso, é necessário que ele chegue à essência do objeto em estudo, ou seja, que identifique o "núcleo" do objeto, o aspecto mais geral que o caracteriza, e apreenda, pelo processo dedutivo, suas diversas particularidades de modo a converter o conhecimento coletivo sobre o objeto em conceitos em sua atividade pensante.

Para desvendar esse nuclear, conforme Davydov (1988) retrata, é necessário conhecer a historicidade do objeto, seu surgimento e desenvolvimento, perpassando toda a objetividade, complexidade e contradições desse desenvolvimento, refletindo-o, em sua essência, no sistema de conceitos estabelecido no plano mental. Assim, o conceito se torna um objeto criado social e historicamente que age sobre a cultura.

> [...] a essência da coisa pode ser revelada só no exame do processo do desenvolvimento de tal coisa. A essência existe só passando por uns e outros fenômenos. Neste plano é comum caracterizar o essencial como o mediatizado, o interno, como base dos fenômenos e a estes como manifestação imediata, externa da essência. Os fenômenos estão como se fossem a superfície das coisas; a essência oculta a observação imediata. [...] Assim, a essência é a conexão interna que, como fonte única, como base genética, determina todas as outras especificidades particulares do todo. Trata-se de conexões objetivas, as que em sua dissociação e manifestação asseguram a unidade dos aspectos do todo, isto é, dão ao objeto um caráter concreto. Neste sentido, a essência é a determinação universal do objeto. (DAVYDOV, 1988, p. 148)

Para conduzir os alunos à formação do conceito e levá-los a pensar segundo as normas da ciência, faz-se necessário que o modo de organizar o ensino esteja voltado para esse fim. E a forma de apresentar esse lógico-histórico é uma questão chave a ser pensada, pois ela precisa estar articulada com os pressupostos davydovianos, bem como com uma metodologia que permita o pensar crítico e reflexivo do aluno, não se limitando a uma mera exposição de fatos históricos.

A Matemática é uma ciência que está intrínseca na história da humanidade, tendo o seu desenvolvimento fundado na cultura dos povos. Desvelar essas relações em uma sala de aula é evidenciar aos alunos que a Matemática é uma atividade humana social, cultural e histórica, portanto, passível de ser apreendida. A forma de conduzir esse processo deve ser pensada e estruturada considerando também que os alunos, que estão inseridos nesse processo, possuem um contexto social e cultural, bem como uma história. As formas de inserir a história nas aulas de Matemática, considerando todas as ponderações levantadas, podem ser várias: pode ser por meio de problemas históricos, de problemas que conduzam à história, por pesquisa sobre a história e pela sua exposição, dentre outras, porém, sem jamais deixar de desvendar a dialética existente nesse percurso.

Infelizmente, o uso da história da Matemática na Educação Superior está muito longe do necessário, para não se dizer do mínimo, pautando-se, predominantemente, na transmissão e recepção de conteúdos matemáticos, desvinculados de uma metodologia de ensino que propicie uma aprendizagem mais coerente com as necessidades do homem no mundo atual. Diante disso, a proposta deste trabalho é articular o lógico-histórico do conceito de transformação linear com a proposta do ensino desenvolvimental de Davydov, que reúne aspectos epistemológicos, psicológicos, pedagógicos e socioculturais do ensino, visando à apreensão do processo histórico do conceito envolto de suas relações e contradições, constituindo-se objeto social e culturalmente desenvolvido, existente como forma de pensamento, que tem a vantagem de ser adotada em quaisquer dos níveis do sistema de ensino.

Todo experimento didático precisa de um planejamento de ensino que tem como objetivo o desenvolvimento do pensamento cognitivo do aluno, mas que, para planejar, o professor deve ter como parâmetro o conhecimento da zona de desenvolvimento proximal dos alunos acerca do conteúdo a ser ensinado. A partir desse conhecimento, ele poderá planejar um ensino com base no método de ascensão do abstrato ao concreto, tendo em vista que o movimento proposto por tal método direciona-se na perspectiva da formação de conceitos.

2.2.1 Diagnosticando o nível de desenvolvimento real dos conceitos básicos à formação do conceito de transformação linear

Esta avaliação faz-se necessária uma vez que os processos de desenvolvimento mental não coincidem com os processos de aprendizado, pois aquele progride de forma mais lenta e atrás deste, resultando, assim, nos níveis de desenvolvimento real e nas zonas de desenvolvimento proximal (VYGOTSKI, 1991). Desta forma, o nível de desenvolvimento real se estabelece como o resultado de certos ciclos de desenvolvimento que já foram completados e a zona de desenvolvimento proximal expressa a relação interna entre o ensino e o desenvolvimento, sendo constituída pelas funções psicológicas superiores que estão em estado embrionário, ou seja, em um processo de maturação (VYGOTSKI, 1991).

Vygotski (1991) afirma que só é possível determinar o estado de desenvolvimento mental de um indivíduo se analisar esses dois níveis, o nível de desenvolvimento real e a zona de desenvolvimento proximal, pois "O nível de desenvolvimento real caracteriza o desenvolvimento mental retrospectivamente, enquanto a zona de desenvolvimento proximal caracteriza o desenvolvimento mental prospectivamente" (VYGOTSKI, 1991, p. 58). O autor ainda afirma que a zona de desenvolvimento proximal

> [...] é a distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da solução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da solução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com companheiros mais capazes. (VYGOTSKI, 1991, p. 58)

Assim, o que o aluno faz hoje com a mediação do professor, amanhã ele será capaz de fazer sozinho, uma vez que o que é zona de desenvolvimento proximal hoje, será nível de desenvolvimento real amanhã (VYGOTSKI, 1991, p. 58).

Por meio da avaliação diagnóstica e da compreensão do nível de desenvolvimento real dos alunos, pode-se identificar o seu tipo de pensamento: empírico ou teórico. Davydov (1988) caracteriza o pensamento empírico como aquele que se limita à identificação e à comparação dos dados sensoriais com vistas a sua classificação, preocupando-se apenas com seus traços externos. Já o pensamento teórico é, para o autor, aquele que permite ao aluno pensar mentalmente sem o auxílio do objeto real ou de seus dados sensoriais, pois em seu intelecto já existe o objeto de forma mediatizada, refletida, com toda a sua essência, isto é, existe o conceito daquele objeto e o aluno pensa por meio desse conceito. Entretanto, Davydov (1988) não despreza o pensamento empírico, mas o valoriza enquanto um degrau da escada que o aluno precisa subir para atingir o pensamento teórico, podendo, então, o empírico ser transformado em teórico por meio de uma organização adequada do ensino.

Aqui o foco está na avaliação diagnóstica realizada no início de um conjunto de aulas, as quais compõem o experimento didático formativo, a fim de identificar, compreender e impulsionar a zona de desenvolvimento proximal (ZDP) dos alunos, obtida a partir do nível de desenvolvimento real deles, com eles sendo vistos individualmente e coletivamente dentro do grupo de alunos que estão cursando a disciplina de Álgebra Linear.

> *No início*, verificam-se as condições prévias dos alunos de modo a prepará-los para o estudo da matéria nova. Esta etapa inicial é de sondagem de conhecimentos e de experiências já disponíveis bem como de provimento dos pré-requisitos para a sequência da unidade didática. *Durante* o processo de transmissão e assimilação é feito o acompanhamento do progresso dos alunos, apreciando os resultados, corrigindo falhas, esclarecendo dúvidas, estimulando-os a continuarem trabalhando até que alcancem resultados positivos. Ao mesmo tempo, essa avaliação fornece ao professor informações sobre como ele está conduzindo o seu trabalho: andamento da matéria, adequação de métodos e materiais, comunicação com os alunos, adequabilidade da sua linguagem, etc. Finalmente, é necessário avaliar os resultados da aprendizagem *no final* de uma unidade didática, do bimestre ou do ano letivo. A avaliação global de um determinado período de trabalho também cumpre a função de realimentação do processo de ensino. (LIBÂNEO, 2013, p. 218, grifos do autor)

Assim sendo, a avaliação diagnóstica, aplicada (Apêndices C e D) na turma selecionada para o experimento didático formativo, visou o diagnóstico do nível de desenvolvimento real dos alunos no que tange a seus conhecimentos acerca do conteúdo de matriz, função e espaço vetorial, objetivando identificar os nexos constituídos e não constituídos na rede conceitual do aluno com relação a estes conteúdos e, posteriormente, tentar refazê-los por meio de uma organização do ensino que ajude o aluno a formar os conceitos. Para todos estes conteúdos buscou-se avaliar o nível de desenvolvimento real dos conceitos e ainda: sobre o conteúdo matriz, se eles sabiam operar com matrizes (multiplicação de uma matriz por um escalar e multiplicação de matrizes); sobre o conteúdo de funções, a capacidade de expressar algebricamente e graficamente uma função, de identificar o domínio, o contradomínio e a imagem de uma função e também de classificar um função, no caso, as funções, a serem classificadas, eram dos tipos afim e linear; sobre o conteúdo de espaço vetorial, a habilidade de identificar e provar se um dado conjunto é ou não um espaço vetorial de acordo com suas respectivas operações de adição e multiplicação por escalar.

O instrumento utilizado para diagnosticar os conhecimentos dos alunos foi a resolução de uma tarefa elaborada na forma de três situações-problema que colocaram o aluno frente ao ato de pensar cientificamente para solucioná-las. Davydov (1988) afirma que um conceito está formado se o aluno o tem em seu plano mental e é capaz de utilizá-lo em situações particulares. Para ele, uma situação-problema é aquela que instigue o aluno a querer pensar no que lhe é proposto, mostrando-lhe a necessidade de aprender determinado conceito, bem como a forma e onde se pode utilizá-lo, sendo em questões totalmente práticas da realidade circundante ou em questões voltadas para a própria Matemática, que visam simplesmente a utilização e a verificação de propriedades e características relacionadas ao conceito. Desta forma, se o aluno não consegue resolver o problema particular é porque ele ainda não utiliza aquele conceito como ferramenta mental, implicando que o conceito permanece no plano do empírico. Assim, para o planejamento desta atividade, utilizamos a ação de aprendizagem de Davydov: "construção do sistema de tarefas particulares que podem ser resolvidas por um procedimento geral" (DAVYDOV, 1988, p. 173).

Uma ressalva a ser feita para este processo avaliativo é quanto aos sujeitos avaliados, os quais não coincidem integralmente com os sujeitos da pesquisa. Participaram da avaliação diagnóstica quinze alunos. No entanto, alguns destes alunos não participaram da pesquisa em função dos critérios estabelecidos para a seleção dos sujeitos do experimento, a saber: foram considerados sujeitos da pesquisa os alunos que faltaram até quatro aulas, tendo, pelo menos, 69,2% de presença, um total de nove aulas presentes dentre as treze aulas do experimento. Desta forma, são quinze os sujeitos avaliados por este instrumento, sendo este o nosso grupo de análise nesta atividade, denominados Di, com i variando de 1 a 15.

A condução do processo avaliativo foi de responsabilidade do professor efetivo da turma. À pesquisadora coube o papel de observadora do processo, fazendo os registros necessários. A avaliação ocorreu em duas aulas: na primeira, os alunos realizaram a tarefa avaliativa e, na segunda, discutimos os resultados com a turma. A avaliação foi aplicada individualmente e sem que os alunos soubessem e se preparassem para ela, pois queríamos verificar o que já estava constituído em seu sistema de conceitos. Sua aplicação ocorreu sem nenhum contratempo e todos os alunos presentes em sala se dispuseram a realizá-la espontaneamente.

Após a conclusão da aplicação da atividade avaliativa, analisou-se (a pesquisadora e o professor efetivo da turma) questão por questão e também se fez uma leitura integrada dos dados, observando-os de forma articulada, tentando captar indícios conceituais para identificar melhor o nível de desenvolvimento real, compreendendo o nível de formação científica da turma. Para melhor compreensão do nível de desenvolvimento científico da turma no que tange aos seus conhecimentos sobre o conteúdo de matriz, função e espaço vetorial, as tarefas (Apêndice D) foram analisadas individualmente, levantando a porcentagem de acerto de cada aluno em cada questão, bem como a porcentagem de acertos em relação a toda a tarefa, conforme demonstra a Tabela 1.

Tabela 1 – Porcentagem de acertos em cada questão e em relação à avaliação diagnóstica em sua totalidade

Sujeitos da avaliação diagnóstica	**% de acertos com relação ao conteúdo de:**			**% de acertos em relação a toda a tarefa**
	Matriz	**Função**	**Espaço Vetorial**	
D1	33,3	66,7	0	45
D2	83,3	54,2	0	45
D3	50	91,7	0	62,5
D4	50	29,2	0	25
D5	33,3	41,7	80	50
D6	16,7	87,5	80	75
D7	50	16,7	0	17,5
D8	66,7	8,3	0	15
D9	50	62,5	80	65
D10	50	8,3	0	12,5
D11	66,7	70,8	0	52,5
D12	100	83,3	0	65
D13	83,3	8,3	0	17,5
D14	66,7	0	0	10
D15	83,3	8,3	0	10

Fonte: Elaborada pela autora a partir dos dados da avaliação diagnóstica.

Os dados da Tabela 1 indicam que, em relação aos conceitos de matriz e função, o nível de desenvolvimento real da turma está mais nivelado. Entretanto, esse nivelamento encontra-se em situações diferentes, uma vez que o conceito de matriz está mais bem desenvolvido que o conceito de função. Em relação ao conceito de espaço vetorial, a situação é mais delicada, com três alunos acertando 80% da questão e o restante da turma não respondendo nada, o que caracteriza um nível muito baixo de desenvolvimento real em relação a este conceito. Para um melhor entendimento desta situação, a Tabela 2 traz uma análise do desenvolvimento intelectual dos alunos em relação a estes conceitos vistos em uma totalidade. Considerando que x representa a porcentagem de acertos dos alunos, estabelecem-se as seguintes atribuições quanto ao nível de conhecimento da turma: de $0\% \leq x \leq 40\%$, insuficiente; de $40\% < x \leq 70\%$, razoável; de $70\% < x \leq 100\%$, suficiente.

Tabela 2 – Quantidade e porcentagem de alunos quanto ao nível de conhecimento

Conteúdo	**Insuficiente $0\% \leq x \leq 40\%$**		**Razoável $40\% < x \leq 70\%$**		**Suficiente $70\% < x \leq 100\%$**	
	N de alunos	**% de alunos**	**N de alunos**	**% de alunos**	**N de alunos**	**% de alunos**
Matriz	3	20	8	53,3	4	26,7
Função	7	46,6	4	26,7	4	26,7
Espaço Vetorial	12	80	0	0	3	20
Toda a prova	7	46,6	7	46,6	1	6,8

Fonte: Elaborada pela autora a partir dos dados da Tabela 1.

A análise desses dados nos levou a concluir que a maioria da turma, 53,3%, tem um conhecimento razoável sobre matriz e 46,6% um conhecimento insuficiente sobre função, sendo crítica a situação sobre o conceito de espaço vetorial, com 80% da turma possuindo conhecimento insuficiente. Quando analisamos os dados de forma geral, tomando por base os problemas e suas subdivisões, verificamos que 46,6% dos alunos obtiveram rendimento insuficiente, bem como 46,6% rendimento razoável e apenas um aluno com atributo suficiente.

Esses dados nos mostram uma realidade preocupante da educação brasileira, em que, mesmo o aluno passando por vários processos de ensino-aprendizagem de um mesmo conteúdo, como é o caso dos conteúdos de matriz e função que os alunos estudam desde o ensino médio e fundamental, respectivamente, esses estudos não estão sendo suficientes para proporcionar a formação do pensamento teórico, com a qual o aluno saiba pensar nas questões do cotidiano e usar conceitos científicos para resolver os problemas que lhes são colocados (DAVYDOV, 1988).

O que se constatou foi que o conhecimento acerca dos conceitos de função, matriz e espaço vetorial se encontra em seu modo empírico, constituído de generalizações das propriedades dos objetos por representações concretas, que possibilitam ao aluno uma atividade cognitiva que não opera com conceitos matemáticos. Todavia, há a possibilidade de reproduzir na esfera psíquica estes conceitos, ou seja, há a possibilidade de construí-los (DAVYDOV, 1988).

Após o levantamento das limitações na formação dos alunos, discutiram-se as tarefas em sala com a turma, para tentar compreender o modo de pensar deles e chegar a alguma conclusão acerca das possíveis causas desses erros, bem como tentar reverter essa situação e elevar o conhecimento dos alunos para o campo da abstração dita por Davydov (1988). Com a correção das respostas dadas no instrumento de avaliação, ou seja, na tarefa avaliativa, e com relação ao conceito de matriz, verificou-se que este é compreendido pelos alunos e que eles sabem operá-lo, entretanto, a dificuldade surge quando eles têm que, a partir de uma situação-problema, modelá-lo e operá-lo segundo o critério científico. Pressupõe-se que se tivesse apresentado as matrizes explicitamente e solicitado que eles calculassem o produto delas, eles não teriam errado.

Tais pressupostos foram comprovados durante a discussão desta questão por meio das perguntas que surgiram e da seguinte fala do aluno D1, com a qual a turma concordou: “Era só para multiplicar as matrizes? Se tivesse escrito isso eu teria feito”. Isso aponta para o fato de que o conhecimento empírico é predominante e que o conhecimento teórico ainda não é usado como ferramenta mental (DAVYDOV, 1988). O como operar com matrizes é um procedimento apropriado pelos alunos, de fato não há dúvidas disso, sendo unânime essa apropriação, entretanto esta operação está desconexa de contextualizações e significados, fato explicitado pela fala de D1. Provavelmente, o ensino de boa parte dos alunos se deu com essas características, sendo-lhes ensinado apenas como operar com matrizes isoladamente, sem a contextualização necessária.

Quanto ao problema sobre função, diagnosticou-se, que os alunos conseguiram escrever as funções a partir do problema proposto e que não têm dificuldades em expressá-las graficamente, entretanto, há uma confusão entre o que é contradomínio e o que é imagem. Identificar o conjunto não é tarefa árdua, como se constatou quando solicitado o domínio da função, porém, não conseguem expressá-lo corretamente segundo a simbologia matemática. Faltam rigor e formalismo matemático na escrita. Outra dificuldade quase unânime é quanto à classificação do tipo da função, em dizer que a função perímetro é uma função afim e que a função área é linear, não souberam responder ou se equivocaram quanto a sua classificação.

Durante a discussão relacionada ao problema sobre função, verificou-se que boa parte das suposições iniciais, acima descritas, estava correta. Quanto ao rigor matemático e a dificuldade em simbologia, eles realmente são obstáculos à formalização do conhecimento, pois os alunos não compreendiam a necessidade e a importância de serem criteriosos com a escrita matemática. O professor teve que mostrar-lhes que sem esses cuidados, a leitura de um texto matemático fica comprometida, podendo ser interpretada de forma equivocada. Tal fato pode ser comprovado nas Figuras 3, 4 e 5, onde na Figura 3 não são colocadas as chaves para representar os conjuntos, na Figura 4, quando da escrita da imagem, o aluno coloca toda a função $P(x)$ e $A(x)$ dentro de um intervalo e na Figura 5 o aluno utiliza chave e colchete para representar um intervalo e não faz uso do sinal de igual. Isso mostra a dificuldade dos alunos de pensarem matematicamente.

Figura 3 – Falta de rigor matemático na notação de conjuntos

d) $D = \mathbb{R} \setminus x \geq 0 \qquad I = \mathbb{R} \setminus x \geq 0$

e) $D = \mathbb{R} \setminus x \geq 0 \qquad I = \mathbb{R} \setminus x \geq 0$

Fonte: Resposta do Aluno D4 aos itens (d) e (e) da questão 2 da avaliação diagnóstica.

Figura 4 – Falta de rigor matemático na notação do conjunto domínio e na escrita do intervalo que representa a imagem

d) $DP(x) = \{x \in \mathbb{R} \setminus x > 0\} \qquad ImP(x) = 14 < P(x) < +\infty$

e) $DP(x) = \{x \in \mathbb{R} \setminus x > 0\} \qquad ImP(x) = 0 < A(x) < \infty$

Fonte: Resposta do Aluno D1 aos itens (d) e (e) da questão 2 da avaliação diagnóstica.

Figura 5 – Falta do sinal de igual e excesso de elementos para expressar o intervalo que representa a imagem

d) $D\,\{x \in \mathbb{N}\,|0 < x < 7\} \qquad Im\{\,]14, 28[$

e) $D\,\{x \in \mathbb{N}\,|0 < x < 7\} \qquad Im\{\,]0, 7[$

Fonte: Resposta do Aluno D5 aos itens (d) e (e) da questão 2 da avaliação diagnóstica.

Quanto aos conceitos de contradomínio e imagem, os alunos faziam confusão ao diferenciá-los, tanto que apenas quatro alunos (26,7%) exibiram tais conjuntos. No que diz respeito à classificação das funções, constatou-se que os alunos ainda estão muito presos à memória e dependentes do professor, possuindo um pensamento empírico, pois eles não conseguiam dizer quais os tipos existentes de funções, somente depois que o professor começou a dizer quais eram as possíveis classificações de uma função, eles lembraram como classificar as funções do problema, conseguindo fazer isso corretamente. No entanto, isso não se deu imediatamente, foi preciso muita ação do professor por meio de perguntas que os conduzissem à resposta esperada, conforme o diálogo a seguir comprova.

> O professor lê o enunciado dos itens (f) e (g) da questão 2 e pergunta:
> **Professor:** O que são tipos de função?
> Ninguém responde e o professor pergunta novamente:
> **Professor:** Classificação de funções, como se classifica?
> **D2:** Função do segundo grau, crescente, decrescente...
> **Professor:** Lá do início de Cálculo!
> **D2:** Injetora, sobrejetora, bijetora...
> **Professor:** É um tipo de função né? Quadrática é um tipo de função?
> **D2:** É.
> **D3:** Afim.
> **Professor:** Função trigonométrica? Essas funções são de que tipo? (Pergunta apontando para as expressões algébricas das funções no quadro negro)
> **D2:** De primeiro grau.
> **Professor:** Ambas são de primeiro grau. Mas dentro da classe das funções do primeiro grau elas ainda se distinguem.
> **D2:** Crescente.
> **Professor:** Função perímetro. A função perímetro é uma função o quê?
> Novamente ninguém responde.
> **Professor:** Ela é linear?
> **D3:** É
> **Professor:** É?
> **D2:** Sim.
> **Professor:** Não.
> **D1:** Não é linear?
> **D2:** Ela é crescente, não é? Função de primeiro grau crescente.
> **Professor:** Se eu disser a outra opção eu já respondo, mas alguém já até falou.
> **D2:** Função afim e crescente.
> **Professor:** Ela é afim né? Ela não passa na origem. Então o perímetro é uma função afim. Aí saiu a resposta da (g) não foi? E a área?
> **D2:** Ela é linear.
> **Professor:** Linear né?
> **D2:** Sim. (Aula 2 de 28/01/2017)

Observa-se que no aluno D2 o conceito de função do primeiro grau e função crescente/decrescente está bem formado e há indícios de abstração quando ele consegue associar esses dois conceitos aos conceitos de função afim e linear que pareciam desconexos em seu sistema de conceitos.

O terceiro problema foi o mais difícil de se identificar o conhecimento dos alunos, pois apenas 20% da turma (três alunos) tentaram responder algo. Analisando essas poucas respostas, que não estavam completamente corretas, e questionando o porquê de o restante da turma não ter respondido, concluiu-se, previamente, que eles não sabem o que é um espaço vetorial ou não sabem como provar que um conjunto é ou não assim classificado.

Ao conversar com os alunos sobre esta questão, o professor iniciou perguntando o que era um espaço vetorial e houve um silêncio generalizado. Vale ressaltar aqui que o professor, na semana anterior a esta aula, havia terminado o conteúdo sobre espaço vetorial previsto na ementa do curso; então, esse é um conceito recentemente estudado por eles, fato que lhes exigia pelo menos tentar "definir" um espaço vetorial. Diante do silêncio da turma, o professor precisou fazer várias perguntas para conduzir os alunos à conceituação solicitada e, mesmo conseguindo dizer o que era esse objeto de estudo, eles não conseguiram dizer imediatamente como verificar se um determinado conjunto era ou não espaço vetorial. Era o obstáculo da demonstração presente no conhecimento dos alunos. Foi necessário que o professor os ensinasse que, para provar que um conjunto não é espaço vetorial, basta que ele não satisfaça uma das condições exigidas e que isso se prova exibindo um contraexemplo, a saber, um caso particular que não satisfaz pelo menos um dos axiomas que caracterizam tais conjuntos.

Outro fato que merece destaque é quanto à necessidade do professor dominar o conteúdo da ciência que ele trabalha, como afirma Davydov (1988), no caso, da Matemática, em específico, da Álgebra. A comprovação disso se dá no seguinte diálogo:

> **D1:** Então, intuitivamente, para eu ver que o conjunto é espaço vetorial eu tenho que analisar se tem zero e depois se tem o elemento oposto? Esses dois aí já servem para eu analisar intuitivamente, assim, rápido?
> **Professor:** São os primeiros a analisar, não garante. Vou te dar um exemplo que falha só a última (aqui o professor está falando da propriedade: $1v = v$ para todo $v \in E$, onde E é o espaço vetorial). (Aula 2 de 28/01/2017)

Então, o professor coloca no quadro negro o conjunto da Figura 6 com as suas respectivas operações de soma e multiplicação por escalar, explicando e mostrando ao aluno que não há uma regra a ser seguida.

Figura 6 – Exemplo de conjunto que não é espaço vetorial

Exemplo:

$$X = \mathbb{R}^2 = \{(x, y); x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$(x, y) + (z, t) = (x + y, z + t)$$

$$\alpha(x, y) = (3\alpha x, 3\alpha y)$$

8) $1 \cdot (x, y) = (x, y)$

$$(1v = v)$$

$$1 \cdot (x, y) = (3 \cdot 1 \cdot x, 3 \cdot 1 \cdot y)$$

$$= (3x, 3y)$$

Fonte: Obtido pela autora durante o experimento didático formativo.

Diante disso, verificou-se que as duas suposições iniciais, das causas acerca do motivo dos alunos não terem respondido à questão e de que os que tentaram não conseguiram responder por completo, estavam corretas, a saber, os alunos não sabiam conceituar espaço vetorial e também não sabiam como verificar se um conjunto é ou não assim classificado. Isso mostra que a metodologia de ensino adotada pelo professor deixa a desejar em relação à formação de conceitos científicos. Fato que aponta para a necessidade de repensar a metodologia de ensino da Álgebra Linear.

Em suma, a avaliação diagnóstica revelou que a maior parte dos alunos ainda não agia com pensamento teórico, poucos o possuíam em alguns conteúdos específicos, seus conhecimentos restringiam-se ao plano empírico, surgindo, assim, limites na aprendizagem que se tornam obstáculos à construção de novos conhecimentos. Constatou-se também que a avaliação foi extremamente válida e que os alunos elevaram sua zona de desenvolvimento proximal para um nível mais alto na medida em que foi possível identificar indícios de formação de pensamento teórico no decorrer da discussão dos resultados da atividade avaliativa.

A partir dos resultados deste diagnóstico, elaborou-se um plano de ensino de acordo com ações propostas por Davydov (1988), visando a formação do conceito de transformação linear, consequentemente, o desenvolvimento do pensamento teórico sobre este conceito.

2.2.2 O planejamento da atividade de estudo do conceito de transformação linear

O planejamento do ensino experimental teve por objetivo geral formar o conceito teórico de transformação linear. A opção por este conteúdo deu-se por ser um conceito chave que o aluno precisa formar para desenvolver habilidades matemáticas e mentais necessárias ao desenvolvimento dos demais conteúdos desta disciplina, bem como de boa parte das aplicações nas áreas específicas dos cursos de graduação, além de ser considerado a essência da Álgebra Linear.

De acordo com a descrição dada anteriormente, a organização do processo de ensino-aprendizagem foi amparada pelos pressupostos da teoria do ensino desenvolvimental, contemplando, especificamente, o modelo lógico de caráter sistêmico e dinâmico de ações para solução de tarefas de estudo. As aulas foram planejadas visando colocar os alunos em atividade de aprendizagem por meio de tarefas com base em situações-problema que possibilitassem o desenvolvimento de habilidades cognitivas gerais e específicas em relação à aprendizagem do conceito de transformação linear. Como afirma Davidov (1999, p. 4):

> [...] uma correta organização da atividade de estudo consiste em que o professor, baseando-se na necessidade e disposição dos alunos de dominar os conhecimentos teóricos, sabe colocar para eles em um determinado material uma tarefa de estudo que pode ser resolvida pelas ações acima consideradas (com isto o professor, usando de determinados recursos, forma nos alunos a necessidade apontada, e a capacidade de receber uma tarefa de estudo e executar as ações de estudo). Neste caso, o professor ensina a disciplina correspondente em conformidade com as exigências da atividade de estudo, isto é, com o método de solução pelos alunos das tarefas de estudo.

Deste modo, considerando que “[...] *o conteúdo principal da atividade de estudo* é a assimilação dos procedimentos gerais da ação na esfera dos conceitos científicos” (DAVÍDOV; MÁRKOVA, 1987, p. 324, grifos do autor), organizou-se as tarefas levando em conta o diagnóstico do nível de desenvolvimento real dos alunos, tendo em vista potencializar seu desenvolvimento intelectual, numa lógica dedutiva, na qual se avança do geral para o particular e do coletivo para o individual de modo a propiciar a apropriação da essência do conceito de transformação linear, como também dos métodos de elaboração da produção do conhecimento desse conceito. Segundo Davídov e Márkova (1987, p. 326):

> A essência deste método se expressa no estudo dos processos de trânsito a novas formas da psique, no estudo das condições de surgimento de um ou outro fenômeno psíquico e na criação experimental das condições necessárias para que surjam. Tal investigação transcorre como projeção e modelação do processo de desenvolvimento.

Nesta perspectiva, organizou-se o processo de ensino-aprendizagem do conceito de transformação linear considerando a atividade de estudo tanto como um método de ensino, pois ela possibilita que o aluno assimile procedimentos relacionados a conceitos científicos, quanto como um método de pesquisa do surgimento e do desenvolvimento das ações mentais dos alunos, as quais acontecem no transcorrer da realização das tarefas de estudo que podem propiciar a formação do pensamento teórico. Consideramos, portanto, que a

> [...] tarefa de estudo, que é tão somente o começo do desdobramento da atividade de estudo na sua plenitude, exige dos alunos da escola uma análise das condições de origem destes ou daqueles conhecimentos teóricos e o domínio das formas de ações generalizadas correspondentes. Em outras palavras, ao resolver a tarefa de estudo o aluno descobre no objeto sua relação de origem ou essencial. (DAVIDOV, 1999, p. 3)

Desta forma, é por meio da tarefa de estudo que o aluno usará os seus conhecimentos teóricos e adquirirá novos conhecimentos teóricos, desenvolvendo as bases da consciência e do pensamento teóricos, bem como suas capacidades cognitivo-afetivas, transformando-se integralmente por meio da aprendizagem do conteúdo da sua atividade de estudo, isto é, do conhecimento teórico.

O início do planejamento deu-se por meio da análise lógica e histórica do conceito de transformação linear. Em seguida, no desenvolvimento das aulas, teve o movimento lógico-histórico do conceito como ponto de partida, articulado com o conhecimento sociocultural da turma e o resultado da avaliação diagnóstica.

As ações mentais que nortearam o planejamento foram: relembrar, observar, refletir, analisar, criticar, comparar, sintetizar, identificar, relacionar, distinguir, aplicar o conceito e generalizar. Estas ações foram contempladas no decorrer das aulas, pois, na organização e planeamento das tarefas de estudo, elas se complementam, propiciando o desenvolvimento das funções psicológicas superiores (VYGOTSKI, 1991; VIGOTSKI, 2001).

Nesse sentido, as questões das tarefas de estudo foram elaboradas na forma de situações-problema, assegurando o desenvolvimento das ações mentais acima descritas, sendo uma situação-problema concebida como uma questão que instigue o aluno a pensar e desenvolva nele a necessidade e o motivo por apreender o objeto de estudo. Para pensar nos problemas, tomou-se por base o curso no qual seria realizado o experimento, a saber, Bacharelado em Engenharia Elétrica e situações provindas dos contextos sociais e culturais nos quais os alunos estão inseridos e que se utiliza o conceito de transformação linear. As questões elaboradas envolveram aplicações práticas desse conceito, relacionadas com esta área de formação, como situações envolvendo códigos corretores de erros, determinantes e números complexos, considerando sua historicidade e aplicações práticas em contextos sociais e culturais em que os alunos estão inseridos, bem como aplicações teóricas dentro da própria Álgebra Linear, que constituem uma forma teórica de desenvolvimento do pensamento matemático Nesse processo, considerou-se os conhecimentos adquiridos pelos alunos acerca de função, matriz e espaço vetorial, visando planejar o experimento com vistas ao alcance dos objetivos desta pesquisa, qual seja: a formação do conceito teórico de transformação linear.

Para cumprir cada uma das ações de aprendizagem de Davydov, as tarefas foram organizadas de modo que para algumas ações usou-se uma tarefa por completo, já para outras ações usaram-se questões específicas de determinadas tarefas, conforme mostra o Quadro 1.

Quadro 1 – Plano de ensino para a formação do conceito de transformação linear

<table>
<tr><th colspan="5">PLANO DE ENSINO</th></tr>
<tr><td colspan="5">Nível de Ensino: Educação Superior
Disciplina: Álgebra Linear
Conceito: Transformação Linear
Curso: Bacharelado em Engenharia Elétrica
Nº de aulas: 13 aulas de 45 minutos cada
Horário: sábado das 7h às 8:30h e das 8:45h às 10:15h
Semestre letivo: 2016/2</td></tr>
<tr><td colspan="5">Objetivo Geral: Formar o conceito teórico de transformação linear, cujo princípio geral é: é uma aplicação cujo domínio e contradomínio são espaços vetoriais não nulos e que obedece simultaneamente às condições: a imagem da soma de dois vetores é a soma de suas imagens e a imagem de um vetor multiplicado por um escalar é esse escalar multiplicado pela imagem do vetor.</td></tr>
<tr><th>Conteúdos</th><th>Objetivos Específicos: desenvolver as seguintes ações mentais</th><th>Nº de Aulas</th><th>Data</th><th>Desenvolvimento Metodológico (Tarefas de Aprendizagem)</th></tr>
<tr><td>Pré-requisitos necessários à formação do conceito: função, matriz e espaço vetorial.</td><td>Relembrar.</td><td>1</td><td>21/01/2017</td><td>Aplicar a avaliação diagnóstica (Apêndice D): diagnosticar o nível de desenvolvimento real dos alunos.</td></tr>
<tr><td>Pré-requisitos necessários à formação do conceito: função, matriz e espaço vetorial.

Lógico-histórico dos conceitos de matriz, determinante, sistema linear e espaço vetorial.</td><td>Relembrar. Observar. Refletir. Analisar. Criticar.</td><td>2</td><td>28/01/2017</td><td>Resolver a avaliação diagnóstica com a turma.

Conversar sobre o lógico-histórico dos conceitos de matriz, determinante, sistema linear, espaço vetorial e transformação linear, este sem adentrar o conceito em si (Apêndices F e G) – Ação: transformação dos dados da tarefa.</td></tr>
<tr><td>Conceito de transformação linear.</td><td>Observar. Comparar. Analisar. Sintetizar. Identificar. Relacionar. Refletir. Criticar. Distinguir.</td><td>2</td><td>28/01/2017</td><td>Aplicar a Tarefa 1 (Apêndice I) – Ação: transformação dos dados da tarefa.</td></tr>
<tr><td>Conceito de transformação linear.</td><td>Observar. Comparar. Analisar. Sintetizar. Identificar. Relacionar. Refletir. Criticar. Distinguir.</td><td>2</td><td>04/02/2017</td><td>Corrigir a Tarefa 1 (Apêndice I) – Ação: transformação dos dados da tarefa.</td></tr>
<tr><td>Conceito de transformação linear.</td><td>Observar. Comparar. Analisar. Sintetizar. Identificar. Relacionar. Refletir. Criticar. Distinguir.</td><td>2</td><td>04/02/2017</td><td>Aplicar e corrigir a Tarefa 2 (Apêndice L) – Ação: identificação da relação universal.

Aplicar e corrigir a questão 1 da Tarefa 3 (Apêndice M) – Ação: modelação da relação universal.</td></tr>
</table>

				Aplicar e corrigir a questão 2 da Tarefa 3 (Apêndice M) – Ação: transformação do modelo.
Lógico-histórico do conceito de transformação linear. Conceito de transformação linear.	Refletir. Comparar. Aplicar o conceito. Distinguir. Generalizar.	2	11/02/2017	Conversar sobre as formalizações das definições do conceito de transformação linear no seu desenvolvimento lógico-histórico (Apêndice P) – Ação: realização de tarefas particulares. Aplicar e corrigir as questões 1 a 3 da Tarefa 4 (Apêndice Q) – Ação: realização de tarefas particulares. Aplicar e corrigir a questão 4 da Tarefa 4 (Apêndice Q) – Ações: controle da realização das ações anteriores e avaliação da assimilação do procedimento geral como resultado da solução da tarefa de aprendizagem dada.
Conceito de transformação linear.	Refletir. Aplicar o conceito. Generalizar.	2	11/02/2017	Aplicar e corrigir a questão 5 da Tarefa 4 (Apêndice Q) – Ações: controle da realização das ações anteriores e avaliação da assimilação do procedimento geral como resultado da solução da tarefa de aprendizagem dada Aplicar a Tarefa 5 (Apêndice S) – Ação: verificação da aprendizagem por parte do professor.
Observação: Em todas as aulas executar uma avaliação contínua do processo de formação do conceito por parte do professor.				

Fonte: Elaborado pela autora.

Com o intuito de compreender melhor o planejamento e o desenvolvimento das ações de ensino propostas por Davydov (1988), haja vista a complexidade de sua estruturação e execução, passa-se a descrever aspectos de sua formação e constituição, especificando o que foi descrito nos planos de aulas, bem como aspectos que surgiram no desenvolver das aulas que contribuíram para a boa execução de cada ação no campo dos procedimentos metodológicos. Além disso, especifica-se os procedimentos utilizados na execução da ação verificação da aprendizagem por parte do professor.

2.2.2.1 Procedimento metodológico da ação: transformação dos dados da tarefa a fim de revelar a relação universal do conceito de transformação linear

Esta ação objetivou levar os alunos a analisarem os dados da tarefa de forma a descobrir e distinguir uma relação definida e específica do objeto de estudo, denominada relação universal. “A peculiaridade desta relação consiste, por um lado, em que constitui o aspecto real dos dados transformados e, por outro lado, atua como base genética e fonte de todas as características e peculiaridades do objeto integral, ou seja, constitui sua relação universal” (DAVYDOV, 1988, p. 174). Trata-se de uma ação mental, inicialmente realizada em forma objetal-sensorial, que dá início ao movimento de ascensão do abstrato ao concreto.

A referência para o planejamento desta ação foi a análise lógica e histórica do conceito de transformação linear (Apêndice G), a Tarefa 1 (Apêndice I) e a Tarefa 2 (Apêndice L), conforme descrito no Quadro 1 e detalhado nos Apêndices E, H, J e K, pois como escreve Freitas (2011, p. 83, destaques do autor):

> O planejamento de ensino exige, antes de tudo, que o professor se detenha cuidadosamente sobre o conteúdo científico, analise sua origem e desenvolvimento no campo científico que integra, identifique as relações nele presentes, o tipo de movimento mental que ele contém e a lógica científica que ele governa. Nesta análise o professor deverá considerar que dado conceito (ou conceitos) presentes no conteúdo faz parte de um sistema ou de uma rede conceitual e com eles se relaciona. Só a partir daí o professor poderá criar as ações necessárias ao aluno para que reproduza criativamente o conceito, tornando-o uma “ferramenta” própria.

No início da orientação verbal aos alunos, para adentrar no estudo do conceito de transformação linear, o professor esclareceu que o objetivo era a formação deste conceito e enfatizou a importância de compreender seu movimento lógico-histórico. O docente seguiu apresentando, com o auxílio do *datashow*, algumas perguntas e uma situação-problema (Quadro 2) aos alunos com o intuito despertar neles a necessidade e, consequentemente, o motivo para aprender esse conceito.

Quadro 2 – Situação-problema inicial

O conceito de transformação linear e toda a teoria decorrente deste conceito são ferramentas essenciais para o desenvolvimento da teoria dos códigos corretores de erros, teoria esta que tem tomado papel importantíssimo mediante o desenvolvimento tecnológico que surgiu desde a década de 1940, década do surgimento desta teoria, especificamente, em julho de 1948 com Claude Shannon, e tem se desenvolvido atualmente com as evoluções do campo computacional e tecnológico à medida

que se deseje uma comunicação confiável, onde a mensagem enviada é exatamente a mensagem recebida. Dentre as situações em que se usa um código corretor de erros, podemos citar: digitalização de fotografias, transmissões via rádio e televisão, uso de computadores, gravação de informações em pen drive, CD ou DVD, etc.

Mesquita (2005; 2007) ao estudar esta teoria descreve algumas classes de códigos nas quais o processo de codificação e decodificação de mensagens se dá mediante uma transformação linear. A autora (MESQUITA, 2005) cita casos reais onde transformações lineares foram fundamentais, dentre elas temos a transmissão e recepção de fotos de Marte feitas pela nave espacial Mariner 9 em 1972. Essas fotos não eram coloridas como temos hoje, mas sim em preto e branco, sendo as imagens formadas por partes pretas, partes brancas e partes cinzas (junção do preto e do branco). Assim, em cada foto, eram analisados os tons das cores (preto, branco e cinza) e a cada um deles fazia-se corresponder um código binário de comprimento seis (um elemento do tipo $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$, onde $x_i \in \{0,1\}$ para cada $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$) que era levado mediante uma transformação linear injetora em um conjunto também binário cujos elementos tinham comprimento trinta e dois. Esse era o processo de codificação e cada tom de cor codificado recebe o nome de *palavra do código*. A decodificação se dava através da transformação linear inversa dessa transformação linear.

Para especificarmos uma transformação linear, consideremos uma situação descrita pela mesma autora (MESQUITA, 2007) e que foi adaptada para este texto: os Códigos de Goppa são considerados bons códigos devido à sua facilidade de codificar e decodificar mensagens, isso comparado a outras classes de códigos; eles são utilizados tanto na teoria dos códigos corretores de erros quanto em certas classes de criptografia de chave pública. O código de Goppa descrito pela autora (MESQUITA, 2007) na página 24 deste trabalho pode ser obtido mediante a transformação linear

$C: \{0,1\} \to \{0,1\}^8$ dada por $C(x_1, x_2) = (x_1 + x_2,\ x_1,\ x_1 + x_2,\ x_2,\ x_1, x_1 + x_2, x_1,\ x_2)$

ou, em forma matricial

$$C(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Maiores detalhes sobre este código foram omitidos por demandar conhecimentos que extrapolam o objetivo do presente texto.

De acordo com tal explanação,

a) qual a imagem da palavra $(0,0)$ por meio da aplicação C? Justifique.

b) mostre que a transformação C é linear.

Fonte: Elaborado pela autora.

O método de ensino utilizado para a apresentação/discussão do lógico-histórico do conceito de transformação linear foi a exposição dialogada com o auxílio do *datashow* (Apêndice G), assegurando a interação e a cooperação mútua entre aluno e professor. A intenção foi refletir com os alunos a forma como os cientistas pensavam (e ainda pensam) a Álgebra desde os seus primórdios nos tempos babilônicos até o século XX, remetendo também à forma de pensar a Matemática no século XXI.

Salienta-se que, apesar de apresentar aos alunos uma situação prática de utilização do conceito de transformação linear, não foi possível utilizar o problema descrito no Quadro 2 para conduzir os alunos na identificação da relação universal, pois ele exige um conhecimento mais sólido quanto ao conceito de espaço vetorial, uma vez que utiliza um conjunto que não é habitual aos alunos, o conjunto dos números binários trabalhados em um espaço com duas entradas e em outro com oito entradas, e a avaliação diagnóstica mostrou uma situação crítica quanto à formação desse conceito. Para a execução da ação acima citada, utilizou-se os problemas da Tarefa 1 (Quadro 3), com espaços vetoriais mais simples e mais comuns aos alunos por serem utilizados também em outras disciplinas já estudadas por eles, como Cálculo Diferencial e Integral I e II e Geometria Analítica, mesmo não tendo a conceituação de espaço vetorial, apenas de conjuntos.

Assim, optou-se por utilizar problemas com aplicações sociais, culturais e econômicas para propiciar aos alunos, além do contato objetal-sensorial para o desenvolvimento da atividade de estudo, uma visão científica do mundo em que eles estão inseridos, possibilitando uma análise crítica de seu contexto, a saber: um contexto de empreendedorismo e produção agrícola. Isso porque eles estão em formação para o mercado de trabalho em um estado com práticas agrícolas e agropecuárias e, também, porque notícias sobre esse tema são constantemente veiculadas nos meios de comunicação, fato que coloca como desafio a organização de um tipo de ensino que propicie uma compreensão crítica da realidade frente ao que é divulgado pelos meios de comunicação, para que haja o seu desenvolvimento integral, conforme diz Davydov (1988).

Outro fator a ser considerado quanto à escolha desses problemas (Quadro 3) é que, apesar de encontrar problemas semelhantes nos livros didáticos de Álgebra Linear, eles raramente são utilizados em sala da aula, pois são vistos, dentro da lógica formal e habitual de ensino, como meras aplicações do conteúdo, sendo necessário que, primeiro o aluno aprenda o conteúdo e tenha total habilidade em utilizá-lo na resolução dos exercícios que o livro de didático contempla para que, só depois disso e raramente, se trabalhe com resolução de problemas e sempre focando na aplicação direta e imediata do conteúdo trabalhado.

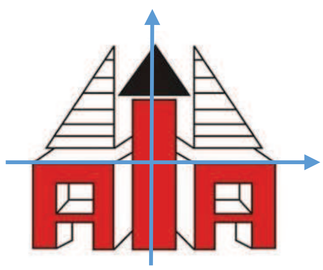
Ocasionalmente, utilizam-se problemas na introdução de um novo conteúdo e, quando isso é feito, eles não são utilizados na perspectiva do materialismo histórico dialético com uma organização pautada na teoria do ensino desenvolvimental, conforme é a proposta desta atividade de estudo, em específico, da Tarefa 1, apresentada no Quadro 3.

Quadro 3 – Tarefa 1 utilizada no experimento didático formativo

Problema 1) Um logotipo é uma representação visual ou gráfica que identifica uma empresa ou uma marca. É a sua assinatura e consiste em um conjunto de símbolos que caracterizam o negócio, despertando sensações no consumidor. Através do logotipo a empresa pode se diferenciar da concorrência e criar vínculo com os clientes e potenciais clientes. Foi com esse propósito que a Administradora Imobiliária Assis criou o seu logotipo:

Um fato interessante contido neste e em outros logotipos é o uso da Matemática em sua criação, em específico de uma função chamada de reflexão, que consiste em refletir uma imagem por meio de uma reta denominada eixo de simetria. Transportando este conceito para o mundo da Álgebra Linear temos a *aplicação reflexão*.

Situando o logotipo da Administradora Imobiliária Assis em um plano cartesiano, desconsiderando o nome da empresa e considerando o eixo de simetria como sendo o eixo y passando pelo ponto médio da base da letra I e o ponto médio da base do triângulo de cor preta temos:



I) Determine a aplicação T que caracteriza esta reflexão.

II) Tomando quaisquer pontos $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$ e qualquer escalar α, determine:

a) a imagem do ponto (a, b), ou seja, $T(a, b)$

b) a imagem do ponto (c, d), ou seja, $T(c, d)$

c) a imagem do ponto $\big((a, b) + (c, d)\big)$, ou seja, $T\big((a, b) + (c, d)\big)$

d) a imagem do ponto $\alpha(a, b)$, ou seja, $T(\alpha(a, b))$

e) $T(a, b) + T(c, d)$

f) $\alpha T(a,b)$

Problema 2) Se de um quilograma de soja são extraídos 0,2 litros de óleo, de uma produção de s Kg de soja seriam extraídos $0{,}2s$ litros de óleo. Escrevendo na forma de função teremos $Q(s) = 0{,}2s$, onde Q é a quantidade em litros de óleo de soja e s é a quantidade em Kg de soja.

Como as variáveis envolvidas devem ser sempre positivas, a função Q é uma restrição da função $G: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $G(x) = 0{,}2x$.

a) Expresse graficamente a quantidade de litros de óleo em função da quantidade de soja.

b) Expresse graficamente a função G.

c) Comparando os gráficos dos itens (a) e (b), que conclusão pode-se obter?

d) Determine a imagem do vetor soma $x + y$ na função G, ou seja, $G(x + y)$.

e) Se um vetor x é multiplicado por um escalar k,determine a imagem do vetor kx por meio da função G, ou seja, determine $G(kx)$.

Problema 3) A quantidade em litros de óleo extraída por quilograma de cereal segundo um determinado processo pode ser descrita pela tabela.

	Soja	*Milho*	*Algodão*	*Amendoim*
Óleo (l)	0,2	0,06	0,13	0,32

A quantidade total de óleo produzido por x Kg de soja, y Kg de milho, z Kg de algodão e w Kg de amendoim é dada por $Q = 0{,}2x + 0{,}06y + 0{,}13z + 0{,}32w$. Observe que a quantidade de óleo pode ser dada pela multiplicação da "matriz rendimento" pelo vetor quantidade.

$$Q = [0{,}2 \quad 0{,}06 \quad 0{,}13 \quad 0{,}32]\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = 0{,}2x + 0{,}06y + 0{,}13z + 0{,}32w$$

Formalmente, estamos trabalhando com a função $Q: A \subset \mathbb{R}^4 \;\longrightarrow\; \mathbb{R}$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \longrightarrow [0{,}2 \quad 0{,}06 \quad 0{,}13 \quad 0{,}32]\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

que é uma restrição da função $F: \mathbb{R}^4 \;\longrightarrow\; \mathbb{R}$ dada por

$$F(x, y, z, w) = 0{,}2x + 0{,}06y + 0{,}13z + 0{,}32w.$$

a) Considerando $u = (x_1, y_1, z_1, w_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2, w_2)$ vetores de $\mathbb{R}^4$, determine a imagem de $u + v$ mediante a função F.

b) Considerando $u = (x_1, y_1, z_1, w_1)$ um vetor de $\mathbb{R}^4$ e α um número real qualquer, determine $F(\alpha u)$.

Fonte: Elaborado pela autora.

Para a resolução da Tarefa 1 (Quadro 3), a pesquisadora e o professor da turma fizeram uma divisão em grupos de acordo com o resultado individual da avaliação diagnóstica, colocando alunos com conceitos maiores com alunos com conceitos menores, visando provocar mútuas influências em torno da zona de desenvolvimento proximal dos estudantes. É nesse processo que o aluno, ao internalizar as experiências culturais, reconstrói os modos de ação realizados externamente e aprende a organizar seus processos mentais.

Entretanto, a divisão estabelecida teve que ser alterada devido à ausência de alguns alunos e à presença de outros que não haviam realizado a avaliação diagnóstica, fato ocorrido devido à grande variação do número de alunos nas aulas, conforme já relatado. A divisão final para a resolução da tarefa pode ser vista no Quadro 4, considerando que nesta distribuição colocou-se a formação completa dos grupos, envolvendo os alunos que, pelos critérios, se tornaram sujeitos desta pesquisa e aqueles que não. Ressalta-se também que mesmo tendo ocorrido alterações nas formações iniciais dos grupos, o objetivo de interferência na zona de desenvolvimento proximal por meio da socialização continuou válido, visto não existir uma forma exata de medir tal nível e sempre haver diferenças significativas entre as zonas de desenvolvimento proximal dos alunos.

Quadro 4 – Divisão dos grupos para a resolução da Tarefa 1

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5
A4 A6 A13	A8 E2 E6	A7 A10 A12	A1 A2 A14 E7	A5 A11 E4

Fonte: Elaborado pela autora.

Notas:
* Ai representa o Aluno i que é sujeito desta pesquisa.
** Ei representa o Estudante i que não é sujeito desta pesquisa.

Dois alunos sujeitos desta pesquisa não compareceram nesta aula, A3 e A9, por isso não constam na listagem. Observa-se, no Quadro 4, que em todos os grupos há pelo menos um aluno sujeito desta pesquisa, o que possibilita a análise da tarefa realizada pelo grupo. Com a Tarefa 1, os alunos puderam iniciar o processo de obtenção da relação nuclear do objeto transformação linear.

Com o intuito de explicitar a relação nuclear do objeto, a Tarefa 2 (Quadro 5) foi executada como planejada: os alunos responderam, inicialmente, apenas à questão 1, depois discutiu-se com a turma as respostas obtidas, levantando as propriedades comuns aos problemas da Tarefa 1, conforme solicitado na questão 2.

Quadro 5 – Tarefa 2 utilizada no experimento didático formativo

Questão 1) Compare e analise as perguntas e respostas dos problemas 1 a 3 da Tarefa 1. O que há de comum a todas as aplicações dadas, ou seja, quais condições são satisfeitas por todas estas aplicações independente de suas particularidades?   **Questão 2)** Após as discussões em sala de aula da questão 1, reescreva as propriedades comuns a todas as aplicações dos problemas da Tarefa 1.

Fonte: Elaborado pela autora.

2.2.2.2 Procedimento metodológico da ação: modelação da relação universal

Esta ação visa criar um modelo para a relação universal que estabeleça esta relação por completo e possibilite sua análise posterior. Deve possuir características visuais que conduzam à compreensão da estrutura da relação universal, de forma que, ao observar o modelo, o aluno compreenda o que ocorre nele.

> Na ciência, a modelação é um tipo peculiar de idealização simbólico-semiótica. Na atualidade, este termo é empregado ampla e frequentemente com diferentes significados. Em nossa opinião, a mais aceitável definição deste conceito é dada por V. Shtoff. "Por modelo se compreende um sistema representado mentalmente ou realizado materialmente que, refletindo ou reproduzindo o objeto de investigação, é capaz de substituí-lo de modo que seu estudo nos dê uma nova informação sobre este objeto". V. Shtoff distingue tipos materiais e mentais de modelos. Os primeiros permitem uma transformação objetal, os segundos, obviamente, só uma transformação mental. O primeiro tipo se divide em três subtipos: ***1)*** modelos que refletem as particularidades espaciais dos objetos (por exemplo, maquetes); ***2)*** modelos que tem semelhança física com o original (por exemplo, um modelo de uma represa); ***3)*** modelos matemáticos e cibernéticos que refletem as propriedades estruturais dos objetos. Os modelos mentais dividem-se em: ***1)*** imagens iconográficas (desenhos, globos, barras etc.); ***2)*** modelos semióticos (por exemplo, a fórmula da equação algébrica, etc.). Os modelos semióticos requerem uma interpretação especial, sem a qual perdem a função de modelos. (DAVYDOV, 1988, p. 134-135)

Portanto, os modelos algébricos podem ser do tipo material que refletem as propriedades estruturais dos objetos, chamados de modelos matemáticos (modelos literais, gráficos ou espaciais) ou do tipo mental, que são os modelos semióticos. Nesta pesquisa, optou-se por um modelo literal no qual o aluno expressou por palavra e/ou símbolos algébricos a relação nuclear identificada. Por modelo literal subtende-se modelo linguístico, conforme descrito por Aquino e Cunha (2016), como sendo o modelo elaborado por meio do uso da palavra, estando ela na forma oral ou escrita. No caso desta pesquisa, priorizou-se a palavra escrita para conduzir os alunos na obtenção de um modelo que se assemelhasse ao máximo aos modelos de conceitos habitualmente aceitos pela comunidade matemática como modelos formalizados de um conceito, pois conforme Davydov (1988) esclarece, o aluno precisa desenvolver um pensamento próprio da ciência em questão, no caso, o aluno precisa aprender a pensar de acordo com as formas e as normas do pensamento matemático.

Para a elaboração de um modelo, utilizamos a questão 1 da Tarefa 3, a qual pode ver vista no Quadro 6:

Quadro 6 – Questão 1 da Tarefa 3 utilizada no experimento didático formativo

Questão 1) Todas as aplicações contidas nos problemas 1 a 3 da Tarefa 1, não considerando aquelas que são restrições de outras aplicações, são chamadas de *transformações lineares*. Na Tarefa 2 vocês levantaram as características comuns destas transformações. Agora, de acordo com as respostas da Tarefa 2 crie um texto matemático que formalize sua resposta e conceitue uma transformação linear. Não esqueça que um conceito deve ser escrito de forma geral e abrangente, sem considerar uma situação particular, pois é uma formalização de um conteúdo científico.

Fonte: Elaborado pela autora.

Para a resolução dessa tarefa, tentou-se estabelecer os mesmos grupos da Tarefa 1 (Quadro 6), mas não foi possível devido à ausência de alguns componentes destes grupos e à presença de outros estudantes que não haviam comparecido na aula referente à Tarefa 1. A nova formação dos grupos pode ser observada no Quadro 7.

Quadro 7 – Divisão dos grupos para a resolução da questão 1 da Tarefa 3

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 6
A4* A6 A13 E13**	A8 A9 A11	A7 A10 A12	A1 A2 A14	A3 E8

Fonte: Elaborado pela autora.

Notas:
* Ai representa o Aluno i que é sujeito desta pesquisa.
** Ei representa o Estudante i que não é sujeito desta pesquisa.

O grupo 5 não aparece nesta lista, pois neste dia só estava presente um componente deste grupo (A11) e um componente do grupo 2 (A8), os quais se uniram formando o grupo 2 com o acréscimo do aluno A9. O grupo 1 ficou com 4 componentes porque o estudante E13 se recusou a ficar no grupo 6, julgando que no grupo 1 ele aprenderia mais. O aluno A5, sujeito desta pesquisa, não compareceu nesta aula, por isso não consta na listagem dos grupos. Ele era integrante do grupo 5.

Comparando os Quadros 4 e 7, notamos que as maiores alterações ocorreram nos grupos 2 e 3 devido aos fatos expostos acima. Além disso, o grupo 6 foi formado por alunos que não compareceram à resolução da Tarefa 1. Observa-se também que todos os grupos possuem pelo menos um aluno sujeito desta pesquisa, o que permite analisar o modelo desenvolvido por todos os grupos.

2.2.2.3 Procedimento metodológico da ação: transformação do modelo da relação universal que caracteriza o conceito teórico de transformação linear

Esta ação consiste em uma transformação e reconstrução do modelo estabelecido na ação anterior (modelação), com o intuito de estudar as propriedades da relação universal em sua “forma pura” sem interferências dos traços particulares dos dados da tarefa. Davydov (1988, p. 208) afirma que esta ação é realizada pelo aluno em duas direções:

> No começo, os alunos constroem o modelo depois ou durante a manipulação do material de um conteúdo específico. Depois, de modo inverso, eles devem tomar o modelo dado e usá-lo para realizar as manipulações apropriadas. Por exemplo, o professor escreve uma fórmula nova que conserva a designação anterior do objeto medido, mas muda a letra que designa a medida. Os alunos devem realizar as correspondentes mudanças na situação objetal e depois realizar a medição sob as novas condições.

Davydov (1988) enfatiza que a modelação (tanto a inicial como sua transformação), por estar ligada ao caráter visual, é amplamente utilizada na didática tradicional. “Entretanto, no marco do ensino experimental o caráter visual tem um conteúdo específico. Nos modelos visuais se refletem as relações e as conexões essenciais ou internas do objeto, isoladas (abstraídas) por meio das correspondentes transformações” (DAVYDOV, 1988, p. 208-209).

Assim, após a transformação do modelo, obtém-se um novo modelo, no sentido de que é um aperfeiçoamento do modelo criado, ressaltando puramente a relação universal do objeto em estudo. Com esta ação, é possível ir identificar a unidade do geral e o particular, prevalecendo o geral, que é a essência do objeto.

> Os modelos são uma forma peculiar de abstração, na qual as relações essenciais do objeto estão localizadas nos enlaces e relações visualmente perceptíveis e representadas, de elementos materiais e semióticos. Trata-se de uma unidade peculiar do singular e o geral, na qual em primeiro plano se apresenta o geral, o essencial. [...]

> Os modelos são, ao mesmo tempo, os produtos e o meio de realização desta atividade. (DAVYDOV, 1988, p. 136)

A fim de transformar o modelo desenvolvido na questão 1 da Tarefa 3 (Quadro 6), utilizou-se a questão 2 da mesma tarefa (Quadro 8), conforme nota-se no Apêndice K.

Quadro 8 – Questão 2 da Tarefa 3 utilizada no experimento didático formativo

Questão 2) Após a discussão em sala das respostas da questão 1, reescreva o seu texto matemático conceituando transformação linear.

Fonte: Elaborado pela autora.

Com os cartazes com o modelo, criado por cada grupo, fixados no quadro negro, os alunos começaram a apresentar o seu modelo comparando-o ao modelo do grupo que havia falado antes deles. Esta comparação não foi solicitada pelo professor, eles fizeram livremente, mostrando o interesse pela atividade e pela formalização do conceito. Após a apresentação de cada grupo, o professor, por meio do diálogo, conduziu-os à escrita do novo modelo.

2.2.2.4 Procedimento metodológico da ação: resolução do sistema de tarefas particulares utilizando o conceito teórico de transformação linear

Esta ação é voltada para a concretização do procedimento geral de resolução da tarefa inicial e sua conversão em um procedimento único para a resolução de tarefas particulares. É a passagem do geral para o particular que estrutura o concreto a partir do abstrato sobre a base da identificação das regularidades (DAVYDOV, 1988).

Para que o aluno realizasse esta passagem, construiu-se um sistema de tarefas particulares para ser resolvido utilizando o procedimento geral e a relação universal, constituído pela discussão do lógico-histórico do conceito de transformação linear no que tange às formalizações das definições do conceito (Apêndice P), dadas por diversos autores no decorrer no tempo e pelas questões 1 a 3 da Tarefa 4 (Quadro 9), conforme descrito nos Apêndices N e R.

Para a elaboração da Tarefa 4, utilizou-se questões com aplicações voltadas para a própria Álgebra Linear que desafiassem os alunos a pensarem no conceito recém construído e a utilizá-lo como ferramenta própria para resolução dos problemas propostos.

Quadro 9 – Questões 1 a 3 da Tarefa 4 utilizada no experimento didático formativo

Questão 1) Os problemas 2 e 3 da Tarefa 1 contêm aplicações que são restrições de transformações lineares. Por que essas aplicações não são lineares?

Questão 2) O problema 3 da Tarefa 1, contém a representação matricial para a transformação linear dada em seu enunciado. Considerando a transformação linear obtida no problema 1 da mesma tarefa, $T(x, y) = (-x, y)$, podemos representa-la na seguinte forma matricial:

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Analise estas representações e

a) explique como escrever uma transformação linear em sua forma matricial.

b) escreva as transformações lineares abaixo em sua forma matricial

b.1) $H: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $H(x, y) = (x + y,\ y - x)$

b.2) $J: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ tal que $J(x, y, z, w) = (x - y - 2z,\ -x + 2y + z,\ 0,\ y + 2w,\ z - w)$

b.3) $K: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $K(x, y, z) = (x + 2y - z,\ -y - z,\ 2x - 3y + z,\ x)$

Questão 3) Considerando as operações soma e multiplicação por escalar usuais do domínio e do contradomínio de cada transformação abaixo listada, identifique quais delas são lineares e quais não são, sempre justificando a sua resposta.

a) $A: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $A(x) = 2x$

b) $B: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que $B(x) = kx$, onde $k \in \mathbb{N}$ é fixo

c) $C: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $C(x, y) = (xy, y)$

d) $D: P_3 \longrightarrow P_3$ tal que $D(p) = p'$(derivada de p), onde P_3 representa o espaço vetorial dos polinômios com coeficientes reais de grau menor ou igual a 3.

e) $F: M(n \times n) \longrightarrow M(n \times n)$ tal que $F(A) = AB$, onde $M(n \times n)$ é o espaço vetorial das matrizes quadradas de ordem n com entradas reais, $A \in M(n \times n)$ e B é uma matriz fixa em $M(n \times n)$.

f) $G: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $G(x) = ax + b$, onde $a, b \in \mathbb{R}$

Fonte: Elaborado pela autora.

Na questão 3, ao supor que uma dada transformação é linear, o aluno está levantando uma conjectura, que é a vislumbração de “propriedades, relações, resultados gerais importantes para o bom desenvolvimento do ensino da matemática” (VAZ, 2012, p. 41); no caso, o aluno conjectura se a transformação em questão é ou não linear. Em seguida, é necessário verificar a veracidade da conjectura levantada. Este é o processo de formalização do conhecimento matemático. Vaz (2012, p. 41) diz que a formalização é “a demonstração matemática do fato propriamente dito ou uma contra proposição da conjectura levantada, nos dois casos com um argumento pedagógico compatível [...]". Em ambos os processos, o pensamento matemático está em pleno uso e desenvolvimento, pois eles são etapas inerentes à construção do saber matemático.

A aula para a resolução destas questões ocorreu em um laboratório de informática da Coordenação de Matemática, pois uma questão da Tarefa 4 exige o uso do *software* Geogebra que já estava instalado nos computadores do laboratório. Mesmo tendo planejado a resolução de tal questão para a segunda aula do dia, achou-se conveniente iniciar a primeira aula já nesta sala para evitar imprevistos durante o processo.

Para a apresentação do movimento de formalização das definições, utilizou-se o diálogo, nos mesmos parâmetros utilizados para a apresentação do lógico-histórico do conceito. Para a resolução da Tarefa 4 (todas as questões), solicitou-se a formação de grupos, preferencialmente, os mesmos das aulas anteriores; porém, devido à ausência de alguns alunos no momento de divisão dos grupos e outros que não compareceram neste dia, a formação foi alterada, podendo a nova constituição ser vista no Quadro 10.

Quadro 10 – Divisão dos grupos para a resolução da Tarefa 4

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 6
A3* A4 A13	A5 A8 A9 A11	A7 A10	A2 A14	E8** E10

Fonte: Elaborado pela autora

Notas:
* Ai representa o Aluno i que é sujeito desta pesquisa.
** Ei representa o Estudante i que não é sujeito desta pesquisa.

O grupo 5 não aparece nesta lista devido à formação base para os grupos ter sido a distribuição dada no Quadro 7. O grupo 2 ficou com 4 componentes devido à mesclagem dos grupos 2 e 5 do Quadro 10, explicadas logo após a apresentação do Quadro 7. Os alunos A1, A6 e A12, sujeitos desta pesquisa, não compareceram nesta aula, por isso não constam na listagem dos grupos. Eles eram integrantes dos grupos 4, 1 e 3, respectivamente.

Observe que o grupo 6 ficou constituído apenas por estudantes, ou seja, por alunos que não foram selecionados para serem sujeitos desta pesquisa. Logo, este grupo não entrará na análise do desenvolvimento da tarefa, consequentemente, na análise do desenvolvimento da ação.

2.2.2.5 Procedimento metodológico das ações: controle da realização das ações anteriores e avaliação da assimilação do conceito de transformação linear como um procedimento geral

Segundo Davydov (1988), há uma íntima conexão entre essas duas ações, controle e avaliação, por isso elas aparecem juntas no desenvolvimento da tarefa. Com a ação de controle é possível determinar a correspondência entre as ações de estudo já realizadas e as condições e exigências de uma nova tarefa, assegurando "que este procedimento tenha todas as operações indispensáveis para que o aluno resolva com êxito a diversidade de tarefas concretas particulares" (DAVYDOV, 1988, p. 210). Assim, o controle consiste na mudança da composição operacional das ações, com o intuito de que o aluno descubra a conexão do procedimento geral já estabelecido pelas outras ações com as peculiaridades dos dados da tarefa a ser resolvida, bem como do resultado a ser alcançado (DAVYDOV, 1988).

A ação de avaliação conduz o aluno a determinar se o procedimento geral de solução da tarefa está ou não assimilado e se o conceito está ou não, e em que medida, formado, consistindo em um exame qualitativo do resultado da assimilação do procedimento geral da ação e do conceito que foi formado (DAVYDOV, 1988).

> Há uma íntima conexão entre a ação de controle (monitoramento) e a ação de avaliação para evidenciar se [...] [o aluno está preparado] para passar a resolver uma nova tarefa de aprendizagem que exige um novo procedimento de solução (a avaliação determina, em particular, o grau de formação do modo (procedimento) geral usado na resolução da tarefa anterior). Como a nova tarefa não é completamente nova a não ser em uma parte de seus dados ou condições, os alunos podem identificar esta nova parte por meio da avaliação e, então, não somente determinar a impossibilidade de usar o modo anterior de resolver a tarefa como também identificar com que está ligada a dificuldade surgida. Como a avaliação indica a insuficiência do procedimento geral de ação de que [...] [o aluno] dispõe, orienta-a na busca de um novo procedimento geral de solução da tarefa de aprendizagem surgida e não na obtenção de um outro resultado parcial de sua solução. (DAVYDOV, 1988, p. 211)

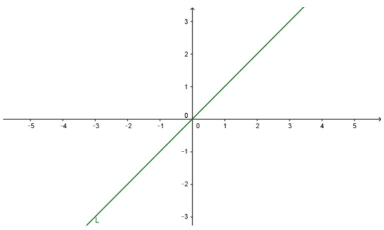
Para a execução desta ação, utilizou-se as questões 4 e 5 da Tarefa 4 (Quadro 11), conforme descrito nos Apêndices N e R, com a aula ocorrendo no laboratório de informática conforme descrito na ação anterior. Nestas duas questões, optou-se pela utilização do *software* Geogebra como forma de introduzir um componente computacional na atividade de estudo, modificando a composição operacional das tarefas que foram trabalhadas, pois naquele momento introduziu-se o aspecto geométrico para que o aluno o fizesse corresponder com o aspecto algébrico do conceito, identificando geometricamente algumas transformações lineares.

Na primeira questão, questão 4, optou-se pela apresentação de gráficos já plotados pelo *software*, mostrando o que ele pode fazer e conduzindo o aluno na análise geométrica do conceito algébrico. Na questão 5, eles puderam manusear o *software*, utilizando-o como suporte para a obtenção da transformação linear solicitada a partir de uma construção geométrica; além disso, esta questão resgatou aspectos históricos discutidos no início do experimento didático quando da exploração do lógico-histórico do conceito. Salienta-se que, para o aluno conseguir fazer esta transposição do caráter algébrico para o caráter geométrico e vice-versa, faz-se necessário uma constante avaliação por parte do aluno da assimilação do procedimento geral de resolução da tarefa e da formação do conceito.

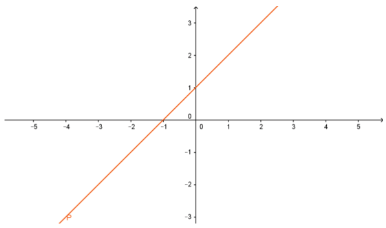
Quadro 11 – Questões 4 e 5 da Tarefa 4 utilizada no experimento didático formativo

Questão 4) Utilizando o *software* Geogebra, foi plotado o gráfico de algumas transformações. Os gráficos dos itens I, II e III correspondem a gráficos de transformações lineares e os gráficos dos itens IV, V e VI a gráficos de transformações não lineares.

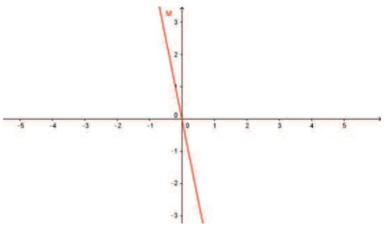
I) $L: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $L(x) = x$



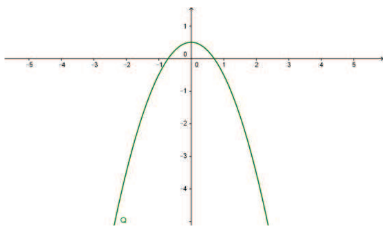
IV) $P: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $P(x) = x + 1$



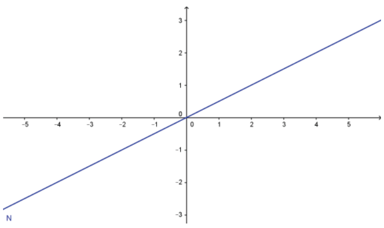
II) $M: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $M(x) = -5x$



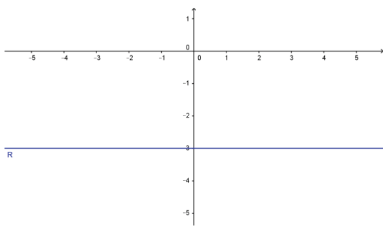
V) $Q: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $Q(x) = -x^2 + \frac{1}{2}$



III) $N: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $N(x) = \frac{x}{2}$



VI) $R: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $R(x) = -3$



a) Compare e analise o gráfico de todas as transformações lineares. O que há em comum nesses gráficos tirando o fato de todos serem retas?

b) Compare e analise o gráfico de todas as transformações não lineares. O que há em comum?

c) Aplique as respostas dos itens (a) e (b) nos itens da Questão 2, de acordo com sua classificação de linear ou não linear, verificando se as condições são satisfeitas em outros casos particulares. A que conclusão se chega?

d) Prove que o resultado do item (a) é válido para qualquer transformação linear.

Questão 5) Em computação gráfica e geometria são comuns problemas de rotação de objetos no plano e no espaço. Esses problemas podem ser desenvolvidos recorrendo à teoria dos números complexos simplesmente utilizando a parte operacional por meio de suas operações usuais e da representação de um número complexo em forma de vetor como criado por Hamilton em 1835 (e visto na história exposta no início dessas aulas) associada com a visão geométrica dessas operações no plano Argand-Gauss, onde cada número complexo da forma $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e i a unidade imaginária, é representado na forma vetorial (a, b) e assim representado no plano Argand-Gauss como uma representação de um vetor real no plano cartesiano.

Utilizando o *software* Geogebra podemos obter a representação geométrica de um número complexo a partir da notação dada por Hamilton. Assim, com o auxílio deste *software*, faça o que se pede.

a) Marque o ponto $z_1 = 2 + 3i$.

b) Marque os pontos abaixo e explicite o número complexo

b.1) $z_2 = iz_1 =$ ________________________

b.2) $z_3 = iz_2 =$ ________________________

b.3) $z_4 = iz_3 =$ ________________________

b.4) $z_5 = iz_4 =$ ________________________

c) Observando o gráfico obtido com a marcação dos pontos dos itens (a) e (b), que conclusões você tira a partir destas construções?

d) Dado um número complexo qualquer $z = a + bi$, qual seria o número correspondente a uma rotação arbitrária de 90º (90 graus) deste número z?

e) Qual a função que determina a rotação obtida no item (d)?

f) Prove que a função obtida no item (e) é linear.

Fonte: Elaborado pela autora.

Aspectos próprios do pensamento matemático foram trabalhados nessas duas questões. Na questão 4, item (d) os alunos puderam trabalhar a generalização do resultado do item (a). Generalizar o resultado é "explorar o alcance do resultado obtido" (VAZ, 2012, p. 41), é mostrar por meio da demonstração matemática que o resultado vale para uma classe maior de objetos, sendo que os matemáticos sempre objetivam generalizar resultados. Na situação da questão 4 item (a), tem-se alguns gráficos de transformações lineares satisfazendo determinada propriedade (todos os gráficos passam pela origem do plano cartesiano, ou seja, a imagem do zero do domínio é o zero do contradomínio) e no item (d) solicitou a comprovação de que esta propriedade não é válida apenas para esses gráficos que, no caso, são gráficos de transformações lineares planas (domínio e contradomínio são o conjunto dos números reais), mas é válida para qualquer transformação linear, independente do espaço vetorial que determina o domínio e o contradomínio. Assim, os alunos deveriam provar a propriedade "Se $T: E \rightarrow F$ é uma transformação linear, então $T(0_E) = 0_F$, com 0_E o elemento neutro de E e 0_F o elemento neutro de F".

Na questão 5 item (e), explorou-se a formalização no sentido de escrever o resultado segundo as normas formais da linguagem matemática, ou seja, utilizar palavras, símbolos e notações específicas da matemática que possibilitem a obtenção de uma afirmação/conjectura/enunciado que satisfaça aos critérios do pensamento matemático. No caso, era necessário que os alunos formalizassem a escrita de uma função definida no conjunto dos números complexos. Em seguida, no item (f), na demonstração de que a função obtida era linear, os alunos estavam utilizando o conceito em uma situação totalmente adversa do que haviam feito, pois até o momento eles não haviam trabalhado com o conjunto dos números complexos, sendo que este conjunto é muito utilizado em aplicações práticas que envolvam circuitos elétricos (circuito pelo qual há a transmissão de energia elétrica).

A resolução da questão 4, descrita no Quadro 11, ocorreu conforme planejado, com os alunos resolvendo-a em grupos. A correção foi feita oralmente e com os alunos escrevendo e explicando suas respostas no quadro negro.

Para a resolução da questão 5, o professor fez uma breve introdução ao uso do *software,* explicando o uso dos comandos necessários para a atividade. Os alunos rapidamente aprenderam a manuseá-lo e puderam, então, começar a resolver a questão. A correção também se deu pela forma oral e escrita e pela explicação no quadro negro.

2.2.2.6 Procedimento metodológico da ação: verificação da aprendizagem por parte do professor

Verificar a aprendizagem é uma tarefa complexa que exige uma apreciação qualitativa dos resultados obtidos no final de um processo educativo, independentemente do tempo utilizado para a realização deste processo. Segundo Libâneo (2013, p. 216):

> A avaliação é uma tarefa didática necessária e permanente do trabalho docente, que deve acompanhar passo a passo o processo de ensino e aprendizagem. Por meio dela, os resultados que vão sendo obtidos no decorrer do trabalho conjunto do professor e dos alunos são comparados com os objetivos propostos, a fim de constatar progressos, dificuldades e reorientar o trabalho para as correções necessárias. A avaliação é uma reflexão sobre o nível de qualidade do trabalho escolar tanto do professor como dos alunos.

Assim, a Tarefa 5 (Quadro 12) buscou verificar a formação do conceito de transformação linear, objetivo do experimento didático formativo, de acordo com os pressupostos davydovianos já descritos para a formação de conceitos. A tarefa foi respondida individualmente e sem consulta a materiais didáticos, para possibilitar a análise do desenvolvimento intelectual de cada aluno sujeito da pesquisa. A correção ocorreu posteriormente, pela pesquisadora e pelo professor da turma, e em outra aula subjacente ao experimento, o professor entregou a tarefa corrigida à turma.

Para a elaboração desta tarefa, procurou-se verificar, além da formação do conceito de transformação linear: a criatividade do aluno na construção de transformações lineares (questão 1) e não lineares (questão 2); o desenvolvimento do conhecimento do aluno quanto ao conceito de espaço vetorial e a capacidade de utilização do conceito de transformação linear em uma situação prática (questão 3); a habilidade do aluno em associar o conceito de determinantes, já conhecido por ele, com o de transformação linear (questão 4) e a capacidade de associar um conceito novo, a saber o conceito de Sequência de Fibonacci, ao conceito de transformação linear (questão 5). Nas questões 4 e 5, explorou-se também aspectos históricos do desenvolvimento dos conceitos em questão, sendo que para o conceito de determinantes, buscou-se uma relação direta com o lógico-histórico discutido no início do experimento didático formativo.

Quadro 12 – Tarefa 5 utilizada no experimento didático formativo

Questão 1) Crie uma transformação linear e mostre que é linear.

Questão 2) Crie uma transformação não linear e mostre que ela não é linear.

Questão 3) O conceito de transformação linear e toda a teoria decorrente deste conceito são ferramentas essenciais para o desenvolvimento da teoria dos códigos corretores de erros, teoria esta que tem tomado papel importantíssimo mediante o desenvolvimento tecnológico que surgiu desde a década de 1940, década do surgimento desta teoria, especificamente, em julho de 1948 com Claude Shannon, e tem se desenvolvido atualmente com as evoluções do campo computacional e tecnológico à medida que se deseje uma comunicação confiável, onde a mensagem enviada é exatamente a mensagem recebida. Dentre as situações em que se usa um código corretor de erros, podemos citar: digitalização de fotografias, transmissões via rádio e televisão, uso de computadores, gravação de informações em pen drive, CD ou DVD, etc.

Mesquita (2005; 2007) ao estudar esta teoria descreve algumas classes de códigos nas quais o processo de codificação e decodificação de mensagens se dá mediante uma transformação linear. A autora (MESQUITA, 2005) cita casos reais onde transformações lineares foram fundamentais, dentre elas temos a transmissão e recepção de fotos de Marte feitas pela nave espacial Mariner 9 em 1972. Essas fotos não eram coloridas como temos hoje, mas sim em preto e branco, sendo as imagens formadas por partes pretas, partes brancas e partes cinzas (junção do preto e do branco). Assim, em cada foto, eram analisados os tons das cores (preto, branco e cinza) e a cada um deles fazia-se corresponder um código binário de comprimento seis (um elemento do tipo $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$, onde $x_i \in \{0,1\}$ para cada $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$) que era levado mediante uma transformação linear injetora em um conjunto também binário cujos elementos tinham comprimento trinta e dois. Esse era o processo de codificação e cada tom de cor codificado recebe o nome de *palavra do código*. A decodificação se dava através da transformação linear inversa dessa transformação linear.

Para especificarmos uma transformação linear, consideremos uma situação descrita pela mesma autora (MESQUITA, 2007) e que foi adaptada para este texto: os Códigos de Goppa são considerados bons códigos devido à sua facilidade de codificar e decodificar mensagens, isso comparado a outras classes de códigos; eles são utilizados tanto na teoria dos códigos corretores de erros quanto em certas classes de criptografia de chave pública. O código de Goppa descrito pela autora (MESQUITA, 2007) na página 24 deste trabalho pode ser obtido mediante a transformação linear

$C: \{0,1\} \to \{0,1\}^8$ dada por $C(x_1, x_2) = (x_1 + x_2,\ x_1,\ x_1 + x_2,\ x_2,\ x_1, x_1 + x_2, x_1,\ x_2)$

ou, em forma matricial

$$C(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Maiores detalhes sobre este código foram omitidos por demandar conhecimentos que extrapolam o objetivo do presente texto.

De acordo com tal explanação,

a) qual a imagem da palavra $(0,0)$ por meio da aplicação C? Justifique.

b) mostre que a transformação C é linear.

Questão 4) Conforme vimos na história, o conceito de determinante surgiu primeiro que o conceito de matriz. Determinantes foram criados por Kowa em 1683 no Japão e, independentemente, por Leibniz em 1693 na Alemanha com o intuito de resolver sistemas lineares. Já as matrizes foram introduzidas formalmente por Cayley em 1855, que, dentre suas classificações, estão as matrizes quadradas, cuja quantidade de linhas é igual à quantidade de colunas, sendo que o conjunto de todas as matrizes quadradas de ordem n formam um espaço vetorial. Hoje em dia a associação dos conceitos de matriz e determinante está tão forte em nossa mente que sempre que falamos de um deles o outro automaticamente nos vem à memória, de forma que para cada matriz quadrada podemos calcular seu determinante. Assim, podemos criar uma aplicação que associa cada matriz quadrada com seu determinante. Pensando, particularmente, no conjunto das matrizes quadradas de ordem dois podemos criar a seguinte aplicação:

$$T: M(2 \times 2) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longmapsto \det A = ad - bc$$

onde $M(2 \times 2)$ é o conjunto de todas as matrizes quadradas de ordem 2 e A é uma matriz desse conjunto. Podemos também representar esta aplicação da forma $T(A) = \det A$, onde A é uma matriz quadrada de ordem 2.

Diante desta situação, decida se a aplicação T é linear ou não. Justifique sua resposta dando um argumento lógico ou um contraexemplo.

Questão 5) Leonardo Fibonacci (1175 – 1250) também conhecido por Leonardo de Pisa, foi o matemático mais talentoso da Idade Média. Por seu pai trabalhar com negócios mercantis, desenvolveu logo cedo o interesse pela aritmética, o que o fez se dedicar a este ramo da matemática e realizar viagens pelo Egito, Sicília, Grécia e Síria, entrando em contato direto com os procedimentos matemáticos desenvolvidos pelos orientais e árabes. Em 1202, Fibonacci lança sua obra mais famosa, o *Liber abaci*, que se preocupa com a aritmética e álgebra elementares. Dentre os problemas que constam neste livro, o de maior destaque e repercussão é o seguinte:

Quantos pares de coelhos são produzidos num ano, começando com um só par, se em cada mês cada par gera um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês?

Este célebre problema dá origem à Sequência de Fibonacci $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$, onde cada termo após os dois primeiros é a soma dos dois imediatamente precedentes. Considerando $u_1 = 1, u_2 = 1, u_3 = 2, u_4 = 3, \dots, u_n, \dots$ podemos escrever a Sequência de Fibonacci como

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1} \text{ para } n \geq 2, \text{ com } u_1 = 1 \text{ e } u_2 = 1.$$

Essa forma de escrever uma sequência é chamada de *fórmula de recorrência*, onde, dados dois termos consecutivos de uma sequência pode-se determinar os demais.

A Sequência de Fibonacci pode ser encontrada em diversos lugares como, por exemplo, na distribuição das folhas em um galho de uma árvore qualquer, nas espirais formadas pelos gomos da casca de um abacaxi, na quantidade de sementes do girassol e da margarida, nas conchas do molusco marinho Nautilus pompilius, nos chifres dos carneiros, no formato de algumas galáxias e em algumas medidas do corpo humano.

Por meio da fórmula de recorrência $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ para $n \geq 2$ e variando os valores de u_1 e u_2 podemos determinar várias outras sequências, por exemplo:

$$2, 4, 6, 10, 16, 26, 42, \ldots$$

$$10, 10, 20, 30, 50, 80, 130, \ldots$$

$$0, -1, -1, -2, -3, -5, -8, -13, \ldots$$

Chamemos de $\mathcal{R}$ o conjunto de todas as sequências reais que satisfazem à recorrência

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1} \text{ para } n \geq 2.$$

Este conjunto é um espaço vetorial real munidos das operações soma e multiplicação por escalar, onde a operação soma é dada pela adição termo a termo das sequências e a multiplicação por escalar é multiplicar cada termo da sequência pelo escalar dado.

Assim, podemos definir a aplicação

$$T : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(u_n) \longmapsto (u_1, u_2)$$

onde (u_n) representa uma sequência qualquer do conjunto $\mathcal{R}$.

Mostre que T é uma transformação linear.

Fonte: Elaborado pela autora.

Todas as questões exigiam do aluno um pensamento especificamente matemático, utilizando os conceitos advindos de outros processos de ensino-aprendizagem, como os conceitos relacionados na Figura 2, fazendo a interlocução entre eles. Uma forma matemática de pensar amplamente explorada por esta tarefa foi a formalização do conhecimento adquirido, no qual o aluno precisou defender matematicamente uma ideia/afirmação, ou seja, ele precisou mostrar ou verificar se dada transformação era linear ou não, utilizando uma escrita e uma forma de pensar específicas da matemática.

3 ANÁLISE DA ATIVIDADE DE ESTUDO DO CONCEITO DE TRANSFORMAÇÃO LINEAR

Este capítulo tem como objetivo apresentar o lócus do experimento didático formativo realizado no período de janeiro e fevereiro de 2017, no curso de Bacharelado em Engenharia Elétrica do Instituto Federal de Goiás – Câmpus Goiânia, bem como a descrição e a análise da aprendizagem do conceito de transformação linear pelos alunos da disciplina Álgebra Linear, tendo como fundamento teórico-metodológico a teoria do ensino desenvolvimental de V. V. Davydov.

De início, faz-se com uma breve descrição da instituição e do curso em que a pesquisa foi realizada. Em seguida, apresenta-se o perfil do professor colaborador, enfatizando sua formação, experiência docente e o modo de pensar o ensino de Matemática e de Álgebra Linear, em específico, e a contextualização dos sujeitos da pesquisa nos seus aspectos sociocultural e educacional que interferem diretamente no processo de ensino-aprendizagem. Por fim, descreve-se a análise dos dados do experimento didático por meio da orientação das seguintes categorias: transformação dos dados da tarefa na condução da identificação do princípio geral do conceito de transformação linear; da modelação à transformação de um modelo para o conceito de transformação linear e o uso do conceito de transformação linear como ferramenta mental.

3.1 O experimento didático formativo: opção metodológica

A pesquisa consistiu em um experimento didático formativo. O método de intervenção didática é considerado por Davydov (1988, p. 187-188) a forma mais eficiente de intervenção nos processos mentais dos alunos, pois:

> O método do experimento formativo tem como característica a intervenção ativa do pesquisador nos processos mentais que ele estuda. A realização do experimento formativo pressupõe a projeção e modelação do conteúdo de novas formações mentais a serem constituídas, dos meios psicológicos e pedagógicos e das vias de sua formação. Na investigação dos caminhos para realizar esta projeção (modelo) no processo do trabalho de aprendizagem cognitiva [...] pode-se estudar também as condições e as leis de origem, de gênese das novas formações mentais correspondentes.

Por ser um método de pesquisa, ele se baseia na organização e na reorganização dos programas de ensino e dos procedimentos necessários para concretizá-los, utilizando procedimentos que formam ativamente nos alunos um novo nível de desenvolvimento das capacidades mentais (DAVYDOV, 1988). Nesse sentido, Freitas (2007), ao esclarecer que o experimento didático formativo é uma investigação que resulta em conhecimento sobre as mudanças no sujeito durante o processo de ensino-aprendizagem, explica:

> A investigação resulta em um conhecimento que busca explicar o objeto estudado (funções psicológicas), buscando também resultar em mudança qualitativa no sujeito investigado. No experimento didático, o que se busca é a explicação histórica das mudanças qualitativas no pensamento do sujeito, mudanças estas que são investigadas como uma cadeia complexa de processos inseparáveis de aprendizado, decorrentes da realização de uma tarefa proposta no experimento e contida no modo como este se encontra organizado. A tarefa proposta e os passos da tarefa estão ancorados em um determinado conceito científico a ser aprendido. A organização desses passos está ancorada em princípios teóricos da teoria histórico-cultural e da teoria do ensino desenvolvimental. Esses passos, ao serem cumpridos pelos sujeitos participantes exigem determinado movimento do pensamento, movimento este que pode resultar em mudanças na sua qualidade em relação ao conteúdo da tarefa, ou seja, o conceito científico. Em outras palavras: no decorrer do experimento acontece aquisição de atos mentais, atos esses que contribuem para reorganizar o pensamento, as operações mentais realizadas pelo sujeito. (FREITAS, 2007, p. 11)

Assim, na presente pesquisa, o experimento didático formativo é compreendido como o procedimento investigativo que permite analisar a aprendizagem do conceito de transformação linear em movimento e tempo real, evidenciando a relação entre a organização do ensino fundamentado nos pressupostos da teoria do ensino desenvolvimental, formulada por Davydov (1988), e o das capacidades intelectuais durante o processo de apropriação de conhecimentos, de modo que os saberes apropriados sejam mediadores de ações mentais, resultando em mudanças qualitativas nas funções cognitivas. Desta forma,

> O ensino e a educação experimentais não são implementados por meio da adaptação a um nível existente, já formado de desenvolvimento mental [dos alunos] [...], mas sim utilizando, por meio da comunicação do professor [com os alunos] [...], procedimentos que formam ativamente [neles] [...] o novo nível de desenvolvimento das capacidades. (DAVYDOV, 1988, p. 189)

Dessa forma, o método genético-modelador de investigação é "um método de educação e ensino experimentais que impulsiona o desenvolvimento" (DAVIDOV, 1988, p. 188), portanto, adequado para investigar o desenvolvimento do pensamento dos alunos e, consequentemente, a internalização dos conceitos teóricos dos objetos de aprendizagem. Para isso, é imprescindível planejar o conteúdo escolar a partir do princípio de ascensão do pensamento, indo do abstrato ao concreto.

A elaboração do plano de ensino na perspectiva desenvolvimental foi realizada pela pesquisadora e pelo professor colaborador. No entanto, a implementação deste plano ocorreu em um momento em que o cenário político e econômico não estava muito favorável. Era um período de greves por parte dos servidores da rede federal de ensino e de ocupações das instituições por estudantes. Exatamente o que aconteceu na semana anterior à semana prevista para o início das aulas do experimento didático, segunda semana do mês de outubro de 2016: o Câmpus foi ocupado por estudantes e na semana seguinte os servidores aderiram a uma greve.

Durante esse período, a pesquisadora aprofundou-se nos estudos sobre o ensino desenvolvimental com o professor colaborador, bem como reviu-se os planos das aulas e fez-se os devidos aperfeiçoamentos. No final, constatou-se que todos estes acontecimentos favoreceram muito, pois o professor adquiriu mais segurança quanto à teoria e todas as aulas puderam ser analisadas e pensadas cuidadosamente.

A desocupação do Câmpus ocorreu em, mais ou menos, um mês. Já a greve demorou quase dois meses, sendo finalizada no início de dezembro de 2016. Porém, o retorno às aulas para finalizar o segundo semestre letivo de 2016 só foi marcado para o início de janeiro de 2017, ficando a realização do experimento condicionada a esses fatores.

Como já detalhado, as aulas do experimento foram realizadas em uma turma da disciplina Álgebra Linear do curso de Bacharelado em Engenharia Elétrica do IFG – Câmpus Goiânia. Foram 13 aulas de 45 minutos cada, distribuídas entre os dias 21/01/2017 (1 aula), 28/01/2017 (4 aulas), 04/02/2017 (4 aulas) e 11/02/2017 (4 aulas), todas aos sábados, conforme o horário de aula da turma, das 7h às 8h30min e das 8h45min às 10h15min, exceto a primeira que foi das 9:30h às 10:15h e destinou-se à aplicação da avaliação diagnóstica da zona de desenvolvimento proximal dos alunos quanto aos conteúdos que precedem a aprendizagem do conceito de transformação linear e que constituem um terreno para a formação do novo conceito. As demais aulas foram destinadas ao desenvolvimento das ações que compõem a tarefa de estudo.

Pelo fato de boa parte dos alunos (64,29%) ser composta de trabalhadores, bem como pelo fato do curso de Engenharia Elétrica, de onde advém a maioria dos alunos, ser noturno, com as aulas encerrando às 22h15min e nem todos eles morarem próximo à instituição de ensino, havia muitos atrasos no início das aulas, com os alunos chegando a partir das 7h15min, dificultando este início antes das 7h25min, fator que nos levou a repensar nosso planejamento e, após uma conversa com a turma, ficou acordado que não haveria intervalo entre as aulas (8h30min às 8h45min) e que elas seriam encerradas às 10h40min. Mesmo assim, foi necessário aumentar mais uma aula em nosso cronograma, que, inicialmente, previa 12 aulas, passando para 13 aulas como descrito, tornando-se possível cumprir todo o planejamento e executando as aulas conforme os pressupostos davydovianos.

Desta forma, o experimento didático formativo buscou, dentre outras coisas, impulsionar o desenvolvimento dos alunos, intervindo no modo de organizar o ensino do conceito de transformação linear e na forma de eles aprenderem tal conceito, passando por um processo de construção da relação nuclear desse conceito, seguido por uma modelação e pela sua utilização. Quanto ao conceito trabalhado, não se buscou esgotar toda a teoria que o cerca, detendo-se à parte inicial e introdutória que, tradicionalmente, os livros didáticos chamam de definição de transformação linear. Alguns aspectos além deste tópico foram trabalhados de forma a dar sentido e significado ao conceito, como os tipos de transformações lineares planas e a escrita matricial de uma transformação.

As aulas foram planejadas e organizadas (Apêndices C, E, H, J, K, N, Q e S) para cumprir o objetivo de formar o pensamento teórico nos estudantes. Todas elas foram ministradas pelo professor da disciplina Álgebra Linear, que participou ativamente como colaborador da pesquisa, de todo o planejamento e organização das aulas. Durante o experimento, houve reuniões semanais para discussão e análise do plano de ensino, com o intuito de dar maior segurança ao professor colaborador na execução das aulas.

À pesquisadora coube o papel de observar as aulas (Apêndice T), fazendo anotações respeito do desenvolvimento e do envolvimento dos alunos, bem como coletando os dados por meio de gravações audiovisuais. Em síntese, o experimento didático formativo consistiu de uma pesquisa cujo ensino foi organizado intencionalmente de acordo com os pressupostos da teoria do ensino desenvolvimental com o objetivo de formar o pensamento teórico pelos estudantes de transformação linear.

3.2 O curso de Bacharelado em Engenharia Elétrica no contexto do Instituto Federal de Goiás – Câmpus Goiânia

O Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás (IFG) – Câmpus Goiânia é o maior e mais antigo câmpus do IFG, situado em uma área de fácil acesso no centro da cidade. Sua origem reporta à criação da Escola de Aprendizes Artífices de Goiaz em 1909, na antiga capital do Estado, Vila Boa, atualmente Cidade de Goiás, por meio do Decreto nº 7.566, de 23 de setembro de 1909, que instituiu a criação das Escolas de Aprendizes Artífices para o ensino profissional primário e gratuito. Na época, “a educação técnica foi apresentada como solução para diversos problemas sociais" (BARBOSA; JÚNIOR; BEZERRA, 2015, p. 150).

Seu estabelecimento em Goiânia ocorreu no ano de 1942 com a construção e transferência da capital do Estado para Goiânia. Entretanto, o início de seu funcionamento só ocorreu em janeiro de 1943 devido às festividades do Batismo Cultural de Goiânia, em 5 de julho de 1942, ocorrendo nas dependências da instituição uma exposição de produtos da incipiente indústria goiana. Atualmente, em seu prédio, é possível ainda notar vestígios dessa comemoração como o pórtico alusivo a esse Batismo Cultural. No momento de transferência de localização, por meio do Decreto-Lei nº 4.127, de 25 de fevereiro de 1942, a instituição passou a chamar-se Escola Técnica de Goiânia (ETG), oferecendo os cursos de Alfaiataria, Artes do Couro, Mecânica de Máquinas, Marcenaria, Rádio e Comunicação e Tipografia e Encadernação nas modalidades de internato e semi-internato apenas para alunos do sexo masculino, restrição que só foi abolida em 1947, com a criação dos novos cursos técnicos de Edificações, Eletrotécnica e a Construção de Máquinas e Motores, frente às demandas do desenvolvimento industrial em curso no país.

Em agosto de 1965, com a Lei nº 4.759 de 20 de agosto, a ETG passou a chamar-se Escola Técnica Federal de Goiás (ETFG), focalizando a oferta de cursos técnicos na área industrial. Seu ensino era organizado em quatro modalidades: colégio técnico industrial, aprendizagem industrial, cursos técnicos na área industrial e cursos intensivos de preparação de mão de obra industrial.

Por meio de um Decreto de 22 de março de 1999, Decreto sem número, extinguiu-se a ETFG transformando-a em Centro Federal de Educação Tecnológica de Goiás (Cefet/GO), o qual, com o propósito de atender às demandas do cidadão, do mercado de trabalho e da sociedade frente a um novo desenvolvimento tecnológico, passou a ofertar, além dos cursos técnicos de nível médio, cursos da educação superior, especialmente cursos tecnológicos. Foi nessa fase, especificamente no ano de 2003, que parte de sua estrutura foi tombada pelo Instituto do Patrimônio Histórico e Artístico Nacional (IPHAN) como um bem isolado e edifício público que compõe o acervo arquitetônico e urbanístico *Art Déco* da cidade de Goiânia, com edificações erguidas na época em que era Escola Técnica de Goiânia e, depois, Escola Técnica Federal de Goiás. Anteriormente, em 1998, o Governo do Estado de Goiás, a cargo da Fundação Cultural Pedro Ludovico Teixeira, tombou o edifício e o terreno da Escola Técnica Federal de Goiás como um dos 24 bens culturais materiais de Goiânia.

Com a Lei nº 11.892, de 29 de dezembro de 2008, foi instituída a Rede Federal de Educação Profissional, Científica e Tecnológica, criando, assim, os Institutos Federais de

Educação, Ciência e Tecnologia (IF), em um total de 38 IF criados a partir de instituições já existentes, como o Cefet/GO que passou a se chamar Instituto Federal de Educação, Ciência Tecnologia de Goiás (IFG), ampliando suas atribuições no campo da educação profissional e tecnológica, o qual passou a oferecer cursos em todos os níveis e modalidades de ensino, promovendo a integração e a verticalização da educação profissional, atuando da educação básica à educação superior, estendendo a cursos de pós-graduação nas modalidades *lato sensu* e *strictu sensu*. Com isso, os IFs passaram a ofertar também cursos de licenciatura, sobretudo de Ciências Naturais e de Matemática, além de oferecer capacitação técnica e atualização para os docentes que integram as redes públicas de ensino. Hoje, o IFG é composto de 14 câmpus distribuídos em Goiânia e no interior do Estado, com a Reitoria estabelecida na capital.

Atualmente, o Câmpus Goiânia oferece 32 cursos, sendo 7 cursos técnicos integrados ao ensino médio, 3 cursos técnicos integrados ao ensino médio na modalidade de educação de jovens e adultos (EJA), 3 cursos técnicos subsequentes (pós-médio), 15 cursos superiores, sendo 10 bacharelados e 5 licenciaturas, 3 cursos de especialização (*lato sensu*) e 1 mestrado profissional (*stricto sensu*). Possui uma excelente infraestrutura composta, dentre outras instalações, de laboratórios nas mais diversas áreas, miniauditórios, auditórios, teatro, ginásio poliesportivo, biblioteca, salas de estudo individual e em grupos, várias salas de aulas, sala para os professores e administrativos, além de salas específicas para atendimento médico, odontológico e psicológico para os alunos, tudo de forma gratuita.

Em meio a todo este contexto, existe o curso de Bacharelado em Engenharia Elétrica que é ofertado no período noturno e tem duração de 10 semestres. Para que os alunos iniciem o contato com a prática profissional e aliem a ela o conhecimento científico necessário à sua formação, o IFG – Câmpus Goiânia conta com 1 laboratório de telefonia, 1 de pesquisa, 1 de *hardware*, 1 de sistemas digitais, 1 de radiocomunicação, 1 de audiovisual, 1 de eletricidade, 1 de eletrônica, 1 de micro controladores, 2 de informática e 1 de circuito impresso, todos eles específicos para este curso, contando também com outros laboratórios de outras áreas que também podem ser utilizados para este curso, como os laboratórios de informática da Coordenação de Matemática.

A escolha pelo IFG – Câmpus Goiânia como campo para a pesquisa se deu, primeiramente, pelo apoio e incentivo a esta pesquisa, antes mesmo do ingresso no curso de Doutorado, por parte da Coordenação de Matemática e do Núcleo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática do IFG (NEPEM/IFG), mostrando que era uma pesquisa de interesse institucional, pois visava o aprimoramento do processo de ensino-aprendizagem. Acrescenta-se a isso o fato de que a pesquisadora possui vínculo profissional com o IFG – Câmpus Goiânia, o que a faz conhecer melhor o contexto sociocultural e político da instituição, facilitando o acesso aos documentos e às pessoas que poderiam contribuir para a realização da pesquisa.

3.3 O professor de Matemática e a forma de ensinar

Durante um processo de pesquisa, acontecem vários imprevistos que interferem no andamento dos atos e que nos conduzem a caminhos diferentes dos inicialmente previstos. Com esta pesquisa não foi diferente, ocorreram fatos que nos conduziram a mudanças de posturas e planejamento, entretanto, sem interferir no conteúdo e nos fundamentos já estabelecidos.

A princípio, esta pesquisa era para ser desenvolvida em uma turma de Álgebra Linear do curso de Licenciatura em Matemática do IFG – Câmpus Goiânia. O processo de pesquisa já havia sido iniciado, a entrevista com o professor colaborador já havia sido feita e a turma já estava ciente e em pleno acordo com os procedimentos estabelecidos para a pesquisa, tendo já assinado todos os termos necessários e preenchido o questionário sociocultural.

Surgiu, então, um fator inesperado, o professor colaborador que era o professor da turma teria que deixar essa turma para assumir outra turma também de Álgebra Linear no curso de Bacharelado em Engenharia Elétrica por questões internas e administrativas. Porém, o próprio professor conversou com o outro professor que assumiria a turma, explicando a situação da pesquisa e acordando que no momento da realização do experimento ele assumiria as aulas e esse professor, que na época era um professor substituto, contratado temporariamente, não precisaria ministrar as aulas.

Entretanto, uma semana antes da previsão do início do experimento, houve um movimento estudantil de ocupação do câmpus, seguido de um movimento grevista por parte dos servidores, impossibilitando a realização do experimento naquele momento. Quando, então, a greve acabou e os servidores voltaram às suas atividades, o contrato temporário do professor que havia assumido a turma venceu e não foi possível renová-lo até o final do semestre letivo. Surgiu outro contratempo, a turma estava sem professor, pois não havia outro professor para assumi-la, nem efetivo, nem temporário e a instituição teria que realizar a contratação de outro professor temporário. Os procedimentos necessários para não deixar a turma sem professor no retorno das aulas foram tomados pela coordenação, entretanto, todo esse processo demoraria um pouco e poderia interferir no andamento da pesquisa visto que já era dezembro de 2016 e havia rumores de outra possível greve em fevereiro de 2017.

Diante deste quadro, o professor colaborador sugeriu que trocássemos de turma e fizéssemos o experimento na turma que ele havia assumido de Engenharia Elétrica, visto que já poderíamos iniciar as aulas em janeiro de 2017, logo após a retomada do semestre letivo. Analisada a situação com calma e considerando todo o contexto social, político e econômico da época, achamos prudente fazer a troca de turma para não correr o risco de enfrentarmos outra greve durante a realização das aulas do experimento.

O perfil do professor colaborador desta pesquisa foi traçado a partir de uma entrevista (Apêndice A) que foi filmada e gravada em áudio, depois transcrita e apresentada a ele para autorização final de sua fala. Ela se deu no início da preparação para o experimento, em uma de nossas primeiras reuniões, antes do estudo aprofundado da teoria do ensino desenvolvimental, com o intuito de apreender o modo de pensar do professor acerca do processo de ensino-aprendizagem da Matemática e, em específico, da Álgebra Linear, sem a influência de uma nova teoria de ensino.

O professor colaborador desta pesquisa é licenciado em Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (2005), Mestre em Matemática pela Universidade Federal de Campina Grande (2009), na área de Matemática Discreta e Doutor em Matemática pela Universidade Federal de Goiás (2014), na área de Álgebra. É professor do Instituto Federal de Goiás – Câmpus Goiânia desde agosto de 2010.

Sua escolha se deu, primeiramente, por ter pleno domínio da Matemática, em específico, da área de Álgebra, depois por possuir características, como empenho, dedicação, interesse e compromisso, que colaboram para o bom desenvolvimento de uma pesquisa científica. Davydov (1988) enfatiza a necessidade de o professor dominar a ciência que ensina, uma vez que afirma que a base do ensino desenvolvimental é o conteúdo da ciência e que a partir dele surgem os métodos de organização do ensino. Sendo assim, não há possibilidades de o professor utilizar o ensino desenvolvimental em suas aulas se ele não tiver pleno domínio da ciência que ele ensina. Em relação à Educação Superior, isso se torna ainda mais necessário por se tratar de disciplinas diretamente relacionadas às áreas e subáreas do conhecimento, como a Álgebra Linear sendo um campo da subárea Álgebra. Por isso, uma formação sólida do professor em Matemática, com especificação em Álgebra, faz-se necessária para o bom desenvolvimento do experimento didático formativo proposto nesta pesquisa.

Mesmo não possuindo formação pedagógica além daquela adquirida durante a graduação e por ter se dedicado quase que exclusivamente ao estudo da Matemática enquanto ciência, o professor sempre mostrou interesse por esta pesquisa, não se opondo às reuniões agendadas com a pesquisadora e seu coorientador para a discussão e apreensão da teoria do ensino desenvolvimental, apesar de seu pouco tempo livre para isso, pois, no momento de preparação e execução das aulas, o professor estava como Coordenador da Área de Matemática.

Ele atua na Educação Superior desde 2006, com uma pausa de dois anos para cursar o mestrado e sempre trabalhou na rede federal de ensino. Antes disso, ele atuou por um ano na educação básica, mas não se adaptou a esse nível. O contexto de suas aulas é por ele caracterizado como "amistoso", havendo uma relação de respeito mútua com um diálogo aberto e franco, e sua relação com os alunos é amigável e restrita ao ambiente educacional, não se estendendo para a vida pessoal, fatos comprovados durante o experimento didático.

Quanto ao apoio pedagógico oferecido pela instituição, ele diz não existir esse apoio voltado à Educação Superior e, se existe ele desconhece, e argumenta "pelo que eu entendo de apoio pedagógico é ter uma equipe preparada à disposição do professor, isso não existe", o que existe é um apoio por parte da coordenação na mediação de conflitos entre professor e alunos, quando isso acontece. O professor colaborador vê tanto o professor quanto o aluno como partes integrantes do processo de ensino-aprendizagem em que o aluno é a parte mais importante. Ao mesmo tempo, ele acha que "a relação é de troca, mas o professor é o mediador, o professor tem que assumir o papel de controlar, de alguma forma, o que acontece dentro da sala de aula".

Para o professor, a boa aprendizagem é atribuída "ao interesse tanto do professor quanto do aluno, mas, sobretudo, do aluno". De fato, sem o interesse do professor em ensinar e do aluno em aprender não é possível estabelecer um processo que conduza ao desenvolvimento intelectual, consequentemente, a uma boa aprendizagem. Conforme afirma Vygotski (1991, p. 60, destaques do autor), "o 'bom aprendizado' é somente aquele que se adianta ao desenvolvimento".

Quanto às mudanças ocorridas na mente e nas práticas dos alunos, resultantes da verdadeira aprendizagem, o professor diz não saber como descrevê-las especificamente, pois é "intuitivo": "Para mim é uma coisa intuitiva você sabe o aluno que pegou e você sabe o aluno que não pegou, mas eu não sei como lhe dizer". Ele ainda afirma que seu objetivo em sala de aula

> é tentar fazer com que o aluno entenda que ele está ali para aprender a estudar, porque eu não acho que ele vai aprender em um semestre algo que se levou séculos para ser formalizado, acho que ele vai ter um contato inicial, mas a partir dali ele tem as ferramentas para aprender o que ele quiser, então o que eu tento observar no aluno durante o processo é se ele entendeu o que é que ele tem que fazer para aprender. (Professor Colaborador)

Uma grande preocupação do professor, demonstrada em sua fala, é com relação à forma como os alunos veem e lidam com a Matemática: "o que eu observo é a forma como ele lidava com a Matemática e a forma como ele lida agora". Isso mostra que ele se preocupa em fazer com que os alunos pensem matematicamente, exatamente o que Davydov (1988) afirma quando pontua que é necessário que os alunos aprendam a pensar de acordo com a ciência em questão. E isso não é um processo simples, ainda mais se tratando de alunos da Educação Superior que, muitas vezes, já possuem obstáculos que dificultam esta nova forma de pensar e, consequentemente, de trabalhar com a Matemática. O próprio professor exemplifica este fato com um fato ocorrido em uma de suas aulas de Análise para o curso de Licenciatura em Matemática:

> Quando eu estou construindo o corpo de frações de $\mathbb{Z}$, o que a gente conhece como $\mathbb{Q}$, os racionais, a gente mostra para o aluno que não existe uma conexão entre $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$, que $\mathbb{Z}$ não está contido em $\mathbb{Q}$, que o que existe é uma cópia de $\mathbb{Z}$ dentro de $\mathbb{Q}$ e os alunos não aceitam porque eles aprenderam que $\mathbb{N}$ está contido em $\mathbb{Z}$ que está contido em $\mathbb{Q}$. E aí a gente tem problemas para ensinar o certo, porque eles aprenderam de uma forma que eu não diria que é errada, mas também não vou dizer que é certa. (Professor Colaborador)

Quando os alunos aprendem a pensar matematicamente, há uma mudança em sua forma de pensar e lidar com as questões que envolvem os conhecimentos matemáticos, ampliando sua motivação, conforme descreve o professor após dizer que tenta fazer os alunos pensarem matematicamente: “eu vejo muitos alunos chegarem totalmente apáticos, sem vontade nenhuma de estudar e, de repente, você está vendo ele tentando fazer um exercício, fazendo, mesmo errado, mas pegando para fazer, fazendo perguntas”.

O professor colaborador afirmou que é por meio da sua observação das aulas, da forma como os alunos estão lidando com os conteúdos que ele diagnostica a aprendizagem e disse:

> Eu gosto muito de passar exercícios valendo ponto extra para eles fazerem no quadro, tentar orientar. Eu tenho muita dificuldade de falar para o aluno que ele está errado, eu sempre tento falar ‘não, vamos fazer assim’, ‘por que você não faz assim?’, tenho muito problema em provocar uma rejeição nos alunos. (Professor Colaborador)

Esta prática do professor mostra sua postura de respeito e preocupação com o desenvolvimento intelectual do aluno, uma vez que ele tenta superar os obstáculos dos alunos frente à aprendizagem do conteúdo ensinado. Saber lidar com o erro do estudante é um fator de destaque no processo de ensino-aprendizagem, pois ele mostra ao professor as deficiências na aprendizagem e lhe possibilita modificar sua prática para sanar as dificuldades e viabilizar uma aprendizagem eficaz.

Especificando mais o pensamento e a postura do professor frente à disciplina de Álgebra Linear, temos o seguinte relato de sua concepção acerca desta disciplina:

> É a primeira disciplina que dá, e que você tem que dar, significado às coisas tendo que fugir ou sendo obrigado a fugir do empírico[13], porque até então eles estudam conteúdos mais palpáveis, como funções, geometria e geometria analítica, e para mim o que é mais importante na Matemática é o significado. Eu acho que os alunos aprendem quando eles conseguem ver sempre o significado. Então geometria, funções, geometria analítica tudo isso eles conseguem aprender, mas a gente está sempre ligando a alguma coisa do dia a dia, sempre associando aos nossos exemplos. Mesmo depois que a gente abstraia estão sempre associados a questões do dia a dia e Álgebra Linear não, você tem que dar significado sem empírico. (Professor Colaborador)

De acordo com Davydov (1988), o ensino deve partir de situações concretas que envolvam o objeto de estudo, do concreto real, empírico, atingir o abstrato, que é o reflexo mental do objeto, e depois voltar para concreto, agora como um concreto pensado, no qual é possível utilizar o conceito em situações práticas. O professor, devido à sua formação específica em Matemática e por não ter ainda um conhecimento maior desta teoria (no momento da entrevista), vê, mesmo sem saber, uma possibilidade de que isso aconteça quando ele diz estar sempre ligando a teoria a situações do dia a dia, mas não vê este processo de ascensão do abstrato ao concreto como algo possível dentro da Álgebra Linear. Com a execução do experimento, ele pôde ver isso acontecer. Questionado se o aluno consegue ver significado naquilo que ele aprende, o professor complementa sua fala:

> Com significado a nossa mente liga coisas a imagens, e na álgebra, você sabe que o nosso trabalho é acabar com isso, é ligar as coisas, é trabalhar como se fosse em códigos; a Matemática é uma lista de símbolos que você consegue ir encaixando, você tira todo apelo geométrico. Você nem consegue voltar né? Muitas vezes a gente tem dificuldade de enxergar geometricamente as coisas porque a gente enxerga aquilo como um código, porque a gente sabe manipular o código, então, é um quebra-cabeça que você vai montando sem precisar saber qual é a imagem. Então para mim o primordial do aprendizado é isso, é o significado, você aprende quando você vê o sentido das coisas. Em Álgebra o sentido é a Matemática, ela pura sem contexto, é aquele conjunto de códigos, e para mim funciona muito bem viu porque eu lido muito bem com isso, não sei os outros matemáticos, eu vejo que eles têm muito preconceito com a Álgebra, mas para mim funciona muito bem. (Professor Colaborador)

Esta questão de dar significado às coisas é extremamente importante e, ao mesmo tempo, complexa, a ponto de Vigotski (2001) dizer que sua natureza não é clara, porém, é no significado que surge o pensamento verbal por meio do pensamento e do discurso. E sendo o significado pertencente tanto ao domínio da linguagem quanto ao do pensamento, uma palavra sem significado torna-se um som vazio e não faz parte do discurso humano (VIGOTSKI, 2001), consequentemente, a palavra que define o conceito a ser aprendido, se não possuir significado

[13] Para o professor o empírico trata-se de situações concretas reais em que são utilizados os conhecimentos matemáticos.

não conduz à formação do conceito, muito menos à formação do pensamento teórico no aluno, como defendido por Davydov (1988) para a efetivação da aprendizagem escolar.

A Álgebra Linear é, hoje, considerada por muitos, como uma disciplina difícil. Questionado sobre o que a levaria a esse rótulo, o professor colaborador diz que "É o problema da abstração. É totalmente abstrata, não tem jeito e pode até ter quem queira dar, mas é difícil. Eu, por exemplo, não consigo associar ao concreto diretamente. Você pode, quem sabe, permear aí para tentar chegar, mas eu não consigo". Tal constatação é também relatada por Dorier (2002, p. 95, tradução nossa) quando ele afirma que: "Para a maioria dos estudantes, a Álgebra Linear não é mais do que um catálogo de muitas noções abstratas que eles representam com grande dificuldade. Além disso, eles são submersos por uma avalanche de novas palavras, novos símbolos, novas definições e novos teoremas".

Para ambos, a abstração é vista como algo que não pode ser utilizado diretamente em questões cotidianas ou práticas. E o que eles relatam é realmente uma questão real e um problema característico dos conteúdos que compõem a Álgebra Linear, pois, para compreender bem suas aplicações, fazem-se necessários conhecimentos específicos dos cursos que a têm como disciplina, fato que, na maioria das vezes, dificulta tanto o ensino como a aprendizagem, pois o professor não possui esse conhecimento específico de cada curso, muito menos os alunos, que estão em seus semestres iniciais. Toda essa situação requer do professor ainda mais dedicação e empenho na organização e no planejamento de suas aulas para que consiga dar significado a todos aqueles conteúdos que, muitas vezes, parecem tão surreais aos alunos.

Davydov (1988) afirma que a forma como o professor organiza o ensino influencia diretamente no desenvolvimento das ações mentais dos alunos, ou seja, interfere na aprendizagem. Sobre isso o professor colaborador afirma que:

> A forma como o professor ministra esta disciplina pode sim influenciar na forma como os alunos lidam com ela, como os alunos absorvem esses conteúdos, sobretudo porque é uma disciplina que pode ser ministrada como simplesmente uma ferramenta ou como algo maior, algo que sirva para desenvolver o sentido de abstração dos alunos. (Professor Colaborador)

E sobre sua forma de organizar esse ensino, ele relata:

> Eu ensino os conceitos de Álgebra Linear de forma bem teórica, priorizando, justamente, as definições e os teoremas, porque eu acredito que o fundamental desta disciplina não são seus conteúdos propriamente, mas sim o que ela desperta no aluno que é a capacidade de abstração. É a primeira disciplina do curso que ele tem essa oportunidade. Eu não uso livro-texto, geralmente o livro de Álgebra Linear do Elon[14]

[14] LIMA, Elon Lages. *Álgebra Linear.* Coleção Matemática Universitária. 7ª edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2004.

> é o que eu acho mais adequado, apesar de já ter tentado usar outros livros como do Hoffmann[15], mas eu acho que esse já é bem mais avançado para iniciantes. É assim que eu lido com a disciplina, até porque eu tenho muito medo, não sei se é medo ou se é preocupação, de que os alunos passem a se interessar mais pela forma como a disciplina é ensinada do que pelo conteúdo que a disciplina traz em si, pelo objetivo que ela tem, e isso na Matemática como um todo. Fico preocupado quando a gente se preocupa mais com a forma como ensinar do que com o que está sendo ensinado, a gente tem que, cada vez mais, se preocupar em procurar fazer com que os alunos de Matemática apreciem a Matemática antes de qualquer outra coisa. (Professor Colaborador)

Sobre esta última frase do professor, Davydov (1988) esclarece, conforme já mencionado, que é necessário fazer com que o aluno aprenda a pensar matematicamente para que desenvolva interesse e motivação pela Matemática, assim, se o aluno sabe pensar de acordo com a ciência, ele também saberá apreciá-la e utilizá-la. Ademais, para o autor, forma de ensinar e conteúdo a ser ensinado não se dissociam, uma vez que o método advém do conteúdo. Isso aponta a necessidade de conhecimento dos conteúdos associados ao conhecimento pedagógico-didático para que a organização e a condução do processo de ensino possa ampliar gradativamente a atividade pensante dos alunos por meio da associação entre a aprendizagem dos conceitos de uma disciplina ao conhecimento cotidiano local e pessoal do aluno (HEDEGAARD; CHAIKLIN, 2005). No entanto, o que se tem observado é a separação entre o conhecimento do conteúdo e o conhecimento pedagógico-didático do conteúdo, situação essa que ocorre já na formação inicial do professor, com consequências para a formação dos alunos (LIBÂNEO, 2015). Esta dicotomia se constituiu historicamente no decorrer do processo de formação dos professores. Nesse sentido, pode-se inferir que a formação limitada do professor em relação à dimensão pedagógico-didática do ensino de Matemática constitui expressão do processo histórico.

Finalizando a entrevista, o professor foi questionado sobre sua compreensão do que é um conceito e da forma como ele chegou a essa compreensão. Ele, então, responde:

> Para mim, conceito é aquilo que você absorve de um determinado conteúdo, aquilo que você consegue construir mesmo que de forma não tão formal como a definição, por exemplo, mas é o conjunto de propriedades que você vai juntando sobre determinado conteúdo. Como a gente não faz nenhum curso sobre isso, sobre o que é conceito, definição, isso a gente vai adquirindo ao longo do tempo, da profissão, da carreira. (Professor Colaborador)

[15] HOFFMAN, Kenneth; KUNZE, Ray. *Álgebra Linear*. Tradução de Adalberto Panobianco Bergamasco. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo e Polígono, 1971.

Nota-se que a visão do professor sobre o que é um conceito não está totalmente dentro da lógica formal, descrita por Kopnin (1978), segundo a qual conceito coincide com definição[16]. Ela se assemelha à posição de Davydov (1988) sobre conceito quando ele diz que "é o conjunto de propriedades que você vai juntando sobre determinado conteúdo". Mas não é só isso, é a representação mental dessas propriedades, que devem representar o aspecto nuclear do objeto, unidas por suas relações com outros conceitos, por seus nexos internos, transpostos para o intelecto do aluno. O professor também não expressa a completa compreensão dialética da formação de conceitos. Provavelmente, tal fato já seja indício de apropriação da teoria do ensino desenvolvimental por parte do professor, visto que esta entrevista se deu em um momento em que já havíamos realizado alguns estudos teóricos acerca desta concepção, mas até o momento da entrevista, os estudos não foram suficientes para uma completa apropriação da mesma.

Segundo Libâneo (2013), o trabalho profissional do professor, entendido como uma atividade pedagógica, objetiva, dentre outras coisas, assegurar aos alunos a assimilação dos conhecimentos científicos e o domínio de capacidades e habilidades intelectuais. Nessa atividade, dominar o conteúdo da ciência que ensina é um quesito básico e necessário, como afirma Libâneo (2013, p. 78):

> Não pode exigir que os alunos adquiram um domínio sólido de conhecimentos se ele próprio não domina com segurança a disciplina que ensina; não pode exigir dos alunos o domínio de métodos de estudo, das formas científicas de raciocinar e de hábitos de pensamento independente e criativo, se ele próprio não os detém.

A prática do professor revela seu pleno domínio da Matemática e, mesmo não possuindo uma formação pedagógica que lhe assegure uma visão mais didática do processo de ensino-aprendizagem, em alguns momentos, ele age de forma que contribui para a elevação do nível do pensamento dos alunos, conseguindo fazer associações e analogias que contribuem para a mediação do conhecimento teórico da Álgebra Linear. Alguns momentos ocorridos durante a execução do experimento didático formativo comprovaram essa atitude do professor.

Um desses momentos ocorreu após a exposição dialogada do lógico-histórico do conceito de transformação linear, logo após o desenvolvimento do conceito de espaços

[16] Definição na lógica dialética é descrição ou explicação de um objeto, ressaltando as suas características gerais e/ou específicas que o enquadra em determinada classe de objetos. É formulada com o uso de palavras e/ou símbolos específicos da ciência que o estuda, seguindo normas e particularidades de expressão específicas desta ciência. No caso da Matemática, a definição deve seguir as normas e as particularidades de uma escrita adotada e aceita pela comunidade de matemáticos. Para uma pessoa conseguir definir um objeto, primeiro ela tem que ter formado o conceito desse objeto, ou seja, é preciso possuir uma representação mental do conteúdo desse objeto obtida através de abstrações. Somente com o conceito formado e com um modo de pensar e escrever específicos da ciência é possível definir um objeto.

vetoriais, por meio de um diálogo entre um aluno e o professor, no qual se viu o domínio do professor quanto aos conteúdos algébricos que ele ensina e outros que vão além dos conteúdos de um curso de Álgebra Linear, como a utilização de códigos binários em *softwares* computacionais e as Álgebras, que são estruturas algébricas mais completas e complexas estudadas em cursos de pós-graduação.

> **Aluno:** Os elementos finitos que alguns *softwares* utilizam para calcular, eles utilizam isso aí? (se referindo a espaços vetoriais que o professor acabou de falar na exposição do lógico-histórico).
> **Professor:** Sim, é isso. Na verdade, eles fazem é isso mesmo, eles têm uma quantidade mínima de vetores que eles utilizam para formar todo o resto, como os computadores binários que são o 0 e o 1. Com o 0 e o 1 se faz tudo.
> **Aluno:** Qualquer coisa.
> **Professor:** Só que lá é uma estrutura melhor, que são Álgebras, que permite junção, não só soma e multiplicação por escalar, mas também o produto entre eles. O produto em álgebra é só juntar, não precisa ter um resultado. Se eu faço isso aqui (aproximando a carteira e o celular até ficar um ao lado do outro) eu multipliquei a carteira pelo celular, certo? Porque são letras. (Aula 2 de 28/01/2017)

Outro momento foi durante a apresentação do lógico-histórico (Apêndice G), em que o professor fez várias inserções mostrando aos alunos a correspondência entre a forma de escrever dos cientistas do século XIX e a forma como escrevemos hoje no século XXI, auxiliando os alunos na visão do desenvolvimento dos conceitos ao longo do tempo.

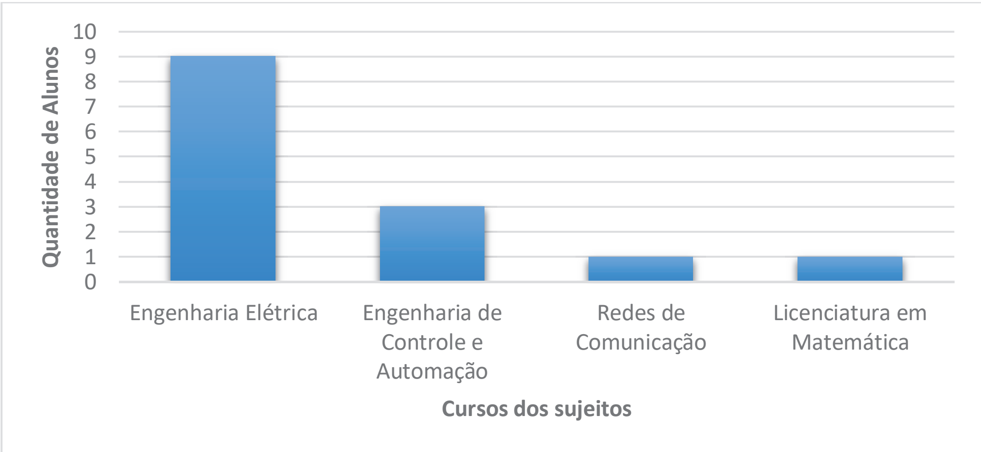
3.4 Uma aproximação ao contexto sociocultural dos alunos

Segundo Vigotski (2001), as atividades e habilidades cognitivas básicas do indivíduo são um produto do desenvolvimento histórico-social de sua comunidade, sendo, portanto, resultados das atividades praticadas conforme os hábitos sociais da cultura em que o indivíduo se desenvolve, consequentemente, a história pessoal do indivíduo irá determinar sua forma de pensar. Assim sendo, conhecer o contexto sociocultural dos alunos, sujeitos desta pesquisa, faz-se necessário para tentar compreender o modo de pensar de cada um deles, bem como o seu desenvolvimento intelectual frente a uma proposta metodológica para o ensino voltado à aprendizagem de conceitos para o desenvolvimento do pensamento do aluno, como a que se propõe nesta pesquisa.

Os dados aqui apresentados foram obtidos por um questionário (Apêndice B) aplicado aos alunos com o objetivo de traçar o perfil da turma nos quesitos pessoal, social, cultural e estudantil. Porém, são apresentados apenas os dados dos alunos que se tornaram sujeitos da pesquisa de acordo com o critério estabelecido (69,2% de presença – 9 presenças – nas aulas do experimento).

O curso de Engenharia Elétrica é um curso noturno, com aulas de segunda a sexta das 19h às 22h15min e sábado das 7h às 12h. Entretanto, nem todos os alunos, sujeitos desta pesquisa, pertencem a este curso, conforme mostra o Gráfico 1. Isso ocorre porque a instituição permite ao aluno matricular-se em qualquer disciplina de qualquer curso que seja compatível, em pelo menos 75% da ementa, com a ementa da disciplina que ele precisa fazer, fator que dificulta a aplicação dos conteúdos à área específica de formação dos alunos, visto ter vários alunos de vários cursos.

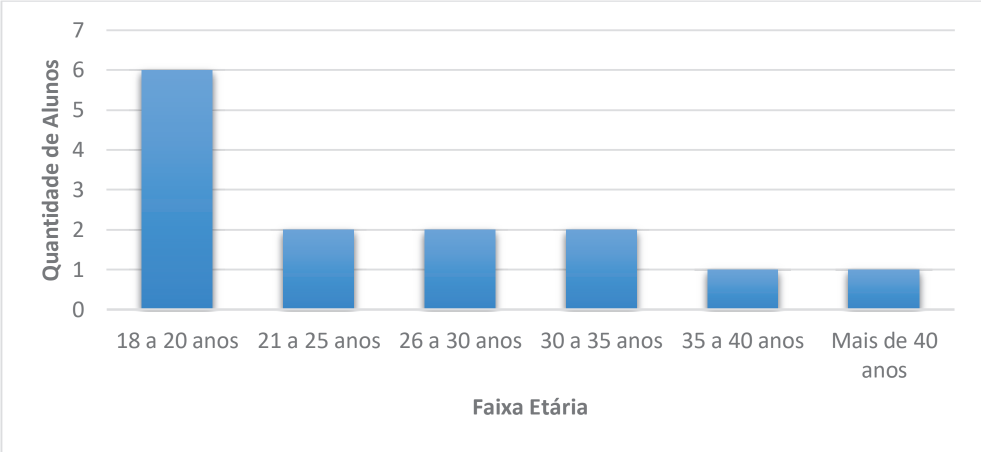
Gráfico 1 – Quantidade de alunos por curso



Fonte: Elaborado pela autora a partir das respostas do questionário sociocultural.

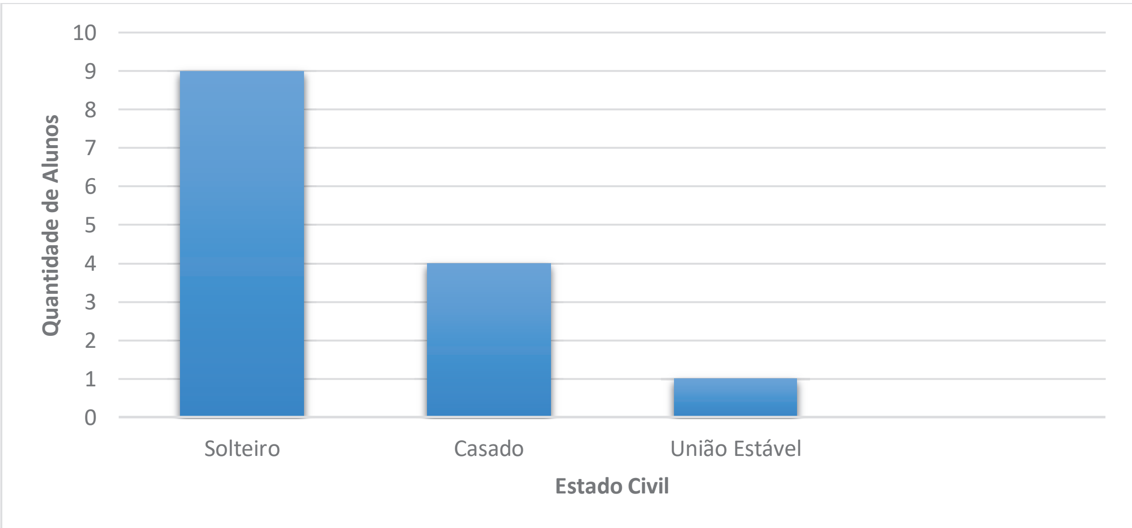
Os alunos são todos do sexo masculino, jovens, em sua maioria, com idade predominante variando de 18 a 20 anos, conforme o Gráfico 2, o que os enquadra no período da atividade profissional de estudo como sendo sua atividade principal, de acordo com a periodização de Elkonin (LAZARETTI, 2015), na qual o aluno começa a ter uma atitude de responsabilidade perante o trabalho, realizando uma atividade que contribua com a sociedade. São também solteiros, de acordo com o Gráfico 3, sendo o primeiro curso superior da maioria dos alunos.

Gráfico 2 – Faixa etária dos sujeitos



Fonte: Elaborado pela autora a partir das respostas do questionário sociocultural.

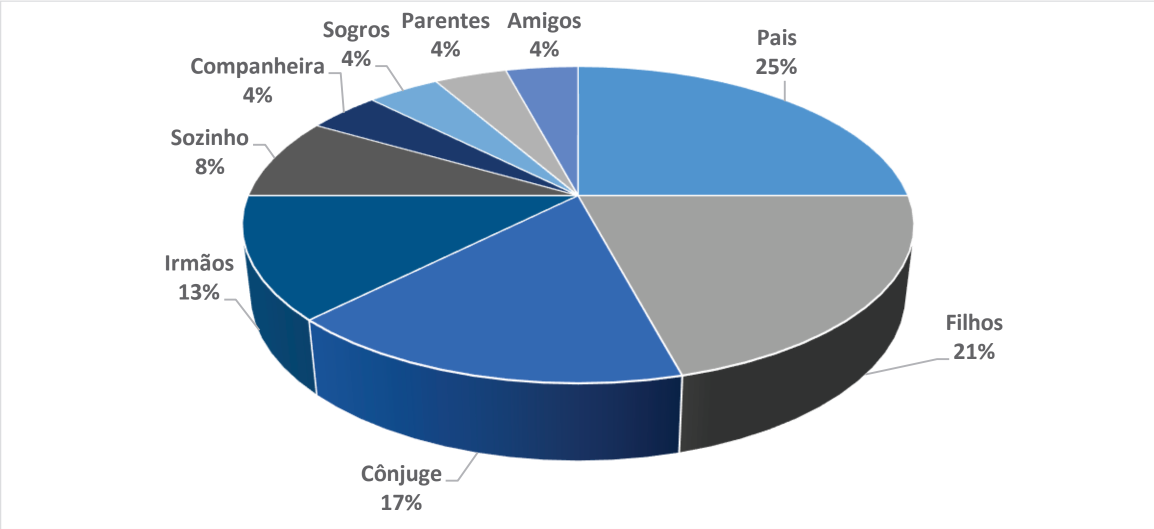
Gráfico 3 – Estado civil dos sujeitos



Fonte: Elaborado pela autora a partir das respostas do questionário sociocultural.

Apesar de o IFG – Câmpus Goiânia disponibilizar um espaço para estudo aos alunos, nem todos podem passar o dia ali; então, estudar em casa ou em outro contexto fora dali é uma opção para esses alunos. Assim, faz-se necessário compreender algumas características do seu contexto de vida. Os que são casados e com união estável moram com suas famílias, esposa e filhos e um mora também com seus sogros. Os que são solteiros moram, em sua maioria, com pais e irmãos, sendo que um possui outros parentes morando na mesma residência, um mora com amigos e dois sozinhos. O Gráfico 4 nos dá um panorama percentual do ambiente domiciliar dos sujeitos.

Gráfico 4 – Ambiente domiciliar dos sujeitos



Fonte: Elaborado pela autora a partir das respostas do questionário sociocultural.

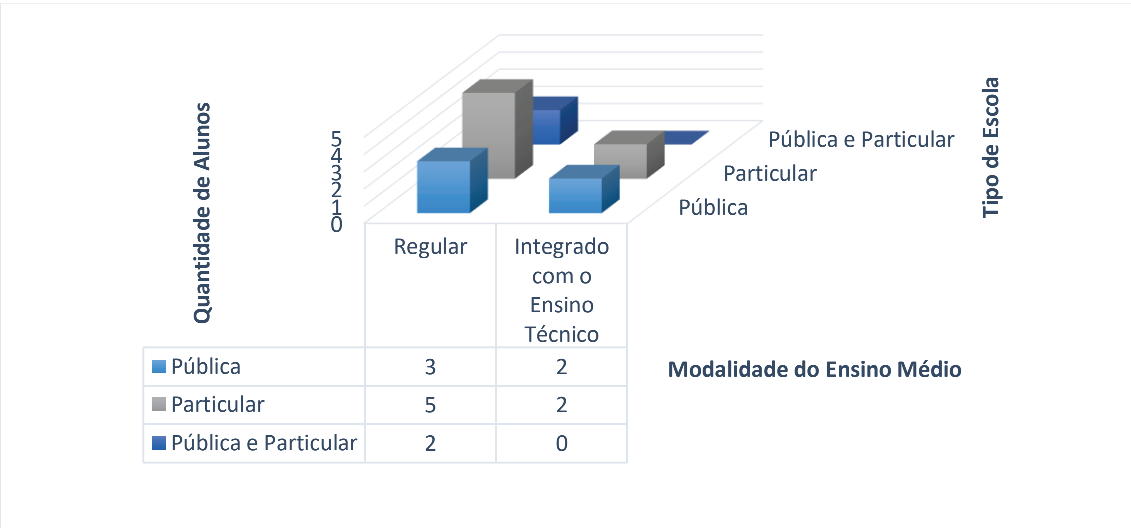
Os sujeitos desta pesquisa são advindos de vários estados brasileiros: nove são de Goiás, dois são do Pará, um da Bahia, um do Mato Grosso e um do Distrito Federal. Suas cidades de origem, são variadas, havendo seis de Goiânia, um de Brasília e os demais são de cidades do interior de seus estados, como Porangatu (GO), Niquelândia (GO), Anápolis (GO), Castro Alves (BA), Barra do Garças (MT), Marabá (PA) e Parauapebas (PA). Atualmente, treze desses sujeitos residem em Goiânia e um em Aparecida de Goiânia (GO), poucos em bairros próximos ao IFG.

Durante o período de realização do experimento didático, apenas cinco alunos tinham a oportunidade de se dedicarem integralmente aos estudos, todos solteiros. Os demais, nove alunos, precisavam trabalhar para manterem suas famílias ou ajudarem na complementação da renda familiar. Destes, sete trabalham por oito horas diárias, um por quatro horas e um por nove horas e ainda seis trabalham por cinco dias semanais, dois por seis dias e um por sete dias. Alguns destes alunos trabalham em áreas correlatas aos seus cursos, até mesmo por já terem uma formação técnica na área, mas há aqueles que trabalham em áreas totalmente distintas à área de seus cursos.

A renda mensal dos grupos familiares dos alunos pode ser dividida em três classes: três alunos com renda familiar variando de um a três salários mínimos (R$ 937,00 a R$ 2.811,00), sete alunos com renda variando de três a seis salários mínimos (R$ 2,811,00 a R$ 5.622,00) e quatro alunos com renda de seis a dez salários mínimos (R$ 5.622,00 a R$ 9.370,00).

Olhando para a vida estudantil, tem-se que cinco dos sujeitos desta pesquisa cursaram o Ensino Médio exclusivamente em escola pública, sete exclusivamente em escola particular e dois mesclaram entre escola pública e particular. Quanto à modalidade do Ensino Médio, dez o fizeram na modalidade regular e quatro na modalidade integrado com o Ensino Técnico. O Gráfico 7 mostra o cruzamento destes dados, enfatizando que cinco dos alunos que fizeram o Ensino Médio Regular, o mais comum em nossa sociedade, o fizeram exclusivamente em uma escola particular e dois mesclaram entre particular e pública, sendo que apenas três o cursaram exclusivamente em uma escola pública. Nota-se, também, a equiparação da quantidade de alunos que fizeram o Ensino Médio integrado ao Ensino Técnico em escolas públicas e particulares, visto ser esta a opção de ensino a nível médio, oferecida pelo IFG.

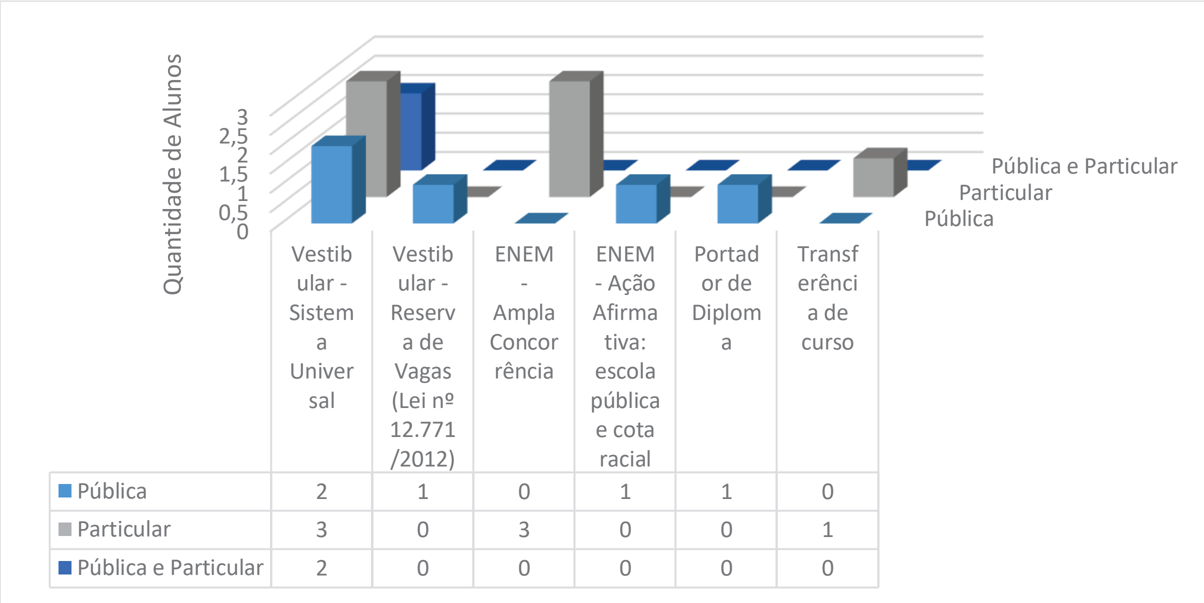
Gráfico 5 – Tipo de escola versus modalidade do Ensino Médio



Fonte: Elaborado pela autora a partir das respostas do questionário sociocultural.

Quanto à forma de ingresso na Educação Superior, há a predominância do Vestibular – Sistema Universal (sete alunos), seguido do ENEM – Ampla Concorrência (três alunos). Um maior detalhamento da forma de ingresso, comparada ao tipo de escola de nível médio de que advêm estes alunos, pode ser encontrada no Gráfico 6. Neste gráfico, vê-se também o predomínio de alunos advindos da rede particular de ensino que conseguiram o acesso à educação superior sem a necessidade de reserva de vagas e/ou ações afirmativas.

Gráfico 6 – Forma de ingresso na Educação Superior versus tipo de escola do Ensino Médio



Fonte: Elaborado pela autora a partir das respostas do questionário sociocultural.

Tentando compreender a relação dos alunos com a Álgebra Linear e com o conteúdo de Transformação Linear, estabeleceu-se as seguintes questões e obteve-se as seguintes respostas:

Tabela 3 – Relacionamento com a disciplina e com o objeto de pesquisa

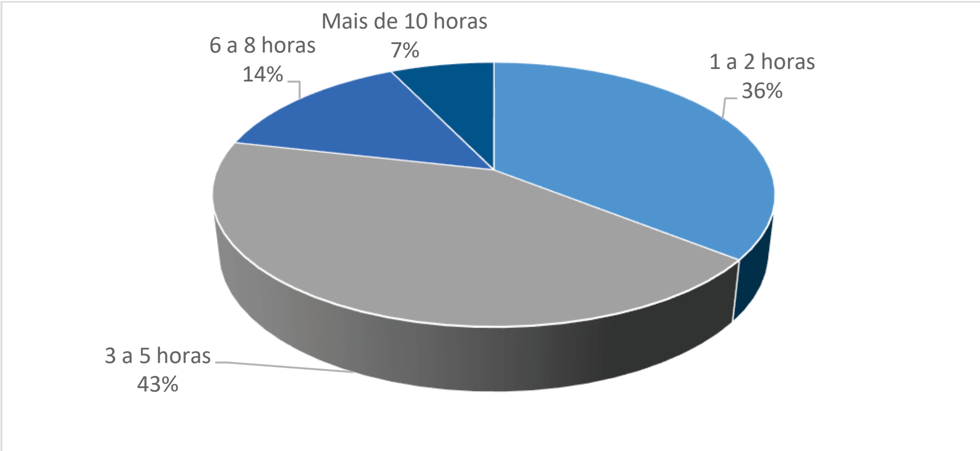
Pergunta	Não	Sim
Já cursou a disciplina de Álgebra Linear alguma outra vez?	11	3
Já estudou sobre Transformação Linear?	12	2

Fonte: Elaborado pela autora a partir das respostas do questionário sociocultural.

Dos que já cursaram a disciplina outra vez, um disse tê-la já cursado uma vez, pois não obteve a média necessária, um a cursou por duas vezes, pois não teve a quantidade mínima de presença e não atingiu a média e um disse que a fez três vezes, pois desistiu da disciplina em todas elas. Quanto aos que já estudaram o conteúdo de Transformação Linear alguma vez (dois alunos), ambos já foram reprovados na disciplina, um disse que teve dificuldades com este conteúdo devido à sua base matemática estar muito fraca no momento e outro teve dificuldades em assimilar a matéria. O aluno que disse ter reprovado três vezes em Álgebra Linear por desistência da disciplina e disse não ter estudado Transformação Linear, comprovando sua desistência.

Cientes da necessidade de se dedicarem aos estudos em momentos extraclasse, cinco alunos estudam de uma a duas horas por dia, além do momento em sala de aula, seis estudam de três a cinco horas, dois estudam de seis a oito horas e um estuda por mais de dez horas diárias. O Gráfico 7 esclarece esses dados em níveis percentuais.

Gráfico 7 – Horas de estudos e porcentagem de alunos que estudam a respectiva quantidade de horas



Fonte: Elaborado pela autora a partir das respostas do questionário sociocultural.

Diante de várias Instituições de Educação Superior (IES) em Goiânia e questionados sobre o porquê de sua opção pelo IFG – Câmpus Goiânia, os alunos listaram seus motivos conforme a Tabela 4.

Tabela 4 – Motivo por terem optado pelo IFG – Câmpus Goiânia

Motivo pelo qual optou por esta instituição	Quantidade de alunos
Pela sua credibilidade	7
Oferece o melhor curso de minha opção	6
É uma das poucas instituições públicas que oferece o curso que escolhi	6
Porque não consigo pagar uma particular	4
É próximo da minha residência	4
A concorrência é pequena	1

Fonte: Elaborado pela autora a partir das respostas do questionário sociocultural.

Em meio a um mundo globalizado em que a internet se faz presente em quase todos os momentos da vida das pessoas, os alunos, sujeitos da pesquisa, utilizam, predominantemente, a internet como o meio de comunicação para se manterem atualizados sobre os acontecimentos do mundo contemporâneo (doze alunos), seguido da televisão (quatro alunos), do rádio (dois alunos) e de jornais e revistas (ambos por um aluno). Já nos momentos de lazer, há uma gama de atividades que são desenvolvidas por eles, predominando assistir filmes e/ou seriados (nove alunos disseram fazer isso), cinco alunos disseram praticar algum esporte, cinco vão passear com a família e/ou amigos, três vão à igreja, dois leem, dois navegam na internet, dois tocam algum instrumento musical, dois gostam de viajar, um vai a festas, um estuda, um assiste TV e um vai a restaurantes.

Com respeito à relação entre os alunos, contatou-se que pouco se conhecem, não havendo uma relação de amizade entre eles, a não ser entre alunos do mesmo curso. Entretanto, eles se respeitam e aceitam as limitações dos colegas, até se ajudam na apreensão da matéria, mas isso com pouca frequência. Essa colaboração entre os colegas, mesmo que mínima, foi demorada de se obter, no início do experimento, eles se mostraram arredios a ponto de tarefas a serem desenvolvidas em grupos serem, inicialmente, feitas individualmente, somente a partir do momento em que eles perceberam que precisavam uns dos outros para construir seus conhecimentos e fazer as tarefas propostas é que eles começaram a interagir. Este fato foi um desafio para o professor, pois é necessário haver interação entre os alunos para que o conhecimento parta do coletivo (interpessoal) para o individual (intrapessoal) (VYGOTSKI, 1991).

A relação professor-aluno é cordial e de respeito mútuo, mantendo-se no âmbito profissional, conforme descrita pelo professor em sua entrevista. Alguns alunos são mais desinibidos e sempre questionam o professor quando têm alguma dúvida e participam das aulas respondendo aos questionamentos do professor, mas há outros com muita dificuldade para realizar a expressão verbal de seus pensamentos, somente falam algo quando o professor pergunta diretamente a eles e, mesmo assim, com muita timidez.

3.5 As categorias de análise e seus fundamentos

Com o intuito de compreender o processo de formação do pensamento teórico em alunos da Educação Superior, em específico, em alunos do curso de Bacharelado em Engenharia Elétrica do IFG – Câmpus Goiânia, foi realizada uma análise dos dados empíricos do experimento didático formativo. Buscando identificar os níveis de organização do pensamento e as ações que impulsionam o desenvolvimento psíquico, consideraram-se os conceitos: zona de desenvolvimento proximal, mediação, desenvolvimento de ações mentais, formação de conceitos, pensamento empírico e pensamento teórico.

Para a organização das categorias de análise, assumiu-se que episódios do experimento ou episódios de ensino referem-se aos momentos das aulas do experimento didático formativo em que se trabalhou as ações de aprendizagem de Davydov (1988). Isso ocorreu, por exemplo, nos momentos das aulas em que se trabalhou a ação "modelação da relação universal" que constituem um episódio de ensino. Assim, cada uma das ações de aprendizagem constitui-se um episódio, totalizando seis episódios constitutivos do experimento didático formativo. Os recortes desses episódios, que serão utilizados para a análise do desenvolvimento intelectual do aluno, serão denominados de cena.

Por ser um experimento fundamentado na teoria de Davydov (1988), optou-se por agrupar os episódios do experimento com base nas seguintes categorias de análise: transformação dos dados da tarefa na condução da identificação do princípio geral do conceito de transformação linear; da modelação à transformação de um modelo para o conceito de transformação linear; o uso do conceito de transformação linear como ferramenta mental. Estas categorias emergiram de uma análise prévia dos dados do experimento didático formativo, no qual se constatou serem momentos específicos de certos processos mentais que contribuíram para o desenvolvimento intelectual dos alunos.

Para a categoria "transformação dos dados da tarefa na condução da identificação do princípio geral do conceito de transformação linear", elencou-se o episódio em que os alunos iniciaram o processo de abstração, constituído pela ação de aprendizagem "transformação dos dados da tarefa a fim de revelar a relação universal do conceito de transformação linear", pois objetivou-se analisar os processos mentais iniciais dos alunos no contato direto com problemas envolvendo o conceito de transformação linear, na transformação dos dados destes problemas e na identificação da relação universal do objeto, momento em que eles desenvolvem o processo de reflexão.

A categoria "da modelação à transformação de um modelo para o conceito de transformação linear" fundamenta-se na análise dos episódios caracterizados pelo desenvolvimento das ações de aprendizagem "modelação da relação universal" e "transformação do modelo da relação universal que caracteriza o conceito teórico de transformação linear", pois, por meio dessas duas ações, constata-se a transição do abstrato ao concreto, em que o aluno desenvolve o processo de generalização em meio ao desenvolvimento de uma análise substantiva do objeto, criando, assim, um modelo para o conceito e, em seguida, atinge o concreto pensado por meio da conceptualização da relação nuclear do objeto, dada pela transformação do modelo obtido.

A última categoria, "o uso do conceito de transformação linear como ferramenta mental" visa analisar se há indícios de pensamento teórico, referente ao conceito de transformação linear, nos alunos. Os episódios do experimento que a sustentam são aqueles relacionados às ações que constituem o plano interior das ações, a saber, "resolução do sistema de tarefas particulares que caracteriza o conceito teórico de transformação linear" e "controle da realização das ações anteriores e avaliação da assimilação do conceito de transformação linear como um procedimento geral". Utiliza-se também a ação "verificação da aprendizagem por parte do professor" para a análise do desenvolvimento do pensamento teórico. Desse modo, esta categoria analisa os processos mentais dos alunos durante a execução as ações listadas, buscando compreender o modo de pensar deles, se eles conseguem ou não utilizar o conceito de transformação linear como instrumento do pensamento para resolver os problemas que lhes são propostos, caracterizando, assim, o pensamento dos participantes em teórico ou empírico, respectivamente.

Com estas categorias pode-se analisar o desenvolvimento do pensamento do aluno, que começa com sua relação objetal-prática, perpassa o início do processo de abstração, chega a uma representação conceitual por meio de um modelo representativo da relação universal do objeto integral e culmina com a utilização desse mesmo pensamento em situações particulares para verificar a utilização ou não do uso do conceito como instrumento do pensamento. Em outras palavras, procurou-se identificar momentos que comprovassem os indícios do movimento do pensamento do abstrato ao concreto, bem como do uso do conceito de transformação linear como ferramenta do pensamento teórico.

3.5.1 Transformação dos dados da tarefa na condução da identificação do princípio geral do conceito de transformação linear

Para a análise desta categoria, o episódio de ensino considerado refere-se ao desenvolvimento da ação "transformação dos dados da tarefa a fim de revelar a relação universal do conceito de transformação linear", para a qual se utilizou o lógico-histórico do conceito de transformação linear e as Tarefas 1 e 2 conforme descrito na Seção 2.2.2.1. Nesse sentido, Davydov (1988) enfatiza que a atividade objetal-prática é o primeiro contato do aluno com o objeto de estudo. Assim, ela torna-se seu primeiro contato com uma transformação linear e tem a função de impulsionar a atividade de estudo na direção de formar o conceito. Portanto, a forma de introduzir um conteúdo novo pode motivar o aluno para a sua aprendizagem e despertar nele o desejo e a necessidade por esta aprendizagem e, consequentemente, a conscientização, o reconhecimento e a compreensão das condições necessárias para isso. Davydov (1988, p. 29) afirma que "A atividade do sujeito está sempre associada a certa necessidade", logo, para o aluno aprender o conceito de transformação linear é necessário que ele sinta um desejo pela aprendizagem, consequentemente uma necessidade de formação deste conceito. Para isso, um ensino bem organizado deve priorizar um momento que conduza o aluno à descoberta do desejo e da necessidade. Um dos momentos utilizados no experimento para essa descoberta é denominado de "lógico-histórico do conceito de transformação linear", conforme o Apêndice E.

A realização do experimento iniciou-se com a apresentação e a discussão de uma situação-problema (Quadro 7), juntamente com algumas perguntas para motivar a introdução do assunto, em que era necessário a utilização do conceito de transformação linear para resolvê-las e entendê-las (os *slides* utilizados podem ser vistos no Apêndice F). Como as perguntas eram óbvias de terem um "sim" como resposta (Quem já enviou um e-mail alguma vez na sua vida? Quem já fez uma ligação telefônica? Quem já ouviu alguma música no rádio? Quem já assistiu TV alguma vez?), os alunos mostraram-se, em suas expressões, curiosos mediante essas perguntas. Quando no *slide* surgiu a frase "Então você já usou uma transformação linear!" o espanto foi maior ainda, gerando rumores, gargalhadas e perguntas do tipo "Como? O que? Quando? É mágica?". Neste momento, houve um despertar entusiasmado dos alunos para a fala do professor, ao ponto de até a postura dos alunos nas cadeiras se tornarem mais eretas como sinal de que estavam atentos e querendo compreender o assunto. O professor, por ter domínio pleno da Álgebra, ainda acrescentou mais exemplos práticos da aplicabilidade das transformações lineares: a correção automática de palavras no mecanismo de busca do Google e a criptografia utilizada nas conversas via *WhatsApp*, fato que gerou mais curiosidade e desejo; logo a necessidade, nos alunos, em saber o que era o conceito, pois como diz Davydov (1988, p. 170), "a necessidade da atividade de aprendizagem estimula [os alunos] [...] a assimilarem os conhecimentos teóricos".

Para ampliar a necessidade dos alunos por saber o que é uma transformação linear, o professor apresentou uma situação-problema em que se utiliza transformações lineares em situações práticas tanto da Engenharia Elétrica quanto da Matemática e da Engenharia de Controle e Automação, a saber, na teoria de códigos corretores de erros. Os alunos mostraram-se bem entusiasmados com o problema, porém, ao dizer aos alunos que precisavam saber o que é uma transformação linear para utilizá-la com êxito na prática, alguns fizeram uma cara de decepção, mas, ao mesmo tempo, ficaram curiosos, pois estão acostumados a receber a definição pronta apresentada pelo professor, como geralmente ocorre no ensino da Matemática, tradicionalmente pautado pelos princípios da lógica formal, descritos por Kopnin (1978) e Davydov (1988). Assim, este momento cumpriu o seu papel e despertou nos alunos o desejo e a necessidade por descobrir o que é uma transformação linear, sendo estes dois elementos constitutivos, dentre outros, da atividade humana, conforme descrito por Davidov (1999).

A necessidade também se manifestou na apresentação e discussão do lógico-histórico, na qual os alunos interagiram com o professor, fazendo a contextualização necessária dos conteúdos matemáticos no que tange a compreender a forma de pensar dos cientistas e fazer as analogias com as notações e simbologias atuais. Era perceptível, na fisionomia dos alunos, a estranheza em estar falando de história em aula de Álgebra Linear, mas, ao mesmo tempo, havia muita curiosidade e entusiasmo para compreender o processo histórico de formação dos conceitos, fato comprovado pela mudança de postura frente à exposição do professor e à participação neste momento diante dos questionamentos por ele levantados.

Já com a aula encerrada (Aula 3 – dia 28/01/2017) o grupo 2, estabelecido para a resolução da Tarefa 1, foi perguntar à pesquisadora o que era essa transformação linear, dizendo que estavam curiosos. Ela disse que eles iriam descobrir. Isso gerou certa frustação no grupo, pois estavam esperançosos de que eu lhes contaria o que era. Porém, mostra que eles estavam motivados para a aprendizagem. Neste mesmo dia, o aluno A2 disse ao professor efetivo da turma que quando ele descobrir o que é uma essa transformação linear, ele se sentirá até realizado, comprovando também a motivação do aluno. Em todas as aulas os alunos estavam motivados para realizar as tarefas e desejosos por aprender a utilizar o conceito de transformação linear, pois tomaram consciência de sua importância e necessidade por meio da aula em que foi exposta sua aplicabilidade prática em diversas áreas.

Para conduzir os alunos à descoberta da relação universal do conceito de transformação linear, isto é, para um contato mais prático com o objeto de estudo, os alunos foram divididos em grupos para a resolução da Tarefa 1 (Quadro 8). O professor, quando solicitado, percorreu os grupos auxiliando-os na resolução dos problemas e mediando a formação de novas estruturas cognitivas via a mediação dos signos (VIGOTSKI, 2001), sendo este momento descrito nas falas analisadas a seguir.

Atendendo à solicitação do grupo 1, o professor vai até eles e estabelece o seguinte diálogo relacionado à resolução da questão 1, a qual envolvia a utilização de uma função reflexão em um logotipo de uma empresa.

A6: Nós não entendemos essa parte aqui da aplicação T. Seria como? $T(x) = -x$? Seria uma função que caracteriza isso aqui?
Professor: Isso, só que você tem que observar em qual universo que você está trabalhando. Como é que são os pontos daí?
A4: Os pontos, como assim os pontos?
A6: Ele está em $\mathbb{R}^2$?
A13: Sim (x, y), $x - 1$ e $y = -1$.
Professor: Está em $\mathbb{R}^2$. Então os pontos são?
A4: (x, y).
Professor: então é T de?
A6: (x, y).
A4: Ah tá, entendi. (Aula 3 de 28/01/2017)

Nota-se que o grupo, com a mediação pedagógica do professor, apreendeu o que precisava fazer para resolver o problema, que é situar os pontos no plano e transferir a aplicação T dita por eles para esses pontos, e também quais são as condições necessárias para isso, ou seja, eles reconheceram e compreenderam que não estão mais trabalhando em conjuntos cujos elementos possuem apenas uma entrada, mas em espaços vetoriais, cujos elementos são vetores. Prosseguindo no diálogo, vê-se que a formalização da aplicação solicitada, ou seja, sua escrita de acordo com as normas matemáticas para a escrita de uma função foi um processo superado e generalizado com a mediação do professor, uma vez que já conseguiram desvincular a aplicação de funções de uma variável. Vê-se também que os alunos iniciaram a constituição de seus sistemas de conceitos (VIGOTSKI, 2001), ligando o conceito de função ao de espaço vetorial em direção à conceptualização de transformação linear, conforme a Figura 2.

Professor: Aí $T(x, y)$ vai ser o que?
A13: (x, y) .
A6: Pois é, a simetria está só em relação a y, certo? (Faz algumas anotações)
Professor: Pega pontos específicos e vê o que acontece. Pega um ponto aqui e faz a reflexão dele. (Os alunos fazem, graficamente, o que o professor indica.)
A6: o y é o mesmo.
A4: $T(2,1) = (-2, 1)$.
A6: É, o y é igual e o x é o oposto.
A13: $T(x, y) = (-x, y)$.
A6: Isso, $T(x, y) = (-x, y)$.
A4: $T(x, y) = (-x, y)$?
A13: Ah, entendi.
Professor: Mas é só isso que caracteriza uma função? Não está faltando nada não? (Aula 3 de 28/01/2017)

Nesse momento, o professor utilizou da mediação pedagógica para conduzir os alunos à mediação pelos signos que trouxessem à memória os elementos constitutivos de uma função, a saber, a lei de formação, que eles acabaram de formular, o domínio e o contradomínio, além de uma escrita formalmente aceita pela Matemática.

> **Professor:** Lembram da avaliação que eu corrigi.
> **A13:** É mesmo! (Os alunos fazem algumas anotações)
> **Professor:** Entendeu?
> **A6:** Sim.
> **Professor:** Mais alguma coisa?
> **A4:** Não. (Aula 3 de 28/01/2017)

No final desse diálogo, tem-se o professor resgatando os conceitos discutidos durante a resolução da avaliação diagnóstica, ressaltando os efeitos positivos para a construção do conceito de transformação linear. O professor nem precisou dizer quais eram os conceitos trabalhados na avaliação com os quais o grupo deveria trabalhar para a conclusão da resposta do problema, que eram domínio e contradomínio. Isso mostra que houve um avanço cognitivo dos escolares tomando por base comparativa a avaliação diagnóstica aplicada anteriormente. O professor foi para eles apenas um orientador que conduziu a conclusão da mediação cognitiva do aluno com o objeto de estudo para a formalização do $\mathbb{R}^2$ como domínio da aplicação e da modelação da aplicação reflexão.

Quando o professor foi atender ao grupo 2, o aluno A8 faz a seguinte ponderação em relação à questão 1 da Tarefa 1 (Quadro 8): "A gente está fazendo aqui, mas acredito que o mais difícil seja formalizar esta aplicação. Essa aqui eu não vou ter que especializar tanto assim, é só colocar que $T(a, b)$ é o ponto $(-a, b)$, que é a reflexão." A8 já se apropriou das condições necessárias para a resolução do problema, reconheceu o que precisa fazer para chegar à solução e ainda conseguiu expressar formalmente a expressão da aplicação solicitada. Nota-se que A8 possui um pensamento matemático mais estruturado em relação à formalização de uma função e que generalizar esse pensamento para uma aplicação qualquer se torna fácil devido ao amadurecimento das funções psíquicas que regem esse tipo de pensamento. Em todo o diálogo entre esse aluno e o professor constata-se que ele não tem dificuldades em ver que o problema está situado no plano e que ele precisa fazer toda a análise voltada para os pontos desse plano. Também não tem dificuldades em associar o conceito de função com o de espaço vetorial.

O grupo 4 também reconhece as condições necessárias para a resolução da questão 1, conseguindo identificar o domínio da função; entretanto, ao tentar escrever a aplicação, os participantes encontram dificuldades:

> **A2:** É sobre a aplicação que define essa reflexão.
> **Professor:** Certo.
> **A2:** Então para todo x de cá (mostrando no gráfico) teria um correspondente no y.
> **Professor:** É, mas o universo aí é quem? Os pontos estão em que conjunto?
> **A2:** $\mathbb{R}^2$
> **A1:** $\mathbb{R}^2$
> **A14:** $\mathbb{R}^2$
> **Professor:** Então é T de?

A2: $T(x)$
Professor: Não, como são os pontos de $\mathbb{R}^2$?
A14: (x, y)
Professor: É, mas $T(x, y)$ é quem? É isso que vocês têm que fazer. (Aula 3 de 28/01/2017)

Nota-se que os alunos estão ainda presos às funções de uma variável e ainda não veem a possibilidade de uma função possuir mais de uma variável, mesmo já tendo estudado os espaços vetoriais e visto vários exemplos de conjuntos com mais de uma entrada, como o $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$, que são os conjuntos mais trabalhados. O professor, percebendo isso, interfere no processo mediando o conhecimento por meio de uma análise das variáveis separadamente para posterior junção delas em um par ordenado, mediando os alunos no processo generalização do conteúdo.

Professor: Pega um ponto qualquer e vê o que acontece com ele.
A1: Ele tem uma imagem, ele tem um menos.
Professor: Em quem?
A1: No eixo x. Para cada ponto de x eu tenho um menos em x.
Professor: E o y?
A1: Se eu pego um ponto em x eu tenho um valor em y igual. Se eu tenho um ponto em x, em $+x$ no caso, eu tenho o mesmo valor em y.
Professor: Então o que está acontecendo com o x?
A1: O x varia mas o y fica parado.
Professor: Varia o...
A1: O sinal.
Professor: Então vai ficar T de...
Os alunos ficam em silêncio tentando escrever algo.
Professor: A resposta vocês já construíram, falta só botar no papel.
A1: risos...
Silêncio novamente.
Professor: Está no papel, só não está encadeado corretamente.
A1: Se eu vario o y...
A2: Então para qualquer y que eu tenha o x...
A1: Para qualquer x.
A2: É $-x$.
Alunos falam ao mesmo tempo.
A2: Para qualquer y que eu tenha, o x será $-x$.
Alunos discutindo a questão.
Professor: E o y?
A1: Fica parado, estático.
Professor: Então! Só escreve isso aí rapaz.
O aluno fica parado olhando para seu caderno e a tarefa.
A1: Eu não estou sabendo de mais nada. Eu não estou sabendo escrever o que estou vendo, é isso.
Professor: Não, mas você já falou, é só pôr no papel o que você já falou, falou quase tudo não é? (Aula 3 de 28/01/2017)

Nesse diálogo, constata-se que os alunos sabem como acontece todo o processo de reflexão e compreendem bem os pontos do plano, mas precisam do professor para conduzi-los à percepção da relação entre dois conceitos. Eles ainda estão presos ao professor para adquirirem segurança quanto ao seu raciocínio, como acontece no processo de ensino-aprendizagem firmado nos princípios da lógica formal, conforme descreve Kopnin (1978). Vê-se também a dificuldade dos alunos na linguagem escrita, havendo um conflito cognitivo no processo de estruturação do pensamento. A1 reconhece essa sua dificuldade e a expressa quando diz: "Eu não estou sabendo escrever o que estou vendo, é isso." Observe que ele fala corretamente o que está acontecendo com os pontos da figura, porém, não consegue transpor em palavras escritas o que ele fala. Vigotski (2001) diz que essa dificuldade se dá porque para passar da fala para a linguagem escrita é necessário que o indivíduo abstraia o aspecto sensorial de sua própria fala e comece a utilizar não mais palavras, mas representações de palavras. Davydov (1988) caracteriza esse tipo de pensamento como pensamento empírico.

Constata-se também a dificuldade em lidar com notações matemáticas que sintetizam o pensamento e utilizam símbolos para expressar conceitos. Como a expressão de uma função envolve nomenclaturas específicas da linguagem matemática, o aluno não expressa domínio sobre ela e se sente repelido a tentar esboçar a aplicação solicitada. Isso revela que o pensamento do aluno ainda não atingiu a abstração da linguagem matemática, faltando o amadurecimento das funções psíquicas superiores que regem este raciocínio. Faz-se necessário que o uso da palavra como atributo primário para a percepção sensível dos signos se converta em representação abstrata.

> A operação com signos, ou a criação e o uso de símbolos, é fator muito importante na visão dialética de desenvolvimento e na apropriação das formas culturais humanas, porque seus efeitos repercutem na memória, na atenção, na percepção, no pensamento e na vontade. Assim sendo, o desenvolvimento psicológico e cultural [do aluno] [...] é fortemente afetado pela operação com signos e pelas interações sociais. (PRESTES; TUNES; NASCIMENTO, 2015, p. 70-71)

Desta forma, a importância da atividade de ensino caracteriza-se como um processo de conhecimento do objeto de estudo pelo aluno, mediado pelo professor. Esta mediação do professor pode ser vista na cena descrita a seguir, na qual o professor utiliza conhecimentos que os alunos já possuem para mediar a compreensão da nova situação/condição da aplicação a ser esboçada, a saber: que domínios e contradomínios de transformações lineares são espaços vetoriais.

> **Professor:** Se fosse uma reta? Traça uma reta aí (falando para A1).
> A1 traça a reta.
> **Professor:** Põe um marco aí. Não é um plano cartesiano é só uma reta.
> **A1:** Tá.
> **Professor:** Aí você põe um marco nessa reta.
> **A1:** Um ponto? Pode ser um ponto?

Professor: É, pode ser um risco, um marco.
A1: Vou botar uma caixa.
Professor: Então põe a caixa. Agora marca um ponto nessa reta em qualquer lugar.
A1: Marquei.
Professor: Chama o marco de zero.
A1: Meu marco é zero mesmo.
Professor: Agora reflete o ponto em torno desse marco.
A1: É duas vezes isso pra cá.
Professor: Não, reflete.
A1: É menos o marco, esse aqui.
Professor: Menos o ponto. Certo?
A1: É, menos o ponto.
Professor: Supondo que o lado direito é positivo e o esquerdo é negativo. O que aconteceu?
A1: Pegou o ponto e levou em menos ele.
Professor: Só que agora você não está mais em uma reta, você está no plano. Os pontos são como?
A1: (x, y).
Professor: (x, y). O que é que vai acontecer com esse ponto?
A2: O x vai variar o y não vai.
Professor: Então escreve isso.
A1: Escreve aí cara, risos...
Alunos tentando escrever.
Professor: Vocês estão olhando para as variáveis, para as coordenadas, eu quero que vocês olhem para o ponto, o que é que está acontecendo com o ponto. (Aula 3 de 28/01/2017)

Mais uma vez, surge a dificuldade com formalização por meio de notações matemáticas. Os alunos já progrediram quando disseram ser (x, y) o ponto a ser refletido, já conseguiram ver que estão trabalhando com duas variáveis, iniciando o processo de abstração, mas ainda não conseguem transcrever o que disseram ao professor. Continuando o diálogo, ele diz:

Professor: Ele vai ser outro ponto, ou não?
A1: Vai, ainda no plano, mas com sinal invertido.
P: De quem?
A2: x.
A1: Em x.
Professor: E o y?
A1: É o mesmo.
Professor: Então escreve isso.
Risos.
A1: Escreve aí cara (risos). Eu não sei escrever, eu não sei usar essas linguagens.
Professor: Mas você sabe.
A1: Eu sei?
Professor: Está é com medo de escrever pelo jeito, porque você falou.
A1: Eu falei, eu entendi, mas o negócio é que eu não sei escrever que $T(x, y)$...
Professor: É igual...
A1: É igual a um ponto.
Professor: Olha que você falou! Escreve agora o que você falou que é.
Risos
Professor: Escreve o que você falou rapaz.
A1: Risos... Ê professor!
A14: Mais ou menos x.
Professor: Não oh, aí vai ser um ponto, esse ponto é no $\mathbb{R}^2$, ele tem duas entradas o x desse ponto vai ser quem?

> Alunos discutindo.
> **Professor:** o x vai em?
> Discussão em grupo.
> **Professor:** Oh, é um ponto em duas variáveis, a primeira muda o sinal e a segunda...
> **A1:** não, o y fica parado.
> **Professor:** Só que está faltando uma coisa ainda. O que caracteriza uma função? Não é só a expressão dela, falta mais coisas.
> **A2:** Domínio para o x.
> **Professor:** Entendeu aí?
> **A1:** Eu não sei escrever esse tipo de nomenclatura.
> **A2:** O domínio é os reais, o contradomínio é os reais.
> **Professor:** Não, os pontos estão aonde?
> **A2:** No $\mathbb{R}^2$ né? No $\mathbb{R}^2$.
> **Professor:** E vão cair aonde?
> **A2:** $\mathbb{R}^2$.
> Alunos discutindo tentando entrar em consenso.
> **Professor:** Pensem aí. Depois eu volto aqui.
> Alunos balançam a cabeça com sinal de positivo. (Aula 3 de 28/01/2017)

O grupo 4 apresenta-se com dificuldades quanto ao conteúdo, que se constituía em deixar funções de uma variável para adentrar a um universo com mais variáveis. Eles já se conscientizaram que o conjunto dos números reais não satisfaz às condições do problema, mas não conseguem se desprender do conhecido, a formalização de função em uma variável, para atingir o novo, a formalização de funções com mais de uma variável.

Formalizar a aplicação da questão 1 foi um problema quase unânime dos grupos. Os alunos compreenderam o que era uma aplicação reflexão, sabiam falar claramente o que acontecia com os pontos do plano quando refletidos, porém não sabiam escrever o que estavam dizendo ao professor; falavam corretamente e até explicavam o que estavam pensando, mas quando o professor pedia para que eles escrevessem o que tinham acabado de falar, eles não conseguiam. A analogia estabelecida pelo professor com as funções reais de uma variável foi uma mediação realizada em todos os grupos com a mesma dificuldade e que surtiu grande efeito, pois com ela os alunos puderam comparar as situações e associar o novo conteúdo aos outros já estudados, iniciando a criação de novos nexos em seus sistemas conceituais.

O diálogo estabelecido com o grupo 5 se assemelha bastante ao do grupo 4, pois A11 expõe, no início da conversa, o caminho tomado para a condução do raciocínio deles: “Professor, aqui é o seguinte: a gente pegou a explicação do senhor ali (referindo à explicação ao grupo 4) e conseguimos entender. A gente só não consegue agora é pôr no papel.” Isso traz 4 quatro ao professor e do professor ao grupo quatro passaram a ser perguntas do grupo 5, ao ponto da dificuldade de formalização dos dois grupos ser a mesma. Entretanto, uma diferença significativa surgiu quando eles foram questionados quanto ao domínio e contradomínio da aplicação e responderam prontamente:

> **Professor:** Mas está faltando mais alguma coisa, pois a função, além da lei, ela tem mais o que?
> **A5:** Referente ao $\mathbb{R}^2$?
> **Professor:** Isso aí é o que?
> (Silêncio)
> **Professor:** O que é que uma função tem além da regra? O que é que define uma função?
> **A5:** Seu domínio, sua imagem e contradomínio.
> **Professor:** Então está faltando essas coisas aí. Quem é o domínio? Quem é o contradomínio? E quem é a imagem?
> **A5:** O domínio vai ser o $\mathbb{R}^2$. De $\mathbb{R}^2$ para $\mathbb{R}^2$, não é?
> **A11:** $\mathbb{R}^2$ para $\mathbb{R}^2$.
> **Professor:** Isso, não é? (Aula 3 de 28/01/2017)

O conhecimento do grupo 5 sobre os conceitos de domínio, contradomínio e imagem estava em um nível mais avançado que o conhecimento do grupo 4, ou seja, o nível da zona de desenvolvimento proximal deles quanto a esses conceitos estava mais elevado, pois além de conseguirem dar uma resposta imediata a esses conjuntos, eles ainda conseguiram transpor o conceito aplicado a funções de uma variável para funções de duas variáveis. Neste momento, inicia a abstração, pois os alunos conseguiram, a partir de situações concretas, estabelecer uma aplicação em duas variáveis que satisfizesse as condições do problema. Além disso, eles refletiram sobre a correspondência de suas ações com as condições do problema, iniciando o processo de transformação dos dados da tarefa para descobrir a relação universal do conceito de transformação linear.

O grupo 3, ao chamar o professor, diz:

> **A10:** A gente fez a 2, professor, mas o problema está na 1. A gente não sabe como é essa aplicação de T não. Qual é essa aplicação? Quem é o T?
> **A12:** É o seguinte, seriam duas expressões. Aqui se remete ao 1º e ao 4º quadrante, onde vale valores positivos e negativos de x, fazendo a relação só para valores positivos de y. E a do 2º e 3º quadrantes seria a mesma coisa só que só valeria para valores negativos de y. Teria duas funções restringidas a valores positivos e negativos de y. (Aula 3 de 28/01/2017)

Nota-se que os alunos possuem consciência do que precisa ser feito e conseguiram interpretar os dados do problema propondo uma solução para ele. Entretanto, a forma de pensar desse grupo diferencia-se dos demais. Este foi o único grupo que pensou em estabelecer duas funções para a aplicação solicitada. No transcorrer do diálogo com o professor, o grupo mostrou que o caminho utilizado foi também o raciocínio por uma função de uma variável, como nos demais grupos; porém, eles tentaram utilizar a função modular para chegar à resposta. Com isso, tem-se que o sistema de conceitos desse grupo está constituído de forma diferente dos demais, mas isso não foi empecilho para a formalização da aplicação, pois o professor utilizou esta forma de pensar deles para mediar a escrita da aplicação e a abstração, mesmo sendo um caminho mais longo a ser percorrido, conforme se vê na cena transcrita a seguir:

> **Professor:** aí oh, é isso que você quer descobrir agora, o quê que faz com x e o que faz com y.
> **A10:** Eu ia colocar uma restrição.
> **Professor:** mas pode por.
> **A10:** É... É... Deixa eu ver aqui... módulo.
> **Professor:** pode escrever, de primeiro quadrante, segundo, terceiro... pode escrever, não tem problema não. Igual você estava falando. Porque se for a mesma coisa a gente condensa se não for vai ficar separado.
> **A10:** Pensei em algo separado, algo como $x = |y|$, para garantir que ficasse aqui positivo.
> **Professor:** Só que aí está no $\mathbb{R}^2$?
> **A10:** Aqui não.
> **Professor:** É de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ essa função, não é?
> **A10:** É.
> **Professor:** Reflete esse ponto aqui (no 1º quadrante), esse que você marcou, reflete ele e me diz o que aconteceu com x e o que aconteceu com y.
> **A10:** x ficou negativo e o y ficou igual.
> **Professor:** Então escreve isso que você falou por favor.
> **A10:** É...
> **Professor:** Pode ser aqui mesmo, igual você fez aqui, você puxou a seta e pôs que era (x, y).
> **A10:** Tá, $(-x, y)$.
> **Professor:** Isso. Então a ação da função, igual você escreveu, $f(x, y)$ deu o que?
> **A10:** Deu $(-x, y)$.
> **Professor:** Mas você está supondo que nos quadrantes ela será diferente, então pega um ponto aqui (no 2º quadrante) e faz o mesmo.
> **A10:** Um ponto daqui?
> **Professor:** É, porque aqui você fez no primeiro não é?
> **A10:** Isso. $(-x_1, y_1)$, por exemplo, e se for do mesmo lado (se referindo ao 1º quadrante), aí é (x_1, y_1)
> **Professor:** Foi a mesma coisa ou foi diferente?
> **A10:** A mesma coisa.
> **Professor:** Então até agora está igual. Agora pega no terceiro. Aqui é ponto não é?
> **A10:** Hunrum.
> **Professor:** Então tem os parênteses ali.
> **A10:** Então se eu pegar esse ponto aqui, o valor dele seria...
> **Professor:** No original você pode pegar sempre (x, y), não é? Tanto faz o quadrante não é?
> **A10:** Sim.
> **Professor:** Porque se o sinal for negativo ele está dentro.
> **A10:** Aqui é x positivo e $-y$, aí eu teria $(-x_2, -y_2)$. (A10 pega um ponto do 4º quadrante)
> **Professor:** Mudou em relação aos outros?
> **A10:** Igual.
> **Professor:** agora pegue um aqui (3º quadrante)
> **A10:** No quadrante de baixo?
> **Professor:** É.
> **A10:** Daria $(-x_3, -y_3)$, seguindo a mesma ideia de cima daria ainda $(x_3, -y_3)$
> **Professor:** Mudou?
> **A10:** O x muda e o y não muda.
> **Professor:** Então tudo deu igual não foi?
> Aluno balança a cabeça com sinal de positivo.
> **Professor:** Apesar de você ter pego aqui $(x_2, -y_2)$ você poderia ter pego (x, y) porque é o ponto (x, y). Ser negativo significa que ele está embaixo, mas é o ponto (x, y).

A10: Sim.
Professor: Não precisa ter o menos na frente e quando você refletir vai ficar $(-x, y)$.
A10: Hum!
Professor: Entendeu? Então a expressão deu sempre essa.
A10: É! (Aula 3 de 28/01/2017)

A explicitação, pelos alunos, do entendimento de determinadas ações contidas na atividade de estudo, caracteriza um momento prospectivo do desenvolvimento mental sobre funções que ainda não foi desenvolvido completamente. Um momento em que nasce nos alunos a ideia de transformação linear como um conceito. Segundo Davýdov (1982), é com base "em [...] fatos adequadamente selecionados que nasce a ideia abstrata generalizadora de um dos atributos que estão associados ao conceito".

A mediação do professor pôde, por meio das perguntas feitas por ele, provocar processos reflexivos que reorientaram as ações dos grupos, consequentemente, as ações individuais dos alunos quanto ao desvelamento das condições da atividade. Não é possível afirmar que a tomada de consciência foi completa em todos os alunos, mas ela pode ser adquirida na continuidade do experimento didático formativo ou em momentos posteriores. Muito menos se pode afirmar que todos os alunos estão desenvolvendo características de um pensamento teórico.

Após a resolução da Tarefa 1 (Quadro 8) pelos grupos, ocasião em que os alunos puderam tomar consciência da atividade de aprendizagem, reconhecendo e compreendendo as condições necessárias ao seu desenvolvimento, iniciou-se um momento de discussão das respostas obtidas pelos grupos, no qual os alunos puderam comparar suas respostas com as dos demais grupos e estabelecer analogias que conduzissem à identificação da relação universal. Durante a discussão, constatou-se que o grupo 4 foi o único que conseguiu estabelecer relações entre os itens (e)-(c) e (f)-(d) da questão 1 da Tarefa 1, conforme mostra a Figura 7, relações estas que não eram solicitadas no enunciado do problema, mas que eram necessárias para atingir a abstração, de forma que este grupo antecipou a análise das situações particulares.

Figura 7 – Resposta dada pelo grupo 4 ao item (II) da questão 1 da Tarefa 1

a) $T(a,b) = (-a,b)$

b) $T(c,d) = (-c,d)$

c) $T\big((a,b)+(c,d)\big) = T(a+c,b+d) = (-a-c,b+d)$

d) $T\big(\alpha(a,b)\big) = T(\alpha a,\alpha b) = T(-\alpha a,\alpha b)$

e) $T(a,b)+T(c,d) = (-a,b)+(-c,d) = (-a-c,b+d) = T((a,b)+(c,d))$

f) $\alpha T(a,b) = \alpha(-a,b) = (-\alpha a,\alpha b) = T(\alpha(a,b))$

Fonte: Obtida pela autora durante o experimento didático formativo.

O professor, ao fazer as comparações entre as respostas dos alunos referentes a esses itens, os conduz a falar o significado das expressões $F\big((a,b)+(c,d)\big) = F(a,b)+F(c,d)$ e $F\big(\alpha(a,b)\big) = \alpha F(a,b)$, iniciando a desvelação da relação universal. Ele começa levando-os a pensar na expressão $(a,b)+(c,d)$, a reconhecer que ela expressa a soma de dois vetores e que $F\big((a,b)+(c,d)\big)$ representa a imagem, logo os alunos conseguem falar que $F\big((a,b)+(c,d)\big)$ significa a imagem da soma de dois vetores e que $F(a,b)+F(c,d)$ significa a soma das imagens de dois vetores, sendo F uma transformação linear. Quando os alunos constatam que $\alpha(a,b)$ é um escalar multiplicado por um vetor, rapidamente eles conseguem dizer que $F\big(\alpha(a,b)\big) = \alpha F(a,b)$ significa que a imagem do vetor multiplicado por um escalar é igual ao escalar multiplicado pela imagem do vetor. São os primeiros passos em direção à abstração.

Com a leitura destas igualdades, o aluno começa a extrapolar o plano da linguagem escrita para associá-lo ao plano da fala, dando significado aos símbolos utilizados com o intuito de chegar a um patamar que supera o de mera representação desprovida de contextualização, como na lógica formal. Com a obtenção do significado teórico da simbologia algébrica, o aluno dá mais um passo rumo ao desenvolvimento de um pensamento teórico.

Na apresentação pelos grupos da resolução da questão 3 da Tarefa 1 (Quadro 8), três palavras que colaboram para a constituição do conceito surgiram nas falas dos alunos e o professor anotou-as no quadro negro: distributiva, agrupamento e multiplicação por escalar. Após os grupos encerrarem suas explicações, o professor chamou a atenção dos alunos para essas palavras, destacando os cálculos em que eles disseram ter usado essas propriedades. Com isso, os alunos a perceberam que o "agrupamento" dito por eles recebe o nome "comutatividade", sendo esta propriedade relacionada com a operação de adição de vetores e que todas as palavras destacadas pelo professor (distributiva, agrupamento e multiplicação por escalar) estão relacionadas a espaços vetoriais, sendo as duas primeiras palavras referentes às propriedades desses conjuntos e a última a uma operação. Assim, os alunos perceberam que estão trabalhando com espaços vetoriais, o ambiente algébrico em que é construído o conceito de transformação linear.

No final da aula do dia 28/01/2017, quando os alunos já haviam se retirado da sala, A13 retornou e perguntou à pesquisadora se função era quando usava só uma letra ou número, como no conjunto dos números reais, e se na transformação linear usava mais de uma letra, como o (x, y) do $\mathbb{R}^2$. Ela disse que não poderia responder essa pergunta senão comprometeria o experimento, mas que já na próxima aula ele saberia a resposta, bastava que ele aguardasse um pouco. Nesse fato, percebe-se que A13 iniciou o processo de abstração na condução da formação do conceito, pois já questionava se há diferença entre função de uma variável e transformação linear.

Já na aula do dia 04/02/2017, após os alunos responderem individualmente a questão 1 da Tarefa 2, a qual solicitava o levantamento das propriedades comuns a todos os problemas da Tarefa 1, o professor solicitou que alguém escrevesse sua resposta no quadro. O aluno A4 se candidatou e sua resposta pode ver vista na Figura 8. Como ninguém mais se habilitou a ir ao quadro, o professor, então, solicitou a A4 que explicasse seu raciocínio: "As condições que eu acho que foram satisfeitas são: que a imagem da soma de vetores é igual a soma da imagens de cada vetor e que a imagem de um produto escalar é o produto escalar pela imagem do vetor. Eu vi que em todas as questões essas condições eram satisfeitas".

Figura 8 – Resposta de A4 à questão 1 da Tarefa 2

São satisfeitas as condições de que a imagem da soma de vetores é igual a soma das imagens de cada vetor. Além disso, entende-se também que a imagem do produto escalar é igual ao produto do escalar pela imagem do vetor.

Fonte: Obtida pela autora durante o experimento didático formativo.

A4 transformou os dados da tarefa para identificar a relação universal. Quando ele conseguiu expressar claramente as propriedades necessárias para uma transformação ser linear, ele mostrou ter desenvolvido bem as ações mentais de observar, comparar, analisar, identificar e relacionar, mas a abstração foi parcial, pois ele não especificou que os conjuntos relacionados nas questões são espaços vetoriais, estando esta ideia implícita no momento que ele diz estar lidando com vetores. Assim, o aspecto nuclear do conceito está prestes a ser consolidado, faltando apenas o detalhe dos conjuntos.

> **Professor:** Mais alguém observou algo além disso?
> **A14:** Para resolver precisava das propriedades de espaço vetorial, comutatividade, distribuição, agrupamento. Se não obedecesse a essas propriedades não tinha como resolver.
> **A8:** A mesma coisa aqui só que no caso, elemento nulo, a questão do negativo, do antissimétrico, da comutatividade, então poderia ser todas aí no caso.
> **A2:** Todas estavam no plano, no espaço $\mathbb{R}^2$, então como eram funções de duas variáveis podia-se aplicar as propriedades do espaço vetorial.
> **Professor:** Mais alguém? Ninguém observou nada além disso? (Aula 5 de 04/02/2017)

Esta cena revelou que A14 e A8 estavam presos a propriedades particulares de espaço vetorial, olhando para partes e não para o todo, fizeram a distinção das propriedades, mas não as agruparam como propriedades de espaços vetoriais. A2 já observa o todo, já possui um pensamento mais abstrato, consegue relacionar as propriedades com o conjunto.

> **Professor:** Então vamos sintetizar. Todas elas tinham mais alguma coisa em comum, não tinham? Todas são inicialmente o que?
> **A8:** Funções.
> **Professor:** Funções. Então para defini-las faltou o que? Então, além das propriedades que vocês observaram... Quais foram as propriedades que vocês observaram?
> **A2:** Espaço vetorial.
> **Professor:** E, igual está escrito aqui, a imagem da soma de dois vetores é igual a soma das imagens de cada vetor e a imagem do produto escalar é igual ao produto escalar pela imagem do vetor. Então tem que ter...
> **A14:** Domínio, contradomínio e imagem.
> **Professor:** Para ter esse domínio, contradomínio e imagem tem que ser o que, já que tem que valer as propriedades de espaço vetorial?
> **A4:** Espaço vetorial.
> **A14:** É, espaço vetorial.
> **Professor:** Então o universo inserido aí são espaços vetoriais. Certo? Domínio, contradomínio e imagem tem que ser espaços vetoriais. (Aula 5 de 04/02/2017)

Nessa cena, temos o processo de abstração das propriedades particulares sendo efetuado, no qual os alunos estão percebendo que as transformações lineares são definidas em espaços vetoriais. Isso acontece agora com A14 e A4 e confirma que já aconteceu em A2, indicando que o processo de abstração está prestes a chegar à síntese do nuclear do conceito. Sobre o processo de síntese, Davydov (1988, p. 148) ressalta que "[...] a recriação do concreto está ligada, no fundamental, ao processo de síntese, ainda que dentro deste se produza permanentemente a análise a fim de se obter as abstrações indispensáveis. A atividade de síntese se provê a si mesma das abstrações de que necessita".

Para a mediação dos alunos, o professor começou a questioná-los sobre as características levantadas, solicitando que eles as falacem de forma generalizada, independente das situações particulares das quais foram retiradas. À medida que os alunos falavam, o professor as escrevia no quadro negro:

> **A4:** Domínio, contradomínio e imagem.
> **Professor:** Que tem que ser o que?
> **A14:** Espaços vetoriais.
> **Professor:** E tem que satisfazer o que?
> **A14:** As propriedades.
> **Professor:** Quais?
> **A4:** Associativa, comutativa...
> **A14:** Associatividade, comutatividade...
> **Professor:** Mas essas aí já estão embutidas em espaços vetoriais. Quais são as outras? Está escrito no quadro.
> **A4:** A soma dos...
> **Professor:** Em termos matemáticos eu escrevo como?
> **A4 e A14** (falando simultaneamente): $F(a+b)=F(a)+F(b)$.
> **A14:** $F(\alpha a)=\alpha F(a)$.
> **Professor:** Mais alguma coisa? Está faltando algo?
> **A14:** Não.
> **Professor:** A imagem, geralmente aparece naturalmente. Como que vai aparecer a imagem em uma função?
> **A4:** Pela lei.
> **Professor:** Então eu posso trocar a imagem por alguma coisa?
> **A4:** Você pode acrescentar.
> **Professor:** Posso acrescentar?
> **A4:** Sim.
> **Professor:** Então estou escrevendo o que A4 falou, a lei de formação. (Aula 5 de 04/02/2017)

Dessa forma, os alunos conseguiram identificar e abstrair as relações gerais das situações-problema da Tarefa 1. No final, a escrita no quadro ficou como mostra a Figura 9.

Figura 9 – Relações universais do objeto transformação linear levantadas a partir da Tarefa 1

Domínio, Imagem, Contradomínio: são espaços vetoriais
Lei de formação
$i)\ F(a+b)=F(a)+F(b) \qquad ii)\ F(\alpha a)=\alpha F(a)$

Fonte: Obtida pela autora durante o experimento didático formativo.

Temos, assim, a desvinculação das relações particulares obtidas pela Tarefa 1. Constata-se que nenhum grupo realizou o processo completo de abstração necessário à revelação da relação universal, algum detalhe sempre ficou em falta em algum dos grupos. A relação obtida na Figura 9 foi construída com o auxílio mútuo dos grupos, cada um dando sua contribuição de acordo com o que haviam feito, de forma que esta relação universal foi construída por toda a turma. É inegável que individualmente algum aluno possa ter atingido a completude da relação universal, mas isso não é possível afirmar no momento. O que se pode dizer é que aqueles que ainda não conseguiram formar a relação universal e que ainda a podem construir durante o desenvolvimento da atividade de estudo.

Esse processo é importantíssimo para a obtenção do pensamento teórico, pois forma a primeira etapa do desenvolvimento do pensamento, a qual dará significado às ações futuras. Estas relações já possuem um caráter mais geral, de síntese conforme diz Davydov (1988), necessitando agora de uma estruturação conforme as normas da escrita matemática, ou seja, precisam ser trabalhadas por meio de um modelo matemático que formalize o conceito de acordo com as normas e o pensamento matemático, dentro da lógica dialética de ensino e possibilite a construção do conceito por meio da relação universal obtida.

3.5.2 Da modelação à transformação de um modelo para o conceito de transformação linear

Os episódios de ensino utilizados para a análise dessa categoria referem-se ao desenvolvimento das ações "modelação da relação universal" e "transformação do modelo da relação universal que caracteriza o conceito teórico de transformação linear", sendo ambas relacionadas com a Tarefa 3 – a modelação se deu por meio da resolução da questão 1 e a transformação do modelo com a questão 2. A metodologia empregada na execução destas ações pode ser verificada nas Seções 2.2.2.2 e 2.2.2.3, respectivamente.

Um modelo, para ser considerado um "modelo de aprendizagem", precisa estabelecer a relação universal do objeto de estudo, possibilitando uma posterior análise deste objeto (DAVYDOV, 1988). Especificamente, o modelo solicitado pela questão 1 da Tarefa 3 visa refletir o aspecto nuclear do conceito de transformação linear por meio de uma modelação literal (ou textual ou linguística) desse aspecto, iniciando o desenvolvimento de uma escrita formalmente aceita pelas normas do pensamento matemático, pois é necessário que o aluno aprenda a pensar de acordo com os critérios da ciência, como afirma Davydov (1988, p. 165):

> O pensamento dos alunos, no processo da atividade de estudo, de certa forma, se assemelha ao raciocínio dos cientistas, que expõem os resultados de suas investigações por meio das abstrações, generalizações e conceitos teóricos substantivas, que exercem um papel no processo de ascensão do abstrato ao concreto.

Assim, para que o aluno exponha o resultado de suas abstrações, como diz Davydov (1988), em forma de um modelo matemático, seu pensamento precisa ter sido mediado matematicamente no processo de abstração, conforme desenvolvido na execução da ação "transformação dos dados da tarefa a fim de revelar a relação universal do conceito de transformação linear" descrita na seção anterior, para que agora, na fase de modelação, ele consiga fazer as abstrações que ainda necessite para a construção e formalização do conceito seguindo ainda a forma de pensar e escrever da Matemática.

Direcionados por esses pressupostos, os modelos criados pelos alunos podem ser vistos nas Figuras 10, 11, 12 e 13 a seguir relacionadas. Tem-se, em uma totalidade, que todas as relações internas do objeto foram apresentadas nos modelos, mas não em um único modelo, todos eles deixaram de apresentar uma ou outra relação e/ou apresentaram relações que ainda necessitam de generalização do conteúdo[17] apresentado. Vê-se também que cada grupo tem o seu próprio ritmo de formação do conceito.

Para o grupo 1 (Figura 10), a relação universal está prestes a ser apreendida, pois seu modelo contempla mais características do nuclear do objeto, a saber, a transformação linear F ($F: U \to V$) e as propriedades que ela deve satisfazer ($F(a+b) = F(a) + F(b)$), com especificação para a localização dos elementos aplicados na transformação F ($a, b \in U, \alpha \in \mathbb{R}\ e\ b \in U$), faltando apenas dizer que os conjuntos são espaços vetoriais. Este grupo é o que apresenta um maior nível de abstração, restando apenas a exibição do significado dos conjuntos U e V.

Figura 10 – Modelo criado pelo grupo 1

$$\boxed{\begin{array}{c} F: U \to V \\ \{F(a+b) = F(a) + F(b) \mid a, b \in U\} \\ \{F(\alpha b) = \alpha F(b) \mid \ \alpha \in \mathbb{R}\,; b \in U\} \end{array}}$$

Fonte: Obtida pela autora durante o experimento didático formativo.

O grupo 2 (Figura 11) conseguiu realizar a generalização do conteúdo expressando o domínio e o contradomínio como espaços vetoriais quaisquer; entretanto, ainda não conseguiu abstrair as propriedades que a transformação linear deve satisfazer. Assim, este grupo ainda não conseguiu estabelecer as relações universais do objeto.

[17] Generalização do conteúdo está intimamente relacionada com a generalização do resultado discutida na Seção 3.6.5, a diferença é que aqui está se referindo a um conteúdo matemático relacionado com um conceito a ser formado e não com um resultado que necessita de formalização, de comprovação matemática de sua veracidade, como lá.

Figura 11 – Modelo criado pelo grupo 2

Sendo $f: U \to V$, tal que U e V são espaços vetoriais, é possível concluir que existirá α, β escalares e A, B, C, D pontos de U, tal que se:

$$\alpha(F(A) + F(B) = \beta(F(C) + F(D))$$

implicará que:

$$\alpha A + \alpha B = \beta C + \beta A$$

Será uma transformação linear.

Fonte: Obtida pela autora durante o experimento didático formativo.

A Figura 12 apresenta o modelo criado pelo grupo 3. Nota-se que o processo de abstração está ainda longe de ser finalizado, pois os alunos não conseguiram extrair as relações gerais dos casos particulares. Há muita confusão conceitual expressa nesse modelo advinda de conceitos que são considerados como pré-requisitos para a formação do conceito de transformação linear (Figura 1): o grupo diz que transformações lineares são “formas” para determinar funções, mas escreve uma transformação linear utilizando a notação de função, contradizendo a fala anterior, e também há problemas com os conceitos de vetores e de espaço vetorial, pois a expressão “condições de um vetor” não está condizente com a situação em estudo, uma vez que vetores são elementos dos espaços vetoriais e não possuem “condições”, os espaços vetoriais, sim, possuem certas condições, que são chamadas de condições de existência ou axiomas de um espaço vetorial, que precisam ser satisfeitas para que um conjunto seja considerado um espaço vetorial. Vê-se também que o grupo não conseguiu realizar uma completa generalização do conteúdo, pois o domínio e o contradomínio da função $f(x)$ são constituídos por um espaço vetorial específico, o $\mathbb{R}^n$ (espaço vetorial real de dimensão n), e não um espaço vetorial qualquer, como deve ser na relação universal. Quanto às propriedades que devem ser satisfeitas por uma transformação linear, o grupo as escreveu corretamente, porém, criou outras que não condizem com as relações particulares anteriormente levantadas.

Figura 12 – Modelo criado pelo grupo 3

Transformações Lineares são formas de determinar funções que satisfaçam as condições de um vetor: domínio, contradomínio e imagem.

$$F(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \mid \forall\, x \in \mathbb{R}^n$$

Para k uma constante, $k \in \mathbb{R}$ e x um vetor

$F(x_1) + F(x_2)$ ou $kF(x)$ tal que:

$F(x_1) + F(x_2) = F(x_1 + x_2)$ e $kF(x) = F(kx)$

$F(Kx) = g(y)$ e $F(x_1 + x_2) = h(z)$

$g(y) = \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \qquad h(z) = \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad \forall z \in \mathbb{R}^n$

Fonte: Obtida pela autora durante o experimento didático formativo.

O modelo criado pelo grupo 4 (Figura 13) revela que os alunos não possuem uma linguagem matemática bem desenvolvida, implicando em uma escrita matemática que não atende às normas desta ciência. O modelo literal foi apresentado, mas não condiz com os padrões que devem ser seguidos para a apresentação de conteúdos matemáticos. Nota-se que a relação universal do conceito não foi totalmente desvelada, pois o grupo apenas conseguiu situar o conjunto que determina o domínio e o contradomínio da transformação, que são os espaços vetoriais. Sabem que uma transformação linear deve possuir uma lei de formação, mas expressam a transformação como uma "relação entre seus elementos" e dizem que a lei de formação deve obedecer às propriedades dos espaços vetoriais, mostrando um pensamento confuso que, ao analisar as situações particulares, não conseguiu realizar a abstração necessária para tornar o particular em geral.

Figura 13 – Modelo criado pelo grupo 4

Dada uma função $f(x, y, z, \ldots, n)$, entende-se por transformação linear a relação entre seus elementos respeitando uma lei de formação que obedeça as propriedades dos espaços vetoriais com domínio, contradomínio, imagem contidos em espaços vetoriais.

Fonte: Obtida pela autora durante o experimento didático formativo.

Apesar de não ter tido nenhum modelo que contemplasse todas as condições necessárias à formalização do conceito, observa-se que alguns alunos estão conseguindo estabelecer as conexões necessárias à formação do conceito, mesmo que bem sucintas. Esta é uma característica importante nesse momento, reconhecer o que está sendo estruturado no sistema conceitual dos alunos. Observa-se em todos eles o reconhecimento da necessidade de trabalhar com uma função dentro de espaços vetoriais, satisfazendo algumas condições, apesar de nem todos esboçarem a representação desta função nem de suas condições. A forma como os alunos escreveram mostra também o início da superação deles da dificuldade de expressar por meio da linguagem escrita o que eles estavam falando, diminuindo o espaço existente entre essas duas capacidades.

Após cada grupo apresentar o raciocínio utilizado na formação dos modelos escritos nos cartazes e comparar o seu modelo com o modelo dos demais grupos, o professor iniciou um diálogo com o intuito de mediar com os alunos a transformação dos modelos por eles propostos.

> **Professor:** O que foi que apareceu em comum em todos?
> **A2:** Os elementos envolvidos estão em espaços vetoriais.
> **Professor:** Apesar de ninguém ter escrito explicitamente, todos deixaram implicitamente que as transformações são o que?
> **A8:** São funções.
> **Professor:** São funções.
> **A2:** Entre espaços.
> **Professor:** Entre espaços vetoriais? (Alunos balançam a cabeça com sinal de sim) E apesar do grupo 4 não ter escrito, tem que satisfazer essas propriedades? (Indicando as propriedades da soma e multiplicação por escalar que caracterizam uma transformação linear). (Aula 5 de 04/02/2017)

Com esse diálogo, teve-se o início da análise dos modelos com o intuito de identificar o que há em comum neles e, assim, chegar a um modelo que apresentasse todas as relações em sua "forma pura" (DAVYDOV, 1988) e que fosse a expressão do pensamento matemático que os alunos vinham desenvolvendo. Assim, após os alunos se expressarem e levantarem os pontos em comum nos modelos expostos, o professor levantou os pontos que ainda não haviam sido mencionados, chamando a atenção para a aparição deles nos modelos (última fala do professor no diálogo acima) e utilizou o modelo que estava mais generalizado em termos de conteúdo para estruturar o novo modelo, exercício pedido pela questão 2 da Tarefa 3 (Quadro 8), conforme constata-se no diálogo abaixo:

> **Professor:** Então o conceito vocês disseram e está bem escrito aqui (apontando para os cartazes). O grupo 1 falou corretamente, faltou uma e outra palavrinha pra ficar tudo correto, então vamos usar o deles para escrever aqui (fala e escreve simultaneamente no quadro negro): Sejam U e V espaços vetoriais. Uma transformação linear é uma aplicação $T: U \to V$ tal que $T(u+v) = T(u) + T(v)$, para todo $u, v \in U$ e $T(\alpha u) = \alpha T(u)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e todo $u \in U$. (Aula 5 de 04/02/2017)

Na fala inicial do professor, descrita no diálogo acima, além de perceber sua preocupação em valorizar a atividade e o desenvolvimento dos alunos, vê-se a intenção de despertar neles uma visão crítica que confronte o seu próprio modelo com os dos demais colegas e com o novo modelo que está prestes a ser criado a partir dos modelos expostos. Em seguida, ele conduz os alunos na transformação do modelo, mostrando-lhes como escrever um conceito de acordo com as normas da escrita matemática para que ele seja aceito como um modelo matemático. O modelo transformado pela turma com o auxílio do professor pode ser verificado na Figura 14.

Figura 14 – Modelo transformado pelos alunos com o auxílio do professor

Sejam U e V espaços vetoriais. Uma transformação linear é uma aplicação $T: U \rightarrow V$ tal que,

$i)$ $T(u+v) = T(u) + T(v), \forall\, u, v \in U$,

$ii)$ $T(\alpha u) = \alpha T(u), \forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ u \in U$.

Fonte: Obtida pela autora durante o experimento didático formativo.

Com o modelo transformado, o professor levou a turma a analisar alguns conceitos que geraram dúvidas durante as ações de aprendizagem anteriormente desenvolvidas, como os conceitos de domínio, contradomínio e imagem, atuando na construção dos nexos internos do conceito de transformação linear (Figura 2), conforme mostra a seguinte fala do professor:

> **Professor:** Então aqui está implícito que o domínio e o contradomínio são espaços vetoriais. Quando eu escrevo assim, já estou dizendo que T é uma função cujo domínio é U e o contradomínio é V. A imagem vai ser dada pela lei que a gente chama de T, satisfazendo essas duas propriedades. Então observe que nos cartazes, a menos de organizar melhor, o conceito ficou bem entendido. Então, qualquer função entre espaços vetoriais que satisfaça essas duas propriedades é uma transformação linear. (Aula 5 de 04/02/2017)

Mesmo o professor tendo escrito no quadro negro a relação universal, ele não a fez sozinho, os alunos o conduziram nesse processo de escrita e ele pôde ensinar como escrever um princípio geral de acordo com as normas da linguagem matemática, utilizando a simbologia adequada, fato de grande dificuldade para os alunos, como já mencionado anteriormente. Dessa forma, obteve-se a abstração das relações particulares e identificou-se a essência de uma transformação linear. É certo que o processo de abstração não foi completo em todos os alunos, conforme demonstraram os diálogos descritos, mas ainda há a possibilidade de completar esse processo no decorrer das demais ações de aprendizagem, pois o desenvolvimento cognitivo não é linear nem se dá ao mesmo tempo para todos os alunos, cada um tem o seu ritmo próprio de aprendizagem. Assim, o processo de abstração desenvolvido levou os alunos a reconhecerem o procedimento geral de resolução da tarefa, identificando-o em meio às particularidades.

3.5.3 O uso do conceito de transformação linear como ferramenta mental

Para analisar essa categoria, utilizou-se os episódios correspondentes às ações de aprendizagem "resolução do sistema de tarefas particulares utilizando o conceito teórico de transformação linear" e "controle da realização das ações anteriores e avaliação da assimilação do conceito de transformação linear como um procedimento geral", bem como da ação "verificação da aprendizagem por parte do professor". Para estas ações utilizou-se as Tarefas 4 e 5, cujos desenvolvimentos metodológicos podem ser verificados nas Seções 2.2.2.4, 2.2.2.5 e 2.2.2.6.

Utilizar um conceito como ferramenta mental é utilizá-lo como meio para pensar nas situações que lhe são colocadas, sejam estas situações direcionadas a conteúdos científicos ou a apenas situações corriqueiras, do cotidiano. E utilizar o conceito de transformação linear desta forma e no contexto deste experimento didático, é utilizá-lo para pensar em situações-problema que são colocadas aos alunos em forma de tarefas e que os desafiem a pensar teoricamente utilizando o conceito de transformação linear.

Davydov (1988) caracteriza o conceito como uma forma de atividade mental através da qual o objeto e seu sistema de relações são reproduzidos, refletindo a universalidade, a essência, do movimento objetal-prático. Assim, "o conceito atua, simultaneamente, como forma de reflexo do objeto material e como meio de sua reprodução mental, de sua estruturação, isto é, como ação mental especial" (DAVYDOV, 1988, p. 128).

Dessa forma, o conceito é o instrumento utilizado para pensar nas situações-problema e propor uma solução para elas, é um mecanismo do pensamento que conduz a ação do aluno no desenvolvimento da atividade de estudo, sendo no plano interior das ações o local onde se desenvolve essa capacidade de operar com conceitos, desenvolvendo o pensamento teórico do aluno. "O pensamento teórico idealiza os aspectos experimentais da produção dando-lhes, inicialmente, a forma de experimento cognitivo objetal-prático e, depois, de experimento mental, realizado em forma de conceito e por meio deste" (DAVYDOV, 1988, p. 133). Portanto, nesse plano, o pensamento utiliza as abstrações transformadas em concreto pensado para agir nos casos particulares de utilização do conceito. É a ocorrência do movimento do geral para o particular.

Após a construção e a transformação do modelo que representa o conceito de transformação linear, o primeiro contato dos alunos com situações de utilização deste conceito como ferramenta mental se deu na Tarefa 4 (Quadros 9 e 11), por meio da qual é possível averiguar a forma como os alunos lidam com o conceito de transformação linear enquanto instrumento do pensamento para a resolução das questões propostas.

A questão 1, dessa tarefa, objetivou verificar se houve apropriação do conceito enquanto compreensão das condições necessárias para uma transformação ser linear. Fato confirmado por meio das respostas dos alunos, as quais foram bem semelhantes às do grupo 3, vistas na Figura 15, apresentada a seguir, na qual os alunos verificaram que o domínio não era um espaço vetorial, já assumindo que a transformação não era linear, uma vez que não satisfazer uma das condições da relação universal já é fator decisivo para presumir que a transformação em questão não é linear. Nota-se um desenvolvimento do pensamento dos alunos, em específico dos do grupo 3, que, anteriormente, estavam com dificuldades em abstrair o nuclear do objeto.

Figura 15 – Resposta do grupo 3 à questão 1 da Tarefa 4

Como as restrições dos problemas 2 e 3 têm imagem $\mathbb{R}_{+}^{*}$, não podem ser espaços vetoriais pela ausência do elemento oposto, logo não podem ser transformações lineares, sendo que as mesmas apenas se dão em espaços vetoriais, além da ausência do elemento nulo.

Fonte: Obtida pela autora durante o experimento didático formativo.

Entretanto, para os alunos conseguirem formular suas respostas como vemos na Figura 15, foi preciso que o professor mediasse as discussões dos grupos para auxiliá-los na compreensão do enunciado do problema. Os alunos tinham em mente que era necessário verificar se a aplicação estava definida em espaços vetoriais e se satisfaziam as duas condições do princípio geral, entretanto, achavam que também era necessário verificar as oito propriedades de espaços vetoriais. Eles não conseguiam conceber a resposta de uma questão de Matemática como sendo um texto justificando o raciocínio utilizado; eles julgavam ser necessário esboçar alguns cálculos, se não, a resposta não estaria correta. Nota-se que os alunos estão acostumados a uma lógica de pensamento em que na Matemática tudo tem que ser provado, julgando não ser somente o que estavam fazendo mentalmente, mas que precisavam de cálculos. Estão habituados a uma forma de pensamento objetiva e exata e têm dificuldades de utilizar um pensamento reflexivo, subjetivo, em questões matemáticas. Kopnin (1978, p. 76) esclarece que este é exatamente o método de estudo do conhecimento enquanto processo lógico, consistindo "na transformação do conhecimento num modelo ideal construído sobre os princípios do cálculo formal, numa linguagem artificialmente criada".

Na questão 2 da Tarefa 4 (Quadro 9), objetivou-se associar transformação linear com matriz e fazer com que o aluno descobrisse como obter uma matriz a partir de uma transformação linear. O Aluno A7, em sua resposta para o item (a), foi além do que era esperado, associando também o conceito de dimensão de um espaço vetorial (Figura 16), ele mostrou que seu sistema de conceitos opera com mais elementos para a constituição das conexões do conceito de transformação linear. Vigotski (2001, p. 269), ao relacionar formação de conceitos com sistema de conceitos, enfatiza que a "[...] formação de conceitos requer atos de pensamento inteiramente diversos, vinculados ao livre movimento no sistema de conceitos, à generalização de generalizações antes constituídas, a uma operação mais consciente e mais arbitraria com conceitos anteriores".

Figura 16 – Resposta de A7 para o item (a) da questão 2 da Tarefa 4

Basta ordenar as variáveis em uma matriz do tipo $n \times 1$ e os coeficientes em uma matriz do tipo $m \times n$ onde m é o grau do contradomínio sendo escrito como o produto destas matrizes. Sendo as colunas os coeficientes das variáveis.

Fonte: Obtida pela autora durante o experimento didático formativo.

Ainda nessa perspectiva, na correção do item (b), pode-se constatar que o nexo entre matriz e transformação linear foi bem estabelecido, pois surgiram duas respostas distintas para o subitem (b.1), ou seja, duas matrizes diferentes para a matriz dos coeficientes. Quando o professor disse que apenas uma estaria correta e perguntou como se verificava tal fato, três alunos responderam simultaneamente que bastava multiplicar as matrizes e ver qual daria a transformação do enunciado. Isso dá indícios de que eles compreenderam o processo de escrever uma transformação linear como o produto de duas matrizes (matriz dos coeficientes pela matriz das variáveis) e vice-versa, pensando o conceito de transformação linear por meio do conceito de matriz.

Quando da correção da questão 3 item (c), apenas A4 se dispôs a ir ao quadro mostrar sua resposta. De acordo com as etapas do pensamento matemático, ele conjecturou que a transformação não era linear e formalizou sua conjectura utilizando o método de demonstração por contraexemplo, como se vê na Figura 17. Nesse caso, mostrar por contraexemplo significa exibir uma situação particular em que pelo menos uma das relações do conceito não seja satisfeita. A4 exibiu dois pontos do $\mathbb{R}^2$ que não satisfazem a propriedade da soma, $C(u+v) = C(u) + C(v)$, com $u = (1,1)$ e $v = (2,2)$.

Figura 17 – Resposta de A4 para o item (c) da questão 3 da Tarefa 4

$$C: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$C(x,y) = (xy, y)$$
$$C(1,1) + C(2,2) = (1,1) + (4,2) = (5,3)$$
$$C(1+2, 1+2) = C(3,3) = (9,3)$$

Fonte: Obtida pela autora durante o experimento didático formativo.

Há indícios do uso do conceito de transformação linear como ferramenta mental por A4, pois ele consegue verificar o que está falhando nas condições dadas no princípio geral do conceito trabalhado. Vê-se, também, que A4 possui um pensamento matemático que lhe possibilita a formalização de sua resposta de acordo com os critérios de uma demonstração por contraexemplo. Com a resposta de A4 no quadro, o professor, buscando despertar a reflexão nos alunos, bem como a comparação de suas respostas com a de A4, iniciou o seguinte diálogo:

> **Professor:** Alguém discorda? Alguém fez diferente?
> **A8:** Eu fiz com (a,b) mesmo, mas pode ser do jeito dele.
> **Professor:** Por que fazer com (a,b) não é bom? Porque podem ter (a,b) que funcionem. Querem ver?
> Professor escreve no quadro a expressão $C(a+x, b+y) = ((a+x)(b+y), b+y)$ e diz:
> **Professor:** Se x e y forem zero, a expressão não vai dar certo?
> **A8:** Vai, mas é um caso particular, você tem que ver para todos.
> **Professor:** Pois é. Isso!
> **A8:** Mas já está para todos aí. Se ele não obedece pra um não vai obedecer para os outros.
> **Professor:** Mas mostrar que não obedece para um é fazer isso (apontando para a resolução de A4).
> **A8:** Então, também. O que eu falo é que se eles não fossem zero não iria acontecer isso. Já é mais generalizado.
> **Professor:** Mas quando você escreve assim, você não está provando que não vale. Você escreveu uma equação que pode valer ou não.
> **A8:** Pode, mas ainda vai depender. É isso que eu estou falando. Se não forem zero aí vai.
> **A4:** Mas não vai ser uma resposta satisfatória.
> **Professor:** É!
> **A13:** Quando você mostra o contraexemplo você já está provando.
> **A8:** Já.
> **Professor:** Mas você entendeu?
> **A8:** É, mas eu prefiro do meu jeito. (Aula 6 de 11/02/2017)

Nesse diálogo, vê-se que A8 ainda não possui um pensamento matemático que lhe possibilite compreender os processos desse tipo de pensamento. Ele compreende os cálculos, mas não vê significado neles, mostrando que provar por contraexemplo ainda não é um ato concreto do seu pensamento. Isso revela que a lógica formal, que vem sendo utilizada no ensino da Matemática, não tem sido eficaz no processo de ensino-aprendizagem do modo de pensar esta ciência, especificamente, no processo de formalização de uma afirmação via demonstração por contraexemplo, pois este é um método próprio do pensamento matemático aplicado a diversos conteúdos, independentes do nível de ensino, mas em cada situação com o tratamento pedagógico específico para o nível de desenvolvimento da turma.

Nota-se também que para A8 não é problema utilizar o conceito de transformação linear; ele até opera muito bem com ele, com indícios de ter desenvolvido o pensamento teórico com respeito a este conceito. O problema está mesmo nos porquês do tipo específico de pensamento e de demonstração utilizados na resolução de A4.

Relacionando Álgebra e Geometria, a questão 4 propunha uma análise de alguns gráficos de aplicações lineares e não lineares, com o intuito de inserir um novo aspecto para a realização das ações de aprendizagem controle e avaliação, pois como afirma Davydov (1988, p. 176), “Para executar as ações de monitoramento [controle] e avaliação, a atenção [dos alunos] deve ser dirigida ao conteúdo das próprias ações e ao exame dos seus fundamentos, do ponto de vista da correspondência com o resultado exigido pela tarefa”. Além disso, esta questão visava desvelar a seguinte propriedade das transformações lineares: se uma aplicação $T: U \rightarrow V$ é linear, então $T(0_U) = O_V$. Com a análise dos dados deste problema, todos os alunos concordaram que o que há em comum nos gráficos das transformações lineares é que todos passam pela origem e que todas são funções lineares, respondendo ao item (a) da questão. Na análise dos gráficos que não representam transformações lineares, item (b), eles afirmam que por não ser linear não passam na origem. Porém, esta afirmação não é correta e pode levar os alunos a um equívoco conceitual, afetando a construção de outros conceitos. Então, o professor iniciou um diálogo com o intuito de conduzir os alunos a esta percepção e levá-los a construir a conjectura correta.

> **Professor:** Mas será que isso é sempre verdade?
> **A8:** Só para função afim, nesse caso.
> **Professor:** Só para função afim?
> **A8:** Sim, porque não dá para garantir para todas. Eu acho que até quadrática vai.
> **Professor:** Então você acha que toda função quadrática não linear não passa pela origem?

> **A8:** Sim.
> **Professor:** É?
> **A8:** Sim.
> **Professor:** Vamos escrever uma função quadrática. (o professor escreve no quadro a função real $f(x) = x^2$) e pergunta: Passa na origem?
> **A4:** Passa. (Aula 6 de 11/02/2017)

Para estimular a reflexão nos alunos, o professor deixa o item (b) em aberto e passa para o item (c) da mesma questão, pois é por meio da reflexão que "[...] o homem examina permanentemente os fundamentos de suas próprias ações mentais e com eles medeia uma com outras, desentranhando assim suas inter-relações internas" (DAVYDOV, 1988, p. 156).

Entretanto, o professor constata que ninguém havia respondido ao item (c). Era a dificuldade de transpor a fala para a linguagem escrita ainda presente no intelecto dos alunos, pois todos responderam aos itens (a) e (b), independente de respostas corretas ou não, por necessitarem apenas de análise gráfica. Logo, eles tinham argumentos para conseguir chegar a uma resposta, certa ou errada, para o item (c). Vigotski (2001, p. 318) diz:

> Os signos da linguagem escrita e o seu emprego são assimilados [pelos alunos] [...] de modo consciente e arbitrário, ao contrário do emprego e da assimilação inconscientes de todo o aspecto sonoro da fala. A escrita leva [os alunos] [...] a agir de modo mais intelectual [...] a ter mais consciência do próprio processo da fala. Os motivos da escrita são mais abstratos, mais intelectualísticos e mais distantes do emprego. [...] Ela [a escrita] é uma álgebra da fala, uma forma mais difícil e complexa de linguagem intencional e consciente. Esta conclusão [...] nos explica por que o aluno escolar apresenta tamanha divergência entre a sua linguagem falada e a linguagem escrita; essa divergência é determinada e medida pela divergência de níveis de desenvolvimento da atividade espontânea, não arbitrária e inconsciente, por um lado, e da atividade abstrata, arbitrária e consciente, por outro [...].

Insistindo em promover a reflexão nos alunos para conduzi-los à generalização do conteúdo e à obtenção de uma resposta para o item (b), o professor tornou a perguntar qual conclusão é possível obter a partir dos itens (a) e (b). Ele ainda destacou novamente a diferença entre esses itens e disse que deixou uma dica para esta resposta no quadro, se referindo à função $f(x) = x^2$ do diálogo anterior. A14 e A2, componentes do grupo 4, iniciaram o diálogo:

> **A14:** Se ela for linear ela passa pela origem.
> **Professor:** Eu vou escrever isso.
> **A14:** E se ela passar pela origem...
> **A2:** Não implica ser linear.
> **Professor:** Como que você concluiu essa segunda parte?
> **A14:** A partir...
> **A2:** Da demonstração da função quadrática aí (se referindo à função $f(x) = x^2$ que o professor deixou no quadro).
> **Professor:** Então já deu um passo bom aqui, você percebeu que essa função não é linear mesmo passando pela origem. (Aula 6 de 11/02/2017)

A14 e A2 conseguiram associar as falas de A8 e do professor quando da discussão sobre o item (b) da questão 3 com as situações do problema e chegar à resposta. Ocorre aqui a aprendizagem do interpessoal para o intrapessoal, descrita por Vygotski (1991). A mediação do professor ativou a mediação dos signos no plano mental dos alunos, desenvolvendo funções psicológicas superiores que colaboraram para a obtenção da resposta. Vigotski (2001) caracteriza isso como o amadurecimento das funções psicológicas superiores vinculadas à escrita. Eles conseguiram utilizar o conceito de transformação linear e outros conceitos já formados, como o de função, para responder à questão que envolvia um pensamento mais complexo do que o que estava sendo desenvolvido. Temos, aqui, indícios de pensamento teórico nos alunos A2 e A14.

O item (d) pede para provar que o resultado do item (a) é válido para qualquer transformação linear, que é a conclusão solicitada no item (c). Nesse momento, o aluno precisa generalizar o resultado do item (a), ou seja, criar uma conjectura e verificar a sua veracidade por meio da formalização matemática utilizando um raciocínio que empregue o conceito de transformação linear. Inicialmente, o professor questionou como escrever a conjectura de acordo com as normas matemáticas:

> **Professor:** Passar pela origem é o que para uma função?
> **A4:** Coeficiente angular ser igual a zero.
> **Professor:** Se ela for uma função afim. E uma qualquer?
> **A7:** x e y é zero.
> **Professor:** Que em outras palavras, considerando a função $f(x) = y$, o que significa passar na origem?
> **A2:** Os dois elementos serem zero.
> **Professor:** É o que ele falou ali, x e y zero é $f(0) = 0$. Então o que é que a gente tem que provar? O zero agora é quem? (se referindo ao zero do espaço vetorial da condição que havia escrito no quadro: $F: U \to V$, transformação linear).
> **A2:** O elemento nulo.
> **Professor:** Então é provar que a imagem do vetor nulo...
> **A14:** É o vetor nulo.
> Professor escreve no quadro enquanto alunos falam: $F(0_U) = 0_V$. (Aula 6 de 11/02/2017)

Generalizar um resultado e gerar uma conjectura já não é mais tanto problema para A2, A7 e A14, sinal que a zona de desenvolvimento proximal deles sofreu interferências durante o experimento didático formativo e se desenvolveu em relação a este quesito. Iniciou-se, assim, a formalização da conjectura obtida:

> **Professor:** E agora? Tem muitas maneiras.
> **A14:** Pegar uma função qualquer aí.
> **Professor:** A gente quer provar para todas, então uma qualquer não vale.
> **A8:** Generaliza uma função linear e substitui.

> **Professor:** Aí eu provaria para todas as funções lineares, mas ainda assim... Mas ajudaria, fazer os casos particulares ajuda. E se a gente utilizasse as propriedades de espaços vetoriais?
> **A8:** Pode ser também.
> **Professor:** Pode ser?
> **A8:** Pode.
> **Professor:** Vou começar indicando. Quais são as propriedades de transformação linear que a gente tem?
> Aluno A2 cita as propriedades e o professor as escreve: $F(a+b) = F(a) + F(b)$ e $F(\alpha a) = \alpha F(a)$.
> **A2:** Se α for zero...
> **Professor:** Se α for zero? Vamos tentar?
> A2 fala a resolução e o professor escreve no quadro perguntando a justificativa dos cálculos aos alunos: $F(0 \cdot a) = 0F(a)$, $F(0_U) = 0_V$.
> **Professor:** Então provou não foi? (Aula 6 de 11/02/2017)

A2 revelou indícios de um pensamento teórico capaz de utilizar o conceito de transformação linear na criação e formalização de conjecturas, mostrando possuir um raciocínio matemático bem estruturado.

Com o intuito de interferir na zona de desenvolvimento proximal dos alunos, de modo a ampliar a visão deles sobre as formas de pensar em um mesmo problema utilizando argumentos matemáticos distintos, o professor, após questionar se alguém via outra possibilidade de resposta e obtendo uma resposta negativa ao seu questionamento, mostrou outra possibilidade de provar a questão, utilizando a propriedade relacionada com a soma, conforme se vê na Figura 18.

Figura 18 – Solução alternativa para o item (d) da questão 4 da Tarefa 4

$$
\begin{aligned}
&F(a+b) = F(a) + F(b), \quad \text{fazendo } a = b = 0_U \\
&F(0_U + 0_U) = F(0_U) + F(0_U) \\
&F(0_U) = 2F(0_U) \\
&0_V = 2F(0_U) - F(0_U) \\
&F(0_U) = 0_V
\end{aligned}
$$

Fonte: Obtida pela autora durante o experimento didático formativo.

A formalização de conjeturas, ou demonstração de propriedades, pode ser muito difícil para os alunos, pois requer deles um raciocínio muito apurado matematicamente, com vários conceitos bem construídos. Entretanto, com uma boa mediação, os alunos conseguem fazer demonstrações com mais tranquilidade, desde que o conceito principal esteja bem estruturado.

Como A2 e A14 já mostravam indícios de pensamento teórico quanto ao conceito de transformação linear, com a resolução deles, feita no quadro, para os itens (e) e (f) da questão 5 (Figura 19), estes indícios aumentam, pois eles conseguiram associar o conceito formado com o conteúdo de números complexos, fazendo as conexões necessárias para formalizar a função rotação e provar que ela é linear. Eles mostraram suas habilidades em generalizar o conteúdo matemático, gerando uma conjectura, e em executar sua formalização, utilizando o conceito de transformação linear.

Figura 19 – Resposta de A2 e A14 aos itens (e) e (f) da questão 5 da Tarefa 4

e) $F: C - C \quad | \quad F(z) = zi$

$F(z) = (a + bi)i$

$F(z) = ai + bi^2$

$F(z) = -b + ai$

f) $F(z_1 + z_2) = (z_1 + z_2)i = z_1 i + z_2 i = F(z_1) + F(z_2)$

$F(kz) = kzi = kF(z)$

Fonte: Obtida pela autora durante o experimento didático formativo.

A avaliação aplicada no final do experimento didático formativo oferece, também, informações do desenvolvimento do plano interior das ações dos alunos, possibilitando "o aprimoramento, a ampliação e o aprofundamento de conhecimentos e habilidades e, desta forma, o desenvolvimento das capacidades cognoscitivas" (LIBÂNEO, 2013, p. 218). Além disso, transforma o aluno em seus aspectos sociais e culturais, proporcionando uma nova visão de mundo e gerando cidadãos mais preparados para as exigências da sociedade, como afirma Libâneo (2013, p. 217):

> Ao se comprovar sistematicamente os resultados do processo de ensino, evidencia-se ou não o atendimento das finalidades sociais do ensino, de preparação dos alunos para enfrentarem as exigências da sociedade, de inseri-los no processo global de transformação social e de proporcionar meios culturais de participação ativa nas diversas esferas da vida social. (LIBÂNEO, 2013, p. 217)

O instrumento utilizado para esta avaliação foi uma tarefa (Tarefa 5 – Quadro 12) elaborada em conformidade com os pressupostos davydovianos, visando verificar a capacidade dos alunos em utilizar o conceito de transformação linear para solucionar problemas, pois, como Libâneo (2013, p. 221) afirma, "[...] as provas escritas e outros instrumentos de verificação são meios necessários de obtenção de informação sobre o rendimento dos alunos". A referida atividade foi aplicada de forma individual e sem consulta para verificar o nível de desenvolvimento dos alunos.

Buscando compreender o nível de criatividade dos alunos quanto à utilização do conceito de transformação linear, foi solicitado que eles criassem, na questão 1 (Tarefa 5 – Quadro 12), uma transformação linear e, na questão 2, uma que não fosse linear, comprovando que ambas as funções eram assim classificadas. Davydov (1988) ressalta que o potencial de criatividade da pessoa está associado à essência da personalidade humana, assim, compreender o nível dessa criatividade significa compreender o nível do desenvolvimento integral do aluno, como proposto pelo autor.

Todos os alunos conseguiram exibir tais transformações e mostrar suas classificações. Muitos basearam em transformações que foram utilizadas durante o experimento, como as funções afim e linear, outros conseguiram pensar em funções diferentes, fazendo outras conexões em seu sistema conceitual, revelando ainda mais a criatividade. Nas Figuras 20 e 21 podem-se ver duas respostas para estas questões, mostrando que os alunos A9 e A10 apresentam indícios de pensamento teórico em relação ao conceito de transformação linear, pois eles conseguiram utilizá-lo em uma questão que os desfiava a muito mais que apenas verificar se uma transformação é linear ou não, eles precisavam, primeiramente, criar essas funções e depois comprovar o que estavam afirmando.

Figura 20 – Resposta de A9 para as questões 1 e 2 da Tarefa 5

1) $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad F(x) = 5x$

Soma: $F(x_1 + x_2) = 5(x_1 + x_2) = 5x_1 + 5x_2 = F(x_1) + F(x_2)$

Produto de α: $\alpha F(x) = F(\alpha x) = 5(\alpha x) = (5\alpha)x = \alpha(5x) \Rightarrow \alpha(5x) = \alpha F(x)$

Tem elemento neutro, admite inverso – oposto, pode ser escrito na forma matricial.

2) $G: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$

$G(x) = \sqrt{x} \Rightarrow D = \mathbb{R}_+$

Não é transformação linear, pois o domínio tem restrição.

Fonte: Obtida pela autora durante o experimento didático formativo.

Figura 21 – Resposta de A10 para as questões 1 e 2 da Tarefa 5

1) $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $A(x) = 2x$ sendo um espaço vetorial, provemos que

$$A(x + y) = 2(x + y) = 2x + 2y = A(x) + A(y)$$

$$A(\alpha x) = 2(\alpha x) = (2x)\alpha = \alpha A(x)$$

2) $A: Z^* - Z^*$ tal que $A(x) = 2x + b$ com $b \neq 0$

Não é linear pois o domínio e a imagem não oferecem o elemento nulo logo não são espaços vetoriais e como $b \neq 0$, $A(x + y)$ não é válido.

Fonte: Obtida pela autora durante o experimento didático formativo.

A questão 3 desta tarefa (Tarefa 5) retomava à utilização de transformação linear apresentada aos alunos, no início do experimento, como forma de motivação para a aprendizagem. Agora eles já tinham ferramentas necessárias para compreender melhor o problema e responder ao que se perguntava nos itens. O enunciado do problema tratava a transformação linear com duas representações diferentes, as suas formas algébrica e matricial, podendo os alunos utilizar qualquer uma das duas para responder os itens. Com esta questão visava-se, além da verificação da utilização conceito, a verificação do nexo estabelecido entre transformação linear e matriz (Figura 2), verificando a capacidade dos alunos em transitar entre o conceito transcrito no modelo algébrico/literal por eles desenvolvido nas fases de modelação e transformação do modelo e a nova forma de representação desse modelo desenvolvida na questão 2 da Tarefa 4 (Quadro 12).

Dentre as várias respostas, têm-se as respostas de A4 utilizando a forma algébrica (Figura 22) e A9 utilizando a forma matricial (Figura 23). Em ambos os casos, percebe-se o uso do conceito como ferramenta mental.

Figura 22 – Resposta de A4 para a questão 3 da Tarefa 5

a) $C(0,0) = (1 \cdot 0 + 1 \cdot 0,\ \ 1 \cdot 0 \cdots 1 \cdot 0) = 0$

b) $C(a + b, c + d) =$

$= [(a + b) + (c, d), a + b, (a + b) + (c + d), c + d, a + b, (a + b) + (c + d), a + b, c + d]$

$= [(a + c) + (b + d), a + b, (a + c) + (b, d), c + d, a + b, (a + c) + (b + d), a + b, c + d]$

$= (a + c, a, a + c, c, a, a + c, a, c) + (b + d, b, b + d, d, b, b + d, b, d)$

$= C(a, c) + C(b, d)$

$C(kx, ky) = (kx + ky, kx, kx + ky, ky, kx, kx + ky, kx, ky)$

$= [k(x + y), kx, k(x + y), ky, kx, k(x + y), kx, ky]$

$= k(x + y, x, x + y, y, x, x + y, x, y) = kC(x, y)$

Fonte: Obtida pela autora durante o experimento didático formativo.

Figura 23 – Resposta de A9 para a questão 3 da Tarefa 5

a) $C(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $C(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + y_1 + y_2 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 + y_1 + y_2 \\ y_1 + y_2 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 + y_1 + y_2 \\ x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_1 \\ x_1 + y_1 \\ y_1 \\ x_1 \\ x_1 + y_1 \\ x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 + y_2 \\ x_2 \\ x_2 + y_2 \\ y_2 \\ x_2 \\ x_2 + y_2 \\ x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = C(x_1, y_1) + C(x_2, y_2)$$

$$\alpha C(x,y) = C(\alpha x, \alpha y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x + \alpha y \\ \alpha x \\ \alpha x + \alpha y \\ \alpha y \\ \alpha x \\ \alpha x + \alpha y \\ \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x + y \\ x \\ x + y \\ y \\ x \\ x + y \\ x \\ y \end{pmatrix} = \alpha C(x,y)$$

Fonte: Obtida pela autora durante o experimento didático formativo.

Visando resgatar aspectos históricos do desenvolvimento do conceito de transformação linear, discutidos durante a apresentação do lógico-histórico no início do experimento didático formativo, e buscando estabelecer o nexo entre este conceito e o de determinante (de acordo com a Figura 2), a questão 4 da Tarefa 5 solicitava a decisão do aluno quanto à função determinante de uma matriz de ordem dois ser ou não linear. Houve divergência nas respostas, porém, em ambos os casos viu-se expressa a utilização do conceito.

Nos casos em que a resposta foi afirmativa, o erro surgiu no desenvolver dos cálculos para averiguação da veracidade ou não da transformação ser linear, bem como na generalização do conteúdo sem a formalização do mesmo, ou seja, sem a comprovação matemática via demonstração, como se pode ver na Figura 24. Isso mostra a importância e a necessidade de formalização do conteúdo para o desenvolvimento do pensamento matemático, pois sem ela pode-se gerar equívocos conceituais, consequentemente, conduzir o aluno a conclusões equivocadas e a um pensamento com inverdades.

Figura 24 – Resposta de A3 para a questão 4 da Tarefa 5

É linear, pois todos os requisitos são preenchidos. A partir do determinante é possível chegar à matriz e a partir da matriz é possível chegar ao determinante. A matriz da soma é igual à soma das matrizes, de forma análoga acontece com o determinante.

Fonte: Obtida pela autora durante o experimento didático formativo.

Os que responderam corretamente utilizaram o método do contraexemplo, conforme a resposta de A8 na Figura 25, exibindo duas matrizes que não satisfazem a propriedade da soma expressa no conceito de transformação linear, ou seja, que $T(A+B)$ é diferente de $T(A)+T(B)$, com $A, B \in M(2 \times 2)$, especificamente, mostraram que $\det(A+b) \neq \det(A) + \det(B)$.

Na Figura 25, vê-se o desenvolvimento mental de A8 que em outra situação já descrita não concordava plenamente com a aplicação deste método e aqui o utiliza em sua resposta, dando indícios de apropriação desse modo de pensar a Matemática. Constata-se que A8 refletiu sobre suas ações e conseguiu abstrair o modo de provar por contraexemplo. Há também indício de pensamento teórico quanto ao conceito de transformação linear, pois ele o conseguiu utilizar e ainda estabeleceu o nexo entre este conceito e o conceito de determinante.

Figura 25 – Resposta de A8 para a questão 4 da Tarefa 5

Assumindo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, $\alpha = \frac{1}{2}$.

Temos:

$$T(A+B) = \det(A+B) = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 7 \end{vmatrix} = -14$$

$$T(A) + T(B) = \det A + \det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -2 + (3-8) = -7$$

Pelo fato de não gozar da propriedade é possível concluir que não será uma função linear.

Fonte: Obtida pela autora durante o experimento didático formativo.

Visando também averiguar e compreender novas conexões no sistema de conceitos dos alunos, propôs-se a questão 5, última questão da Tarefa 5, que associava o conceito de transformação linear ao conceito de sequência. Verificou-se que esta conexão está bem estabelecida na maioria dos alunos, pois eles conseguiram mostrar que a aplicação do problema era de fato linear. A Figura 26 oferece um exemplo de uma resposta obtida.

Figura 26 – Resposta de A10 para a questão 5 da Tarefa 5

Sendo $T(u_n)$ um espaço vetorial logo temos

$$T(\alpha u_n) = \alpha T(u_n)$$

$$T(\alpha u_n) = (\alpha u_1, \alpha u_2) = \alpha(u_1, u_2) = \alpha T(u_n)$$

$$T(u_n + w_n) = (u_1 + w_1, u_2 + w_2) = (u_1, u_2) + (w_1, w_2) = T(u_n) + T(w_n)$$

Logo, T é uma transformação linear.

Fonte: Obtida pela autora durante o experimento didático formativo.

Nessa figura, tem-se mais indícios de que A10 formou o conceito de transformação linear e o usa como ferramenta para pensar em outras situações que exigem a utilização do conceito. Tem-se também que sua rede conceitual estabeleceu novos nexos e, assim, há indícios de que o pensamento por ele utilizado é o teórico.

Pensar teoricamente é utilizar o conceito construído por meio de abstrações e generalizações para pensar nas questões/problemas que surgem e que exigem do indivíduo uma posição/resolução com respaldo científico (DAVYDOV, 1988). Um experimento didático formativo, como o descrito neste trabalho, não é suficiente para comprovar que um aluno age com pensamento teórico, mas ele nos dá indícios de tal ato, como se constatou no desenvolvimento das tarefas de estudo. Por isso, é possível afirmar que alguns alunos tiveram suas zonas de desenvolvimento proximal interferidas por este experimento, sofrendo elevação do seu nível, podendo até ter se tornado uma zona de desenvolvimento real em relação a alguns conceitos discutidos. O fato é que não se pode afirmar que todos os alunos mostraram indícios de pensamento teórico, em alguns deles sim, mas em outros se constata que necessitam de mais tempo para o amadurecimento das funções psíquicas que conduzem à utilização do conceito como instrumento do pensamento.

Porém, em todos eles nota-se uma postura diferente frente à forma de ver e de pensar a Matemática, em específico a Álgebra Linear, vendo que os conceitos inseridos nesta disciplina não estão soltos nem desconectados de outros conceitos matemáticos que eles já estudaram, o que gera mais significado e sentido no processo de ensino-aprendizagem da Álgebra Linear.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa objetivou compreender e analisar as contribuições e os desafios da teoria histórico-cultural, particularmente, da teoria do ensino desenvolvimental de V. V. Davydov, para a aprendizagem do conceito de transformação linear por alunos do curso de Bacharelado em Engenharia Elétrica do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás (IFG) – Câmpus Goiânia. O problema que norteou a realização da pesquisa foi: que repercussões teriam, no processo de formação de conceitos pelos alunos, o ensino do conceito de transformação linear fundamentado na teoria histórico-cultural, em específico, na teoria do ensino desenvolvimental de Davydov?

Ao longo deste trabalho, descreveu-se a investigação realizada com o intuito de verificar a possibilidade de uma metodologia de ensino para o conceito de transformação linear, contido na disciplina Álgebra Linear, que possibilitasse ao aluno a formação e o desenvolvimento de um pensamento teórico, no qual o conceito realmente fizesse sentido e fosse utilizado como instrumento para pensar tanto em outras questões da própria Álgebra Linear quanto de outras disciplinas inerentes ao seu curso de graduação.

Essa metodologia de ensino fundamentou-se nos pressupostos da teoria histórico-cultural a partir de L. S. Vygotsky e seus seguidores, particularmente, da teoria do ensino desenvolvimental formulada por V. V. Davydov e foi implementada e analisada em uma turma de Álgebra Linear do curso de Bacharelado em Engenharia Elétrica do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – Câmpus Goiânia, na qual constatou-se viável para a melhoria da aprendizagem dos alunos com indícios de modificações qualitativas na forma de pensar dos estudantes.

A metodologia de pesquisa utilizada para a pesquisa de campo foi um experimento didático formativo, que, segundo Davydov (1988), é o método mais eficiente do pesquisador intervir ativamente nos processos mentais que ele estuda por meio da organização e reorganização de novos programas de ensino e dos procedimentos necessários para concretizá-los. Esse é, assim, um método que impulsiona o desenvolvimento. Mesmo com raras bibliografias disponíveis e de difícil acesso, o levantamento do lógico-histórico do conceito de transformação linear resultou no lógico-histórico de toda a disciplina Álgebra Linear, pois, para chegar ao conceito propriamente dito, foi preciso percorrer todo o contexto que conduziu os estudiosos dos séculos passados a sentirem a necessidade de transformações com as características de uma transformação linear. Para isso, passou-se pelo desenvolvimento dos conceitos de matriz, determinante, sistema linear e espaço vetorial. Assim, o lógico-histórico revelou as conexões internas do conceito de transformação linear, as quais estão elencadas na Figura 2 e serviram para estruturar o sistema de conceitos dos alunos.

Com a análise do lógico-histórico pôde-se desvelar o aspecto nuclear do conceito de transformação linear e, assim, dar início ao planejamento do experimento didático formativo. Por meio dessa análise, obtiveram-se as seguintes ações mentais que foram contempladas no planejamento e na execução da atividade de estudo: relembrar, observar, refletir, analisar, criticar, comparar, sintetizar, identificar, relacionar, distinguir, aplicar o conceito e generalizar.

A análise do contexto sociocultural da turma possibilitou a compreensão da realidade social, cultural e educacional dos alunos, possibilitando o levantamento de aspectos que contribuíram para despertar neles o desejo e a necessidade por aprender o conceito e, assim, possibilitou a elaboração de tarefas de estudo que conduzissem os alunos à formação do conceito. Esse contexto sociocultural evidenciou que boa parte dos alunos são trabalhadores que estudam em um curso noturno com aulas de segunda a sexta-feira e no sábado pela manhã, fato que influenciou no desenvolvimento do experimento, uma vez que aos sábados eles já estavam cansados de uma semana densa de trabalho e estudos e chegavam atrasados em, pelo menos, quinze minutos, interferindo no tempo previsto para a execução das tarefas. Isso levou à prorrogação do tempo previsto para o experimento em uma aula.

A avaliação diagnóstica indicou, acerca do nível de desenvolvimento real dos alunos sobre os conceitos de matriz, função e espaço vetorial, considerados aqui como os pré-requisitos para a formação do conceito de transformação linear, que o pensamento dos alunos está, predominantemente, no modo empírico, fato que conduziu a uma interferência pedagógica do professor colaborador com a finalidade de intervir na ZDP dos alunos e elevar o seu nível para um patamar em que fosse possível a realização do experimento, sem maiores contratempos relacionados a esses conceitos. Esta interferência pedagógica se deu pela correção e discussão da avaliação, buscando compreender o desenvolvimento mental dos alunos em cada problema proposto por meio de suas falas que expressavam o que eles sabiam sobre cada conceito.

A formação acadêmica do professor específica em Álgebra favoreceu as boas condições de execução do experimento no que tange à necessidade exposta por Davydov (1988) de o professor ter domínio da ciência que ensina, pois em nenhum momento houve problemas com o fato do professor não possuir o conceito formado do objeto em questão, nem em fazer as devidas conexões com outras áreas da Matemática e fora da Matemática em que se faz uso do conceito de transformação linear, muito menos com a necessidade de o professor pensar de acordo com normas do pensamento matemático. Salienta-se que, sem esta formação específica do professor, tais condições favoráveis poderiam ser alteradas dependendo da forma como o professor vê a Álgebra Linear enquanto disciplina, pois, por ser ela uma disciplina utilizada em várias áreas da Matemática, um professor com formação específica em outra área, por exemplo, em Geometria, a vê e concebe de forma diferente, sendo, assim, inevitável que este experimento seria desenvolvido sobre outras condições talvez não tão favoráveis como as que ocorreram.

Apesar disso, a formação pedagógica do professor é mínima, restrita ao seu curso de graduação e, mesmo ele não tendo medido esforços para apreender a teoria do ensino desenvolvimental, os seis meses de estudo não lhe foram suficientes para uma aprendizagem da teoria. Alguns pressupostos foram interiorizados por ele, como a importância do aluno construir seu conhecimento por meio de um processo investigativo pautado no modo de pensar da matemática; porém, outros não.

Devido a isso e também à sua formação pedagógica ter sido fundamentada na lógica formal, bem como sua formação específica e, consequentemente, toda a sua prática profissional ser concebida nessa ótica, em um momento específico, pôde-se constatar uma dificuldade enfrentada devido a esses fatos relatados, que foi o momento de transição entre as ações de aprendizagem modelação e transformação do modelo. Ao criarem um modelo para o conceito de transformação linear, nenhum grupo conseguiu criar um modelo completo que contivesse todas as relações universais levantadas. Nesse momento, o professor deveria ter retomado a ação de modelação para que os alunos revessem suas ações e suprissem as falhas surgidas, para só depois transformar esse modelo com todas as relações do conceito. Entretanto, ele seguiu a aula analisando os modelos propostos e, a partir deles, conduziu os alunos à transformação do modelo, mesmo não havendo nenhum modelo completo para ser transformado. Apesar dessa falha na execução das ações davydovianas, constatou-se que alguns alunos conseguiram formar e utilizar o conceito como instrumento do pensamento.

A forma de o aluno lidar com os conceitos algébricos foi transformada e eles conseguiram relacionar o conceito de transformação linear com os conceitos de função, matriz, espaço vetorial e determinantes, dentre outros. Esse fato pode ser constatado na análise das categorias que constituem a análise das tarefas realizadas pelos alunos, as quais lhes solicitavam a resolução de problemas que envolviam o objeto transformação linear e os demais objetos matemáticos citados.

Houve indícios de formação e de desenvolvimento do pensamento teórico em relação ao conceito de transformação linear, pois os alunos conseguiram utilizar este conceito em situações particulares que exigiam deles um pensamento matemático condizente com o uso da transformação linear enquanto instrumento desse pensamento, como, por exemplo, a resolução do problema envolvendo teoria de códigos corretores de erros, utilizado como problema motivador para a aprendizagem do conceito, o qual envolvia um espaço vetorial de dimensão oito e a representação de uma transformação linear em sua forma matricial.

Ocorreram mudanças qualitativas quanto à independência cognoscitiva dos alunos. No início do experimento, eles estavam muito presos ao professor, necessitando dele para a mediação cognitiva. Com o passar das aulas, eles já se sentiam capazes de pensar e desenvolver esse pensamento sem o auxílio direto do professor, conseguindo resolver as tarefas de forma independentes, sendo mais necessárias as discussões nos grupos que sua mediação pedagógica. Entretanto, esta independência não foi total, pois os alunos estão imersos em um sistema educacional pautado pela lógica formal em que o professor é o detentor do conhecimento e eles os receptores. Mudar isso completamente em um conjunto de treze aulas é impossível, porém, como foi realizado, procurou-se mostrar aos alunos que eles podem construir seu conhecimento por meio de um processo investigativo com a mediação do professor, sendo eles os agentes diretos desta construção.

Houve indícios de formação e desenvolvimento do pensamento matemático que propiciou um novo olhar e uma nova forma de pensar a Álgebra Linear, consequentemente, a Matemática. Quanto aos alunos, não se pode afirmar que todos eles, mas uma boa parte, sim, passou a concebê-la como um conjunto articulado de conceitos que necessitam uns dos outros para a sua estruturação, fato que não ocorria antes, pois eles viam cada conceito de forma isolada, efeito de um ensino tradicionalmente pautado na lógica formal.

Quanto à forma de pensar a Matemática, um fato que se destacou foi a demonstração por contraexemplo, tão comum nesta ciência, mas desconhecida pelos alunos. Por meio do experimento, eles tiveram contato pela primeira vez com esta forma de pensar, passando a utilizá-la como ferramenta para a verificação de afirmações matemáticas. Outro fato de destaque neste quesito foi a forma como os alunos lidaram com a resolução dos problemas contidos nas tarefas finais do experimento (Tarefas 4 e 5). Nelas, eles já conseguiam compreender melhor a estruturação desses problemas e passaram a utilizar um pensamento lógico que fazia o uso de instrumentos adquiridos durante o experimento, como o conceito de transformação linear e seus pré-requisitos, sendo mais fácil, nessas tarefas, a execução dos processos de formalização e generalização do conteúdo.

Averiguou-se, no curso pesquisado, uma realidade que não se distingue muito do que apontam as pesquisas sobre dificuldade de aprendizagem matemática. Exemplo disso se constatou, a partir das observações das aulas, que o ensino de Álgebra Linear se caracteriza, predominantemente, pelo privilégio a representações abstratas dos objetos científicos, enfatizando na aprendizagem a definição, a comparação e a memorização mecânica, em detrimento dos aspectos mais profundos e essenciais dos conteúdos ensinados.

Uma dificuldade encontrada refere-se ao uso dos signos, por exemplo, em escrever uma função ou mesmo um conjunto de acordo com as normas da escrita matemática. Outra dificuldade foi o pouco tempo para a execução do experimento, diante das deficiências dos conhecimentos algébricos que os alunos apresentaram; dificuldades estas advindas de aprendizagens passadas que não conduziram os alunos ao desenvolvimento de um pensamento matemático teórico. Deste tempo curto do experimento resulta, também, a dificuldade em lidar com o pensamento dos alunos construído na lógica formal, pois eles não estavam acostumados a pensar dialeticamente e isso se tornou um dificultador, sendo necessário trabalhar o modo de pensar dos alunos para que eles compreendessem a importância e a necessidade de pensar diferente. Como o período do experimento foi relativamente curto para trabalhar isso com mais intensidade, tal fato dificultou também o desenvolvimento da atividade de estudo, necessitando, muitas vezes, da mediação do professor na condução da forma de pensar.

A condição fundamental para a formação do pensamento teórico, na perspectiva histórico-cultural, assumida na pesquisa, pautava-se na capacidade dos alunos estudarem coletivamente, de verbalizarem seu pensamento e interagirem com os mais e menos experientes, a fim de que todos desenvolvessem o pensamento cognitivo ao se apropriarem dos conceitos científicos. Isso, sem dúvida, se constituiu em um dos grandes desafios enfrentados. No início das aulas do experimento, os alunos relutaram em trabalhar em grupos, somente depois que eles perceberam que sem a colaboração dos colegas eles não iriam conseguir responder à tarefa é que eles começaram a efetivamente trabalhar em grupos. Com o decorrer das aulas, essa dificuldade foi sendo superada, de forma que, ao final do experimento, trabalhar em grupos já não era mais um empecilho.

Os resultados mostraram que o curso do desenvolvimento do conceito científico sob as condições do processo educacional constitui uma forma original de colaboração sistemática entre o professor e o aluno, na qual ocorre o amadurecimento das funções psicológicas superiores. Com condições de ensino adequadas e intencionalmente planejadas, é possível obter o surgimento e o desenvolvimento do pensamento teórico no plano interior das ações mentais. Pensar teoricamente é, para Davydov (1988), utilizar conceitos científicos para pensar nas situações da realidade circundante e interferir nessa realidade, transformando-a e transformando a si mesmo. Neste ponto, o conceito é muito mais que uma informação sobre um objeto, é um conhecimento que possibilita o aprimoramento da ação humana sobre os objetos.

O conceito de transformação linear, quando interiorizado pelo aluno, se torna uma das ferramentas mentais para pensar a Álgebra Linear e os conteúdos das áreas específicas que dependem dele para sua estruturação. As conexões conceituais estabelecidas a partir desse novo conceito amplia o campo de atuação do pensamento do aluno e lhe permite ir do geral para o particular, utilizando o conceito de transformação linear para resolver problemas específicos.

Entretanto, essa forma de pensar a realidade não é adquirida instantaneamente logo após um grupo pequeno de aulas, mas vai se formando à medida que as atividades de estudo objetivem a formação do pensamento teórico. Por isso, não é possível afirmar que todos os sujeitos desta pesquisa adquiriram tal modo de pensar, nem que todos chegaram ao mesmo nível de desenvolvimento. O que se pode dizer é que houve indícios de pensamento teórico quanto ao conceito de transformação linear na maioria desses sujeitos, conforme descrito e analisado nas categorias de análise, e que a zona de desenvolvimento proximal de cada aluno sofreu interferências durante todo o experimento, com muitos conteúdos indo para o nível de desenvolvimento real, como os conceitos de função, domínio, contradomínio, imagem e espaço vetorial.

Como possibilidades de pesquisas futuras estruturadas a partir desta pesquisa, tem-se a elaboração de atividades de estudos que envolvam os desdobramentos do conceito de transformação linear, como suas propriedades, proposições e teoremas. Tem-se também a elaboração de atividades de estudos relacionadas com outros conceitos da disciplina Álgebra Linear, quiçá de todos os conceitos que a constituem, criando um material didático que sirva de apoio ao professor para a elaboração e a execução de aulas fundamentadas na teoria do ensino desenvolvimental de Davydov. Com um pouco mais de ousadia e determinação, pode-se pensar em estruturar outras disciplinas da Educação Superior fundamentadas nessa teoria, buscando desenvolver uma formação integral dos alunos com um pensamento científico que lhes possibilite pensar criticamente e com criatividade para transformar o seu cotidiano.

Em suma, pode-se concluir que é viável a utilização da teoria do ensino desenvolvimental, uma teoria desenvolvida para uso no Ensino Fundamental, no processo de ensino-aprendizagem do conceito de transformação linear, consequentemente, nos processos de ensino-aprendizagem da disciplina Álgebra Linear, na Educação Superior e que é possível conduzir os alunos na formação de conceitos científicos fundamentados na lógica dialética, os quais são estruturados com consistência e sentido para os alunos e não desarticulados como na lógica formal. Assim, esta pesquisa pôde contribuir com um novo olhar sobre a forma de ensinar e aprender Álgebra Linear, com uma possibilidade de mudanças na forma tradicional de ensino desta disciplina, mostrando outro caminho exequível de ser seguido pelo professor, com possibilidades de desenvolver no aluno uma forma diferente de ver e de pensar a Matemática, fazendo surgir o pensamento teórico, originado na formação de conceitos científicos.

REFERÊNCIAS

AKHUTINA, Tatiana. A. R. Luria: uma trajetória de vida. In: LONGAREZI, Andréa Maturano; PUENTES, Roberto Valdés (Org.). *Ensino Desenvolvimental*: vida, pensamento e obra dos principais representantes russos, 1. 2. ed. Uberlândia: EDUFU, 2015, p. 123-147.

ANTON, H; RORRES, C. *Álgebra Linear com Aplicações.* Tradução de Claus Ivo Doering. 8ª edição. Porto Alegre: Bookman, 2001.

AQUINO, Orlando Fernández; CUNHA, Neire Márcia da. Concepção Didática da Tarefa de Estudo: dois modelos de aplicação. In: BARVOSA, V. M.; MILLER, S.; MELLO, S. A. (Org.). *Teoria histórico-cultural*: questões fundamentais para a educação escolar. Marília: Oficina Universitária; São Paulo: Cultura Acadêmica, 2016, p. 175-200.

ARREBOLA, Odilthom Elias da Silva. *Uma sequência didática sobre transformações lineares em um ambiente de geometria dinâmica*. 2013. 2019 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)-Universidade Bandeirante Anhanguera, São Paulo, 2013.

BARBOSA, Walmir; PARANHOS, Murilo Ferreira; LÔBO, Sônia Aparecida (Orgs). *A Rede Federal de Educação Profissional, Científica e Tecnológica e o IFG no tempo*: conduzindo uma recuperação histórica até os anos 1990. Coleção Instituto Federal de Goiás: história, reconfigurações e perspectivas; 1. Goiânia: IFG, 2015.

BARBOSA, Walmir; JÚNIOR, Geraldo Coelho de Oliveira; BEZERRA, Daniella de Souza. Marcos e datas da história da educação profissional e tecnológica no Brasil. In: BARBOSA, Walmir; PARANHOS, Murilo Ferreira; LÔBO, Sônia Aparecida (Orgs). *A Rede Federal de Educação Profissional, Científica e Tecnológica e o IFG no tempo*: conduzindo uma recuperação histórica até os anos 1990. Coleção Instituto Federal de Goiás: história, reconfigurações e perspectivas; 1. Goiânia: IFG, 2015.

BERTOLINI, Marcel Vinhas. *Aspectos da Matemática Chinesa*: O "Nove" Capítulos. Universidade de São Paulo, 2007. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~cpq/main/arquivos/outros/Marcel%20Vinhas%20Bertolini%20resumo2.pdf>. Acesso em: 10 out. 2016.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. *Investigação qualitativa em educação*: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 1994.

BOYER, Carl B. *História da Matemática*. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Bücher, Editora da Universidade de São Paulo, 1974.

BRASIL. Decreto n.7.566, de 23 de setembro de 1909. Cria nas capitais dos Estados a Escolas de Aprendizes Artífices, para o ensino profissional primário e gratuito. *Diário Oficial da União*, Poder Executivo, Rio de Janeiro, DF, 26 set. 1909. Seção 1, p. 6975.

BRASIL. Decreto-Lei n.4.127, de 25 de fevereiro de 1942. Estabelece as bases de organização da Rede Federal de estabelecimentos de ensino industrial. *Diário Oficial da União*, Poder Executivo, Rio de Janeiro, DF, 27 fev. 1942. Seção 1, p. 2957.

______. Lei nº 4.759, de 20 de agosto de 1965. Dispõe sobre a denominação e qualificação das Universidades e Escolas Técnicas Federais. *Diário Oficial da União*, Poder Executivo, Brasília, DF, 24 ago. 1965. Seção 1, p. 8554.

______. Decreto de 22 de março de 1999. Dispõe sobre a implantação do Centro Federal de Educação Tecnológica do Ceará. *Diário Oficial da União*, Poder Executivo, Brasília, DF, 23 mar. 1999. Seção 1, p. 3.

______. Lei n.11.892, de 29 de dezembro de 2008. Institui a Rede Federal de Educação Profissional, Científica e Tecnológica, cria os Institutos Federais de Educação, Ciência e Tecnologia, e dá outras providências. *Diário Oficial da União*, Poder Executivo, Brasília, DF, 30 dez. 2008. Seção 1, p.1.

CARDOSO, Valdinei Cezar. *Ensino e aprendizagem de álgebra Linear*: uma discussão acerca de aulas tradicionais, reversas e de vídeos digitais. 2014. 204 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática)-Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2014.

CELESTINO, Marcos Roberto Barbosa. *Ensino-aprendizagem da álgebra linear*: as pesquisas brasileiras na década de 90. 2000. 113 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)-Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2000.

CHAIKLIN, Seth. Developmental teaching in upper-secondary school. In: HEDEGAARD, Mariane; LOMPSCHER, Joachim (Ed.). *Learning activity and development*. Aarhus (Dinamarca): Aarhus University Press, 1999.

COIMBRA, Jarbas Lima. *Alguns aspectos problemáticos relacionados ao ensino-aprendizagem de álgebra linear*. 2008. 77 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas)-Núcleo Pedagógico de Apoio ao Desenvolvimento Científico, Universidade Federal do Pará, Belém, 2008.

CURSO DE BACHARELADO EM ENGENHARIA ELÉTRICA. Projeto Pedagógico de Curso. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás. Goiânia, 2016. 144 p.

DAVÍDOV, V. V. *La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico: investigación psicológica teórica y experimental*. Moscú: Editorial Progreso, 1988a.

DAVIDOV, V. V. O que é a atividade de estudo. Tradução do russo por Ermelinda Prestes. *Revista Escola inicial*. Nº. 7, 1999.

DAVÝDOV, V. V. (Ed.). *Tipos de generalización en la ensiñanza*. Habana: Editorial Pueblo y Educación, 1982.

DAVYDOV, V. V. *Problemas do ensino desenvolvimental*: A experiência da pesquisa teórica e experimental na psicologia. Tradução José Carlos Libâneo e Raquel A. M. M. Freitas, de

Problems of developmental Teaching – The experience of theoretical and experimental psychological research. Soviet Education, Ago. 1988, vol. XXX, nº. 8.

DAVYDOV, V. V. *O problema da generalização e do conceito na teoria de Vygotsky*. Texto de conferência proferida na reunião do Comitê Internacional da International Society for Cultural Research and Activity Theory. Departamento de Ciências Psiquiátricas e Medicina Psicológica da Universidade de Roma. 1992.

______. Uma nova abordagem para a interpretação da estrutura e do conteúdo da atividade. Tradução de José Carlos Libâneo a partir do texto: “A new approach to the interpretation of activity structure an content”. In: Hedegard, Mariane e Jensen Uffe Juul. *Activity theory and social practice:* cultural-historical approaches. Aarhus (Dinamarca), Aarthus University Press, 1999.

DAVYDOV, V.; MÁRKOVA, A. La concepción de la atividad de estúdio de los escolares.In: SHUARE, Marta (comp.). *La psciología evolutiva y pedagógica em la URSS*. Antología. Moscú: Editorial Progreso, 1987, p.316-337.

DORIER, Jean-Luc. A general outline of the genesis of vector space theory. *Historia Mathematica*, v. 22, 1995, p. 227-261.

______. *On the teaching of linear algebra*. Mathematics Educations Library, volume 23. New York / Boston / Dordrecht / London / Moscow: Kluwer Academic Publishers, 2002.

EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Tradução: Hygino H. Domingues. 5ª ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

FONTENELE, Francisca Cláudia Fernandes. *A sequência Fedathi no ensino da álgebra linear*: o caso da noção de base de um espaço vetorial. 2013. 93 f. Dissertação (Mestrado em Educação Brasileira)-Faculdade de Educação. Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2013.

FRANÇA, Michele Viana Debus de. *Conceitos fundamentais de álgebra linear*: uma abordagem integrando geometria dinâmica. 2007. 139 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)-Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

FREITAS, R. A. M. M. *Teoria Histórico-Cultural e Pesquisa:* o Experimento Didático como Procedimento Formativo. Texto de uso restrito para orientação de projetos de pesquisa de alunos vinculados ao Grupo de Estudos sobre Teoria Histórico-Cultural, da Linha de Pesquisa Teorias da Educação e Processos Pedagógicos, do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Católica de Goiás. Goiânia, 2007.

______. As pedagogias ativas e a Teoria Histórico-cultural da atividade de aprendizagem. Texto apresentado no *Simpósio do Congresso Internacional PBL*. 2010.

______. Aprendizagem e formação de conceitos na teoria de Vasili Davydov. In: LIBÂNEO, José Carlos; SUANNO, Marilza Vanessa Rosa; LIMONTA, Sandra Valéria (Org.). *Concepções e práticas de ensino num mundo em mudança.* Diferentes olhares para a Didática. Goiânia: CEPED/Editora PUC Goiás, 2011, p. 71-84.

FURTADO, Ana Luísa. *Dificuldades na aprendizagem de conceitos abstratos da álgebra linear*. 2014. 165 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática)-Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2010.

FURTADO, A. L. C.; CABRAL, M. A. P. Aprendizagem de conceitos da álgebra linear. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XIII. *Anais...* Recife, 2011.

GOMES, Maria Laura Magalhães. Os 80 Anos do Primeiro Curso de Matemática Brasileiro: sentidos possíveis de uma comemoração acerca da formação de professores no Brasil. *Bolema.* Rio Claro (SP), v. 30, n. 55, p. 424 - 438, ago. 2016.

GRANDE, André Lúcio. *O conceito de independência e dependência linear e os registros de representação semiótica nos livros didáticos de Álgebra Linear*. 2006. 207 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)-Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

GRASSMANN, Hermann. *Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik.* ZWEIT, im text unveränderte Auflage. Leipzig: Verlag von otto Wigand, 1878.

______. *Die Ausdehnungslehre*. Berlin: Verlag von th. chr. fr. enslin, 1862.

______. *A new branch of mathematics*: the “Ausdehnungslehre” of 1844 and other works. Translated by Lloyd C. Kannenberg. Chicago: Open Court Publishing Company, 1995

______. *Extension Theory.* History of Mathematics Sources, v. 19. Translated by Lloyd C. Kannenberg. American Mathematical Society, London Mathematical Society, 2000.

GRASSMANN, Justus. Description of the life of Hermann Grassmann by his son Justus Grassmann, probably written shortly after the death of his father, 1877. In: PETSCHE, Hans-Joachim; LEWIS, Albert C.; LIESEN, Jörg; RUSS, Steve. *From Past to Future: Grassmann's Work in Context*. Grassmann Bicentennial Conference, September 2009. Boston, USA: Birkhäuser, 2011, p. 3-8.

HEDEGAARD, Marianne; CHAIKLIN, Seth. An Introduction to Radical-local Teaching and leraning. In: HEDEGAARD, Marianne; CHAIKLIN, Seth. *Radical-local teaching and learning:* a cultural-historical approach. Aarhus (Dinamarca): Aarhus University Press, 2005. p. 33-50.

JULIO, Rejane Siqueira. *Uma leitura da produção de significados matemáticos e não-matemáticos para “dimensão”*. 2007. 118 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)-Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Campus de Rio Claro, Rio Claro, 2007.

KARRER, Monica. *Articulação entre álgebra linear e geometria*: um estudo sobre as transformações lineares na perspectiva dos registros Design Experiments de representação semiótica. 2006. 434f. Tese. (Doutorado em Educação Matemática)-Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

KATZ, Victor J. Historical ideas in teaching linear algebra. In: SWETZ, Frank; FAUVEL, John; BEKKEN, Otto; JOHANSSON, Bengt; KATZ, Victor. *Learns from the masters*. The Mathematical Association of America, 1995, p. 189-206.

KLEINER, Israel. *A history of abstract algebra*. Boston, USA: Birkhäuser, 2007.

KOPNIN, P. V. *A dialética como lógica e teoria do conhecimento*. Tradução Paulo Bezerra. Coleção Perspectivas do Homem, Volume 123. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1978.

KOZULIN, Alex. O conceito de atividade na psicologia soviética: Vygotsky, seus discípulos, seus críticos. In: DANIELS, Harry (Org.). *Uma introdução à Vygotsky*. São Paulo: Loyola, 2002.

LAZARETTI, Lucinéia Maria. Daniil Borisovich Elkonin: a vida e as produções de um estudioso do desenvolvimento humano. In: LONGAREZI, Andréa Maturano; PUENTES, Roberto Valdés (Org.). *Ensino Desenvolvimental*: vida, pensamento e obra dos principais representantes russos, 1. 2. ed. Uberlândia: EDUFU, 2015, p. 217-244.

LEONTIEV, A. N. El marxismo e la ciencia psicológica. In: LEONTIEV, A. N. *Actividad, conciencia, personalidad***.** Ciudad de la Habana: Editorial Pueblo y Educación, 1983.

______. Uma contribuição à teoria do desenvolvimento infantil. In: VIGOTSKI, L. S.; LURIA, A. R.; LEONTIEV, A. N. *Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem*. Trad. Maria de Penha Villalobos. 7. ed. São Paulo: Ícone, 2001.

______. *O desenvolvimento do psiquismo*. Trad. Rubens Eduardo Frias. 2. ed. São Paulo: Centauro, 2004.

LIBÂNEO, José C. Didática e epistemologia: para além do embate entre a didática e as didáticas específicas. In: VEIGA, Ilma P. A.; D'ÁVILA, Cristina (orgs.). *Profissão docente:* novos sentidos, novas perspectivas. Campinas: Papirus Editora, 2008.

______. Didática e trabalho docente: a mediação didática do professor nas aulas. In: LIBANEO, J. C.; SUANNO, M. V. R.; LIMONTA, S. V. (Org.). *Concepções e práticas de ensino num mundo em mudanças*: diferentes olhares para a didática. Goiânia: CEPED/Editora PUC Goiás, 2011.

______. *Didática*. 2ª Edição. São Paulo: Cortez Editora, 2013.

______. Didática e práticas de ensino e a abordagem da diversidade Sociocultural na escola In: CAVALCANTE, Maria Marina Dias.et al. *Didática e a prática de ensino:* diálogos sobre a escola, a formação de professores e a sociedade. Coleção Práticas Educativas. Fortaleza: CE: EdUECE, 2015.

______. Formação de professores e didática para desenvolvimento humano. *Educação & Realidade*. Porto Alegre, Ahead of print, 2015.

LIBÂNEO, José Carlos; FREITAS, Raquel A. Marra da Madeira. Vasily Vasilyevich Davydov: a escola e a formação do pensamento teórico-científico. In: LONGAREZI, Andréa

Maturano; PUENTES, Roberto Valdés (Org.). *Ensino Desenvolvimental*: vida, pensamento e obra dos principais representantes russos, 1. 2. ed. Uberlândia: EDUFU, 2015, p. 327-362.

LIESEN, Jörg. Hermann Grassmann's theory of linear transformations. In: PETSCHE, Hans-Joachim; LEWIS, Albert C.; LIESEN, Jörg; RUSS, Steve. *From Past to Future:* Grassmann's Work in Context. Grassmann Bicentennial Conference, September 2009. Boston, USA: Birkhäuser, 2011, p. 311-324.

LONGAREZI, Andréa Maturano; FRANCO, Patrícia Lopes Jorge. A. N. Leontiev: a vida e a obra do psicólogo da atividade. In: LONGAREZI, Andréa Maturano; PUENTES, Roberto Valdés (Org.). *Ensino Desenvolvimental*: vida, pensamento e obra dos principais representantes russos, 1. 2. ed. Uberlândia: EDUFU, 2015, p. 79-122.

MANFREDI, Sílvia Maria. *Metodologia do ensino*: diferentes concepções (versão preliminar). Campinas, 1993.

MARINS, Alessandra Senes. *Pensamento matemático avançado em tarefas envolvendo transformações lineares*. 2014. 170 f. Dissertação (Mestrado em Ciências e Educação Matemática)-Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

MARX, Karl. *Contribuição para a crítica da economia política.* Lisboa: Editorial Estampa, 1974, pp. 228-237.

MESQUITA, Aline Mota de. *Teoria dos Códigos Corretores de Erros*. 2005, 67 f. Monografia (Especialização em Matemática) – Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, Goiânia, 2005.

______. *Uma melhora das cotas de Feng-Rao e de Miura para a distância mínima de códigos definidos sobre uma variedade afim*. 2007. 77 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, Goiânia, 2007.

MIGUEL, Antonio; MIORIM, Maria Ângela. *História na Educação Metemática*: propostas e desafios. Coleção tendências em Educação Matemática. 2 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

MILIES, César Polcino. Breve história da álgebra abstrata. In: BIENAL DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, II, 2004. Salvador. *Anais*... Salvador, 2004.

MOORE, Gregory H. The axiomatization of the Linear Algebra: 1875 – 1940. *Historia Mathematica*, 22, 1995, p. 262-303.

MOURA, Manoel A. et al. A Atividade Orientadora de Ensino como Unidade entre Ensino e Aprendizagem. In: MOURA, Manoel Ariosvaldo de (Org.). *A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural*. Brasília: Liber Livros, 2010. p. 81-110.

NUNES, Marisa Fernandes. As metodologias de ensino e o processo de conhecimento científico. *Educar*, Curitiba, 9, 1993, p. 49-58.

O'CONNOR, John J.; ROBERTSON, Edmund F. *Matrices and determinants*. School of Mathematics and Statistics. University of St Andrews, Scotland. Escócia, 2016a.

Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Matrices_and_determinants.html>. Acesso em: 26 out. 2016.

O'CONNOR, John J.; ROBERTSON, Edmund F. *An overview of Babylonian mathematics*. School of Mathematics and Statistics. University of St Andrews, Scotland. Escócia, 2016b. Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Babylonian_mathematics.html>. Acesso em: 26 out. 2016.

O'CONNOR, John J.; ROBERTSON, Edmund F. *Nine Chapters on the Mathematical Art* School of Mathematics and Statistics. University of St Andrews, Scotland. Escócia, 2016c.. Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Nine_chapters.html>. Acesso em: 26 out. 2016.

O'CONNOR, John J.; ROBERTSON, Edmund F. *Abstract linear spaces*. School of Mathematics and Statistics. University of St Andrews, Scotland. Escócia, 2016d. Disponível em: <http://www-history.mcs.st andrews.ac.uk/ HistTopics/Abstract_linear_spaces.html>. Acesso em: 26 out. 2016.

OLIVEIRA, Luis Carlos Barbosa de. *Como funcionam os recursos-meta em aula de álgebra linear?* 2005. 131 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)-Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

OLIVEIRA, Viviame Cristina Almada de. *Sobre a produção de significados para a noção de transformação linear em Álgebra Linear*. 2002. 187 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)-Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Campus de Rio Claro, Rio Claro, 2002.

PADREDI, Zoraide Lúcia do Nascimento. *As "Alavancas Meta" no discurso do professor de Álgebra Linear.* 2003. 179 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)-Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003.

PEANO, Giuseppe. *Geometric Calculus - according to the Ausdehnungslehre of H. Grassmann*. 1888.

PIAGET, J. Problemas de psicologia genética. In: *Jean Piaget*. Coleção os pensadores. São Paulo: Abril Cultural, 1983, p. 209-294.

PINO, Angel. O social e o cultural na obra de Vygotsky. Educação & Sociedade. *Revista quadrimestral de Ciências da Educação.* Centro de Estudos Educação e Sociedade (CEDES), Campinas, v. 21, n. 71, jul. 2000.

PIRES, Rute da Cunha. *A presença de Nicolas Bourbaki na Universidade de São Paulo*. 2016. 369 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática)–Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2016.

PRESTES, Zoia; TUNES, Elizabeth; NASCIMENTO, Ruben. Lev Semionovitch Vigotski: um estudo da vida e obra do criador da psicologia histórico-cultural. In: LONGAREZI, Andréa Maturano; PUENTES, Roberto Valdés (Org.). *Ensino Desenvolvimental*: vida, pensamento e obra dos principais representantes russos, 1. 2. ed. Uberlândia: EDUFU, 2015, p. 57-77.

RODRIGUES, Cristiane Dias. *Uma abordagem para o estudo de sistemas lineares Integrando diferentes linguagens*. 2013. 154 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática)-Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2013.

RODRIGUES, José Renato Fialho. *Criação de um software de apoio ao ensino e à aprendizagem de álgebra linear*: Base e dimensão de um espaço vetorial. 2009. 150 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática)-Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2009.

ROSA, Elisa Zaneratto; ADRIANI, Ana Gabriela. Psicologia sócio-histórica: uma tentativa de sistematização epistemológica e metodológica. In: KAHHALE, Edna M. Peters (Org.). *A diversidade da pedagogia*. 2. ed. São Paulo: Cortez, 2006.

ROSENTAL, M. M.; STRAKS, G. M. *Categorías del materialismo dialéctico.* Distrito Federal do México: Grijalbo, 1960.

SANTOS, Leandro Teles Antunes dos. *A produção de significado das transformações lineares planas em um curso de engenharia civil*: uma sequência didática com recurso computacional associado a múltiplas representações. 2013. 131 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática)-Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2013.

SIERPINSKA, Anna; DREYFUS, Tommy; HILLEL, Joel. Evaluation of a teaching design in linear álgebra: the case os linear transformations. *Recherches em Didactique des Mathématiques*, Vol. 19, n. 1, p. 7-40, 1999.

SILVA, Allan Vicente de Macedo. *Sistemas de equações lineares*: um paralelo entre a álgebra e a geometria. 2014. 85 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)-Universidade Severino Sombra, Vassouras, 2014.

SILVA, Carlos Eduardo da. *A noção de base de um espaço vetorial é trabalhada como "ferramenta explícita" para os assuntos de ciência da computação?* 2005. 93 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)-Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

SILVA, Eliza Souza da. *Transformações Lineares em um curso de Licenciatura em Matemática: uma estratégia didática com uso de tecnologias digitais.* 2015. 198 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática)-Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2015.

SILVA, Maria Eliana Santana da. *Concepção de transformação linear por estudantes de licenciatura em matemática*. 2016. 127 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)-Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2016.

SILVA, Thais Micheli Stori da. *Sistemas lineares*: uma proposta apoiada na exploração de registros semióticos e na utilização de um recurso computacional. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)-Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2016.

SOUSA, Maria do Carmo; PANOSSIAN, Maria Lucia; CEDRO, Wellington Lima. *Do movimento lógico e histórico à organização do ensino*: o percurso dos conceitos algébricos. 1 ed. Série Educação Matemática. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2014.

SOUZA, Mariany Layne de. *Dependência e independência linear*: um estudo a respeito das dificuldades e concepções de licenciandos em matemática. 2016. 126 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática)-Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

TÁBOAS, Plínio Zornoff. Um estudo sobre as origens dos espaços vetoriais. *Revista Brasileira de História da Matemática.* Vol. 10, n.19 (abril/2010-setembro/2010), p. 1-38, 2010.

UHLIG, Frank. *Transform Linear Algebra*, Upper Saddle River: Prentice–Hall, 504 + xx p, 2002.

UHLIG, Frank. A New Unified, Balanced, and Conceptual Approach to Teaching Linear Algebra. *Linear Algebra and its Applications,* v. 361, p. 147-159, 2003.

VAZ, D. A. F. Experimentando, conjecturando, formalizando e generalizando: articulando Investigação Matemática com o Geogebra. *Educativa*, Goiânia, v. 15, n. 1, 2012, p. 39-51.

VIGOTSKI, L. S. *Pensamento e linguagem*. 2. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1989.

VIGOTSKI, L. S. *A construção do pensamento e da linguagem*. Tradução Paulo Bezerra. São Paulo: Martins Fontes, 2001.

VYGOTSKI, L. S. *A Formação Social da Mente*. Tradução José Cipolla Neto; Luís Silveira Menna Barreto e Solange Castro Afeche. 4 ed. São Paulo: Martins Fontes, 1991.

WHITEHEAD, Alfred North. *A Treatise on Universal Algebra*. Whith applications. Volume I. Cambridge: At the University Press, 1898.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Roteiro para entrevista semiestruturada com o professor

1. Sobre sua formação profissional, você pode me informar quais cursos fez (graduação, pós-graduação, formação continuada, etc.)?

2. Quanto tempo você tem de experiência profissional? E exclusivamente no ensino superior?

3. Há quanto tempo atua na rede federal de ensino? E nessa instituição?

4. Pode falar sobre como é seu cotidiano nas aulas de Matemática no Ensino Superior? (Relação dos alunos com o conteúdo da Matemática; relações dos alunos entre si; contexto da sala de aula; apoio pedagógico fornecido pelo instituto; problemas e/ou dificuldades no ensino; aprendizagem dos alunos; outros que for de seu interesse mencionar.)

5. Como você vê o papel do professor e do aluno no processo de ensino e aprendizagem de Matemática no Ensino Superior?

6. A que você atribui à boa aprendizagem do aluno? Que mudanças você identifica no pensamento e nas práticas dos alunos quando eles aprendem?

7. Quando percebe que o aluno não está aprendendo, de que forma você lida com essa situação? Como busca superar as dificuldades dos alunos?

8. Você já ministrou a disciplina de Álgebra Linear para o curso de Licenciatura em Matemática? Se sim, sabe dizer quantas vezes?

9. Como você concebe a Álgebra Linear enquanto disciplina?

10. A seu ver, quais são os problemas do ensino de Álgebra Linear?

11. A Álgebra Linear é considerada pela maioria dos alunos como uma disciplina difícil. A que você atribui esse rótulo?

12. Para você, qual a importância da Álgebra Linear para a formação do professor de Matemática?

13. Você acha que a forma do professor ensinar essa disciplina pode influenciar na aprendizagem dos alunos?

14. Qual a sua compreensão acerca do que é um “conceito”? Como chegou a essa compreensão?

15. Que conceitos da Álgebra Linear você considera fundamentais para que os alunos aprendam os conteúdos de outras disciplinas que a tenham como pré-requisito?

16. Como você ensina os conceitos de Álgebra Linear, particularmente o conceito de transformação linear? Segue alguma referência teórica para o ensino, alguma orientação metodológica de ensino? Qual o motivo dessa escolha?

APÊNDICE B – Questionário sociocultural

Nome: ____
Curso: ____

1. Sexo: ( ) Masculino ( ) Feminino

2. Idade: ________ anos

3. Estado Civil:

( ) Solteiro(a)	( ) Viúvo(a)
( ) Casado(a)	( ) União estável
( ) Separado(a)/Divorciado(a)	( ) Vivo com companheiro(a)

4. Estado de origem:
____
Município de origem:
____

5. Cidade onde mora: ____
Setor: ____

6. Com quem você mora? (se necessário, marque mais de uma opção)

( ) Pais	( ) Companheiro(a)	( ) Parentes
( ) Irmãos	( ) Filhos	( ) Amigos
( ) Cônjuge	( ) Sogros	( ) Sozinho(a)

7. Atualmente você:
( ) Apenas estuda ( ) Trabalha e estuda
Se trabalha, em que trabalha?
____
Quantas horas por dia? ( ) 2h ( ) 4h ( ) 6h ( ) 8h ( ) Outra: _______
Quantos dias por semana? ( ) 1 ( ) 2 ( ) 3 ( ) 4 ( ) 5 ( ) 6 ( ) 7

8. Qual a renda mensal do seu grupo familiar? (soma do rendimento de todos que contribuem com a renda)
( ) Até 1 Salário Mínimo (até R$ 937,00).
( ) De 01 a 03 Sal. Mínimos (de R$ 937,00 a R$ 2811,00).
( ) De 03 a 06 Sal. Mínimos (de R$ 2811,00 a R$ 5622,00).
( ) De 06 a 10 Sal. Mínimos (de R$ 5622,00 a R$ 9370,00).
( ) Mais de 10 Sal. Mínimos (mais de R$ 9370,00).

9. Em que tipo de escola você cursou o Ensino Médio?
( ) Pública ( ) Particular ( ) Pública e particular

10. O Ensino Médio que você cursou foi na modalidade
( ) Regular ( ) Educação de Jovens e Adultos ( ) Integrado com o Ensino Técnico

11. Você ingressou no Ensino Superior por meio de
( ) Vestibular – Sistema Universal
( ) Vestibular – Reserva de Vagas (SISU)
( ) Vestibular – Reserva de Vagas (Lei nº 12.771/2012)
( ) ENEM – Ampla Concorrência
( ) ENEM – Ação Afirmativa: apenas escola pública
( ) ENEM – Ação Afirmativa: escola pública e baixa renda
( ) ENEM – Ação Afirmativa: escola pública e cota racial
( ) Portador de Diploma
( ) Transferência de Curso

12.Você já cursou a disciplina de Álgebra Linear alguma outra vez? ( ) Sim ( ) Não
Quantas vezes? __________ Por quê?
____
____

13. Já estudou sobre Transformação Linear? ( ) Sim ( ) Não
Teve dificuldades? Qual o motivo dessa dificuldade?
____
____

14. Quantas horas por semana, aproximadamente, você dedica aos estudos, não considerando as horas de aula?

( ) Nenhuma	( ) Três a cinco	( ) Oito a dez
( ) Uma a duas	( ) Seis a oito	( ) Mais de dez

15. Por que você optou por esta Instituição? (se necessário, marque mais de uma opção)
( ) Oferece o melhor curso de minha opção
( ) É próximo da minha residência
( ) Foi a escolhida pela maioria dos meus amigos
( ) Pela sua credibilidade
( ) Porque não consigo pagar uma particular
( ) A concorrência é pequena
( ) É uma das poucas instituições públicas que oferece o curso que escolhi

16. Qual o meio que você mais utiliza para se manter atualizado sobre os acontecimentos do mundo contemporâneo?

( ) Jornais	( ) Televisão	( ) Internet
( ) Revistas	( ) Rádio	( ) Nenhum

17. Nas horas de lazer o que você costuma fazer?
____
____
____

APÊNDICE C – Plano da Aula 1

Aula 1: 21/01/2017

9:30h às 10:15h – Sala S-110

Conteúdo: Pré-requisitos necessários à formação do conceito: matriz, função e espaço vetorial.

Objetivo: Identificar os nexos constituídos e não constituídos na rede conceitual do aluno com relação aos conteúdos de função, matriz e espaço vetorial, apreendendo o nível de desenvolvimento real dos alunos.

Metodologia:

Neste momento será priorizada a ação mental relembrar.

- Aplicar a tarefa avaliativa (Apêndice D), a qual deverá ser resolvida individualmente e sem consulta.
- Esclarecer aos alunos que esta avaliação tem fim apenas informativo sobre seus conhecimentos em determinados assuntos relacionados com a Álgebra Linear e que ela não objetiva nota para fins de aprovação na disciplina.

Avaliação: A avaliação se dará por meio da correção quali-quantitativa das questões da tarefa avaliativa.

Referências Bibliográficas

BOLDRINI, José Luiz, et al. *Álgebra Linear*. 3ª edição Ampliada e Revista. São Paulo: Editora Harbra Ltda, 1986.

GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI JR., José Ruy. *Matemática Fundamental*. 2º grau, Volume Único. São Paulo: FTD, 1994.

______. *Matemática Fundamental*: uma nova abordagem. Ensino Médio, Volume Único. São Paulo: FTD, 2002.

STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. *Álgebra Linear*. 2ª edição. São Paulo: Pearson Ed. Makron Books, 2008.

APÊNDICE D – Avaliação Diagnóstica

Nome: ____

1) Uma indústria de aparelhos telefônicos produz celulares de modelos X e Y cada um deles nas versões com 4 Gb, 8 Gb e 16 Gb de memória interna. Na montagem desses celulares são utilizadas peças A, B e C. Um plano de montagem foi feito conforme as tabelas:

	Celular X	Celular Y
Peça A	2	3
Peça B	4	3
Peça C	3	2

	4 Gb	8 Gb	16 Gb
Celular X	5	3	6
Celular Y	2	4	3

a) Quantas peças do tipo A são necessárias para a montagem dos celulares de 4 Gb?
b) Quantas peças ao todo são necessárias para a montagem dos celulares Y na versão de 16 Gb?
c) Determine a matriz que apresenta a quantidade de peças diferentes por versões de celulares a ser produzido

2) Considere um retângulo cuja base mede xm e a altura mede 7m.
a) Expresse o perímetro desse retângulo em função de sua base.
b) Expresse a área desse retângulo em função de sua base.
c) Expresse graficamente o perímetro e a área desse retângulo.
d) Determine o domínio, o contradomínio e a imagem da função perímetro.
e) Determine o domínio, o contradomínio e a imagem da função área.
f) Pensando nos tipos de funções, como você classifica a função perímetro?
g) Pensando nos tipos de funções, como você classifica a função área?

3) Considere os seguintes conjuntos munidos de suas respectivas operações de soma e multiplicação por escalar usuais:

$A = \{(1, y, z); y, z \in \mathbb{R}\}$

$B = M(2,2) = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; a, b, c, d \in \mathbb{R}\right\}$

$C = \{(x, y); y = 2x + 1, x \in \mathbb{R}\}$

$D = \left\{\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}; a, b, c \in \mathbb{R}_+\right\}$

$E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, 0); x_i \in \mathbb{R}\}$

Dentre estes conjuntos alguns são espaços vetoriais, identifique-os justificando.

APÊNDICE E – Plano da Aula 2

Aula 2: 28/01/2017

7h às 8:30h – Sala S-110

Conteúdos:

- Pré-requisitos necessários à formação do conceito: matriz, função e espaço vetorial.
- Desenvolvimento lógico-histórico do conceito de transformação linear.

Objetivos:

- Identificar os nexos constituídos e não constituídos na rede conceitual do aluno com relação aos conteúdos de função, matriz e espaço vetorial, apreendendo o nível da zona de desenvolvimento proximal dos alunos e interferindo nela.
- Compreender a importância e necessidade da disciplina Álgebra Linear, bem como do conceito de transformação linear por meio do seu desenvolvimento lógico-histórico.
- Compreender o modo como os matemáticos e estudiosos da área pensaram a Matemática ao longo do tempo correspondendo com o modo atual de pensar esta ciência.

Metodologia:

1º Momento: Correção da Avaliação Diagnóstica.

Neste momento serão priorizadas as seguintes ações mentais: relembrar, observar, refletir e analisar.

- Conversar com os alunos sobre cada uma das questões da tarefa avaliativa (Apêndice D), recorrendo ao quadro-negro quando necessário, ressaltando os pontos nos quais os alunos tiveram mais dificuldades, compreendendo a forma de pensar dos alunos, bem como os conceitos que já estão formados e aqueles que ainda precisam ser solidificados, agindo sobre estes com o intuito de desenvolver o pensamento teórico dos alunos com relação aos conceitos utilizados na tarefa.

2º Momento: Lógico-histórico do conceito de transformação linear.

Desenvolvimento da ação: transformação dos dados da tarefa.

Para esta atividade de aprendizagem serão priorizadas as seguintes ações mentais: observar, refletir, analisar e criticar.

- Apresentar, com o auxílio do Datashow, uma motivação aos alunos para o estudo das transformações lineares (Apêndice F), seguido do lógico-histórico do conceito de transformação linear (Apêndice G).
- À medida que for apresentando as informações dialogar com os alunos sobre sua importância e necessidade, mostrando que os conceitos ali contidos não são usados exclusivamente na Álgebra Linear.
- Levar os alunos a pensarem no surgimento do conceito de transformação linear e como isso impactou o desenvolvimento da Matemática.

Durante toda a aula:

Avaliação por parte do aluno: Através de uma autoavaliação, o aluno deverá determinar qualitativamente o grau de compreensão e apreensão do movimento lógico-histórico.

Avaliação por parte do professor: Verificar por meio da observação participativa dos alunos se houve apropriação do desenvolvimento lógico-histórico do conceito de transformação linear.

Referências Bibliográficas:

BERTOLINI, Marcel Vinhas. Aspectos da Matemática Chinesa: O “Nove Capítulos. Disponível em: < https://www.ime.usp.br/~cpq/main/arquivos/outros/Marcel%20Vinhas%20Bertolini%20resumo2.pdf>. Acesso em: 10 out. 2016. Universidade de São Paulo, 2007.

BOLDRINI, José Luiz, et al. *Álgebra Linear*. 3ª edição Ampliada e Revista. São Paulo: Editora Harbra Ltda, 1986.

BOYER, Carl B. *História da Matemática*. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Bücher, Editora da Universidade de São Paulo, 1974.

DORIER, Jean-Luc. A general outline of the genesis of vector space theory. *Historia Mathematica*, 22, 1985, p. 227-261.

EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Tradução: Hygino H. Domingues. 5ª ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

GRASSMANN, Hermann. *Die Ausdehnungslehre*. Berlin: Verlag von th. chr. fr. enslin, 1862.

GRASSMANN, Justus. Description of the life of Hermann Grassmann by his son Justus Grassmann, probably written shortly after the death of his father, 1877. In: PETSCHE, Hans-Joachim; LEWIS, Albert C.; LIESEN, Jörg; RUSS, Steve. *From Past to Future: Grassmann's*

Work in Context. Grassmann Bicentennial Conference, September 2009. Boston, USA: Birkhäuser, 2011, p. 3-8.

KATZ, Victor J. Historical ideas in teaching linear algebra. In: SWETZ, Frank; FAUVEL, John; BEKKEN, Otto; JOHANSSON, Bengt; KATZ, Victor. *Learns from the masters*. The Mathematical Association of America, 1995, p. 189-206.

KLEINER, Israel. *A history of abstract algebra*. Boston, USA: Birkhäuser, 2007.

LIESEN, Jörg. Hermann Grassmann's theory of linear transformations. In: PETSCHE, Hans-Joachim; LEWIS, Albert C.; LIESEN, Jörg; RUSS, Steve. *From Past to Future: Grassmann's Work in Context*. Grassmann Bicentennial Conference, September 2009. Boston, USA: Birkhäuser, 2011, p. 311-324.

MILIES, César Polcino. Breve história da álgebra abstrata. In: BIENAL DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, II, 2004.Salvador. *Anais*... Salvador, 2004.

MOORE, Gregory H. The axiomatization of the Linear Algebra: 1875 – 1940. *Historia Mathematica*, 22, 1995, p. 262-303.

O'CONNOR, John J.; ROBERTSON, Edmund F. *Matrices and determinants*. Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Matrices_and_determinants.html>. Acesso em: 26 out. 2016. School of Mathematics and Statistics. University of St Andrews, Scotland. Escócia, 2016a.

O'CONNOR, John J.; ROBERTSON, Edmund F. *An overview of Babylonian mathematics*. Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Babylonian_mathematics.html>. Acesso em: 26 out. 2016. School of Mathematics and Statistics. University of St Andrews, Scotland. Escócia, 2016b.

O'CONNOR, John J.; ROBERTSON, Edmund F. *Nine Chapters on the Mathematical Art*. Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Nine_chapters.html>. Acesso em: 26 out. 2016. School of Mathematics and Statistics. University of St Andrews, Scotland. Escócia, 2016c.

O'CONNOR, John J.; ROBERTSON, Edmund F. *Abstract linear spaces*. Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Abstract_linear_spaces.html>. Acesso em: 26 out. 2016. School of Mathematics and Statistics. University of St Andrews, Scotland. Escócia, 2016d.

PEANO, Giuseppe. *Geometric Calculus - according to the Ausdehnungslehre of H. Grassmann*. 1888.

APÊNDICE F – Slides para a Aula 2: Motivação para aprender transformação linear

Transformação Linear

Quem já enviou um e-mail alguma vez na sua vida?

Quem já fez uma ligação telefônica?

Quem já ouviu alguma música no rádio?

Quem já assistiu TV alguma vez?

Então você já usou uma transformação linear!

Mas...

O que é uma transformação linear?

Para que ela serve?

A quem serve?

Quando surgiu?

Uma aplicação prática

O conceito de transformação linear e toda a teoria decorrente deste conceito são ferramentas essenciais para o desenvolvimento da teoria dos códigos corretores de erros, teoria esta que tem tomado papel importantíssimo mediante o desenvolvimento tecnológico que surgiu desde a década de 1940, década do surgimento desta teoria, especificamente, em julho de 1948 com Claude Shannon, e tem se desenvolvido atualmente com as evoluções do campo computacional e tecnológico à medida que se deseje uma comunicação confiável, onde a mensagem enviada é exatamente a mensagem recebida.

Dentre as situações em que se usa um código corretor de erros, podemos citar: digitalização de fotografias, transmissões via rádio e televisão, uso de computadores, gravação de informações em pen drive, CD ou DVD, etc.

Mesquita (2005; 2007) ao estudar esta teoria descreve algumas classes de códigos nas quais o processo de codificação e decodificação de mensagens se dá mediante uma transformação linear. A autora (MESQUITA, 2005) cita casos reais onde transformações lineares foram fundamentais, dentre elas temos a transmissão e recepção de fotos de Marte feitas pela nave espacial Mariner 9 em 1972.

Essas fotos não eram coloridas como temos hoje, mas sim em preto e branco, sendo as imagens formadas por partes pretas, partes brancas e partes cinzas (junção do preto e do branco). Assim, em cada foto, eram analisados os tons das cores (preto, branco e cinza) e a cada um deles fazia-se corresponder um código binário de comprimento seis (um elemento do tipo $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$, onde $x_i \in \{0,1\}$ para cada $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$) que era levado mediante uma transformação linear injetora em um conjunto também binário cujos elementos tinham comprimento trinta e dois.

Esse era o processo de codificação e cada tom de cor codificado recebe o nome de *palavra do código*. A decodificação se dava através da transformação linear inversa dessa transformação linear.

Para especificarmos uma transformação linear, consideremos uma situação descrita pela mesma autora (MESQUITA, 2007) e que foi adaptada para este texto: os Códigos de Goppa são considerados bons códigos devido à sua facilidade de codificar e decodificar mensagens, isso comparado a outras classes de códigos; eles são utilizados tanto na teoria dos códigos corretores de erros quanto em certas classes de criptografia de chave pública. O código de Goppa descrito pela autora (MESQUITA, 2007) na página 24 deste trabalho pode ser obtido mediante a transformação linear

$C:\{0,1\} \to \{0,1\}^8$ dada por

$$C(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1, x_1 + x_2, x_2, x_1, x_1 + x_2, x_1, x_2)$$

ou, em forma matricial $C(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$

Maiores detalhes sobre este código foram omitidos por demandar conhecimentos que extrapolam o objetivo do presente texto.

De acordo com tal explanação,

a) qual a imagem da palavra (0,0) por meio da aplicação C? Justifique.

b) mostre que a transformação C é linear.

Referências Bibliográficas

MESQUITA, Aline Mota de. *Teoria dos Códigos Corretores de Erros.* 2005, 67 f. Monografia (Especialização em Matemática) – Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, Goiânia, 2005.

______. *Uma melhora das cotas de Feng-Rao e de Miura para a distância mínima de códigos definidos sobre uma variedade afim.* 2007, 77 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, Goiânia, 2007.

APÊNDICE G – Slides para a Aula 2: Lógico-histórico do conceito de transformação linear

Histórico do conceito de Transformação Linear

A disciplina Álgebra Linear em sua formação

- 1930: *Moderne Algebra* de van der Waerden.
- 1941: Garret Birkhoff e Saunders MacLane publicaram seu *Survey of Modern Algebra.*
- 1942: surgiu o *Finite-Dimensional Spaces* de Paulo R. Halmos.
- 1947: Nicolas Bourbaki publica o segundo capítulo do Livro II de seu *Eléments de mathématique*, cujo título é *Algèbre linéaire*.

Sistemas de equações lineares e determinantes

Os Babilônicos

Babilônicos

- Um dos povos mais desenvolvidos economicamente e cientificamente da antiguidade.
- 2000 a.C.: resolviam equações quadráticas, cúbicas e biquadradas.

Sistemas que os babilônicos sabiam resolver:

- $\begin{cases} xy = 600 \\ 150(x-y) - (x+y)^2 = -1000 \end{cases}$
- $\begin{cases} xy = a \\ \frac{bx^2}{y} + \frac{cy^2}{x} + d = 0 \end{cases}$

Mapa com a região da Babilônia

Fonte: Site Só História: http://www.sohistoria.com.br/ef2/mesopotamia/p3.php

Os Chineses

- 200 a.C.: resolviam sistemas de ordem dois e três.

Três feixes de uma colheita de boa qualidade, dois feixes de uma de qualidade regular e um feixe de uma de má qualidade são vendidos por 39 dou. Dois feixes de boa, três de regular e um de má são vendidos por 34 dou. Um feixe de boa, dois de regular e três de má são vendidos por 26 dou. Qual o preço do feixe para cada uma das qualidades?

(EVES, 2011, p. 268).

Estudo moderno

- 1693: com o alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) com a noção de determinante para resolver sistemas lineares (KLEINER, 2007).
- 1683: o japonês Takakazu Seki Kowa (1642 – 1708) já havia calculado determinantes de matrizes de ordens dois, três, quatro e cinco (EVES, 2011; O'CONNOR; ROBERTSON, 2016a).

Leibniz e Newton em seus contextos

- Leibniz viveu em um período que a história classifica como Idade Moderna, datada de 1453 (com a tomada de Constantinopla pelos turcos otomanos) até 1789 (com o início da Revolução Francesa).
- Década de1670: inicia a grande disputa entre Leibniz e Newton (1643 – 1727).
- Como Newton era inglês, os matemáticos da Inglaterra se alinharam a ele e os demais matemáticos europeus juntaram-se a Leibniz.

Matrizes

Arthur Cayley (1821 – 1895)

- 1855: o inglês Cayley introduz a teoria de matrizes como a temos hoje.
- 1850: o inglês James Joseph Sylvester (1814 – 1897) introduz o nome "matriz".
- Transição da álgebra aritmética para a álgebra simbólica.
- Processo este iniciado por Georg Peacock (1791 – 1858) em 1830 com sua obra *Treatise on Algebra*.

Contexto histórico – Revolução Industrial

- Primeira Revolução Industrial (1760 – 1860), início na Inglaterra:
  - desenvolvimento: das frotas navais, do comércio marítimo e da indústria mecânica,
  - capitalismo industrial,
  - a urbanização crescente,
  - inserção das máquinas,
  - os avanços tecnológicos,
  - visão de mundo mais mecanicista, etc. (EVES, 2011).

Vetores tridimensionais
A necessidade de um conjunto tridimensional

William Rowan Hamilton (1805 – 1865)

- Hamilton era um professor universitário irlandês e estava passando justamente pelo período de transição da álgebra aritmética para a álgebra simbólica.
- A Irlanda passava por todas as mudanças ocasionadas pela Revolução Industrial.
- Surgiu a necessidade de trabalhar com vetores.

Sobre vetores

- A noção de vetor originou na física para representar uma grandeza que tem magnitude e direção e estava bem estabelecida no final do século XVII.
- Na matemática ela só originou com a representação geométrica dos números complexos, introduzida, independentemente, por vários autores no final do século XVIII e início do século XIX.
- 1835: Hamilton definiu os números complexos algebricamente como pares ordenados de números reais, com as operações usuais de adição, multiplicação e multiplicação por escalar, assim como temos hoje (KLEINER, 2007).

A necessidade

- Necessidade de um espaço tridimensional.
- Nessa época, os cientistas já tinham a noção de tal espaço, pois desde o ano 300 a.C., os gregos já conheciam sólidos geométricos e tinham uma geometria em três dimensões (BOYER, 1974; EVES, 2011).
- Segundo Eves, (2011), alguns sólidos geométricos surgiram em séculos anteriores ao século III a.C.

Os Quatérnios

- Hamilton tentou criar uma terna de números a partir dos números complexos, porém não conseguiu.
- 1843: Surgiu os quatérnios: quádruplas de números da forma
$$a + bi + cj + dk$$
onde $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ (EVES, 2011).
- Posteriormente criou o conjunto de ternas da forma $ai + bj + ck$, onde a, b e c são números reais e i, j e k são unidades dos quatérnios (KLEINER, 2007).

Hermann Günther Grassmann
O "criador" da Álgebra Linear

Hermann Günther Grassmann (1809 – 1877)

Hermann Günther Grassmann (1809 – 1877)

- Alemão, teólogo, matemático autodidata e professor de uma escola secundária.

- 1844: lança um livro intitulado

  Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik

  (A teoria da extensão linear, um novo ramo da matemática)

A segunda versão

- Grassmann resolve reeditar todo seu trabalho dando um aspecto mais matemático ao texto e incorporar algumas ideias que não foram publicadas na primeira versão (GRASSMANN J., 2011).

- 1862: lança a segunda versão da Teoria da Extensão (*Die Ausdehnungslehre*) acrescida de uma seção denominada *Funktionenlehre* (Teoria de Funções).

Contexto vivenciado por Grassmann

- Séculos XVIII e XIX: várias revoluções em todo o mundo causadas pelo Iluminismo, um reflexo da revolução industrial, onde os iluministas visavam:

  - instalar a democracia, o liberalismo econômico e o racionalismo,
  - romper com o absolutismo monárquico e com a força que a Igreja exercia sobre a população.

Após a segunda versão

- Grassmann interrompeu seu trabalho com a matemática, passando a se dedicar à música e à linguística, trabalhando com o sânscrito, o grego, o lituano, etc.

- 1872: retoma seus trabalhos com a matemática ao saber que haviam matemáticos estudando e aplicando suas obras a novas teorias.

- 1877: a apenas dois dias antes de sua morte, Grassmann recebe a notícia de que sua teoria passaria a ser divulgada por meio de palestras proferidas por um professor em Dresden (GRASSMANN, J., 2011).

Contexto vivenciado por Grassmann

- Revoluções de 1848 dos Estados Alemães: visava unificar os estados alemães e dar liberdade à população.

- Neste ano: Grassmann reivindicou sua atividade no campo político, levantando-se contra a luta revolucionária de Berlim, onde, juntamente com seu irmão Robert, fundou um jornal no qual eram discutidas questões polêmicas como as recém-estabelecidas Constituições do Império Romano, do Estado Prussiano e da Igreja da Prússia (GRASSMANN, J., 2011).

Contribuições

- Espaço vetorial
- Dependência linear
- Base
- Dimensão
- Transformação linear
- Autovalor e autovetor
- Diagonalização
- Produto interno
- dentre outros.

- Devido a isso, Grassmann é considerado por muitos o

  "criador da Álgebra Linear".

Sobre...

- Durante sua formação acadêmica em Berlin, em teologia, Grassmann
  - somente teve contato com filósofos e teólogos influenciados pela reforma protestante;
  - não ouviu nenhuma palestra matemática, nem mesmo durante seu curso de graduação.

- O contato dele com esta ciência se deu por meio das obras de seu pai, Justus Günther Grassmann, que era professor de matemática e física em uma escola secundária de Stettin, a mesma onde Grassmann tornou-se professor.

Espaço Vetorial

Contribuições de Grassmann e Peano

Espaço Vetorial - Grassmann

- Em meio à busca de Hamilton por um conjunto de dimensão maior que dois e sua descoberta dos quatérnios em 1843, Grassmann, em sua primeira versão da Teoria da Extensão, em 1844, já apresentava um conjunto com tais características.
- Na versão de sua obra de 1862, Grassmann apresenta mais claramente sua definição de um *domínio principal de ordem* n, que hoje chamamos de *espaço vetorial de dimensão* n, iniciando o processo de axiomatização de uma estrutura linear.

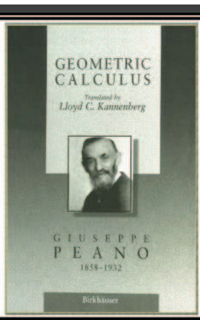
Espaço Vetorial- Peano

- Giuseppe Peano (1858 - 1932) publica em 1888 uma versão condensada de sua própria leitura da Teoria da Extensão intitulada

Geometric Calculus - according to the Ausdehnungslehre of H. Grassmann

(Cálculo Geométrico – de acordo com a teoria da extensão de H. Grassmann).

- Peano era italiano e foi o matemático mais conhecido de sua época em seu país.



Espaço Vetorial - Peano

- Peano reformulou a definição de Grassmann em 1888.
- Nesta reestruturação, Peano passa a chamar tal conjunto de *sistema linear*, sendo esta a primeira estruturação de um conceito mais geral de vetores, com espaços vetoriais abstratos.

Contexto vivenciado Peano

- No final do século XIX a Itália estava vivendo, seu processo de unificação.
- Imigração em massa dos italianos por toda a Europa e América.
- Peano era professor universitário na região Piemonte, situada na parte norte da Itália, região que mais sofreu com as guerras da unificação e com a queda da produção agrícola.

Transformação Linear
Contribuições de Grassmann e Peano

Transformação Linear - Grassmann

- Na versão de 1862 da Teoria da Extensão, em específico na parte inédita deste trabalho, a *Funktionenlehre*, há uma seção intitulada

Ganze Funktionen ersten Grades. Quotient

(Funções completas de primeiro grau. Quociente),

na qual Grassmann lida com o objeto matemático que ele chama de ***Bruch*** ou ***Quotient*** (**Fração** ou **Quociente**).

- Em linguagem moderna, a "fração" de Grassmann seria chamada de uma **transformação linear de um espaço vetorial de dimensão finita** (LIESEN, 2011).

Transformação Linear - Peano

- Peano, em sua versão da obra de Grassmann, reescreve o conceito de "fração", dando a ele uma formalização mais aceita entre os matemáticos da época.

Avanços científicos
Teorias que surgiram tendo a Teoria da Extensão como fundamento

Espaço vetorial de dimensão infinita

- Teve como impulso inicial a consideração que Peano fez acerca do conjunto das funções polinomiais de uma variável real:

"Ele observou que se as funções polinomiais fossem restritas às de grau no máximo n, então elas formariam um sistema linear de dimensão $n+1$. Mas se considerássemos todas essas funções polinomiais, acrescentou, então o sistema linear teria uma dimensão infinita"

(MOORE, 1995, p. 268, tradução nossa).

- Entretanto, a formalização axiomática deste conceito só veio em 1920 com Banach.

Outras teorias

- Axiomatização de um espaço vetorial normado, dada por Hilbert.
- Definição de base de uma extensão de um corpo dada por Dedekind.
- Axiomatização de um espaço vetorial normado completo dada por Banach.

Referências Bibliográficas

- BOYER, Carl B.. *História da Matemática.* Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Bücher, Editora da Universidade de São Paulo, 1974.
- DORIER, Jean-Luc. A general outline of the genesis of vector space theory. *Historia Mathematica*, 22, 1995, p. 227-261.
- EVES, Howard. *Introdução à história da matemática.* Tradução: Hygino H. Domingues. 5ª ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.
- GRASSMANN, Hermann. *Die Ausdehnungslehre.* Berlin: Verlag von th. chr. fr. enslin, 1862.
- GRASSMANN, Justus. Description of the life of Hermann Grassmann by his son Justus Grassmann, probably written shortly after the death of his father, 1877. In: PETSCHE, Hans-Joachim; LEWIS, Albert C.; LIESEN, Jörg; RUSS, Steve. *From Past to Future: Grassmann's Work in Context.* Grassmann Bicentennial Conference, September 2009. Boston, USA: Birkhäuser, 2011, p. 3-8.

Referências Bibliográficas

- KATZ, Victor J. Historical ideas in teaching linear algebra. In: SWETZ, Frank; FAUVEL, John; BEKKEN, Otto; JOHANSSON, Bengt; KATZ, Victor. *Learns from the masters.* The Mathematical Association of America, 1995, p. 189-206.
- KLEINER, Israel. *A history of abstract algebra.* Boston, USA: Birkhäuser, 2007.
- LIESEN, Jörg. Hermann Grassmann's theory of linear transformations. In: PETSCHE, Hans-Joachim; LEWIS, Albert C.; LIESEN, Jörg; RUSS, Steve. *From Past to Future: Grassmann's Work in Context.* Grassmann Bicentennial Conference, September 2009. Boston, USA: Birkhäuser, 2011, p. 311-324.
- MOORE, Gregory H. The axiomatization of the Linear Algebra: 1875 – 1940. *Historia Mathematica*, 22, 1995, p. 262-303.
- O'CONNOR, John J.; ROBERTSON, Edmund F. *Matrices and determinants.* Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Matrices_and_determinants.html>. Acesso em: 26 out. 2016. School of Mathematics and Statistics. University of St Andrews, Scotland. Escócia, 2016a.

Referências Bibliográficas

- O'CONNOR, John J.; ROBERTSON, Edmund F. *An overview of Babylonian mathematics.* Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Babylonian_mathematics.html>. Acesso em: 26 out. 2016. School of Mathematics and Statistics. University of St Andrews, Scotland. Escócia, 2016b.
- O'CONNOR, John J.; ROBERTSON, Edmund F. *Nine Chapters on the Mathematical Art.* Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Nine_chapters.html>. Acesso em: 26 out. 2016. School of Mathematics and Statistics. University of St Andrews, Scotland. Escócia, 2016c.
- O'CONNOR, John J.; ROBERTSON, Edmund F. *Abstract linear spaces.* Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Abstract_linear_spaces.html>. Acesso em: 26 out. 2016. School of Mathematics and Statistics. University of St Andrews, Scotland. Escócia, 2016d.
- PEANO, Giuseppe. *Geometric Calculus - according to the Ausdehnungslehre of H. Grassmann.* 1888.

APÊNDICE H – Plano da Aula 3

Aula 3: 28/01/2017

8:45h às 10:15h – Sala S-110

Conteúdo: Conceito de transformação linear.

Objetivos: Transformar os dados da tarefa por meio da resolução das situações-problema propostas.

Metodologia:

1º Momento: Resolução de problemas particulares.

Desenvolvimento da ação: transformação dos dados da tarefa.

Para esta atividade de aprendizagem serão priorizadas as seguintes ações mentais: observar, comparar, analisar, sintetizar, identificar, relacionar, refletir, criticar e distinguir.

- Dizer aos alunos que as tarefas que serão por eles desenvolvidas a partir daquele momento conduzirão à formação do conceito de transformação linear e, por isso, a participação e interação deles na atividade é fundamental para atingir este objetivo.
- Dividir a turma em grupos de três alunos cada e distribuir a Tarefa 1 (Apêndice I) a cada um deles, cada aluno receberá uma folha com as tarefas propostas, mas a resolução é do grupo.
- Solicitar que os alunos resolvam os problemas da Tarefa 1.
- Acompanhar o desenvolvimento dos grupos mediando o processo, sem jamais contar-lhes a resposta dos problemas, nem mostrar-lhes a forma correta de pensar na resolução, mas sempre os instigando através de perguntas e desafios que os coloquem para pensar e tomar suas próprias conclusões
- Pedir a cada grupo que façam uma cópia de suas respostas da Tarefa 1 e entreguem ao professor.

Durante toda a aula:

Avaliação por parte do aluno: Através de uma autoavaliação, o aluno deverá determinar qualitativamente o grau de formação do procedimento geral usado na resolução da tarefa.

Avaliação por parte do professor: Avaliar qualitativa e substancialmente se os alunos estão se apropriando do procedimento geral de solução da tarefa como um procedimento mental, ou seja, se está havendo formação do conceito. Para isto, durante toda a aula o professor deverá analisar e responder às seguintes perguntas:

- Os alunos estão assimilando o procedimento geral de resolução da tarefa? Em que medida?
- O resultado das ações dos alunos corresponde ao objetivo da aprendizagem? Em que medida?

Referências Bibliográficas:

BOLDRINI, José Luiz, et al. *Álgebra Linear*. 3ª edição Ampliada e Revista. São Paulo: Editora Harbra Ltda, 1986.

HEFEZ, Abramo; FERNANDEZ Cecília de Souza. *Introdução à Álgebra Linear*: Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. *Álgebra Linear*. 2ª edição. São Paulo: Pearson Ed. Makron Books, 2008.

APÊNDICE I – Tarefa 1

Nome: ____ Grupo nº _____

Problema 1) Um logotipo é uma representação visual ou gráfica que identifica uma empresa ou uma marca. É a sua assinatura e consiste em um conjunto de símbolos que caracterizam o negócio, despertando sensações no consumidor. Através do logotipo a empresa pode se diferenciar da concorrência e criar vínculo com os clientes e potenciais clientes. Foi com esse propósito que a Administradora Imobiliária Assis criou o seu logotipo:

Um fato interessante contido neste e em outros logotipos é o uso da Matemática em sua criação, em específico de uma função chamada de reflexão, que consiste em refletir uma imagem por meio de uma reta denominada eixo de simetria. Transportando este conceito para o mundo da Álgebra Linear temos a *aplicação reflexão*.

Situando o logotipo da Administradora Imobiliária Assis em um plano cartesiano, desconsiderando o nome da empresa e considerando o eixo de simetria como sendo o eixo y passando pelo ponto médio da base da letra I e o ponto médio da base do triângulo de cor preta temos:

I) Determine a aplicação T que caracteriza esta reflexão.

II) Tomando quaisquer pontos $(a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2$ e qualquer escalar α, determine:

a) a imagem do ponto (a,b), ou seja, $T(a,b)$

b) a imagem do ponto (c,d), ou seja, $T(c,d)$

c) a imagem do ponto $\big((a,b)+(c,d)\big)$, ou seja, $T\big((a,b)+(c,d)\big)$

d) a imagem do ponto $\alpha(a,b)$, ou seja, $T(\alpha(a,b))$

e) $T(a,b)+T(c,d)$

f) $\alpha T(a,b)$

Problema 2) Se de um quilograma de soja são extraídos 0,2 litros de óleo, de uma produção de s Kg de soja seriam extraídos $0{,}2s$ litros de óleo. Escrevendo na forma de função teremos $Q(s)=0{,}2s$, onde Q é a quantidade em litros de óleo de soja e s é a quantidade em Kg de soja. Como as variáveis envolvidas devem ser sempre positivas, a função Q é uma restrição da função $G\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $G(x)=0{,}2x$.

a) Expresse graficamente a quantidade de litros de óleo em função da quantidade de soja.

b) Expresse graficamente a função G.

c) Comparando os gráficos dos itens (a) e (b), que conclusão pode-se obter?

d) Determine a imagem do vetor soma $x+y$ na função G, ou seja, $G(x+y)$.

e) Se um vetor x é multiplicado por um escalar k,determine a imagem do vetor kx por meio da função G, ou seja, determine $G(kx)$.

Problema 3) A quantidade em litros de óleo extraída por quilograma de cereal segundo um determinado processo pode ser descrita pela tabela.

	Soja	*Milho*	*Algodão*	*Amendoim*
Óleo (l)	0,2	0,06	0,13	0,32

A quantidade total de óleo produzido por x Kg de soja, y Kg de milho, z Kg de algodão e w Kg de amendoim é dada por $Q=0{,}2x+0{,}06y+0{,}13z+0{,}32w$. Observe que a quantidade de óleo pode ser dada pela multiplicação da "matriz rendimento" pelo vetor quantidade.

$$Q=\begin{bmatrix}0{,}2 & 0{,}06 & 0{,}13 & 0{,}32\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\\ w\end{bmatrix}=0{,}2x+0{,}06y+0{,}13z+0{,}32w$$

Formalmente, estamos trabalhando com a função $Q\colon A\subset \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0,2 & 0,06 & 0,13 & 0,32 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

que é uma restrição da função $F: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(x, y, z, w) = 0,2x + 0,06y + 0,13z + 0,32w.$$

a) Considerando $u = (x_1, y_1, z_1, w_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2, w_2)$ vetores de $\mathbb{R}^4$, determine a imagem de $u + v$ mediante a função F.

b) Considerando $u = (x_1, y_1, z_1, w_1)$ um vetor de $\mathbb{R}^4$ e α um número real qualquer, determine $F(\alpha u)$.

APÊNDICE J – Plano da Aula 4

Aula 4: 04/02/2017

7h às 8:30h – Sala S-110

Conteúdo: Conceito de transformação linear.

Objetivos: Transformar os dados da tarefa por meio da resolução das situações-problema propostas.

Metodologia:

1º Momento: Recapitulação.

Para esta atividade de aprendizagem serão priorizadas as seguintes ações mentais: relembrar, refletir e analisar.

- Recapitular as aulas anteriores lembrando do que foi feito e ressaltando os pontos importantes: a necessidade de saber função, matriz e espaço vetorial para aprender transformação linear; as aplicações práticas de transformação linear, bem como se desenvolvimento lógico-histórico.

2º Momento: Correção da Tarefa 1 (Apêndice I).

Desenvolvimento da ação: transformação dos dados da tarefa.

Para esta atividade de aprendizagem serão priorizadas as seguintes ações mentais: observar, comparar, analisar, sintetizar, identificar, relacionar, refletir, criticar e distinguir.

- Corrigir a Tarefa 1: solicitar que os grupos escrevam suas respostas para o Problema 1 no quadro-negro e explique sua resposta comparando com as demais até chegarem a um consenso acerca da resposta correta. Fazer o mesmo procedimento para os demais problemas.
- Após a correção, fazer uma síntese da tarefa, corrigindo os erros cometidos pelos alunos e constatados na resolução entregue por eles na aula anterior.

Durante toda a aula:

Avaliação por parte do aluno: Através de uma autoavaliação, o aluno deverá determinar qualitativamente o grau de formação do procedimento geral usado na resolução da tarefa.

Avaliação por parte do professor: Avaliar qualitativa e substancialmente se os alunos estão se apropriando do procedimento geral de solução da tarefa como um procedimento mental, ou seja, se está havendo formação do conceito. Para isto, durante toda a aula o professor deverá analisar e responder às seguintes perguntas:

- Os alunos estão assimilando o procedimento geral de resolução da tarefa? Em que medida?
- O resultado das ações dos alunos corresponde ao objetivo da aprendizagem? Em que medida?

Referências Bibliográficas:

BOLDRINI, José Luiz, et al. *Álgebra Linear*. 3ª edição Ampliada e Revista. São Paulo: Editora Harbra Ltda, 1986.

HEFEZ, Abramo; FERNANDEZ Cecília de Souza. *Introdução à Álgebra Linear*: Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. *Álgebra Linear*. 2ª edição. São Paulo: Pearson Ed. Makron Books, 2008.

APÊNDICE K – Plano da Aula 5

Aula 5: 04/02/2017

8:45h às 10:15h – Sala S-110

Conteúdo: Conceito de transformação linear.

Objetivos:

- Identificar a relação universal ou o nuclear do conceito de transformação linear.
- Criar um modelo textual que possibilite a conceituação de uma transformação linear.
- Transformar o modelo textual aprimorando-o, com o intuito de desvelar o conceito.

Metodologia:

1º Momento: Identificação da relação universal.

Desenvolvimento da ação: Identificação da relação universal.

Para esta atividade de aprendizagem serão priorizadas as seguintes ações mentais: observar, comparar, analisar, identificar, relacionar, refletir e distinguir.

- Distribuir a Tarefa 2 (Apêndice L) e solicitar que cada aluno, individualmente, responda à Questão 1.
- Assim que os alunos forem terminando de responder, recolher as respostas.
- Solicitar que um aluno apresente sua resposta da Questão 1, deixando-a escrita no quadro negro, em seguida, outro aluno que tenha respondido de forma diferente vai ao quadro e registra a sua resposta, completando a resposta anterior e assim sucessivamente até que os alunos concluam que todas as condições pedidas no enunciado da questão estejam listadas do quadro.
- Durante todo este processo o professor deverá conduzir a turma a uma reflexão acerca das respostas ali apresentadas, sempre induzindo os alunos a pensarem no que está escrito e a tirarem suas próprias conclusões, sem jamais contar estas conclusões aos alunos. Poderá ser feito perguntas do tipo: todas as condições estão listadas? Elas estão escritas de forma geral e abrangente? Se necessário o professor deverá, por meio das respostas dos alunos, completar a lista.

- Solicitar que os alunos respondam, individualmente, à Questão 2 da Tarefa 2 (Apêndice L), que é o registro de todas as condições listadas na Questão 1 após a discussão com a turma.

2º Momento: Modelação da relação universal.

Desenvolvimento da ação: Modelação da relação universal.

Para esta atividade de aprendizagem serão priorizadas as seguintes ações mentais: analisar, refletir e sintetizar.

- Entregar à turma a Tarefa 3 (Apêndice M) e solicitar que eles, agora em grupos (se possível os mesmos do início do experimento) respondam apenas à Questão 1.
- Explicar aos grupos que, à medida que eles forem concluindo suas respostas, eles deverão criar cartazes com estas respostas para posterior apresentação à turma. (Distribuir uma cartolina e canetinhas ou pincéis atômicos para cada grupo).
- Com o término da construção dos cartazes, solicitar que cada grupo apresente sua resposta: o grupo 1 apresenta e fixa o cartaz no quadro negro; o grupo 2 apresenta comparando sua resposta com a do grupo 1, mostrando as semelhanças e diferenças e fixa seu cartaz no quadro negro; o grupo 3 repete o processo comparando sua resposta com as do grupo 1 e 2 e assim sucessivamente até o último grupo comparar sua resposta com todos os que já apresentaram.
- Durante as apresentações das respostas da Questão 1 da Tarefa 3 o professor deverá ficar atento para analisar se há o rigor matemático necessário à escrita de um modelo, para que, após as apresentações ele possa comentar isso com os alunos.

3º Momento: Transformação do modelo.

Desenvolvimento da ação: Transformação do modelo.

Para esta atividade de aprendizagem serão priorizadas as seguintes ações mentais: observar, criticar, comparar, analisar, refletir e sintetizar.

- Por meio de perguntas, conduzir os alunos a pensarem no rigor do formalismo matemático necessário à formulação de modelos matemáticos, bem como a importâncias dos símbolos para facilitar os cálculos.
- Ainda utilizando de perguntas, conduzir a turma à escrita de um novo modelo: fazer perguntas e com as respostas dos alunos escrever no quadro negro o novo modelo. Nesse momento, é necessário que os alunos cheguem à escrita formal das

condições/propriedades que uma transformação deve satisfazer para ela ser linear como é conhecido atualmente no meio científico.

- Mostrar aos alunos que eles acabaram de responder à Questão 2 da Tarefa 3 (Apêndice M) e solicitar que eles registrem a resposta no campo correspondente.

Durante toda a aula:

Avaliação por parte do aluno: Através de uma autoavaliação, o aluno deverá determinar qualitativamente o grau de formação do procedimento geral usado na resolução da tarefa.

Avaliação por parte do professor: Avaliar qualitativa e substancialmente se os alunos estão se apropriando do procedimento geral de solução da tarefa como um procedimento mental, ou seja, se está havendo formação do conceito. Para isto, durante toda a aula o professor deverá analisar e responder às seguintes perguntas:

- Os alunos estão assimilando o procedimento geral de resolução da tarefa? Em que medida?
- O resultado das ações dos alunos corresponde ao objetivo da aprendizagem? Em que medida?

Referências Bibliográficas

BOLDRINI, José Luiz, et al. *Álgebra Linear*. 3ª edição Ampliada e Revista. São Paulo: Editora Harbra Ltda, 1986.

STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. *Álgebra Linear*. 2ª edição. São Paulo: Pearson Ed. Makron Books, 2008.

APÊNDICE L – Tarefa 2

Nome: ____ Grupo nº _____

Questão 1) Compare e analise as perguntas e respostas dos problemas 1 a 3 da Tarefa 1. O que há de comum a todas as aplicações dadas, ou seja, quais condições são satisfeitas por todas estas aplicações independente de suas particularidades?

Questão 2) Após as discussões em sala de aula da Questão 1, reescreva as propriedades comuns a todas as aplicações dos problemas da Tarefa 1.

APÊNDICE M – Tarefa 3

Nome: ____ Grupo nº _____

Questão 1) Todas as aplicações contidas nos problemas 1 a 3 da Tarefa 1, não considerando aquelas que são restrições de outras aplicações, são chamadas de *transformações lineares*. Na Tarefa 2 vocês levantaram as características comuns destas transformações. Agora, de acordo com as respostas da Tarefa 2 crie um texto matemático que formalize sua resposta e conceitue uma transformação linear. Não esqueça que um conceito deve ser escrito de forma geral e abrangente, sem considerar uma situação particular, pois é uma formalização de um conteúdo científico.

Questão 2) Após a discussão em sala das respostas da Questão 1, reescreva o seu texto matemático conceituando transformação linear.

APÊNDICE N – Plano da Aula 6

Aula 6: 11/02/2017

7h às 8:30h – Sala S-802B (Laboratório de Informática)

Conteúdo:

- Lógico-histórico do conceito de transformação linear.
- Conceito de transformação linear.

Objetivos:

- Refletir sobre a evolução da formalização dos conceitos matemáticos no decorrer da história, comparando com a formalização aceita hoje pela comunidade matemática.
- Analisar e refletir sobre as várias formas de apresentação de uma transformação linear e a necessidade de provar resultados/afirmações matemáticas.
- Aplicar o conceito formado.

Metodologia:

1º Momento: Recapitulação.

Para esta atividade de aprendizagem será priorizada a seguinte ação mental: relembrar.

- Iniciar a aula relembrando os alunos do que foi feito nas aulas da semana anterior: correção da Tarefa 1 (Apêndice I), levantamento das propriedades comuns encontradas nos problemas da Tarefa 1 (Apêndice L), criação de um modelo que conceituasse transformação linear, discussão e reestruturação desse modelo (Apêndice M).
- Mostrar as fotos dos últimos momentos (Apêndice O).

2º Momento: Formalização de definições do conceito de transformação linear no seu lógico-histórico.

Desenvolvimento da ação: Realização de tarefas particulares.

Para esta atividade de aprendizagem serão priorizadas as seguintes ações mentais: refletir, comparar e distinguir.

- Com o auxílio do datashow, mostrar aos alunos o conceito de transformação linear escrito por Grassmann e o que significa cada termo presente nele (Apêndice P). Em seguida, mostrar o conceito escrito por Peano, ressaltando a melhoria na apresentação do mesmo com uma linguagem matemática pura e simples, sem a inclusão da filosofia. Comparar o conceito de Peano com o que temos hoje nos livros didáticos, mostrando aos alunos que, a menos de simbologias, ele é o mesmo, levando os alunos a refletirem acerca do desenvolvimento histórico do conceito.

3º Momento: Resolução e correção da Tarefa 4 – Questões 1 a 3.

Desenvolvimento da ação: Realização de tarefas particulares.

Para esta atividade de aprendizagem serão priorizadas as seguintes ações mentais: refletir, comparar, aplicar o conceito, distinguir e generalizar.

- Solicitar que os alunos formem os grupos como nas aulas anteriores para resolver a Tarefa 4 (Apêndice Q).
- Dizer que essa tarefa será feita por etapas, sendo que a Questão 5 necessita do software Geogebra para sua resolução, por isso ela será a última a ser feita.
- Solicitar que os alunos respondam às Questões 1 a 3, dar um tempo para eles resolverem e recolher as respostas de cada grupo.
- Corrigir as questões, podendo a Questão 1 e o item (a) da Questão 2 serem corrigidas oralmente. Já o item (b) da Questão 2 e a Questão 3 necessitam de correção no quadro, para tanto, solicitar que cada grupo resolva um item no quadro, explicando seu desenvolvimento.
- Ao corrigir a Questão 1 enfatizar que para provar que uma transformação não é linear, basta mostrar que ela não satisfaz pelo menos uma das condições que aparecem na formalização do seu conceito, a saber, domínio e contradomínio serem espaços vetoriais, a imagem da soma de dois vetores é a soma das imagens desses vetores e a imagem de um vetor multiplicado por um escalar é esse escalar multiplicado pela imagem do vetor.

4º Momento: Resolução e correção da Tarefa 4 – Questão 4.

Desenvolvimento das ações: Controle da realização das ações desenvolvidas e avaliação da assimilação do procedimento geral como resultado da solução da tarefa de aprendizagem dada.

Para esta atividade de aprendizagem serão priorizadas as seguintes ações mentais: refletir, comparar, aplicar o conceito, distinguir e generalizar.

- Solicitar que os alunos resolvam à Questão 4 da Tarefa 4 (Apêndice Q).
- Recolher a resolução de cada grupo.
- Corrigir a questão: os itens que possibilitarem, fazer correção oral, solicitando a resposta de cada grupo e escrevendo-as no quadro; às demais, pedir que cada grupo vá ao quadro negro e responda a um item.
- Sempre discutir com a turma o procedimento utilizado pelo grupo para a resolução apresentada, ressaltando a necessidade e importância de provar um resultado matemático.

Durante toda a aula:

Avaliação por parte do aluno: Através de uma autoavaliação, o aluno deverá determinar qualitativamente o grau de formação do procedimento geral usado na resolução da tarefa.

Avaliação por parte do professor: Avaliar qualitativa e substancialmente se os alunos estão se apropriando do procedimento geral de solução da tarefa como um procedimento mental, ou seja, se está havendo formação do conceito. Para isto, durante toda a aula o professor deverá analisar e responder às seguintes perguntas:

- Os alunos estão assimilando o procedimento geral de resolução da tarefa? Em que medida?
- O resultado das ações dos alunos corresponde ao objetivo da aprendizagem? Em que medida?

Referências Bibliográficas:

BOLDRINI, José Luiz, et al. *Álgebra Linear*. 3ª edição Ampliada e Revista. São Paulo: Editora Harbra Ltda, 1986.

BOYER, Carl B. *História da Matemática*. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Bücher, Editora da Universidade de São Paulo, 1974.

EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Tradução: Hygino H. Domingues. 5ª ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. *Álgebra Linear*. 2ª edição. São Paulo: Pearson Ed. Makron Books, 2008.

APÊNDICE O – Fotos para a Aula 6

Foto 1 – Criação de um modelo para a conceituação de transformação linear.

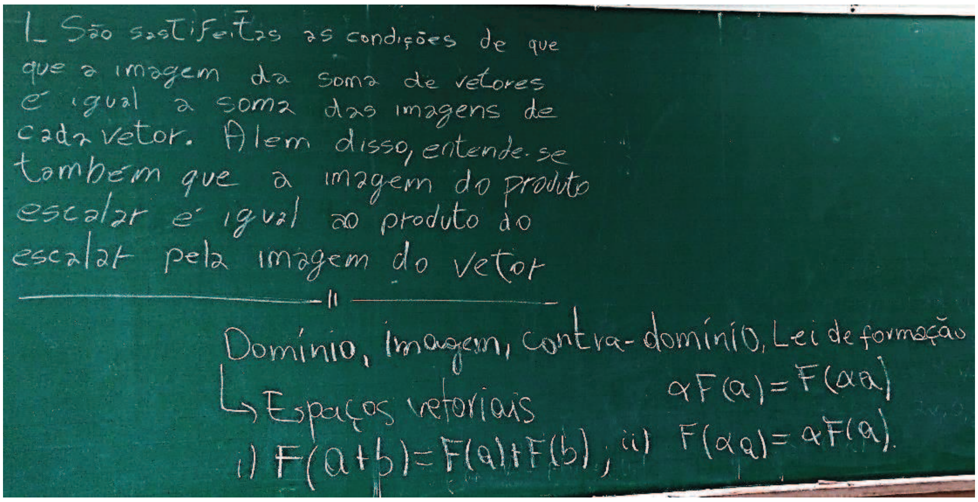


Foto 2 – Transformação do modelo.

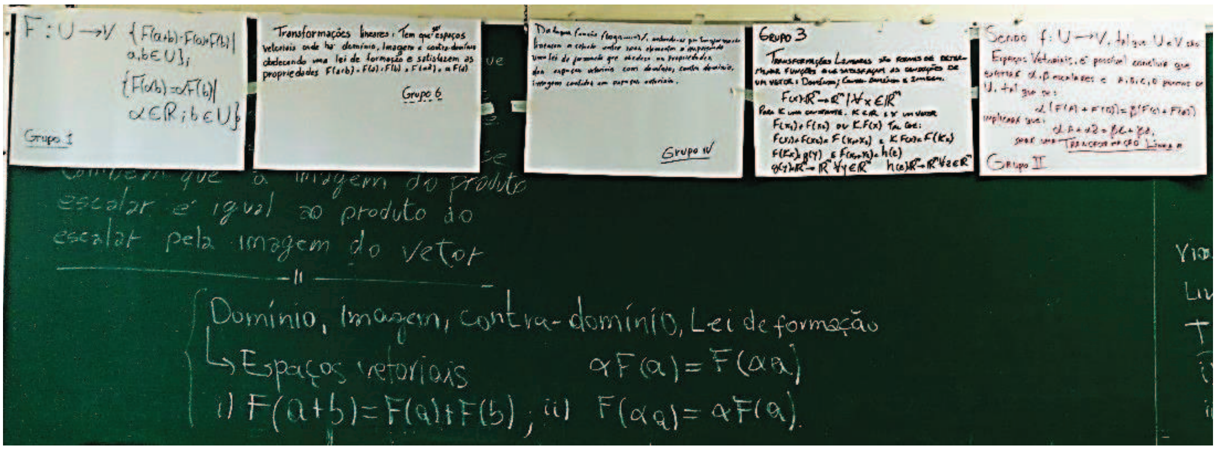
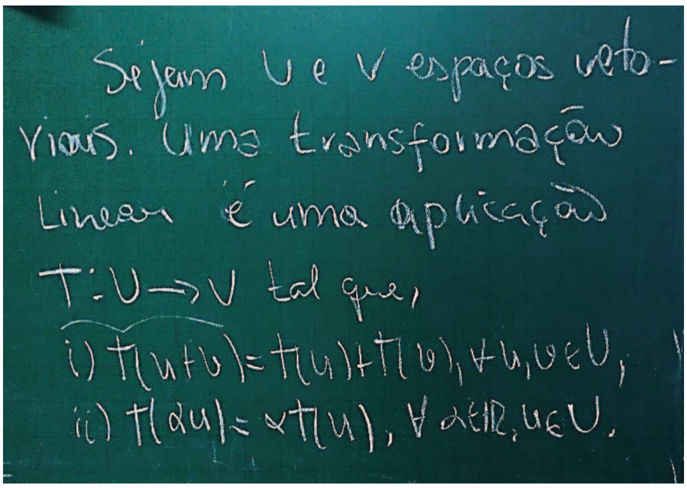
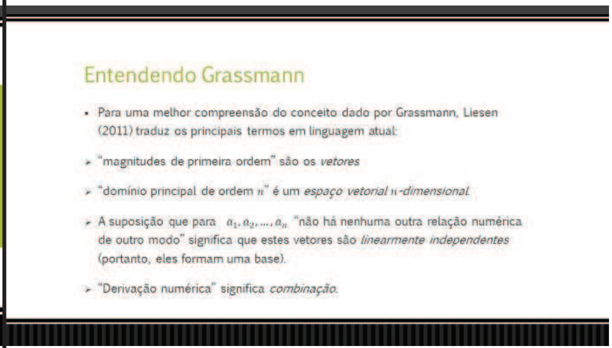
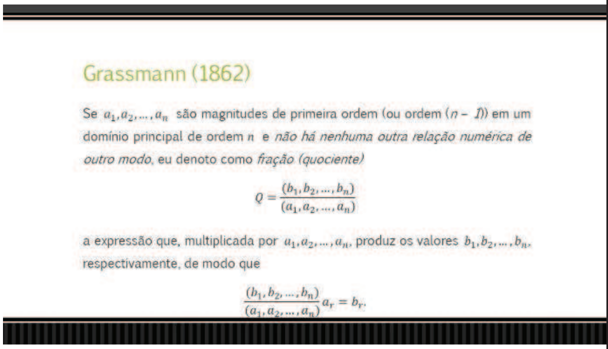


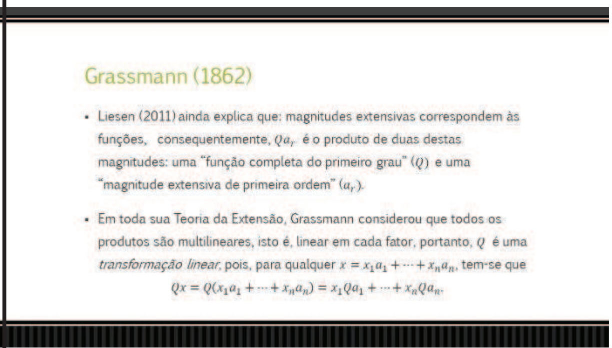
Foto 3 – Definição de transformação linear – conceito no plano mental.

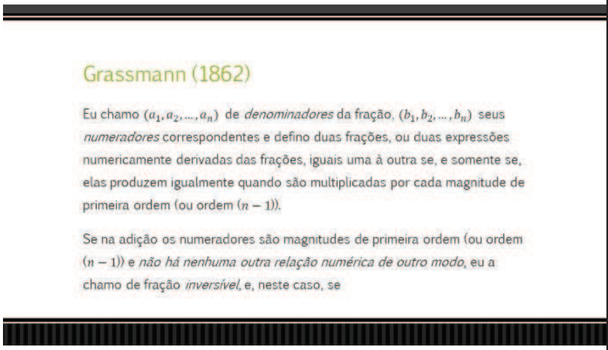


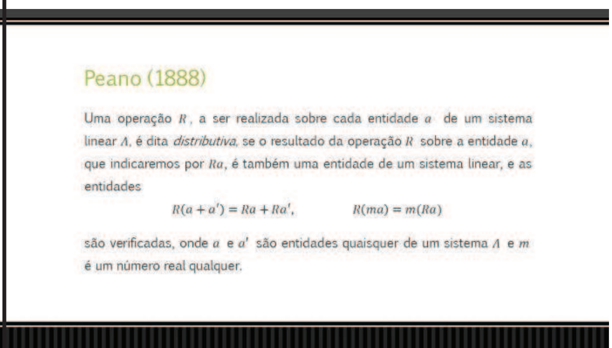
APÊNDICE P – Slides para a Aula 6: Formalização de definições do conceito de transformação linear no seu lógico-histórico

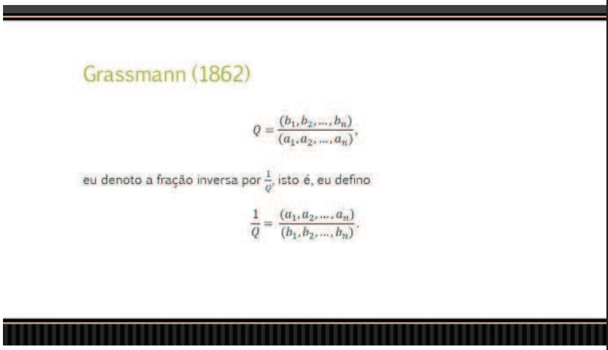


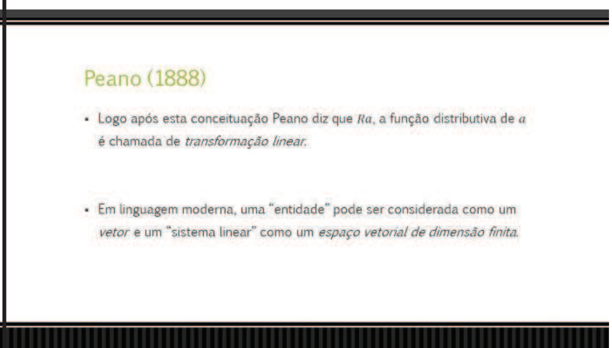












Boldrini (1986)

Sejam V e W dois espaços vetoriais. Uma *transformação linear* (aplicação linear) é uma função de V em W, $F: V \longrightarrow W$, que satisfaz as seguintes condições:

i) Quaisquer que sejam u e v em V,

$$F(u+v) = F(u) + F(v)$$

ii) Quaisquer que sejam $k \in \mathbb{R}$ e $v \in V$,

$$F(kv) = kF(v)$$

Steinbruch (2008)

Sejam V e W espaços vetoriais. Uma aplicação $T: V \longrightarrow W$ é chamada *transformação linear* de V em W se:

I) $T(u+v) = T(u) + T(v)$

II) $T(\alpha u) = \alpha T(u)$

para $\forall u, v \in V$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Referências Bibliográficas

- BOLDRINI, José Luiz, et al. *Álgebra Linear.* 3ª edição Ampliada e Revista. São Paulo: Editora Harbra Ltda, 1986.
- GRASSMANN, Hermann. *Die Ausdehnungslehre.* Berlin: Verlag von th. chr. fr. enslin, 1862.
- LIESEN, Jörg. Hermann Grassmann's theory of linear transformations. In: PETSCHE, Hans-Joachim; LEWIS, Albert C.; LIESEN, Jörg; RUSS, Steve. *From Past to Future: Grassmann's Work in Context.* Grassmann Bicentennial Conference, September 2009. Boston, USA: Birkhäuser, 2011, p. 311-324.
- PEANO, Giuseppe. *Geometric Calculus - according to the Ausdehnungslehre of H. Grassmann.* 1888.
- STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. *Álgebra Linear.* 2ª edição. São Paulo: Pearson Ed. Makron Books, 2008.

APÊNDICE Q – Tarefa 4

Nome: ____ Grupo nº _____

Questão 1) Os problemas 2 e 3 da Tarefa 1 contêm aplicações que são restrições de transformações lineares. Por que essas aplicações não são lineares?

Questão 2) O problema 3 da Tarefa 1, contém a representação matricial para a transformação linear dada em seu enunciado. Considerando a transformação linear obtida no problema 1 da mesma tarefa, $T(x, y) = (-x, y)$, podemos representa-la na seguinte forma matricial:

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Analise estas representações e

a) explique como escrever uma transformação linear em sua forma matricial.

b) escreva as transformações lineares abaixo em sua forma matricial

b.1) $H: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $H(x, y) = (x + y,\ y - x)$

b.2) $J: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ tal que $J(x, y, z, w) = (x - y - 2z,\ -x + 2y + z,\ 0,\ y + 2w,\ z - w)$

b.3) $K: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $K(x, y, z) = (x + 2y - z,\ -y - z,\ 2x - 3y + z,\ x)$

Questão 3) Considerando as operações soma e multiplicação por escalar usuais do domínio e do contradomínio de cada transformação abaixo listada, identifique quais delas são lineares e quais não são, sempre justificando a sua resposta.

a) $A: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $A(x) = 2x$

b) $B: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que $B(x) = kx$, onde $k \in \mathbb{N}$ é fixo

c) $C: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $C(x, y) = (xy, y)$

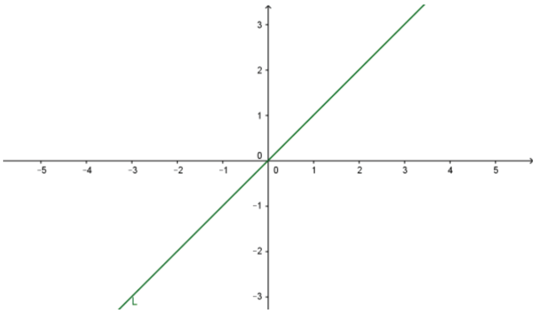
d) $D: P_3 \longrightarrow P_3$ tal que $D(p) = p'$(derivada de p), onde P_3 representa o espaço vetorial dos polinômios com coeficientes reais de grau menor ou igual a 3.

e) $F: M(n \times n) \longrightarrow M(n \times n)$ tal que $F(A) = AB$, onde $M(n \times n)$ é o espaço vetorial das matrizes quadradas de ordem n com entradas reais, $A \in M(n \times n)$ e B é uma matriz fixa em $M(n \times n)$.

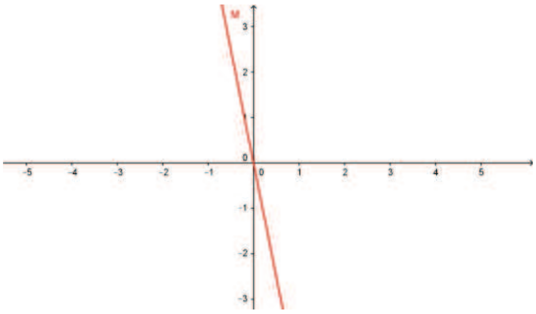
f) $G: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $G(x) = ax + b$, onde $a, b \in \mathbb{R}$

Questão 4) Utilizando o software Geogebra, foi plotado o gráfico de algumas transformações. Os gráficos dos itens I, II e III correspondem a gráficos de transformações lineares e os gráficos dos itens IV, V e VI a gráficos de transformações não lineares.

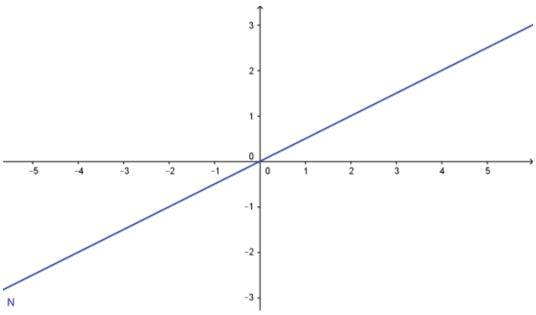
I) $L: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $L(x) = x$



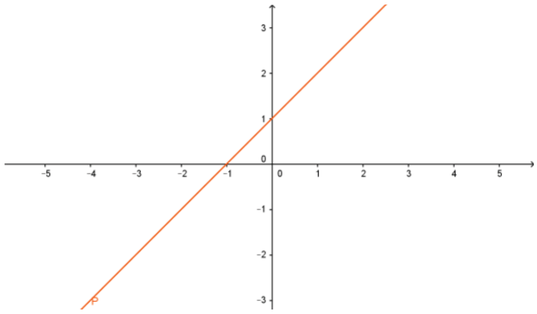
II) $M: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $M(x) = -5x$



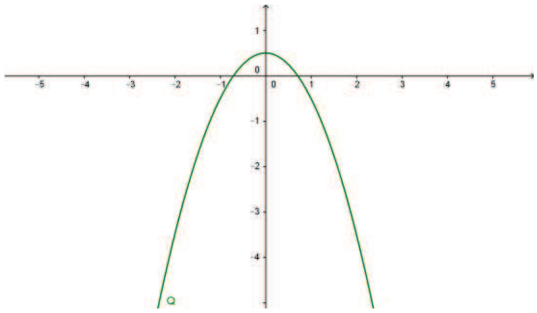
III) $N: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $N(x) = \frac{x}{2}$



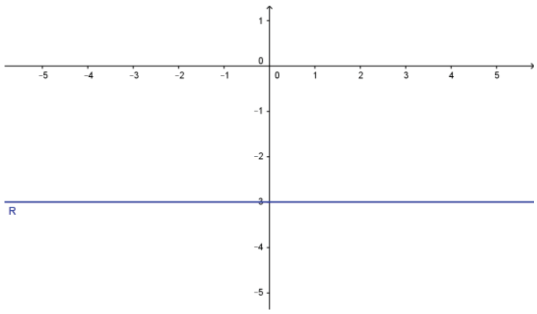
IV) $P: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $P(x) = x + 1$



V) $Q: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $Q(x) = -x^2 + \frac{1}{2}$



VI) $R: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $R(x) = -3$



a) Compare e analise o gráfico de todas as transformações lineares. O que há em comum nesses gráficos tirando o fato de todos serem retas?

b) Compare e analise o gráfico de todas as transformações não lineares. O que há em comum?

c) Aplique as respostas dos itens (a) e (b) nos itens da Questão 2, de acordo com sua classificação de linear ou não linear, verificando se as condições são satisfeitas em outros casos particulares. A que conclusão se chega?

d) Prove que o resultado do item (a) é válido para qualquer transformação linear.

Questão 5) Em computação gráfica e geometria são comuns problemas de rotação de objetos no plano e no espaço. Esses problemas podem ser desenvolvidos recorrendo à teoria dos números complexos simplesmente utilizando a parte operacional por meio de suas operações usuais e da representação de um número complexo em forma de vetor como criado por Hamilton em 1835 (e visto na história exposta no início dessas aulas) associada com a visão geométrica dessas operações no plano Argand-Gauss, onde cada número complexo da forma $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e i a unidade imaginária, é representado na forma vetorial (a, b) e assim representado no plano Argand-Gauss como uma representação de um vetor real no plano cartesiano.

Utilizando o software Geogebra podemos obter a representação geométrica de um número complexo a partir da notação dada por Hamilton. Assim, com o auxílio deste software, faça o que se pede.

a) Marque o ponto $z_1 = 2 + 3i$.

b) Marque os pontos abaixo e explicite o número complexo

b.1) $z_2 = iz_1 =$ ______________________

b.2) $z_3 = iz_2 =$ ______________________

b.3) $z_4 = iz_3 =$ ______________________

b.4) $z_5 = iz_4 =$ ______________________

c) Observando o gráfico obtido com a marcação dos pontos dos itens (a) e (b), que conclusões você tira a partir destas construções?

d) Dado um número complexo qualquer $z = a + bi$, qual seria o número correspondente a uma rotação arbitrária de 90º (90 graus) deste número z?

e) Qual a função que determina a rotação obtida no item (d)?

f) Prove que a função obtida no item (e) é linear.

APÊNDICE R – Plano da Aula 7

Aula 7: 11/02/2017

8:45h às 10:15h – Sala S-802B (Laboratório de Informática)

Conteúdo: Conceito de transformação linear.

Objetivos:

- Refletir sobre as várias formas de apresentação de uma transformação linear e a necessidade de provar resultados/afirmações matemáticas.
- Aplicar o conceito de transformação linear na resolução de problemas e questões.

Metodologia:

1º Momento: Questão 5 da Tarefa 4 – Modelação com o Geogebra.

Desenvolvimento das ações: Controle da realização das ações desenvolvidas e avaliação da assimilação do procedimento geral como resultado da solução da tarefa de aprendizagem dada.

Para esta atividade de aprendizagem serão priorizadas as seguintes ações mentais: refletir, aplicar o conceito e generalizar.

- Colocar cada grupo em um computador, solicitar que abram o software Geogebra e que aguardem as instruções do professor.
- O professor terá seu computador ligado a um datashow para mostrar aos alunos como manusear o Geogebra a fim de resolverem à Questão 5 (Apêndice Q).
- Conduzir a turma na resolução do problema, mostrando os comandos necessários para a execução do software e resolução da questão.
- Por meio de perguntas, conduzir os grupos na análise da plotagem obtida no software de modo que eles consigam responder a todos os itens do problema.
- Responder item por item para possibilitar a análise e correção de cada um deles antes de passar para o item seguinte, a fim de que o aluno vá construindo o seu pensamento acerca a situação proposta.

2º Momento: Verificação da aprendizagem.

Desenvolvimento da ação: verificação da aprendizagem do conceito.

Para esta atividade de aprendizagem serão priorizadas as seguintes ações mentais: refletir, aplicar o conceito e generalizar.

- Aplicar a Tarefa 5 (Apêndice S): os alunos resolverão esta tarefa de forma individual e sem consulta a materiais didáticos.
- Informar aos alunos que esta tarefa será corrigida e entregue pelo professor posteriormente.

Durante toda a aula:

Avaliação por parte do aluno: Através de uma autoavaliação, o aluno deverá determinar qualitativamente o grau de formação do procedimento geral usado na resolução da tarefa.

Avaliação por parte do professor: Avaliar qualitativa e substancialmente se os alunos estão se apropriando do procedimento geral de solução da tarefa como um procedimento mental, ou seja, se está havendo formação do conceito. Para isto, durante toda a aula o professor deverá analisar e responder às seguintes perguntas:

- Os alunos estão assimilando o procedimento geral de resolução da tarefa? Em que medida?
- O resultado das ações dos alunos corresponde ao objetivo da aprendizagem? Em que medida?

Referências Bibliográficas:

BOLDRINI, José Luiz, et al. *Álgebra Linear*. 3ª edição Ampliada e Revista. São Paulo: Editora Harbra Ltda, 1986.

BOYER, Carl B. *História da Matemática*. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Bücher, Editora da Universidade de São Paulo, 1974.

EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Tradução: Hygino H. Domingues. 5ª ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

MESQUITA, Aline Mota de. *Teoria dos Códigos Corretores de Erros*. 2005, 67 f. Monografia (Especialização em Matemática) – Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, Goiânia, 2005.

______. *Uma melhora das cotas de Feng-Rao e de Miura para a distância mínima de códigos definidos sobre uma variedade afim*. 2007, 77 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, Goiânia, 2007.

STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. *Álgebra Linear*. 2ª edição. São Paulo: Pearson Ed. Makron Books, 2008.

APÊNDICE S – Tarefa 5

Nome: ____

Questão 1) Crie uma transformação linear e mostre que é linear.

Questão 2) Crie uma transformação não linear e mostre que ela não é linear.

Questão 3) O conceito de transformação linear e toda a teoria decorrente deste conceito são ferramentas essenciais para o desenvolvimento da teoria dos códigos corretores de erros, teoria esta que tem tomado papel importantíssimo mediante o desenvolvimento tecnológico que surgiu desde a década de 1940, década do surgimento desta teoria, especificamente, em julho de 1948 com Claude Shannon, e tem se desenvolvido atualmente com as evoluções do campo computacional e tecnológico à medida que se deseje uma comunicação confiável, onde a mensagem enviada é exatamente a mensagem recebida. Dentre as situações em que se usa um código corretor de erros, podemos citar: digitalização de fotografias, transmissões via rádio e televisão, uso de computadores, gravação de informações em pen drive, CD ou DVD, etc.

Mesquita (2005; 2007) ao estudar esta teoria descreve algumas classes de códigos nas quais o processo de codificação e decodificação de mensagens se dá mediante uma transformação linear. A autora (MESQUITA, 2005) cita casos reais onde transformações lineares foram fundamentais, dentre elas temos a transmissão e recepção de fotos de Marte feitas pela nave espacial Mariner 9 em 1972. Essas fotos não eram coloridas como temos hoje, mas sim em preto e branco, sendo as imagens formadas por partes pretas, partes brancas e partes cinzas (junção do preto e do branco). Assim, em cada foto, eram analisados os tons das cores (preto, branco e cinza) e a cada um deles fazia-se corresponder um código binário de comprimento seis (um elemento do tipo $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$, onde $x_i \in \{0,1\}$ para cada $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$) que era levado mediante uma transformação linear injetora em um conjunto também binário cujos elementos tinham comprimento trinta e dois. Esse era o processo de codificação e cada tom de cor codificado recebe o nome de *palavra do código*. A decodificação se dava através da transformação linear inversa dessa transformação linear.

Para especificarmos uma transformação linear, consideremos uma situação descrita pela mesma autora (MESQUITA, 2007) e que foi adaptada para este texto: os Códigos de Goppa são considerados bons códigos devido à sua facilidade de codificar e decodificar mensagens, isso comparado a outras classes de códigos; eles são utilizados tanto na teoria dos códigos corretores de erros quanto em certas classes de criptografia de chave pública. O código de Goppa descrito pela autora (MESQUITA, 2007) na página 24 deste trabalho pode ser obtido mediante a transformação linear

$$C: \{0,1\} \to \{0,1\}^8 \quad \text{dada por} \quad C(x_1, x_2) = (x_1 + x_2,\ x_1,\ x_1 + x_2,\ x_2,\ x_1, x_1 + x_2, x_1,\ x_2)$$

ou, em forma matricial

$$C(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Maiores detalhes sobre este código foram omitidos por demandar conhecimentos que extrapolam o objetivo do presente texto.

De acordo com tal explanação,

a) qual a imagem da palavra $(0,0)$ por meio da aplicação C? Justifique.

b) mostre que a transformação C é linear.

Questão 4) Conforme vimos na história, o conceito de determinante surgiu primeiro que o conceito de matriz. Determinantes foram criados por Kowa em 1683 no Japão e, independentemente, por Leibniz em 1693 na Alemanha com o intuito de resolver sistemas lineares. Já as matrizes foram introduzidas formalmente por Cayley em 1855, que, dentre suas classificações, estão as matrizes quadradas, cuja quantidade de linhas é igual à quantidade de colunas, sendo que o conjunto de todas as matrizes quadradas de ordem n formam um espaço vetorial. Hoje em dia a associação dos conceitos de matriz e determinante está tão forte em nossa mente que sempre que falamos de um deles o outro automaticamente nos vem à memória, de forma que para cada matriz quadrada podemos calcular seu determinante. Assim, podemos criar uma aplicação que associa cada matriz quadrada com seu determinante. Pensando, particularmente, no conjunto das matrizes quadradas de ordem dois podemos criar a seguinte aplicação:

$$T: M(2 \times 2) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longmapsto \det A = ad - bc$$

onde $M(2 \times 2)$ é o conjunto de todas as matrizes quadradas de ordem 2 e A é uma matriz desse conjunto. Podemos também representar esta aplicação da forma $T(A) = \det A$, onde A é uma matriz quadrada de ordem 2.

Diante desta situação, decida se a aplicação T é linear ou não. Justifique sua resposta dando um argumento lógico ou um contraexemplo.

Questão 5) Leonardo Fibonacci (1175 – 1250) também conhecido por Leonardo de Pisa, foi o matemático mais talentoso da Idade Média. Por seu pai trabalhar com negócios mercantis, desenvolveu logo cedo o interesse pela aritmética, o que o fez se dedicar a este ramo da matemática e realizar viagens pelo Egito, Sicília, Grécia e Síria, entrando em contato direto com os procedimentos matemáticos desenvolvidos pelos orientais e árabes. Em 1202, Fibonacci lança sua obra mais famosa, o *Liber abaci*, que se preocupa com a aritmética e álgebra elementares. Dentre os problemas que constam neste livro, o de maior destaque e repercussão é o seguinte:

Quantos pares de coelhos são produzidos num ano, começando com um só par, se em cada mês cada par gera um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês?

Este célebre problema dá origem à Sequência de Fibonacci $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$, onde cada termo após os dois primeiros é a soma dos dois imediatamente precedentes. Considerando $u_1 = 1, u_2 = 1, u_3 = 2, u_4 = 3, \ldots, u_n, \ldots$ podemos escrever a Sequência de Fibonacci como

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1} \text{ para } n \geq 2, \text{ com } u_1 = 1 \text{ e } u_2 = 1.$$

Essa forma de escrever uma sequência é chamada de *fórmula de recorrência*, onde, dados dois termos consecutivos de uma sequência pode-se determinar os demais.

A Sequência de Fibonacci pode ser encontrada em diversos lugares como, por exemplo, na distribuição das folhas em um galho de uma árvore qualquer, nas espirais formadas pelos gomos da casca de um abacaxi, na quantidade de sementes do girassol e da margarida, nas conchas do molusco marinho Nautilus pompilius, nos chifres dos carneiros, no formato de algumas galáxias e em algumas medidas do corpo humano.

Por meio da fórmula de recorrência $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ para $n \geq 2$ e variando os valores de u_1 e u_2 podemos determinar várias outras sequências, por exemplo:

$$2, 4, 6, 10, 16, 26, 42, \dots$$

$$10, 10, 20, 30, 50, 80, 130, \dots$$

$$0, -1, -1, -2, -3, -5, -8, -13, \dots$$

Chamemos de $\mathcal{R}$ o conjunto de todas as sequências reais que satisfazem à recorrência

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1} \text{ para } n \geq 2.$$

Este conjunto é um espaço vetorial real munidos das operações soma e multiplicação por escalar, onde a operação soma é dada pela adição termo a termo das sequências e a multiplicação por escalar é multiplicar cada termo da sequência pelo escalar dado.

Assim, podemos definir a aplicação

$$T: \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(u_n) \longmapsto (u_1, u_2)$$

onde (u_n) representa uma sequência qualquer do conjunto $\mathcal{R}$.

Mostre que T é uma transformação linear.

Referências Bibliográficas

MESQUITA, Aline Mota de. *Teoria dos Códigos Corretores de Erros*. 2005, 67 f. Monografia (Especialização em Matemática) – Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, Goiânia, 2005.

______. *Uma melhora das cotas de Feng-Rao e de Miura para a distância mínima de códigos definidos sobre uma variedade afim*. 2007, 77 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, Goiânia, 2007.

APÊNDICE T – Roteiro para observação das aulas

Contexto da sala de aula

1. Interação entre os alunos e entre os alunos e o professor.
2. Comportamento dos alunos durante a aula: atenção, interesse, cumprimento de regras, respeito entre os alunos, polidez, gentileza, cortesia, etc.
3. Assuntos que os alunos levantam durante as aulas referentes ao seu contexto sociocultural e ao seu conhecimento cotidiano.
4. Relatos da experiência do aluno com o conteúdo da aprendizagem.
5. Presença/ausência das condições materiais necessárias para as aulas.
6. Outros aspectos relevantes.

Ações de ensino do professor

1. Aplicação do plano de ensino.
2. Formas de interação com os alunos.
3. Mediações didáticas que o professor promove: instrumentos utilizados para se colocar entre o aluno e o conhecimento a ser aprendido.
4. Presença/ausência das condições materiais necessárias para as aulas.
5. Outros aspectos relevantes.

Ações de aprendizagem dos alunos

1. Envolvimento e participação dos alunos na atividade de aprendizagem.
2. Comentários favoráveis ou desfavoráveis acerca do conteúdo e sua aprendizagem.
3. Capacidade de formular perguntas e de expor o seu pensamento.
4. Movimento do conhecimento indo do interpessoal para o intrapessoal.
5. Capacidade de realização das tarefas.
6. Mediação cognitivas: desenvolvimento de ações mentais.
7. Indícios de formação do conceito: ascensão do pensamento indo do concreto empírico ao abstrato e depois ao concreto pensado.
8. Outros aspectos relevantes.

APÊNDICE U – Quadro das conclusões, dadas por seus autores, das obras selecionadas no levantamento bibliográfico

Quadro – Conceito analisado e conclusão obtida pelos autores sobre a validação de sua proposta metodológicas de acordo com a abordagem teórica utilizada.

Conceito analisado	**Autor**	**Abordagem teórica**	**Conclusão dos autores sobre a validação da proposta metodológica**
Todos os conceitos da disciplina – uma proposta para um curso de Álgebra Linear	Cardoso (2014)	Teoria dos Registros de Representações Semióticas	O uso de vídeos digitais, disponibilizados via canal desenvolvido no site YouTube, associados às aulas reversas, contribui para a aproximação entre estudantes e professor durante as aulas, o que facilita a mediação docente durante o processo de conceptualização nessa disciplina.
Base de um espaço vetorial	Fontenele (2013)	Sequência Fedathi; Alavanca Meta	A Sequência Fedathi favoreceu o uso de recursos passíveis de se tornarem Alavancas Meta para os alunos, sendo determinante na mediação do professor. Os alunos vivenciaram a construção de saberes, explorando seus significados.
Sistemas de equações lineares	Silva, A. (2014)	Modelo Teórico dos Campos Semânticos; Teoria dos Registros de Representações Semióticas	A visualização gráfica por meio do *software* GeoGebra foi importante para o entendimento dos conteúdos, mostrando aos alunos outra perspectiva do conteúdo estudado, sendo viável o paralelo entre a representação gráfica e a algébrica.
	Silva, T. (2016)	Teoria dos Registros de Representações Semióticas	Houve avanços na construção do conceito de sistemas lineares de três incógnitas tendo o auxílio do *software* Winplot, sendo possível uma abordagem que articule o registro algébrico com o registro gráfico, enfatizando as relações existentes entre a Geometria Analítica Espacial e a Álgebra Linear.
Transformação Linear	Santos (2013)	Teoria dos Registros de Representações Semióticas	A aprendizagem dos alunos converge para maiores produções de significado ao utilizar o recurso das múltiplas representações e

Transformação Linear			com o auxílio do *software* GeoGebra. As aulas também se tornaram mais motivadoras, gerando uma aprendizagem significativa e interligada à futura profissão.
	Arrebola (2013)	Teoria dos Registros de Representações Semióticas; Teoria Cognitiva da Aprendizagem Multimídia; Teoria dos Campos Conceituais	Houve um ganho na aprendizagem do objeto matemático no ambiente geométrico dinâmico Cabri-Géomètre em relação à aprendizagem em um ambiente papel e lápis. Os alunos puderam transitar entre as representações gráfica, algébrica e matricial do conceito, auxiliando na apreensão do objeto.
	Silva, E. (2015)	Teoria das Situações Didáticas	O desenvolvimento de atividades baseadas nos pressupostos teóricos apresentados, por meio de uma sequência didática adequadamente planejada e com mediação por tecnologias digitais, em específico do *software* GeoGebra, pode auxiliar os estudantes a desenvolver autonomia na aprendizagem e ganhos cognitivos consideráveis, ainda que permaneçam dificuldades relacionadas à construção conceitual.
	Karrer (2006)	Teoria dos Registros de Representações Semióticas	Houve evoluções dos sujeitos na compreensão das condições de determinação de transformações lineares e de particularidades gráficas inerentes a estas, compreendidas a partir da análise gráfica por meio do *software* Cabri-Géomètre, além de um domínio mais amplo das diversas representações e de suas conversões.

Fonte: Elaborado pela autora a partir dos resumos e das considerações finais das obras.

ANEXOS

ANEXO A – Autorização da Instituição para realização do experimento didático formativo

INSTITUTO FEDERAL
GOIÁS
Campus Goiânia

Ministério da Educação
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
Departamento de Áreas Acadêmicas 4
Coordenação de Engenharia Elétrica

Goiânia, 19 de Janeiro de 2017.

Do: Coordenador do Curso de Engenharia Elétrica
Para: Prof. José Eder Salvador de Vasconcelos

Ilmo. Prof. ***José Eder Salvador de Vasconcelos***, atualmente ministrando a disciplina de Álgebra Linear para o Curso de Bacharelado de Engenharia Elétrica:

Venho por meio desta autorizar a profa. ***Aline Mota de Mesquita Assis***, professora lotada no Departamento de Áreas Acadêmicas II deste Instituto, doutoranda em Educação pela PUC Goiás a realizar um experimento didático que se refere ao processo de ensino e aprendizagem da Álgebra Linear, fundamentada na Teoria do Ensino Desenvolvimental.

Segue abaixo os dados do projeto da pesquisa desenvolvida pela profa. ***Aline Mota de Mesquita Assis***:

Título: "*O Processo de Ensino-aprendizagem do Conceito de Transformação Linear sob a Perspectiva da Teoria Histórico-Cultural*".

Orientador: Prof. Dr. ***Duelci Aparecido de Freitas Vaz*** (PUC Goiás)

Informo que, de acordo com entendimentos, não haverá prejuízos em termos dos conteúdos necessários para os alunos do curso; apenas haverá um experimento didático acerca das metodologias de ensino empregadas.

Dedes já agradecemos a compreensão e, sem mais para o momento, colocamo-nos à disposição para quaisquer outras eventualidades.

Atenciosamente,

Prof. Samir Youssif Wehbi Arabi
Coordenador do Curso de Engenharia Elétrica

Prof. Samir Youssif Wehbi Arabi
Coord. de Engenharia Elétrica IFG
Port. Nº 133 de 28/01/2016

Ciente:

Alexandre Silva Duarte
Diretor-Geral do Câmpus Goiânia

ANEXO B – Termo de consentimento como sujeito da pesquisa

Eu, ____, RG nº _____________________, CPF nº __________________________ abaixo assinado, concordo em participar da Pesquisa "O Processo de Ensino-aprendizagem do Conceito de Transformação Linear sob a Perspectiva da Teoria Histórico-Cultural", como sujeito. Fui devidamente informado e esclarecido pela pesquisadora Aline Mota de Mesquita Assis sobre a pesquisa, os procedimentos nela envolvidos, assim como os possíveis riscos e benefícios decorrentes de minha participação. Foi-me garantido o sigilo das informações e que posso retirar meu consentimento a qualquer momento, sem que isto leve a qualquer penalidade ou interrupção de meu acompanhamento/assistência/tratamento.

Goiânia, 21 de janeiro de 2017.

Nome: ____

Assinatura do sujeito: ____

Presenciamos a solicitação de consentimento, esclarecimentos sobre a pesquisa e aceite do sujeito em particular.

Testemunhas (não ligada à equipe de pesquisadores):

Nome: ____ Assinatura: ____________________

Nome: ____ Assinatura: ____________________

ANEXO C – Declaração de autorização para gravação em áudio e vídeo

Eu, ____, RG nº ______________________, autorizo a gravação em áudio e vídeo, durante a coleta de dados da pesquisa intitulada "O Processo de Ensino-aprendizagem do Conceito de Transformação Linear sob a Perspectiva da Teoria Histórico-Cultural", realizada pela pesquisadora Aline Mota de Mesquita Assis, R.G. nº 4346379 2ª via, SSP/GO, sob orientação da Prof.ª Dra. Beatriz Aparecida Zanatta e coorientação do Prof. Dr. Duelci Aparecido de Freitas Vaz.

Goiânia, 21 de janeiro de 2017.

____

Assinatura

ANEXO D – Termo de consentimento livre e esclarecido

Você está sendo convidado(a) a participar, como voluntário(a), em uma pesquisa. Após ser esclarecido(a) sobre as informações a seguir, no caso de aceitar fazer parte do estudo, assine o final deste documento, que está em duas vias. Uma via é sua e a outra é da pesquisadora responsável. Em caso de recusa, o senhor(a) não participará da pesquisa e não será passível de nenhum tipo de pena ou prejuízo.

Informações sobre a pesquisa
Título: "O Processo de Ensino-aprendizagem do Conceito de Transformação Linear sob a Perspectiva da Teoria Histórico-Cultural"

Pesquisador Responsável: os responsáveis pela pesquisa são a Doutoranda Aline Mota de Mesquita Assis, sua orientadora, Prof.ª Dra. Beatriz Aparecida Zanatta e seu coorientador Prof. Dr. Duelci Aparecido de Freitas Vaz. A pesquisa é para a tese de Doutorado no Programa de Pós-Graduação em Educação (Mestrado e Doutorado) da Pontifícia Universidade Católica de Goiás (PUC Goiás). Os telefones para contato são: 62 3946-1673 (PUC Goiás) e 62 99649-2592 (Aline) – e-mail: amm.aline@gmail.com. Os pesquisadores poderão ser contatados a qualquer momento, antes, durante e após a realização da pesquisa, para tirar dúvidas e prestar esclarecimentos, mesmo em ligações a cobrar. Poderá ser contatado o Comitê de Ética em Pesquisa da PUC Goiás, pelo telefone (62) 3946-1512, caso o sujeito envolvido na pesquisa sinta-se prejudicado ou lesado.

Objetivo da pesquisa: Analisar as contribuições e os desafios da teoria histórico-cultural, em específico, da teoria do ensino desenvolvimental para o ensino de Álgebra Linear e sua aplicação prática, tendo em vista a aprendizagem do conceito de transformação linear pelos alunos do segundo período do curso de Engenharia Elétrica do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás (IFG) – Câmpus Goiânia.

Descrição da participação dos sujeitos na pesquisa: Estudantes matriculados na disciplina Álgebra Linear do segundo período do curso de Engenharia Elétrica do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás (IFG) – Câmpus Goiânia, serão convidados a participar da investigação empírica durante a observação e participar da realização do experimento didático formativo, com previsão de 12 aulas (6 aulas de uma hora e meia cada).

Esclarecimentos dos riscos e benefícios

Estudantes:

- Durante a realização da pesquisa empírica, o professor será acompanhado pela pesquisadora.
- Os riscos relacionados à participação dos estudantes são mínimos, podendo apenas provocar um incômodo comum ao se dedicar ao conteúdo da aprendizagem requeridos durante a realização das aulas do experimento didático.
- O benefício de participar dessa pesquisa consiste em colaborar com a comunidade científica.

Outros esclarecimentos:

- Os materiais e dados obtidos na coleta de dados não serão utilizados para fins alheios a esta pesquisa e os resultados poderão ser divulgados em eventos e/ou revistas científicas.
- Somente a pesquisadora e a orientadora terão acesso ao material, resguardando-se totalmente a confidencialidade da identidade dos sujeitos e sua privacidade.
- Os conteúdos serão gravados em áudio e vídeo e serão realizadas com autorização expressa do participante e servirão para análise posterior.
- Quanto à destinação do material coletado para a pesquisa, este será destruído e descartado após 6 (seis) meses da defesa da tese, que está prevista para agosto de 2018.
- Não haverá nenhuma indenização ou ressarcimento decorrentes da participação do sujeito na pesquisa.
- Nós garantimos que em momento algum nenhuma informação pessoal dos alunos que for conhecida será divulgada, seus dados permanecerão confidenciais e sua privacidade será totalmente preservada.
- O estudante tem plena liberdade de não aceitar participar dessa pesquisa e não haverá nenhuma modificação em seu tratamento caso não aceite.

Goiânia, 21 de janeiro de 2017.

Aluno(a): ____

Assinatura do aluno(a): ____

Pesquisadora: Aline Mota de Mesquita Assis

Assinatura da pesquisadora: ____