PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE GOIÁS
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
ESCOLA DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES E HUMANIDADES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO *STRICTO SENSU* EM EDUCAÇÃO

ARTUR JOSÉ DE OLIVEIRA E SILVA

APRENDIZAGEM DO CONCEITO FRAÇÃO: UM EXPERIMENTO DE ENSINO BASEADO NA TEORIA DO ENSINO DESENVOLVIMENTAL

Goiânia/Goiás
2018

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE GOIÁS
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
ESCOLA DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES E HUMANIDADES
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO *STRICTO SENSU* EM EDUCAÇÃO

ARTUR JOSÉ DE OLIVEIRA E SILVA

APRENDIZAGEM DO CONCEITO FRAÇÃO: UM EXPERIMENTO DE ENSINO BASEADO NA TEORIA DO ENSINO DESENVOLVIMENTAL

Dissertação apresentada à Banca Examinadora do Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Educação, da Pontifícia Universidade Católica de Goiás – PUC/GO, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação, sob a orientação da Profª. Drª. Beatriz Aparecida Zanatta

Linha de Pesquisa: Teorias da Educação e Processos Pedagógicos

Goiânia/Goiás

2018

Dados Internacionais de Catalogação da Publicação (CIP)
(Sistema de Bibliotecas PUC Goiás)

S586e
Silva, Artur José de Oliveira e
Aprendizagem do Conceito Fração: um Experimento de Ensino baseado na Teoria do Ensino Desenvolvimental [manuscrito] / Artur José de Oliveira e Silva; orientado por Profa. Dra. Beatriz Aparecida Zanatta.-- 2018. 164 f.; 30 cm
Texto em português com resumo em inglês. Dissertação (mestrado) - Universidade Católica de Goiás, Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Educação, Goiânia, 2018 Inclui referências, f. 156-164

1. Davydov,Vasily Vasilyevich (1930-1988). 2. Professores - conceituação de fração (matemática) - Formação. 3. Arte - Estudo e ensino. 4. Pedagogia crítica - Teoria de Davydov. I.Zanatta, Beatriz Aparecida. II.Universidade Católica de Goiás. III. Título.

CDU: 377.8(043)

APRENDIZAGEM DO CONCEITO FRAÇÃO: UM EXPERIMENTO DE ENSINO BASEADO NA TEORIA DO ENSINO DESENVOLVIMENTAL

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Educação da Pontifícia Universidade Católica de Goiás, aprovada em 23 de agosto de 2018.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Beatriz Aparecida Zanatta / PUC Goiás (Presidente)

Duelci A. F. Vaz

Prof. Dr. Duelci Aparecida de Freitas Vaz / PUC Goiás

Sandra V. L. Rosa.

Profa. Dra. Sandra Valéria Limonta Rosa / UFG

Profa. Dra. Raquel Aparecida Marra da Madeira Freitas / PUC Goiás (Suplente)

Prof. Dr. Kariton Pereira Lula / IFG (Suplente)

Aos amigos, pela força, incentivo e apoio incondicional, por entenderem os momentos de ausência, nessa etapa tão desafiadora da vida acadêmica, principalmente nos momentos mais conflitantes enfrentados nos últimos anos de estudo. Em especial: Márcio Bessa, Adevane Pinto, Wilker Rodrigues, Cynara Núbia, Adriano Pinheiro, Aloísio Andrade, cujo carinho, confiança e palavras de incentivo fizeram toda a diferença.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela luz e energia espiritual que iluminam os meus passos, por ter-me concedido saúde, força e disposição na realização dessa pesquisa.

À Professora Doutora Beatriz Aparecida Zanatta, pela competência e paciência na direção desse estudo, pelo apoio e pela confiança, além de incansável dedicação nessa pesquisa.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Educação (Curso de Mestrado), da Pontifícia Universidade Católica de Goiás – PUC, pelas contribuições às minhas reflexões sobre o processo de ensinar e aprender, de acordo com a teoria Histórico-Cultural de Lev Semenovitch Vygotsky e da teoria do ensino desenvolvimental de Vasily Vasilyevich Davydov, teóricos que subsidiaram a presente pesquisa.

Aos estudantes do curso de Pedagogia, em especial, ao grupo de estudantes que participou do estudo empírico dessa pesquisa e que possibilitou as condições para a reflexão da atividade de ensinar e de aprender, no contexto de um curso de formação de professores.

À minha mãe, Maria de Oliveira e Silva, que sempre esteve ao meu lado, aconselhando, incentivando e dando apoio para que eu pudesse alcançar meus objetivos.

Ao companheiro Márcio Leite de Bessa que sempre acreditou em meu potencial, dando-me força, motivação e subsídios, durante todo o percurso de estudos. Ao professor Wilker Rodrigues de Oliveira por ter aceitado o desafio de aprender a teoria do ensino desenvolvimental e ser professor colaborador desse estudo.

Ao professor Adevane da Silva Pinto, coordenador de curso da instituição pesquisada, cujo incentivo e apreço foram significativos, no desenvolvimento do experimento didático-formativo.

Aos gestores da Escola Municipal Profª Divina Maria Felício, de Terezópolis de Goiás e da Escola Municipal Jalles Machado de Siqueira, de Goiânia-Goiás, por terem sido compreensivos sempre que eu necessitei me afastar para estudos e eventos do mestrado.

RESUMO

SILVA, Artur José de Oliveira e. **Aprendizagem do Conceito Fração: um Experimento de Ensino baseado na Teoria do Ensino Desenvolvimental.** Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de Goiás: Goiânia, 2018.

Este trabalho, inscrito na linha de pesquisa Teorias da Educação e Processos Pedagógicos, parte de uma compreensão fundamentada na teoria Histórico-Cultural, segundo a qual a escola é o lugar privilegiado na formação de conceitos científicos pelos estudantes, sendo essa a forma de aprendizagem que melhor contribui para o seu desenvolvimento como ser humano integral. Busca esclarecer como organizar o ensino de matemática, fundamentado na teoria do ensino desenvolvimental, para ajudar os estudantes do curso de Licenciatura em Pedagogia, a formar o pensamento teórico do conceito de fração. Para tanto, abordou-se a formação de conceitos, particularmente do conceito matemático de fração, com interesse teórico e prático voltado para a formação inicial dos futuros professores que vão ensinar matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. A pesquisa teve como objetivos: Compreender as contribuições da teoria do ensino desenvolvimental para a formação do conceito de fração, por estudantes do curso de licenciatura em Pedagogia de uma instituição pública de ensino superior do Estado de Goiás; apreender no decorrer do processo de ensino-aprendizagem do conceito de fração, elementos que indicam mudanças qualitativas e quantitativas no desenvolvimento do pensamento do estudante; apontar as peculiaridades da teoria do ensino desenvolvimental para organização do ensino do conceito de fração, considerando o contexto da formação dos estudantes do curso de Pedagogia. Para investigar o problema, realizou-se um experimento de ensino, baseado nos pressupostos de Davydov, em uma turma do curso de licenciatura em Pedagogia, com 36 (trinta e seis) estudantes. A coleta de dados envolveu aplicação de questionários, entrevistas e gravações em áudio e vídeo. Para a categorização e sistematização dos dados, foram delineadas os seguintes momentos (1) Aproximação com o conceito de fração na busca da relação universal do objeto estudado; (2) A modelação da relação universal; (3) Interiorização da relação universal do conceito de fração, a partir da transformação do modelo; (4) Abstração na formação do conceito de fração e a construção do sistema de tarefas particulares; (5) Controle da realização das ações mentais na formação do conceito de fração; (6) Avaliação da assimilação na formação do conceito de fração, por meio da resolução de problemas. A análise dos dados revelou que a principal contribuição dessa pesquisa consistiu em mostrar um caminho alternativo de organização do ensino de matemática, especificamente do conceito de fração, pois o experimento permitiu verificar que, em média, 70,53% (setenta vírgula cinquenta e três por cento) dos estudantes tiveram mudanças qualitativas no modo de pensar a matemática e o conceito de fração.

Palavras-Chave: Formação de conceitos em matemática. Ensino-aprendizagem do conceito de fração. Teoria do ensino desenvolvimental.

ABSTRACT

SILVA, Artur José de Oliveira e. **Aprendizagem do Conceito Fração: um Experimento de Ensino baseado na Teoria do Ensino Desenvolvimental**. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de Goiás: Goiânia, 2018.

This research, inscribed in the line of research Theories of Education and Pedagogical Processes, starts from an understanding based on the Historical-Cultural theory, according to which the school is the privileged place in the formation of scientific concepts by the students, being the form of learning that best contributes to its development as an integral human being. It seeks to clarify how to organize the Mathematich teaching, based on the the developmental teaching theory, to help the Pedagogy course students to form a fraction concept theoretical thinking. For this, the concepts construction, particularly the mathematical concept of fraction, was approached with theoretical and practical interest in the future teachers formation who will teach mathematics in the Elementary School initial years. The research objectives were: to understand the developmental theory contributions to the formation of the fraction concept, by the licentiate course in Pedagogy students of a public institution of higher education in the Goiás State; To understand in the course of the teaching-learning process of the fraction concept of elements that indicate qualitative and quantitative changes in the development of student thinking; To point out the developmental theory peculiarities of teaching the fraction concept considering the context of the Pedagogy course students formation. To investigate the problem, a teaching experiment was carried out, based on Davydov's assumptions, in a group of 36 undergraduate students in a Pedagogy course. Data collection involved questionnaires application, interviews and audio and video recordings. For the data categorization and systematization, the following moments were delineated (1) Approach with the fraction concept in the search for the universal relation of the studied object (2) Modeling the universal relation (3) Internalization of the fraction concept universal relation (4) Abstraction in the fraction concept formation and the particular tasks construction (5) Control of the mental actions realization in the formation of the fraction concept (6) Evaluation of the assimilation in the fraction concept formation through of problem solving. The data analysis revealed that this research main contribution was to show an alternative way of organizing the Mathematics teaching, specifically the fraction concept, since the experiment showed that, on average, 70.53% (seventy point fifty-three percent) of the students pointed out qualitative changes in the mathematical way of thinking and the fraction concept.

Keywords: Concept formation in Mathematics. Teaching-learning of the fraction concept. Developmental teaching Theory.

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Esta pesquisa teve por objetivo analisar a aprendizagem do conceito de fração por estudantes da disciplina de Educação Matemática, do curso de licenciatura em Pedagogia de uma instituição pública de ensino superior do estado de Goiás. O interesse pelo estudo dessa temática surgiu em decorrência da atividade profissional como professor na Educação Básica, como também de envolvimento com disciplinas ligadas à formação do pedagogo. Esses fatores permitiram pensar mais sistematicamente sobre a metodologia de ensino de matemática, focando na formação inicial de professores, especificamente, no curso de Pedagogia.

O exercício da docência na Educação Básica, a convivência com inúmeros problemas, fizeram com que um sempre chamasse a atenção com respeito à carência de aportes teóricos e metodológicos, da maioria dos professores de matemática, para que sua atividade de ensino resultasse na aprendizagem dos conceitos. Mesmo que esses professores busquem contribuições teórico-metodológicas, sempre que possível, com o desejo de mudar sua prática e melhorar o crescimento intelectual de seus estudantes.

Como professor, no curso de Pedagogia e, em decorrência da participação em uma pesquisa sobre formação de conceitos fundamentada na Teoria de V. V. Davydov, realizada no curso de Pedagogia (BESSA, 2015), percebeu-se que a fragilidade teórico-metodológica, também, apresentava-se na formação inicial, pois os futuros licenciados nem sempre alcançavam a aprendizagem dos conceitos matemáticos essenciais para o exercício da profissão. Nesse aspecto, essa pesquisa revelou a necessidade dos avanços qualitativos da formação dos futuros professores de matemática nos anos iniciais, o que acaba por refletir na prática pedagógica do ensino de matemática, ainda que o professor não possa ser o único responsável pelo desempenho dos estudantes.

No contexto educacional brasileiro, essa formação remete à determinação legal que regulamenta a prática profissional do pedagogo. Segundo as Diretrizes Curriculares Nacionais para o curso de graduação em Pedagogia, cabe ao professor/pedagogo, especificamente, a responsabilidade pela inserção das crianças e/ou adultos na vida escolar. O Art. 4 da legislação atribui ainda ao licenciado em Pedagogia a atuação: “nos cursos de Ensino Médio, na modalidade Normal, de Educação Profissional na área de serviços e apoio escolar e em outras áreas nas quais sejam previstos conhecimentos pedagógicos” (BRASIL, 2006)

A leitura do artigo citado, bem como dos demais artigos que compõem o documento, permite constatar que, embora essas diretrizes deixem claro que a ênfase está na docência, expressam a necessidade de uma amplitude de conhecimentos de que o professor precisa se apropriar, em apenas quatro anos de formação inicial[1]. O que acaba inviabilizando um maior aprofundamento dos conceitos essenciais em disciplinas fundamentais para o exercício da docência. Isso resulta em uma série de fragilidades na prática dos professores, particularmente, no que se refere à sua efetiva capacidade de promover, de fato, nos estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental, o desenvolvimento cognitivo por meio da apropriação de conceitos matemáticos básicos.

A pesquisa realizada por Libâneo (2010), sobre a qualidade da formação profissional de professores nos cursos de Pedagogia do estado de Goiás, oferece valiosos subsídios para o entendimento da questão. Ao analisar as ementas da disciplina *Fundamentos da Matemática*, Libâneo verificou que a denominação “fundamentos” refere-se a princípios básicos, nos quais se deve apoiar o ensino da disciplina, sem relacioná-los aos conteúdos matemáticos. Outra constatação foi a de que a maioria das ementas, “[...] apresentam os elementos metodológicos da matemática, às vezes com alguma menção à epistemologia da disciplina, mas raramente sem articulação com o conteúdo específico” (LIBÂNEO, 2010, p. 570). No que se refere aos conteúdos da disciplina, a análise não revelou, de forma sistemática, a relação entre os conteúdos de matemática a serem ensinados às crianças - número, fração, multiplicação, dentre outros -, e a metodologia de ensino. Assim, ensina-se a metodologia de ensino, mas, não se ensinam os conteúdos dessa disciplina. Com isso, a formação de conceitos científicos ou teóricos conceituais deixa a desejar, o que limita os professores a trabalharem em sala de aula, apenas, com o conhecimento baseado na memorização de definições do livro didático (LIBÂNEO, 2010; GATTI e NUNES, 2009; GATTI, 2013).

[1] O curso de licenciatura em Pedagogia foi tipificado como formação inicial por se tratar da 1ª formação profissional dos sujeitos da pesquisa, no entanto, não foram desconsiderados, para análise dos dados, os anos anteriores de formação da educação básica.

Segundo Libâneo (2010), “[...] parece haver um entendimento entre os professores-formadores e entre os coordenadores de curso responsáveis pelo currículo de que os estudantes de pedagogia já dominam esses conteúdos, trazidos do ensino médio, o que, como se sabe, não acontece.” (LIBÂNEO, 2010, p. 573). O que sinaliza mudanças necessárias no processo de ensino-aprendizagem de matemática, para que os cursos de licenciatura em Pedagogia possam oferecer, ao futuro professor, uma base conceitual que contemple as necessidades da prática pedagógica, condizentes com as demandas atuais da sociedade. Nesse sentido, Lanner de Moura (2016), ao argumentar que os professores que ensinam matemática nos anos iniciais deveriam ter uma formação com foco no estudo dos conceitos, enfatiza a importância de “[...] uma visão lógico-histórica do conhecimento que busca na história do conceito a dinâmica de sua criação” uma vez que “[...] é nesta dinâmica que se encerra o próprio método de aprender o conceito” (LANNER DE MOURA, 2016, p.20).

Entende-se que, no processo de ensino-aprendizagem dos conceitos matemáticos, a disciplina de *Fundamentos e Metodologia de Ensino de Matemática* tem papel fundamental, principalmente, em se tratando de cursos de formação de professores. Visto que os objetivos de aprendizagem que se espera que os estudantes alcancem, devem ser, antes, objetivos de formação de professores. São fortes, portanto, os motivos para que a disciplina *Metodologia de Ensino de Matemática*, oferecida nos cursos de licenciatura em Pedagogia, busque novos aportes teóricos para atender necessidades educativas presentes. Esse foi um dos motivos que encaminhou essa pesquisa para a definição do tema da formação de conceitos matemáticos na formação de professores.

Ao se considerar que a formação de conceitos científicos na escola, como formularam Vygotsky (2008) e Davydov (1982, 1988), está na base do processo de desenvolvimento do pensamento dos estudantes, permitindo ir além de uma aprendizagem com dimensão puramente quantitativa, para alcançar a dimensão qualitativa, é relevante focalizar o problema da formação de conceitos, privilegiando, para isso, a formação inicial dos professores que vão atuar nos anos iniciais do Ensino Fundamental, incluindo o conceito matemático de fração. Os conceitos e princípios teóricos discutidos por esses autores são de grande importância, pois há, entre eles, uma tese comum de que a educação sistematizada desempenha papel fundamental no desenvolvimento cognitivo do sujeito. Uma vez que, como processo social de mediação cultural, produz mudanças qualitativas na constituição subjetiva das pessoas, em suas formas de se relacionar com o conhecimento, com a realidade e com os outros. Nesse sentido, Vygotsky (1982, 2007) afirma que a criança já chega à escola com conhecimentos adquiridos em situações informais de aprendizagem, que são os conceitos espontâneos; porém, é na escola, na aprendizagem mediada pelo processo de ensino, que deve ocorrer à apropriação de conceitos científicos.

Desse modo, a atividade de ensino do professor desempenha papel fundamental na formação e no desenvolvimento dos estudantes como sujeitos conscientes de sua história social. Isso não significa que haja correspondência direta entre a atividade de ensino e o desenvolvimento do estudante, mas que essa atividade é uma forma necessária e relevante para o desenvolvimento das funções psíquicas superiores, no decorrer do processo de apropriação, pelos estudantes, de conceitos impregnados da experiência histórica. Assim, entende-se que a disciplina *Metodologia do Ensino de Matemática*, no curso de Pedagogia - Licenciatura deve dispor aos futuros professores esse fundamento histórico-cultural.

Com base nas contribuições da teoria Histórico-Cultural, Davydov (1982, 1988) elaborou a teoria do ensino desenvolvimental, cujas premissas estão voltadas à defesa da escola e do ensino como um dos principais meios de promoção do desenvolvimento psicológico humano desde a infância. O que coloca para os professores, especificamente para os professores dos anos iniciais, o desafio de organizar intencionalmente "[...] situações de ensino que possibilitem a apropriação de conceitos de modo que estes sejam ferramentas simbólicas capazes de munir os sujeitos de instrumentos e modo de usá-los para aprimorar cada vez mais os seus processos de construção da vida" (LANNER DE MOURA, 2016, pp. 10 - 11). Ou seja, organizar o ensino de modo que o processo educativo escolar possa contribuir, por meio da atividade de estudo, para que o estudante forme em sua mente o pensamento teórico, relacionado ao objeto científico que ele aprende.

Acredita-se que o ensino de matemática tem muito a se beneficiar das contribuições da abordagem Histórico-Cultural, particularmente de Davydov, cujo legado teórico, conforme destaca Freitas (2011, p.71), "[...] aponta caminhos para todo o professor que busque constituir sua atividade de ensino como processo que contribui para a constituição da subjetividade de seus estudantes, promovendo seu desenvolvimento".

Com essa intenção, Davydov sistematizou um método de ensino: o ensino desenvolvimental, que valoriza a mediação e postula a organização didática do conteúdo como um dos elementos básicos do ensino, além de outros importantes para o desenvolvimento das funções mentais do estudante e de sua formação humana. Nesse processo, o autor postula a conexão entre a atividade de ensino do professor e a atividade de aprendizagem do estudante; a apropriação de conceitos relacionados ao objeto de estudo, vinculados ao desenvolvimento das capacidades cognitivas, relacionadas a esse objeto; a apropriação dos conceitos centrais do objeto estudado de modo a utilizá-lo, posteriormente, nas atividades cotidianas e o desenvolvimento das capacidades e habilidades cognitivas no processo de aprendizagem dos conceitos.

Pesquisas realizadas por Carraher (2001), Aparecido dos Santos (2005), Khidir (2006), Cavalcante (2013), Soares (2007), Ribeiro (2008), Demartini (2009), Rosa (2009), Baccarin (2009), Limonta (2009), Mezzaroba (2009), Moysés (2010), Dias (2010), Peres (2010), Peres e Freitas (2014), Silva (2015), Gonçalves Silva (2010), Moura (2010a, 2010b, 2012), Santos (2014), Catanante e Araújo (2014), Lemos (2014), Bessa (2015), Barros (2015), Rodrigues (2015), Crestani (2013), Souza (2015), Silva (2015), Galdino (2016) dentre outros, revelam que, de maneira geral, os estudantes, tanto do Ensino Fundamental quanto do Ensino Superior, estão apresentando dificuldades de aprendizagem de conceitos matemáticos.

Ao colocar em questão a qualidade da aprendizagem dos estudantes, ao longo do processo de escolarização, esses estudos criticam o ensino de conceito matemático, pautado apenas na lógica formal e apresentam as possibilidades de organizar o ensino do conteúdo sobre a formação de conceitos, levando-se em conta ações que possibilitem o desenvolvimento do pensamento dos estudantes do geral para o particular, do abstrato para o concreto. Apontam, também, que os autores clássicos da teoria Histórico-Cultural, como Vygotsky, Leontiev e Luria são relativamente conhecidos no campo educacional. Tanto que, nas políticas públicas educacionais, o que se identifica é a menção, principalmente à teoria Histórico-Cultural de Vygotsky, que aparece nas propostas que foram, ou estão sendo, implementadas pelo Ministério da Educação, por algumas Secretarias Estaduais e Municipais de Educação. Contudo, o que se constata, na realidade educacional, é uma precária apropriação teórica e metodológica dos fundamentos da teoria Histórico-Cultural, quando não uma leitura mais superficial que pouco tem contribuído para, efetivamente, se refletir em mudanças nas práticas pedagógicas e, consequentemente, no processo de aprendizagem dos estudantes.

Diante desse contexto educacional, não se conseguem, em geral, formar relações entre os conteúdos dessa disciplina que permeiam, direta ou indiretamente, sua prática social diária. Não se "interiorizam" os conceitos, que são encontrados no modo próprio de pensar e de atuar da matemática que está sendo ensinada e, assim, os conceitos não se transformam em instrumentos mentais para atuar com a realidade. Portanto, os estudantes, por não compreenderem a importância dos conteúdos de matemática para suas vidas, comportam-se formalmente na sala de aula, ou seja, cumprem os deveres para conseguir aprovação da disciplina, sem se envolverem de forma mais profunda com os conteúdos estudados. Isso acaba por limitar o desenvolvimento no modo de pensar dos estudantes em relação à matemática e, por conseguinte, o desenvolvimento humano. Por esse motivo, a necessidade de se buscarem alternativas teórico-metodológicas que possam contribuir para a superação desses problemas.

A partir da revisão bibliográfica realizada sobre o tema, foram identificadas as pesquisas de Sylvio (2015) e Silva (2010) que, com base na teoria Histórico-Cultural, tratam da formação do conceito de fração. Esses estudos delineiam caminhos criativos para o processo de ensino-aprendizagem de matemática da educação básica, indicando procedimentos operacionais do método de ensino que viabilizam o processo de ensino, tal como ele é concebido teórica e metodologicamente. Apontam, também, para a necessidade de pesquisas sobre o ensino dos diversos conteúdos científicos da matemática escolar, como contribuição à constituição de formas de organização do ensino para desenvolvimento do pensamento matemático do estudante. Porém, não foram identificados estudos que, com base na abordagem Histórico-Cultural e, especificamente da teoria do ensino desenvolvimental, tratassem do ensino do conceito fração, na formação de professores do curso de licenciatura em Pedagogia.

Desse modo, considerando que o nível de aprendizagem dos conceitos matemáticos, dos anos iniciais no Ensino Fundamental, tem relação significativa com a formação acadêmica dos professores, faz-se necessário investigar, problematizar e desenvolver estudos que contribuam para uma reflexão mais crítica, acerca dessa formação. Compartilha-se, portanto, do entendimento de que, ao ensinar, o professor exerce um papel significativo, quando realiza a mediação didática entre a cultura produzida historicamente e a interiorização, apropriação e reprodução dos conceitos por parte dos estudantes. O que requer do professor, uma consistente formação teórica. Assim, a presente investigação enfatizou essa formação no curso de graduação em Pedagogia-Licenciatura, a partir de alguns questionamentos, a saber: Que repercussões teria, na qualidade da aprendizagem do graduando de Pedagogia, o ensino do conceito fração, fundamentado na teoria do ensino desenvolvimental? Que contradições envolvem a realização prática do ensino desenvolvimental no contexto de um curso de graduação em Pedagogia? Qual a visão dos futuros professores, que se preparam para assumir a docência na educação infantil e anos iniciais do Ensino Fundamental, ao aprenderem o conceito de fração por meio do ensino desenvolvimental? Que análise os estudantes fazem de sua aprendizagem mediante esse ensino?

Justifica-se, nesse trabalho, a escolha do conceito de fração, pois o mesmo envolve outros conceitos como, por exemplo, o de números decimais, porcentagens, divisão, reta numérica, comparação, dentre outros. Por meio do ensino desse conceito, o professor ajuda a criança a desenvolver as ferramentas mentais, os conceitos científicos, necessários para explicar os fatos da vida cotidiana. Além disso, está no grupo dos conceitos que apresentam, em geral, grande dificuldade de aprendizagem pelos estudantes de Pedagogia, configurando-se um dos grandes desafios em sua formação, em especial aqueles que ensinam esse conteúdo aos estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental. Nesse sentido, Saviani (2011) escreve:

> É preciso, pois, ficar claro que não é possível equacionar devidamente o problema da formação dos professores sem enfrentar simultaneamente a questão das condições de exercício do trabalho docente. Isso porque, de fato, esses dois aspectos se articulam e se relacionam na forma de ação recíproca. Com efeito, por um lado o entendimento de que o trabalho docente é condicionado pela formação resulta uma evidência lógica, assumindo o caráter consensual do enunciado de que uma boa formação se constitui em premissa necessária para o desenvolvimento de um trabalho docente qualitativamente satisfatório. Inversamente, é também consensual que uma formação precária tende a repercutir negativamente na qualidade do trabalho docente. Por outro lado, embora esse aspecto não seja muito enfatizado, constitui, também, uma evidência lógica que as condições do exercício do magistério reciprocamente determinam a qualidade da formação docente (SAVIANI, 2011, p. 16).

O problema que se buscou investigar pode ser assim expresso: o ensino de matemática, fundamentado na teoria do ensino desenvolvimental, pode ajudar os estudantes do curso de Pedagogia – Licenciatura, a formar o pensamento teórico do conceito de fração?

A pesquisa partiu do pressuposto de que a teoria do ensino desenvolvimental pode ajudar a desenvolver um pensamento teórico do conceito de fração, por meio das atividades desenvolvidas em sala de aula. Mas, considerando-se que a metodologia de ensino utilizada no curso de Pedagogia não está orientada nessa perspectiva, a práxis desse tipo de ensino pode revelar contradições.

Assim, essa pesquisa teve como objetivo geral o de analisar as contribuições da teoria do ensino desenvolvimental para a formação do conceito de fração, por estudantes do curso de Pedagogia, de uma instituição pública de Ensino Superior do Estado de Goiás.

Essa meta se desdobra em objetivos mais específicos, como:

Realizar a análise do desenvolvimento lógico-histórico do conceito de fração, a fim de apreender as relações, nele presentes, e o tipo de movimento mental que ele contém, para identificar as ações mentais a serem contempladas no planejamento e na condução da atividade de estudo;

Apreender, no decorrer do processo de ensino-aprendizagem do conceito de fração, elementos que indicam mudanças qualitativas e quantitativas no desenvolvimento do pensamento do estudante;

Apontar as peculiaridades da teoria do ensino desenvolvimental para organização do ensino do conceito de fração, considerando o contexto da formação dos estudantes do curso de Pedagogia, de uma instituição pública de ensino superior do estado de Goiás.

A pesquisa foi desenvolvida com base na teoria Histórico–Cultural e teoria do ensino desenvolvimental, basicamente, de Lev. S. Vygotsky (1987, 1998, 2007, 2008, 2009, 2010) e Vasili Vasilievich Davydov (1982; 1988), e seus seguidores como Leontiev (1978, 1991), Hedegaard (2002), dentre outros. A formulação do problema, bem como dos objetivos e da fundamentação teórica, utilizados nessa pesquisa, apontam para uma pesquisa de campo que consistiu em um experimento didático-formativo, como explica Hedegaard (2002, p. 352), “[...] o experimento didático é uma concretização da afirmação de Vygotsky de que o método genético formativo é um método de pesquisa necessário para investigar a formulação e o desenvolvimento dos aspectos conscientes da relação dos seres humanos com o mundo".

Segundo Vygotsky (2007), o experimento formativo é um meio efetivo de estudo do desenvolvimento do estudante em seu processo real, no qual o pesquisador deve exercer a função de observador e não de controlador.

Na mesma linha, Libâneo (2007, p. 11) concebe o experimento formativo como "[...] uma intervenção pedagógica por meio de uma determinada metodologia de ensino, visando interferir nas ações mentais dos estudantes e provocar mudanças em relação a níveis futuros esperados de desenvolvimento mental". Com esse propósito, escreve Freitas (2011), que o pesquisador:

> [..] deve ter como objetivo a compreensão das relações intrínsecas entre as tarefas externas e a dinâmica do desenvolvimento, e deve considerar a formação de conceitos como uma função do crescimento social e cultural global do adolescente, que afeta não apenas o conteúdo, mas também o método de seu raciocínio (FREITAS, 2011, p. 5).

De acordo com Libâneo e Freitas (2013, p. 338), isso requer uma organização da atividade de aprendizagem "[...] orientada para a apreensão dos modos generalizados de ações materiais e cognitivas com os objetos de conhecimento, isto é, para o conhecimento teórico generalizado".

Isso exige que, no planejamento do ensino, o professor deverá considerar o procedimento de ascensão do abstrato para o concreto, para que a aprendizagem dos estudantes supere as ações pré-concebidas, por meio da interiorização do princípio geral do conceito de fração. Nesse processo, a organização interna, decorrente da apropriação de signos externos, é que promove mudanças qualitativas nos sujeitos investigados. E o movimento dessas mudanças é que constitui a finalidade do experimento, isto é, "[...] o plano ensina cada um dos estudantes a pensar com independência, ao passo que o velho sistema de ensino atribuía essa obrigação apenas ao professor em nome de toda a turma" (VYGOTSKY, 2010, p. 239).

Nesse sentido, o que se buscou nessa pesquisa foi uma explicação para as possíveis mudanças qualitativas no pensamento dos estudantes, por meio da realização de tarefas propostas no experimento. Desse modo, os passos do experimento foram pensados, estabelecendo a relação entre a realização de tarefas pelos estudantes do curso de Pedagogia e o desenvolvimento de ações mentais, necessárias à apropriação do conceito de fração. Para isso, Davydov (1982; 1988) recomenda uma organização do ensino que contemple a análise lógica e histórica, psicológica e pedagógica do conteúdo, para que se possam planejar atividades de aprendizagem, de modo a conduzir o estudante a reproduzir o conceito, transformando-o em ferramenta própria.

Seguindo essa orientação, a pesquisa caracterizou-se como experimento didático-formativo, realizado com um professor com formação específica, que ministra a disciplina de *Matemática* no curso de Pedagogia, especificamente no 4º período. Pretendeu-se colocar em prática um procedimento investigativo que, por meio de um acompanhamento assistido do trabalho do professor, pudesse auxiliar a sua prática profissional no ensino de matemática escolar. Na verdade, ao entender, como Vygotsky (2009), que o ensino para a formação de conceitos nos estudantes supõe uma atuação intencional do professor na formação das ações mentais, pôde-se supor que a aprendizagem de práticas de ensino pelo professor pudesse passar pela mesma lógica. As informações e os dados necessários à concretização dessa pesquisa foram coletados por meio dos seguintes procedimentos: (1) Observação e registro com gravação em áudio e vídeo, antes e durante o experimento didático-formativo; (2) Entrevistas semiestruturadas com os estudantes e professores, com gravação em áudio; (3) Aplicação de questionários para o conhecimento mais aprofundado da turma, crenças e históricos de aprendizagens; (4) Análise de documentos relacionados à atividade de aprendizagem dos estudantes como tarefas, avaliações e outros; (5) Análise estatística dos resultados das avaliações diagnósticas I e II, aplicada antes e depois do experimento didático-formativo.

A análise dos dados teve como foco o processo de formação de conceitos e os elementos intervenientes nesse processo. Para análise, foram consideradas as seguintes categorias: Atividade de Ensino; Atividade de Aprendizagem, Interação; Mediação; Zona de Desenvolvimento Proximal; Formação de conceitos/pensamento teórico; Fatores socioculturais e a contextualização do conhecimento desenvolvida pelos estudantes, durante a realização do experimento didático-formativo e suas experiências extraclasses. O que se buscou evidenciar, por meio da análise dos dados, foram os ganhos percentuais de aprendizagem, tendo em vista os referenciais adotados como avaliações diagnósticas realizadas no início da execução do experimento didático-formativo, avaliações efetivadas durante e no final do experimento. Utilizaram-se, como referência, as seis ações propostas por Davydov (1988):

> A primeira ação é a transformação dos dados da tarefa a fim de revelar a relação universal do objeto estudado;
> A segunda ação de estudo é a modelação desta relação diferenciada em forma objetivada, gráfica ou por meio de letras;
> A terceira ação de estudo, os estudantes devem transformar o modelo da relação para estudar suas propriedades em forma pura;
> A quarta ação é a construção do sistema de tarefas particulares que podem ser resolvidas por um procedimento geral;
> A quinta ação refere-se ao controle (ou monitoramento) da realização de todas as ações anteriores;
> A sexta ação refere-se à avaliação do procedimento geral como resultado da solução da tarefa de aprendizagem dada (DAVYDOV, 1988, p. 99).

Essas tarefas significam, para Libâneo e Freitas (2013, p. 344), “[...] utilizar meios de organização do ensino que levem os estudantes a formarem, ativamente, novo nível de desenvolvimento de suas capacidades intelectuais e não simplesmente a adaptarem-se ao nível de desenvolvimento presente, já formado”

O que se espera com essa pesquisa é produzir uma análise crítica acerca das possibilidades e dos desafios concretos do ensino do conceito de fração, organizado segundo os princípios da teoria do ensino desenvolvimental e desenvolvido no contexto de um curso de Pedagogia, de uma instituição pública do Estado de Goiás. Essa análise pode fornecer elementos que sirvam como referência aos professores de matemática, que buscam promover melhor aprendizagem de seus estudantes, particularmente à aprendizagem do conceito de fração. Ao mesmo tempo, pretende-se com os resultados da pesquisa ampliar a reflexão didática sob a perspectiva da teoria Histórico-Cultural e da teoria do ensino desenvolvimental. Essas contribuições se estendem à didática de matemática.

A presente dissertação, fundamentada na teoria Histórico-Cultural de Vygotsky e na teoria do ensino desenvolvimental de Davydov, foi organizada para conter, além da introdução e das considerações finais, três capítulos, a seguir discriminados.

No primeiro capítulo, ao discutir o processo de ensino-aprendizagem do conceito de fração, destacou-se a importância científica e social do conceito, por meio de uma breve revisão de literatura para investigar o que tem sido produzido sobre esse conceito na perspectiva da teoria Histórico-Cultural, ou seja, o ensino-aprendizagem do conceito de fração: da lógica formal a lógica dialética. Por fim, foi traçado um paralelo entre a lógica formal, a lógica dialética e o estudo específico das frações.

No segundo capítulo, foi dada ênfase na formação de conceitos na perspectiva Histórico-Cultural e do ensino desenvolvimental, em que se fez um recorte teórico sobre as produções relacionadas à formação de conceitos, destacando, principalmente, a construção histórica do conceito de fração e a organização da atividade de ensino para a formação do conceito de fração.

No terceiro, e último capítulo, foram exibidos os dados coletados, bem como a análise de todo material empírico, trazendo, sobretudo, a contextualização das aulas de matemática, a compreensão dos estudantes sobre o conceito de fração, o plano de aula e o experimento de ensino.

Por fim, a consideração final sintetizou os resultados mais significativos, evidenciando, também, as limitações e as possibilidades advindas dessa experiência.

CAPÍTULO I

AS PESQUISAS SOBRE FORMAÇÃO DE CONCEITOS EM MATEMÁTICA

A presente pesquisa se desenvolveu em torno da questão que tentou estimular o ensino de matemática, fundamentado na teoria do ensino desenvolvimental, a ajudar os estudantes, do curso de Pedagogia, a formar o pensamento teórico do conceito de fração. Na busca de esclarecimento para essa questão, realizou-se uma pesquisa bibliográfica sobre formação de conceitos, em matemática, fundamentados na teoria Histórico-Cultural e na teoria do ensino desenvolvimental, com o objetivo de identificar a produção na área da educação matemática, sobre formação de conceitos, especificamente do conceito de fração, no período de 2007 a 2016 e, nesse capítulo, buscou-se descrever a pesquisa e seus resultados.

O capítulo foi estruturado em três partes: a primeira apresenta informações gerais sobre a pesquisa bibliográfica, enquanto a segunda se refere à análise da produção sobre formação de conceitos matemáticos, na perspectiva da teoria Histórico-Cultural e a terceira expõe o resultado das pesquisas sobre o conceito de fração.

1 **Informações sobre a pesquisa bibliográfica**

A preocupação com a formação e a construção de conceitos matemáticos não é recente. Há muitos anos, especialistas da área têm-se destacado nas pesquisas sobre o tema, a partir de diversas abordagens teóricas. Em que pesem as contribuições dessas pesquisas, em função do problema investigado, delimitou-se a revisão da literatura à produção acadêmica sobre formação de conceitos, fundamentados na teoria Histórico-Cultural e na teoria do ensino desenvolvimental, definindo-se como período de abrangência um intervalo temporal entre os anos de 2007 a 2016. A delimitação desse espaço temporal se justifica em razão do levantamento realizado, sobretudo, ao apontar que, até então, eram poucas as investigações na área de educação que se fundamentavam nessa perspectiva teórica. O autor destaca que, em geral, encontram-se pesquisas de mestrado e doutorado fundamentadas na teoria da atividade de Leontiev, desenvolvidas na

Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo - FEUSP, de pesquisadores como Manoel Oriosvaldo de Moura (MOURA, 2010a, 2010b, 2012), D'Ambrósio (1986, 1998, 1999), Sforni (2004), Serrão (2004), Cedro (2008), Cedro, Moraes e Rosa (2010), Asbahr (2011), entre outros, que buscaram investigar o processo de ensino e de aprendizagem de estudantes, mais especificamente dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Já, o levantamento, realizado junto à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES, no período de 2007 a 2016, indica que houve um significativo aumento nas produções que têm como referencial a teoria Histórico-Cultural e a teoria do ensino desenvolvimental. No âmbito dessa produção, podem-se destacar as pesquisas de Khidir (2006), Damico (2007), Soares (2007), Ribeiro (2008), Demartini (2009), Rosa (2009), Baccarin (2009), Mezzaroba (2009), Moysés (2010), Dias (2010), Peres (2010), Gonçalves Silva (2010), Rosa e Hobold (2013), Moura (2010, 2012), Santos (2014), Bessa (2015), Barros (2015), Rodrigues (2015), Crestani (2015), Souza (2015), Galdino (2016), Rezende (2016), Silva (2015), Santos (2014), entre outros.

Ao intentar a busca da contribuição dessas pesquisas para melhor compreender o objeto de estudo, o ensino do conceito de fração para graduandos do curso de Pedagogia, tornou-se necessário esclarecer questões como: O que tem sido investigado sobre a formação de conceitos matemáticos com base na teoria Histórico-Cultural e na teoria do ensino desenvolvimental? Que conceitos são abordados? Para que níveis de ensino essas pesquisas e estudos têm-se voltado?

Para a busca dessa produção, a pesquisa teve como uma das fontes o banco de teses e dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes), que disponibiliza integralmente as teses e dissertações defendidas em Programas de Pós-Graduação no país.

A opção por essas bases de dados justifica-se por: a) permitir uma abrangência nacional/estadual; b) os programas dedicam-se à formação de professores e ao seu desenvolvimento para a atuação no ensino e na pesquisa, concentrando grande parte da pesquisa sobre os temas educacionais e, particularmente, sobre educação integral.

Metodologicamente, na busca e identificação das teses e dissertações, foram utilizadas as seguintes palavras-chave: educação matemática, ensino desenvolvimental, teoria Histórico-Cultural, ensino de matemática, formação de conceito, ensino de frações e formação de conceito de frações no curso de Pedagogia, em várias combinações, como mostra a tabela 1.

TABELA 1: Produção científica sobre ensino de matemática no período de 2007 a 2016

TEMAS	Quantidade	MESTRADO (Dissertações)	DOUTORADO (Teses)
Educação Matemática	321	245	76
Ensino Desenvolvimental	46	33	13
Teoria Histórico Cultural e Ensino de Matemática	35	28	07
Teoria Histórico Cultural e Ensino de Frações	04	03	01
Ensino Desenvolvimental e Ensino de Matemática	08	05	03
Formação de Conceitos e Ensino de Matemática	19	16	03
Ensino Desenvolvimental e Ensino de Frações	00	00	00
Formação de Conceitos de Fração no curso de Pedagogia	00	00	00
Total Geral	**433**	**330**	**103**

FONTE: Tabela elaborada pelo autor com base em dados da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal do Ensino Superior – CAPES e Google Acadêmico.

Foram identificados 433 (quatrocentos e trinta e três) trabalhos, envolvendo temas matemáticos diversos, conforme tabela 1, sendo 330 (trezentos e trinta) dissertações e 103 (cento e três) teses. Desse total, somente 46 (quarenta e seis) trabalhos se referem ao tema “ensino desenvolvimental”, que contabiliza 33 (trinta e três) dissertações e 13 (treze) teses. A presente pesquisa priorizou trabalhos com base teórica na teoria Histórico-Cultural e na teoria do ensino desenvolvimental, por acreditar que o ensino de conceitos matemáticos, nessas perspectivas, promove mudanças qualitativas no modo de operar dos sujeitos que aprendem, estimulando-os a formar o pensamento teórico.

Ao restringir a pesquisa, utilizando o tema “teoria Histórico-Cultural e ensino de matemática”, foram encontrados 35 (trinta e cinco) trabalhos, sendo 28 (vinte e oito) dissertações e 7 (sete) teses. Para o tema “formação de conceitos e ensino de matemática” foram encontrados 19 (dezenove) trabalhos, sendo 16 (dezesseis) dissertações e 3 (três) teses e, ao utilizar o tema “teoria Histórico-Cultural e ensino de frações”, foram encontrados apenas 4 trabalhos, sendo 3 (três) dissertações e 1 (uma) tese.

As 46 (quarenta e seis) pesquisas, fundamentadas na teoria do ensino desenvolvimental encontradas, abrangem várias áreas do conhecimento, como: educação, ensino de ciências, matemática, geografia e física. Ao fazer a pesquisa, utilizando o tema “ensino desenvolvimental e ensino de matemática”, o número de pesquisas encontradas se reduziu para 8 (oito), sendo 5 (cinco) dissertações e 3 (três) teses. Dessa forma, foi possível observar que as investigações baseadas no ensino desenvolvimental ainda são poucas e no campo da formação de conceitos matemáticos, essas quantidades se limitam mais ainda. Ao analisar esses 8 (oito) trabalhos constatou-se que nenhum deles faz referência à formação de conceito de fração na perspectiva do ensino desenvolvimental de Davydov. Assim sendo, para os temas “ensino desenvolvimental e ensino de frações” e “formação de conceitos de fração no curso de pedagogia” não foi encontrado nenhum trabalho.

Ao se analisarem os temas em relação às palavras-chave utilizadas, envolvendo a teoria Histórico-Cultural e o ensino desenvolvimental, conforme apêndice I, foi possível chegar a três agrupamentos que consideram os níveis de ensino a que se referem as pesquisas sobre formação de conceitos matemáticos, descritos na tabela 2, a seguir:

TABELA 2: Teses e dissertações, abordando o tema formação de conceitos em matemática na perspectiva da teoria Histórico-Cultural e teoria do ensino desenvolvimental, no período de 2007 a 2016.

Ano	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	Total
EDUCAÇÃO INFANTIL (Formação de Conceitos Matemáticos)											
Dissertações	00	00	00	01	00	00	00	00	02	01	**04**
Teses	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	**00**
ENSINO FUNDAMENTAL (Formação de Conceitos Matemáticos)											
Dissertações	02	00	00	00	01	01	02	02	07	02	**17**
Teses	00	01	00	00	01	01	02	00	00	00	**05**

ENSINO MÉDIO (Formação de Conceitos Matemáticos)											
Dissertações	00	00	00	02	00	00	01	02	01	04	**10**
Teses	00	00	00	00	00	00	00	00	02	00	**02**
ENSINO SUPERIOR (Formação de Conceitos Matemáticos)											
Dissertações	00	00	00	00	00	00	00	01	01	03	**05**
Teses	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	**00**
ENSINO SUPERIOR – CURSO DE PEDAGOGIA (Formação de Conceitos Matemáticos)											
Dissertações	00	00	00	00	00	00	00	01	00	00	**01**
Teses	00	00	00	00	00	00	01	00	01	00	**02**
ENSINO SUPERIOR – CURSO PEDAGOGIA (Formação de Conceito Fração)											
Dissertações	00	00	00	00	00	00	00	00	01	00	**01**
Teses	00	00	00	00	00	00	00	00	00	00	**00**

Fonte: Tabela elaborada pelo autor com base em dados da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal do Ensino Superior - CAPES e Google Acadêmico.

Na tabela 2, é possível observar a evolução das produções científicas nos últimos 10 (dez) anos, no intervalo de tempo entre 2007 a 2016, de acordo com os níveis de ensino, abordando os temas “formação de conceitos matemáticos” e “formação de conceito de fração”. Verificou-se que os trabalhos científicos, publicados na área da educação matemática, têm crescido de forma expressiva a cada ano. Esse fato pode ser justificado com o aumento de programas de Pós-Graduação Stricto Sensu, principalmente nos programas relacionados à qualificação específica dos professores que atuam na educação básica, entre os quais se destaca o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, o PROFMAT - Pós-graduação *stricto sensu*, para aprimoramento da formação profissional de professores da educação básica, que teve seu início no ano de 2011.

É possível observar na tabela 2 que predominam as produções de dissertações. A maior parte das pesquisas se refere ao Ensino Fundamental e Ensino Médio. Ainda são poucas as produções priorizando a Educação Infantil e o Ensino Superior. Para esses níveis de ensino, foram encontradas 13 (treze) pesquisas, sendo 4 (quatro) dissertações, abordando temas da Educação Infantil, 7 (sete) dissertações e 2 (duas) teses, abordando temas do Ensino Superior, dessas pesquisas apenas 2 (duas) dissertações e 2 (duas) teses se referem ao curso de Pedagogia, objeto dessa investigação.

Outro aspecto relevante analisado diz respeito à base teórica em que as pesquisas se inserem, ao tratarem da formação de conceitos matemáticos, particularmente o conceito de fração.

TABELA 3: Base teórica em que se situam as Teses e Dissertações abordando o tema formação de conceitos matemáticos no período de 2007 a 2016.

Base Teórica	Níveis de Ensino				Referencia	Número de trabalhos		Total
	Ed. Infantil	Fundamental	Médio	Superior		Mestrado	Doutorado	
teoria Histórico-Cultural	03	19	08	08	Vygotsky, Leontiev, Majmutov, Outros.	31	07	38
teoria do ensino desenvolvimental	01	03	04	01	Davydov	07	02	09

FONTE: Tabela elaborada pelo autor com base em dados da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal do Ensino Superior - CAPES - Banco de Teses e Dissertações e Google Acadêmico.

Nesta pesquisa realizada na CAPES e Google Acadêmico, verificamos que ainda não há um número expressivo de produções científicas envolvendo o tema “formação de conceitos matemáticos com base na teoria Histórico-Cultural e teoria do ensino desenvolvimental”, de acordo com a tabela 3, predominam as pesquisas na perspectiva da teoria Histórico-Cultural que tem como referência Vygotsky, Leontiev, Majmutov dentre outros. Esses estudos contabilizam um total de 38 (trinta e oito) trabalhos, sendo 31 (trinta e uma) dissertações e 7 (sete) teses.

Percebe-se, também, um número reduzido de pesquisas na Educação Infantil totalizando 3 (três) pesquisas, no Ensino Médio 8 (oito) pesquisas, e no Ensino Superior 8 (oito) pesquisas, o restante das produções científicas se concentram no Ensino Fundamental, totalizando um quantitativo de 19 (dezenove) trabalhos.

Os estudos que se referem especificamente a teoria do ensino desenvolvimental de Davydov ainda são poucos no campo de ensino de conceitos matemáticos, conforme mostra a tabela 3, foram encontrados 9 (nove) trabalhos, sendo 7 (sete) dissertações e 2 (duas) teses. Foi encontrada 1 (uma) pesquisa que contempla a Educação Infantil nesse período, 3 (três) pesquisas que contemplam o Ensino Fundamental, 4 (quatro) o Ensino Médio e 1 (uma) pesquisa que contempla o

Ensino Superior. Nessa referida perspectiva, não foi encontrado nenhum trabalho que abordasse, especificamente, a formação do conceito de fração, em nenhum dos três níveis de ensino considerado.

2 Dissertações e Teses sobre formação de conceitos fundamentadas nas teorias Histórico-Cultural e no ensino desenvolvimental

De acordo com Mainardes e Pino (2000), as pesquisas fundamentadas na teoria Histórico-Cultural de Vygotsky (1896-1934) vêm se propagando no Brasil desde as décadas de 1980 e 1990, ocasião em que apenas 17 (dezessete) teses e 44 (quarenta e quatro) dissertações foram identificadas. Segundo os autores, nessa década, os trabalhos tratavam de questões e temas sobre aprendizagem e desenvolvimento no contexto escolar, papel da linguagem, interações e mediações sociais, processos de significação, jogo simbólico, entre outros. O crescimento quantitativo dessas pesquisas revela que, desde então, a concepção vygotskyana sobre aprendizagem e desenvolvimento vem ganhando, gradativamente, mais espaço. Essa afirmação pode ser corroborada pela identificação, durante a presente pesquisa, do número de pesquisas realizadas nos últimos dez anos, fundamentadas na teoria Histórico-Cultural, elaborada por Vygotsky e desenvolvida, teoricamente, junto a outros psicólogos e pedagogos como Leontiev, Luria, Galperim, Davydov, entre outros, que apresentam contribuições e subsídios para a realização da atividade pedagógica no campo da educação matemática, em especial, no que se refere ao ensino e à aprendizagem de conceitos matemáticos.

Nesse aspecto, destaca-se a contribuição de Davydov, cujo legado teórico aponta caminhos para o professor que busca organizar a atividade de ensino como processo, que contribui para a formação do pensamento teórico. Com esse propósito, o referido autor dedicou-se ao estudo das questões que envolvem as relações entre ensino e aprendizagem, formação de conceitos, estruturação da atividade de ensino, aprendizagem para a formação de conceitos teóricos e desenvolvimento do pensamento do estudante. Fundamentando-se nas ideias de Vygotsky e, ainda, no conceito de atividade humana descrito por Leontiev, Davydov esboçou a teoria do ensino desenvolvimental, que entrelaça conceitos psicológicos e pedagógicos, situados na perspectiva Histórico-Cultural, tendo em vista a explicação de uma estrutura geral básica da atividade no ensino-aprendizagem das crianças.

Nessa perspectiva, podem-se destacar, de acordo com a revisão realizada pelo autor desse estudo, os seguintes pesquisadores que se apoiam nos pressupostos da teoria Histórico-Cultural, para tratar questões sobre o processo de ensino-aprendizagem de matemática, com vistas a viabilizar condições pedagógicas necessárias à formação de conceitos.

Soares (2007) teve por objetivo a proposição e a implementação das etapas do ensino desenvolvimental no ensino de divisão de números naturais. Sua investigação foi fundamentada na teoria Histórico-Cultural de Vygotsky e teoria do ensino desenvolvimental de Davydov. Procurou responder à questão central da pesquisa que era: como organizar o ensino de matemática para que ocorra melhor aprendizagem dos alunos? Sua pesquisa, de abordagem qualitativa, consistiu em um experimento didático realizado em uma turma do Ciclo 2 (Ensino Fundamental), de uma Escola Municipal de Goiânia. A autora concluiu, por meio da análise dos dados, que a maioria dos estudantes conseguiu alcançar a aprendizagem do conceito ensinado - "divisão de números naturais" -, pela formação do pensamento teórico.

Rosa (2009), estudando o ensino da matemática escolar, especificamente no Ensino Fundamental, evidencia que essa disciplina se destaca entre as disciplinas que os estudantes têm dificuldade em aprender, uma vez que dizem não gostar da disciplina e, com isso, apresentam baixo rendimento, além de outros fatores que perpassam pelo meio social em que os estudantes estão inseridos. Esse trabalho foi fundamentado, principalmente, nas teorias de Vygotsky, Leontiev e Davydov e levou em consideração, também, as ideias de alguns de seus seguidores. A autora realizou um experimento didático-formativo, de acordo com os pressupostos de Davydov (1988), constatando que é possível organizar o ensino de acordo com as premissas do ensino desenvolvimental desse autor, porque houve aprendizagem efetiva, levando-se em conta a maioria dos estudantes envolvidos no processo na aprendizagem da equação do 2º grau. Porém, há a ressalva de alguns estudantes que não obtiveram sucesso, devido a fatores socioculturais e emocionais próprios que os envolviam, acabando por interferir na aprendizagem. A autora alerta, ainda, que o professor deve estar atento às contradições que envolvem a organização do ensino sob tal perspectiva.

Otaviano (2009), estudando o Ensino Médio, investigou em seu trabalho a percepção que os estudantes têm do professor de matemática. A pesquisadora encontrou evidências de que o professor de matemática, da rede privada, demonstra ser mais criativo que o da rede pública. Para desenvolver sua pesquisa, o contexto da criatividade foi trabalhado em relação a diferentes olhares: incentivo a novas ideias, clima para sua expressão, interesse pela aprendizagem do estudante, avaliação e metodologia de ensino, resolução de problemas, interação nas aulas de matemática, enfim, motivação geral. De maneira ampla, o incentivo a novas ideias e o interesse pela aprendizagem do estudante obtiveram os maiores percentuais de criatividade por parte do professor. Por outro lado, a avaliação e a metodologia de ensino ficaram com o pior resultado. De acordo com Vygotsky (1987), pode-se qualificar como atividade criadora qualquer tipo de atividade do homem que crie algo novo, seja qualquer coisa do mundo exterior, ou uma determinada organização do pensamento, ou ainda dos sentimentos, e que atue e esteja presente no próprio homem.

Gonçalves Silva (2010) realizou sua pesquisa com o objetivo de colocar em prática a realização e o acompanhamento de uma unidade didática de plano de ensino, elaborado conjuntamente pela professora da turma e a pesquisadora, sobre “formação de conceito de número”, em uma turma de Educação Infantil, por meio de experimento didático-formativo, na perspectiva da teoria Histórico-Cultural. A pesquisa revelou que, nessa etapa, a contribuição da proposta de Davydov (1988), para o aprimoramento do ensino de matemática, está no fato de auxiliar na conscientização do professor, quanto a aspectos importantes à apropriação dos conceitos, possibilitando sua tradução em estratégias pedagógicas que possam favorecer a aprendizagem da criança, considerando como componentes da atividade: necessidade, motivos, metas, condições, meios, ações e operações. Evidenciou, também, que as crianças conseguiram, em um nível satisfatório, apropriar-se do conceito de número, principalmente porque Davydov (1988), considerando a periodização da atividade principal que deve respaldar o fazer pedagógico, propõe uma organização de ensino que tem como objetivo a apropriação do pensamento teórico-científico, por meio da formação de conceitos.

Peres (2010) desenvolveu uma pesquisa qualitativa experimental, em uma turma do Ensino Médio, fundamentando-se, principalmente, nas teorias de Vygotsky e Davydov. A princípio, a autora mostra que a matemática é uma disciplina marcada pelo baixo desempenho na aprendizagem, cujos conceitos são considerados difíceis de aprender. Essa é uma informação basilar de todos os trabalhos que se propõem a estudar o processo de ensino-aprendizagem de matemática. Enquanto isso, o ensino de geometria espacial tem sido abalizado por seu abandono nas salas de aula. Os resultados desse estudo apontaram que houve melhora (motivação) dos estudantes, durante o ensino experimental, entre os quais se podem destacar: aumento do conhecimento intensificado do conteúdo, após a análise lógica e histórica; uma nova alternativa de organização de ensino aos sujeitos da pesquisa; a formação de conceitos da maioria dos estudantes; melhora na participação de alguns estudantes, mesmo não atingindo o pensamento teórico devido a diversos fatores socioculturais; o experimento de ensino mostrou indícios de mudanças qualitativas na atuação do professor.

Ferreira (2013), estudando a formação e a atuação do (a) professor (a) pedagogo, também evidenciou, em sua pesquisa, que a maior dificuldade do professor ao ensinar os conceitos de matemática nos anos iniciais, especificamente o conceito de quantidade, está no não conhecimento aprofundado do conteúdo por parte dos professores, restringindo-se apenas ao que está para ser ensinado no livro didático. Esse fator leva o professor a se tornar um mero repetidor de conteúdos desse referencial, permanecendo, assim, no universo empírico, não avançando para o campo científico. Nesse sentido, a formação dos conceitos científicos acaba ficando comprometido no espaço escolar. Igualmente, a pesquisadora, também, mostrou que há um entendimento do processo de formação de conceitos, intimamente relacionados à materialização da prática do professor. No entanto, as ações de ensino permanecem voltadas ao conhecimento empírico e o ensino do conceito de quantidade, como o conceito nuclear da matemática, está ausente do entendimento do professor.

Sylvio (2015) considerou o ensino, nos anos iniciais do Ensino Fundamental, como objeto de estudo, analisando suas dimensões política, epistemológica e didática. Buscou sistematizar as principais contribuições da teoria Histórico-Cultural de Vygotsky e da teoria do ensino desenvolvimental de Davydov, para essa etapa de ensino. Sua pesquisa se caracteriza como bibliográfica e documental, tendo como referencial o método dialético materialista. A autora afirma que as referidas teorias podem fundamentar a prática pedagógica dos professores no ensino dos conceitos científicos, organizados em forma de conteúdos escolares, pois contribuem, principalmente, para o desenvolvimento humano. Por fim, conclui que o processo de escolarização é entendido por Davydov como um processo complexo de ensino-aprendizagem em que, ao se apropriar da cultura humana, os estudantes desenvolvem, principalmente, o pensamento teórico.

Santos (2014) se preocupou com as questões do planejamento e desenvolvimento de formação continuada de professores, relacionadas à formação de conceitos para promover mudanças qualitativas no processo ensino e aprendizagem. Sua investigação consistiu, nesse caso, na realização de um experimento didático-formativo, durante um semestre letivo, em uma classe de 3º ano do Ensino Fundamental, em que foram colocados em prática planos de ensino, com base em princípios da teoria Histórico-Cultural, de Vygotsky e da teoria do ensino desenvolvimental de Davydov. Foram, também, objetos de investigação atividades de diagnóstico das práticas de professores alfabetizadores, vigentes na escola e a realização de um curso para os professores alfabetizadores da escola, planejados, previamente, em função da realização do experimento. O experimento mostrou-se eficaz no aprimoramento profissional das professoras e no desenvolvimento dos processos psíquicos das crianças, atuando, também, positivamente, no desenvolvimento pessoal e profissional dos demais pesquisadores envolvidos.

Sousa (2014), em seu estudo, investiga as relações que os professores estabelecem entre a prática docente em matemática, nos anos iniciais, e as possibilidades dessas práticas se basearem nos estudos das proposições davydovianas, com ênfase nos pressupostos da teoria Histórico-Cultural, para o ensino do conceito de número. Fundamenta-se no fato de o desenvolvimento humano ser determinado pelas relações sociais e históricas que os homens estabelecem entre si, para se apropriarem dos conhecimentos acumulados, mediadas pelas ferramentas culturais intencionalmente planejadas, dentre as quais se encontra a atividade de ensinar, peculiar ao trabalho docente. Seu trabalho é de caráter investigação-formação e deriva da pesquisa-ação. Como resultado do processo investigativo, a autora conclui que o contexto de interação discursiva, criado intencionalmente, foi essencial para o desvelamento das necessidades da prática docente em matemática, vivenciada pelos professores; estabelecendo, assim, inter-relações com a proposta de ensino do conceito teórico de número em Davydov. Observou ainda que, para organizar as atividades de estudo, baseadas nas proposições davydovianas do conceito teórico de número, é necessário que haja mudanças da prática vivenciada pelos professores. Para isso, o contexto formativo sobre tais proposições devem articular as relações entre as proposições brasileiras, que norteiam a prática docente com a proposta de ensino de Davydov, permitindo que o sujeito tome consciência dos limites impostos à sua realidade e reconheça a necessidade de aprofundamento teórico dos princípios filosóficos, psicológicos, matemáticos e didáticos que fundamentam a referida proposta.

Cunha (2014), em sua pesquisa, evidencia o baixo desempenho de estudantes na aprendizagem de matemática, e nas avaliações nacionais e internacionais, alertando para a necessidade de mudanças nas práticas de ensino. Sendo assim, mostra que a teoria do ensino desenvolvimental, de Davydov (1982, 1988), pode contribuir e ajudar o professor como aporte teórico, pois favorece a assimilação dos conceitos científicos. Além disso permite pleno desenvolvimento dos estudantes, ao promover mudanças em seus modos de ação na vida social, contribuindo para o ensino-aprendizagem da matemática e, especificamente, do conceito de estatística descritiva. O autor revela em sua pesquisa, realizada no Ensino Médio, que, ao organizar o ensino a partir dessa teoria, faz-se necessário ter como ponto de partida o seu conceito nuclear, que, na pesquisa, foram as relações de contagem e concluiu que a teoria do ensino desenvolvimental oferece importantes contribuições, ao caracterizar, como base para o ensino da Estatística Descritiva, a reflexão dos conceitos como relações fundamentais que a constituem. Dessa forma, dá-se oportunidade aos estudantes de desenvolver um pensamento investigativo e permite, ao professor, que associe o ensino de estatística descritiva aos motivos dos estudantes para sua aprendizagem, permitindo que se apropriem do método de pensamento próprio do objeto a partir da compreensão lógico-histórica de construção de cada conceito.

Mame (2014) traz à tona, em sua pesquisa, uma realidade que tem assustado os professores de matemática, ao constatar que grande parte dos estudantes chega à universidade sem nenhuma base teórica nessa disciplina, enfatizando que faltam, por parte deles, conhecimentos elementares, que servem de base para a apropriação dos conceitos relacionados à disciplina de *Cálculo Diferencial e Integral*. Como consequência, o índice de reprovação é alto. Sua investigação foi de base bibliográfica, tendo como referência as obras davydovianas, com ênfase na formação de conceitos em geometria. Em seus estudos, o autor mostra que a teoria da atividade e psicologia Histórico–Cultural pode nortear e organizar o ensino de matemática. O modo de organização do ensino possibilita, segundo Davydov, expresso no conjunto de tarefas particulares voltadas à geometria, que os estudantes entrem em atividade de estudo. Mame (2014) ressalta que é importante o professor conseguir atender todas as orientações e, se necessário, criar novas. Conclui, ainda, que a proposta, referente à teoria do ensino desenvolvimental, atende aos princípios de uma educação integral, pois leva os estudantes a encontrar seu próprio caminho para a formação científica e de sua vida como um todo.

Melo (2014), com objetivo de elaborar e analisar atividades de geometria, envolvendo a formação de conceito de polígonos semelhantes, em uma turma de primeiro ano do Ensino Técnico, utilizando o software *Geogebra*, destaca que as atividades, a serem realizadas pelos estudantes, podem ser organizadas seguindo os princípios da teoria Histórico-Cultural de Vygotsky (2007) e do ensino desenvolvimental de Davydov (1988). O autor constatou, pela observação em seus estudos, que as referidas teorias possibilitam a criação de um ambiente dinâmico e interativo de aprendizagem, permitindo aos estudantes tornarem-se corresponsáveis pelo processo de construção do seu próprio conhecimento. Sua pesquisa se caracteriza como qualitativa e pode ser classificada como bibliográfica e de campo. A autora concluiu que o software *Geogebra* mostra-se uma importante ferramenta para auxiliar o professor em suas ações pedagógicas, possibilitando a interação e o diálogo, além de mediar a aprendizagem de matemática, bem como a formação de conceitos algébricos ou geométricos.

Barros (2015), em sua pesquisa, investigou a formação de conceitos matemáticos, em estudantes do sexto ano do Ensino Fundamental, utilizando como base teórica a teoria do ensino desenvolvimental, proposta por Davydov, a Investigação matemática embasada em Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) e a utilização do software *Geogebra*. O autor justifica que, ao se estruturar e organizar o ensino, sob a perspectiva da teoria do ensino desenvolvimental, os estudantes tornam-se sujeitos ativos no processo de ensino-aprendizagem, alcançando um novo nível de desenvolvimento intelectual, e não apenas se adaptando ao nível já formado. Dessa maneira, a mediação entre professor e estudante é fator de suma importância na pesquisa, observando-se que, para auxiliar na formação de conceito de perímetro e área de figuras planas, foi utilizado o software *Geogebra*. O autor percebeu, ao concluir sua pesquisa, que atividades sistematizadas, no ensino desenvolvimental, permitem aos estudantes apropriar-se dos conceitos abordados de forma científica, desenvolvendo, assim, o pensamento teórico-científico e permitindo que eles sejam capazes de aplicar esses conceitos na resolução de situações problemas, reais em seu cotidiano.

Souza (2015), destacando a formação de conceito de função por estudantes do Ensino Médio, desenvolveu uma pesquisa qualitativa experimental, mostrando que é possível organizar o ensino, utilizando os pressupostos do ensino desenvolvimental de Davydov (1998) e o ensino problêmico de Majumutov (1983). Os resultados de sua pesquisa apontaram que as duas teorias de ensino privilegiadas se complementam e se aproximam em vários aspectos como, por exemplo, o ensino deve estar voltado ao desenvolvimento do pensamento teórico dos estudantes, uma vez que eles devem aprender a partir de processos investigativos e não de conclusões prontas. O processo ensino-aprendizagem deve proporcionar a apropriação ativa e criativa do conhecimento pelos estudantes e as tarefas devem ter caráter de problemas a serem resolvidos, mediante investigação, contemplando-se as contradições existentes nos objetos de conhecimento. Sendo assim, a autora concluiu que o ensino, estruturado por meio de problemas, com fundamentos nas teorias de Davydov e de Majmutov, apresenta possibilidades efetivas de aprendizagem dos conceitos matemáticos, pois constatou mudanças qualitativas no modo de operar e agir, particularmente com o conceito de função, pelos estudantes.

Moya (2015), em sua investigação, trabalhou com a formação do conceito de número pelas crianças. Para tanto, tendo como aporte teórico a teoria Histórico-Cultural, de Vygotsky (2007), e do ensino desenvolvimental de Davydov (1988), a autora revela que as relações entre as grandezas, sejam elas discretas ou contínuas, são importantes para a compreensão do conceito.

Bessa (2015), com base nos pressupostos da teoria do ensino desenvolvimental, formulada por Davydov (1982, 1988), organizou o plano de ensino que possibilitasse aos estudantes, do curso de pedagogia, formar os conceitos de perímetro e área. A pesquisa foi iniciada com uma avaliação diagnóstica, a qual revelou a falta de domínio, por parte de estudantes que ingressam no curso de Licenciatura em Pedagogia, das operações elementares da matemática, especificamente, dos conteúdos de geometria. Após a realização do experimento didático-formativo, a análise dos dados revelou que a principal contribuição dessa pesquisa consistiu em mostrar um caminho alternativo de organização do ensino de matemática, haja vista que o experimento permitiu verificar que, em média, 85,0% (oitenta e cinco por cento) dos estudantes demonstraram mudanças qualitativas no modo de pensar, teoricamente, o conceito de perímetro e 72,0% (setenta e dois por cento), o conceito de área.

Araujo (2016) fundamentou sua pesquisa na teoria Histórico-Cultural, buscando como tema a "organização do ensino da matemática na Educação Infantil”. Organizou o ensino, tendo como referência a proposição de Davydov, com inserção da atividade orientadora de ensino proposta por Moura. Sua questão de pesquisa foi: o que a proposta de um município do sul de Santa Catarina – que se assume como seguidor da teoria Histórico-Cultural – explicita como princípios para organização do ensino de matemática? A autora analisou as orientações para a organização do ensino da matemática na educação infantil, com fundamentos na perspectiva histórico-cultural, de um município situado no sul do estado de Santa Catarina. A partir da análise da proposta em estudo, a autora verificou que o principal motivo pela reconstrução da proposta foi a implantação do Ensino Fundamental de nove anos, que requereu a urgente reformulação curricular, na Educação Infantil.

Galdino (2016), em seu objetivo de pesquisa, investigou o conhecimento matemático dos estudantes do 3º ano do Ensino Fundamental, sobre o conceito de multiplicação. A referência foi a teoria Histórico-Cultural, mais especificamente a distinção entre pensamento teórico e empírico. Para analisar os dados, a autora utilizou-se de: 1) Descrição construída a partir dos dados que constituem a essência do fenômeno investigado; 2) Revelação da unidade de análise do objeto de pesquisa: a relação entre a lógica adotada no processo de ensino e aprendizagem e o conhecimento produzido pelos estudantes sobre o conceito de multiplicação; 3) Abstrações auxiliares, extraídas no decorrer do processo de organização dos dados: o tipo de generalização, abstração e conceito desenvolvido pelos estudantes; 4) Elaboração dos episódios que explicitam a unidade de análise e os isolados. A autora concluiu, ao analisar os dados, que os resultados obtidos são semelhantes àqueles encontrados por Davydov (1982), ao analisar as proposições para o ensino de matemática em seu país (Rússia), no século XX, denominado pelo autor como ensino tradicional, por sustentar-se na teoria empírica.

De maneira geral, esses estudos apontam avanços na qualidade da educação matemática oferecida aos estudantes que passaram pelos experimentos didáticos e abordagens ancoradas na teoria Histórico-Cultural. Constatou-se, ademais, a preocupação desses autores em investigar a formação de conceitos sobressaindo-se, nos conteúdos da educação matemática, os conceitos de aritmética (divisão de números naturais), geometria (geometria espacial, volume, perímetro e área), estatística, números inteiros, conceito de infinito, álgebra, números racionais, equações, entre outros. Contudo, observou-se também que essas pesquisas enfocaram mais a busca de respostas práticas ligadas ao contexto do processo de formação de conceitos, na realização de tarefas, pelos estudantes, do que ao processo em si.

3 Dissertações e Teses sobre o conceito de fração

Essa pesquisa busca analisar o processo ensino-aprendizagem do conceito fração, com estudantes da disciplina de Educação Matemática, do curso de Licenciatura em Pedagogia, de uma instituição pública de ensino superior, do Estado de Goiás, tendo como fundamento teórico-metodológico a teoria de Davydov. Para obter respostas sobre as publicações, a respeito do tema, buscaram-se localizar estudos específicos sobre o conceito de fração, que apontam contribuições para a organização do ensino desse conceito.

A opção por esse conceito se justifica no fato de ser um conceito relevante e fundamental, em diversas aplicações nas inúmeras áreas do conhecimento. [...] “por ela passam múltiplos nexos históricos, geográficos, geométricos, filosóficos, culturais, físicos, químicos, literários, artísticos etc. É isto que faz da fração a melhor parte do inteiro” (LIMA e MOISÉS, 1998, p.1). Esse é um conceito que os estudantes têm grandes dificuldades em operar e assimilar durante as aulas, por mais simples que seja a situação problema. Campos e Rodrigues (2007) reforçam essa afirmativa ao constatar que [...] “o ensino e aprendizagem de frações constituem um obstáculo considerável para professores e estudantes, desde o 4° (quarto) ano do Ensino Fundamental no Brasil, quando esse tema é abordado” (CAMPOS e RODRIGUES, 2007, p. 01).

Nesse sentido, Dias (2011, p.5) esclarece “[...] que, na matemática, os conceitos são essencialmente teóricos, mas a apropriação destes pelos estudantes nem sempre se dá de forma teórica, sobretudo pelo ensino escolar”. A pesquisadora observa que não se deve confundir a forma teórica com a formalização da matemática; pois, essa última diz respeito à organização de conteúdos em sua forma substancial, e não à explicitação do surgimento e desenvolvimento de seus conceitos na atividade humana. A forma teórica constitui, em seu núcleo, a multilateralidade da composição dos conceitos matemáticos, sendo que a formalização é somente uma parte. Em suas palavras:

> Saber realizar operações aritméticas, demonstrar teoremas, resolver equações pode significar conhecer a técnica que se relaciona com o pensamento empírico e não, necessariamente, conhecer os conceitos de número, de aritmética, de álgebra, etc. inerentes à constituição do objeto matemático que se está mobilizando por meio da linguagem (DIAS, 2011, p. 5)

Fundamentalmente, a fração está na gênese do número racional e, assim sendo, no movimento do pensamento teórico de número. Apesar disso, não é o bastante para distingui-lo, porque, dentre os números racionais, a propriedade numérica é outra, dada pelas semelhanças definidas no conjunto. A identificação da fração com o número racional procedeu-se da representação fracionária, proveniente da relação entre a subdivisão da unidade de medida e “a necessidade dos números racionais”, em virtude da insuficiência dos números inteiros. Essa expressão é representativa de uma justificativa do aparecimento dos números racionais no processo de ensino (DIAS, 2010).

Demartini (2009) realizou sua pesquisa em uma turma de 5º (quinto) ano do Ensino Fundamental, com o objetivo de investigar a formação do conceito de número racional na forma fracionária, bem como identificar dificuldades que os estudantes enfrentam nesse processo. Fundamentou seus estudos em teóricos como Vygotsky e D’Ambrosio, além de autores que abordam o ensino-aprendizagem de número racional na forma fracionária. A autora ressalta que foram elaboradas atividades que favoreciam a aprendizagem e o desenvolvimento da capacidade de interpretar, comparar, analisar, abstrair e generalizar dos estudantes.

Perlin (2014), Rodrigues (2015) e Silva (2015) buscaram investigar a formação de conceito de fração, tendo como aporte teórico os fundamentos da teoria Histórico-Cultural (VIGOTSKY, 1982; LEONTIEV, 198; KOPNIM, 1978, MOURA, 2010a, 2010b, 2012). Esses autores verificaram as dificuldades e as aprendizagens de professores do Ensino Fundamental nos 4º (quarto), 5º (quinto) e 6º (sexto) anos, manifestadas durante o processo formativo, em relação ao conhecimento específico, pedagógico e curricular sobre frações e contextos, envolvendo a organização do ensino. Eles investigaram se as atividades de ensino refletiam no saber pensar e saber fazer dos estudantes, assim como se o pensamento teórico sobre o conceito estava se desenvolvendo nos estudantes.

Martins (2012) ressalta a importância de se buscarem novas alternativas e bases teóricas para o ensino de matemática, especialmente na formação de conceito de fração. Para isso, fundamenta-se na teoria Histórico-Cultural de Vygotsky e na teoria das conversões de registros de representações semióticas de Raymond Duval. Para desenvolver sua pesquisa, pauta-se em estratégias, envolvendo atividades lúdicas, aplicadas de forma exploratória em estudantes do 5ª (quinto) ano do Ensino Fundamental, em uma escola de Florianópolis - SC. Os resultados da aplicação de tais estratégias desenvolvidas mostraram que o ensino de matemática, em especial, de frações, baseando-se nas teorias apresentadas é mais significativo que o ensino tradicional de conceitos e aplicações, pois possibilita que a criança se desenvolva efetivamente e, também, compreenda todos os possíveis significados do objeto estudado.

Rodrigues (2015) estimula a reflexão sobre o ensino de frações, quando descreve que, ao longo de sua prática docente, foi possível verificar que alguns conteúdos matemáticos são problemas de aprendizagem para os estudantes, e também são problemas para a organização do ensino para o professor. Corrobora que, muitas vezes, o ensino de frações é tratado apenas como um operador, uma divisão. Assim sendo, o objeto é apreendido apenas em sua superficialidade, pois demonstra apenas seus atributos externos, ou seja, o pensamento empírico. A autora reforça e adverte, ao admitir que é fundamental o conhecimento da história da fração para que sejam compreendidos os nexos conceituais desse número racional, representado por meio da fração, além de se estar atento às conexões internas do conceito.

Ao partir dessa premissa, reforçando a ideia de que o ensino de frações não pode ser tratado de forma superficial e empírica, Caraça (1989, 2002) defende que as conexões conceituais da fração são a medida e a grandeza, privilegiando o movimento do pensamento abstrato. Igualmente, mostra que

> Medir e contar são as operações cuja realização a vida de todos os dias exige com maior frequência. A dona de casa ao fazer as suas provisões de roupa, o engenheiro ao fazer o projeto de uma ponte, o operário ao ajustar um instrumento de precisão, o agricultor ao calcular a quantidade de semente a lançar à terra de que dispõe, toda a gente, nas mais variadas circunstâncias, qualquer que seja a sua profissão, tem necessidade de medir. Mas o que é –medir? Todos sabem em que consiste o comparar duas grandezas da mesma espécie – dois comprimentos, dois pesos, dois volumes, etc. (CARAÇA, 1989, p. 29).

Zeferino (2016), em sua pesquisa, buscou fundamentação teórica para o ensino de frações, a partir de uma perspectiva histórico-cultural, tomada de forma geral a partir das produções de Vygotsky, Davydov e a teoria da atividade proposta por Leontiev (1988). A pesquisa busca responder à questão central: "como a organização do ensino da matemática, mais especificamente do conceito de frações, a partir das contribuições da teoria Histórico-Cultural e da atividade orientadora de ensino, influencia e é influenciada pelo desenvolvimento do pensamento teórico do professor que ensina matemática, no quarto e quinto ano do Ensino Fundamental?" Foi realizado um experimento didático, pois, de acordo com a autora, isso possibilita estudar a essência das relações internas entre os diferentes procedimentos da educação e do ensino. Por essa razão, foi realizado em um curso de extensão voltado à formação continuada de professores, dos quartos e quintos anos do ensino fundamental. A autora em seu estudo concluiu que tanto o conhecimento sobre o conceito das frações, quanto a organização do ensino estão situados no pensamento empírico, limitando o conceito de fração a sua dimensão da quantificação discreta. Assim, distanciando-se, portanto, do desenvolvimento do pensamento teórico.

As pesquisas apontam, em geral, para o crescimento teórico no campo da educação. Em especial no campo do processo ensino-aprendizagem do conceito de fração, não houve grande expressividade, o que justifica esse estudo, que visa ajudar os estudantes do curso de Pedagogia a formar esse importante conceito, cujo nuclear é a relação de grandezas, que faz parte de uma rede conceitual.

Na revisão de literatura, identificou-se que, ainda, é escassa a produção de trabalhos contemplando a formação de conceito de fração, sob a perspectiva do ensino desenvolvimental de Davydov. Foram encontradas apenas 4 (quatro) pesquisas, sendo 3 (três) dissertações e 1 (uma) tese, conforme mostra a tabela 1(um) da página 28, que se fundamentam na teoria Histórico-Cultural. Porém, observou-se que nenhuma das pesquisas tinha, como base, os pressupostos teóricos da teoria do ensino desenvolvimental formulada por Davydov. De qualquer forma esses estudos se tornaram referências importantes na construção do objeto dessa pesquisa. Mesmo porque, o modo de pensar na organização do ensino do conceito de fração, desenvolvida no experimento didático, partiu, principalmente, dos avanços metodológicos das pesquisas minuciosamente estudadas.

Assim, a presente investigação teve como foco a formação de conceitos, especificamente a aprendizagem do conceito de fração por estudantes da disciplina de Educação Matemática, do curso de Licenciatura em Pedagogia. Os motivos que justificam essa proposta são de ordem teórica e prática. Na teoria de Davydov, o ensino voltado para a formação de conceitos, considerado em uma rede conceitual, é condição indispensável para que o estudante chegue a formar para si o conceito de fração. O que exige do professor, antes de tudo, a análise lógica e histórica do conteúdo. Como explica Freitas (2011, p.83), que o professor [...] “analise sua origem e desenvolvimento no campo científico que integra, identifique as relações nele presentes, o tipo de movimento mental que ele contém e a lógica científica que o governa”. Somente a partir desse estudo, o professor poderá planejar as ações necessárias ao estudante para que ele reproduza criativamente o conceito, tornando-o uma ferramenta própria (FREITAS, 2012).

Os resultados dessas pesquisas contribuíram para esclarecer os procedimentos teóricos metodológicos a serem observados para o ensino do conceito de fração, levando em conta o movimento das inter-relações das grandezas matemáticas. Serviram, também, para enfatizar as razões que justificam esta proposta, que são de ordem teórica e prática. Enquanto a maioria das pesquisas vem tratando da formação de conceitos matemáticos abordando temas como análise e discussão do ensinar e aprender os conceitos matemáticos, na presente dissertação se propõe abordar a formação do conceito de fração a partir do professor, com foco em sua prática pedagógica e na realização de tarefas feitas pelos estudantes.

Desse modo, o próximo capítulo trata da incursão por esse referencial teórico, dando destaque às principais premissas e conceitos que embasaram o desenvolvimento da presente pesquisa. Sobretudo, aborda a construção do lógico-histórico do conceito de fração, delineando o caminho didático da formulação do conteúdo, objetivos e metodologia de ensino de acordo com as ações estabelecidas por Davydov.

CAPÍTULO II

A FORMAÇÃO DE CONCEITOS NA PERSPECTIVA HISTÓRICO-CULTURAL E DO ENSINO DESENVOLVIMENTAL

Nesse capítulo, apresentam-se os pressupostos teóricos da teoria Histórico-Cultural, criada por L. Vygotsky e da teoria do ensino desenvolvimental, elaborada por Vasili Vasilievic Davydov, que subsidiaram a construção do objeto de estudo dessa pesquisa: Aprendizagem do conceito de fração por estudantes de uma turma do 4º período, do curso de licenciatura em Pedagogia, de uma Universidade Pública, do estado de Goiás. A organização do capítulo foi elaborada em duas partes: a primeira apresenta as contribuições das abordagens teóricas, acima mencionadas, sobre a formação de conceitos; a segunda aborda o lógico-histórico do conceito de fração e, em seguida, delineia o caminho didático da formulação do conteúdo, objetivos e metodologia de ensino, de acordo com as ações estabelecidas por Davydov (1982, 1988), a serem realizadas pelo estudante ao apreender o objeto de estudo.

1 A teoria Histórico-Cultural e suas contribuições para a questão do ensino da matemática escolar

Lev Semenovich Vygotsky (1896 – 1934) teve uma vida muito curta. No entanto, deixou um número impressionante de trabalhos que, apesar de já passados mais de 80 (oitenta) anos de sua morte, ainda hoje, mostram-se contemporâneos, comprovando sua genuinidade, além de serem fontes de inspiração para inúmeros trabalhos acadêmicos. Sua intenção era criar uma nova abordagem dos processos psicológicos humanos, com base na concepção materialista dialética de ser humano e de sociedade aplicada à psicologia.

Com base nessa concepção, Vygotsky, motivado pela realidade da sociedade russa de sua época, iniciou a construção da teoria Histórico-Cultural. Nessa teoria, o autor sustentou, segundo Libâneo e Freitas (2007, p.43), a ideia de que "[...] a constituição histórico-social do desenvolvimento psicológico humano ocorre no processo da atividade humana, por meio da apropriação da cultura e mediante a comunicação com outras pessoas".

Com esse propósito, Vygotsky (1982, 1998), opondo-se às teorias naturalistas vigentes na época, enfatizou que a história do homem tem início na forma natural, mas ele não é simplesmente um produto biológico. Seu nascimento ocorre em um ambiente constituído por valores culturais sistematizados e acumulados ao longo do desenvolvimento histórico da humanidade, criados pelos próprios seres humanos. Assim, concebeu o homem como o resultado do entrelaçamento do aspecto individual, no sentido biológico e com o social, no sentido cultural. O que significa compreendê-lo no movimento histórico da humanidade, tanto nas dimensões filogenéticas, quanto ontogenéticas.

Para a educação, a importância dessa concepção constitui-se no fato de apontar, para o processo educativo, a alternativa de compreendê-lo como processo histórico-cultural, no qual a criança não se adapta, mas apropria-se das conquistas do desenvolvimento humano. O que permite, segundo Leontiev (1978, 1988), o desenvolvimento de novas aptidões, funções psíquicas, denominadas por Vygotsky como funções psíquicas superiores, baseadas em novas relações interfuncionais.

Nessa perspectiva, Vygotsky (1982, 2009), ao investigar o desenvolvimento da psique infantil, como um sistema de relações que leva em conta a integralidade das funções psíquicas humanas, esclareceu duas ideias fundamentais. A primeira é que existem duas séries de funções responsáveis pela formação do homem: as naturais, reguladas pelo aparato biológico; e as culturais, constituídas historicamente. Em seu funcionamento essas funções se fundem e formam um sistema complexo, interpenetrando-se de tal modo que diferenciá-las só é possível com um processo de abstração. Por um lado, as funções biológicas se transformam pela ação das culturas; por outro lado, as funções culturais vão se constituindo por meio do amadurecimento biológico. A articulação dessas funções, de naturezas distintas, permite sua integração em uma unidade única: as funções psíquicas superiores, como atenção voluntária, memória lógica, ações conscientes, pensamento abstrato e comportamento intencional.

Por meio dessa atividade, as crianças, desde pequenas, interagem e socializam com os adultos e com a cultura na qual estão inseridas, com sua linguagem e signos específicos. De acordo com Vygotsky (1982, 2010), as crianças utilizam processos mentais de ordem inferior, como atenção elementar, a percepção e a memória. Na interação com os adultos, os processos inferiores predispõem condições para que se desenvolvam os processos superiores, mediante a qualidade dessas interações. Como escreve Vygotsky (1998):

> Podem-se distinguir, dentro de um processo geral de desenvolvimento, duas linhas qualitativamente diferentes de desenvolvimento, diferindo quanto à sua origem: de um lado, os processos elementares, que são de origem biológica; de outro, as funções psicológicas superiores, de origem sociocultural. [...] A história do desenvolvimento das funções psicológicas superiores seria impossível sem um estudo de sua pré-história, de suas raízes biológicas, e de seu arranjo orgânico (VYGOTSKY, 1998, p. 35).

Dessa citação, ressalta-se a tese de que, embora os componentes da psique humana sejam também condicionados pelas questões biológicas, Vygotsky destaca o lado social para o desenvolvimento dessas funções. Para o autor, ainda que, desde o nascimento, a criança se encontre inserida no contexto das relações sociais, ela não é um ser cultural. Sua existência como ser cultural ocorre a partir de sua participação nas práticas sociais e culturais: as pessoas da família e aquelas que fazem parte de seu convívio; com a mediação dos outros adquire sua forma humana, à semelhança dos outros homens (PINO, 2005). A esse respeito, Vygotsky (1998), ao descrever a lei genética geral do desenvolvimento cultural, afirma:

> Na história do desenvolvimento cultural da criança cada função aparece em cena duas vezes, em dois planos, primeiro o social, depois o psicológico, primeiro entre pessoas como uma categoria interpsicológica, depois no interior da criança como uma categoria intrapsicológica (VYGOTSKY, 1998, p. 75).

O autor explica que a transformação de um processo interpessoal em um processo interno ao indivíduo, para si, de forma pessoal, resulta de uma série de acontecimentos que propiciam as operações realizadas pelo homem com o uso de signos. Essa ação tem como característica a atividade humana, mediada por ferramentas, de caráter material e não material como conhecimento, criadas e modificadas, com o passar do tempo, pelos seres humanos, para acesso ao mundo real. É por meio dessas ferramentas que o homem, ao realizar uma atividade mediada, regula seu comportamento, suas interações com o mundo e com os outros e alcança a consciência. Nesse processo, as ferramentas materiais e não materiais, necessárias à realização desses trabalhos, são denominadas por Vygotsky (1998, 2007) de atividade externa e interna.

Como explicam Libâneo e Freitas (2007, p.43) “[...] a atividade externa constitui-se nas relações sociais, originando todas as criações humanas como resultado da ação humana sobre a natureza e a realidade social”. E ainda “[...] a atividade interna constitui-se como atividade pensante, que forma a consciência individual, determinada e inserida na atividade coletiva”. O que significa dizer que as ferramentas são instrumentos que tornam possível a união da mente humana com o objeto, estando o conceito de ferramenta incluído em um conceito mais amplo: o de atividade. Segundo Itelson (2017):

> O processo de passagem da ação externa real a interior ideal se denomina interiorização (“transformação do interior”). Graças à interiorização, a psiquê do indivíduo adquire a capacidade de funcionar com modelos dos objetos, quando estes não se encontram à vista no momento dado. A pessoa sai dos marcos físicos, por um instante determinado, e “mentalmente” se transporta ao passado e ao futuro, no tempo e no espaço. Liberta-se da dependência escravizante da situação externa que determina toda a conduta do animal (ITELSON, 2017, p.98).

Ao estabelecer uma analogia entre ferramenta e signo, Vygotsky (1998) esclarece que a característica de cada uma depende de sua função mediadora, enfatiza que a lógica, existente entre o uso do signo ou da ferramenta, consiste nas diferentes maneiras com que cada um deles orienta o comportamento humano:

> A função do instrumento é servir como condutor da influência humana sobre o objeto da atividade; ele é orientado externamente; deve necessariamente levar a mudanças nos objetos. Constitui um meio pelo qual a atividade humana é dirigida para o controle e domínio da natureza. O signo, [...] não modifica em nada o objeto da operação psicológica. Constitui um meio da atividade interna dirigido para o controle do próprio individuo; o signo é orientado internamente (VYGOTSKY, 1998, pp. 72-73).

Explicitando essa ideia, pode-se dizer que os instrumentos são elementos interpostos na relação do homem com os objetos, com a função de possibilitar e potencializar a realização de determinada ação do meio externo, enquanto, os signos, tais como os instrumentos, são mediadores com a função de potencializar e orientar determinada ação. Entretanto, diferentemente da ação voltada para o meio externo inerente aos instrumentos, a atividade relativa ao signo é voltada exclusivamente para o plano interno, isto é, o plano psicológico (SOUZA, 2015). Por esse motivo, o verdadeiro significado do papel dos signos, na conduta humana, só pode ser encontrado na função instrumental que assume. Essa atividade, própria do psiquismo humano, demanda e ao mesmo tempo assenta-se em profundas transformações estruturais e funcionais do aparato psíquico. Transformações essas que representam a superação do funcionamento psíquico pautado no legado da natureza – nas funções elementares, em direção ao desenvolvimento das funções psíquicas superiores (MARTINS, 2012).

Esse salto qualitativo subjuga-se ao uso da linguagem, particularmente, ao uso da palavra como atributo primário para que a percepção sensível do real se converta em representação abstrata. Isso significa que o acesso ao concreto não se efetiva sem a mediação do abstrato, isto é, dos signos.

> A operação com signos, é fator importante de desenvolvimento e na apropriação das formas culturais humanas, porque seus efeitos repercutem na memória, na atenção, na percepção, no pensamento e na vontade. Assim sendo o desenvolvimento psicológico e cultural da criança é fortemente afetado pela operação com signos e pelas interações sociais. A educação escolar participa significativamente desse processo de desenvolvimento, inicialmente por meio do ensino da leitura, da escrita e do cálculo matemático. Essa imersão cultural que a educação formal propicia a criança, desde os primeiros anos escolares, é muito importante para os saltos qualitativos que ela pode vivenciar em seu desenvolvimento psicológico e cultural (PRESTES, TUNES e NASCIMENTO, 2017, pp. 72-73).

No âmbito educacional, um exemplo de mediação é a intervenção do professor, objetivando permitir e potencializar a internalização e a apropriação de conceitos científicos estudados. O professor organiza e planeja o ensino por meio de conhecimentos específicos, permitindo que seus estudantes entrem em atividade como, também, apropriem-se do conceito estudado e, principalmente, de todos os processos investigativos historicamente acumulados que o caracterizam. Assim, atividade de ensino caracteriza-se como um processo de conhecimento do objeto de estudo pelo estudante, mediado pelo professor.

Nesse sentido, um dos conceitos mais importantes de Vygotsky é o de Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP)[2]. Segundo Hedegaard (2002), nesse conceito, Vygotsky (1982, 2007) articula as contribuições da psicologia geral sobre o desenvolvimento da criança com uma concepção pedagógica do ensino. A zona de desenvolvimento proximal consiste em dois níveis: o desenvolvimento atual, em que a criança não tem a ajuda do outro, tirando suas próprias conclusões e o desenvolvimento imediato, que consiste na potencialidade de desenvolver com a ajuda do outro indivíduo mais experiente, podendo ser os pais, professores, colegas mais experientes ou outros. VYGOTSKY (2010, p. 331) assim se refere: “Aquilo que está situado na zona de desenvolvimento imediato em um estágio de certa idade

---

[2] Prestes (2012) apresenta, em seus estudos, um conceito correspondente a este Zona de Desenvolvimento Iminente.

realiza-se e passa ao nível do desenvolvimento atual em uma segunda fase". Em outras palavras, "o que a criança é capaz de fazer hoje em colaboração, conseguirá fazer amanhã sozinha". Em suas palavras:

> A zona de desenvolvimento proximal define aquelas funções que ainda não amadureceram, mas que estão em processo de maturação, funções que amadurecerão, mas que estão presentemente em estado embrionário. Essas funções poderiam ser chamados de "brotos" ou "flores" do desenvolvimento, em vez de "frutos" do desenvolvimento. O nível de desenvolvimento real caracteriza o desenvolvimento mental retrospectivamente, enquanto a zona de desenvolvimento proximal caracteriza o desenvolvimento mental prospectivamente (VYGOTSKY, 2007, p. 98).

Moysés (2010, p. 34), ao comentar a respeito da zona de desenvolvimento proximal, esclarece "[...] que aquilo que uma criança não é capaz de fazer sozinha poderá desempenhá-lo coma a ajuda de um adulto (ou de alguém mais adiantado que ela), por meio de perguntas-guia, exemplos e demonstrações constituem o cerne dessa ajuda". Segundo a autora "[...] trata-se de um modelo amplo, que implica imitação de um modelo dado socialmente não no sentido de copiá-lo exatamente, mas algo que envolve uma experimentação construtiva" (MOYSÉS, 2010, p. 34). Igualmente, a criança realiza atividades semelhantes a do modelo; no entanto, assimila de forma única e própria os conceitos apresentados. O professor, ao planejar as atividades, levando em consideração as zonas de desenvolvimento próximo, estaria estimulando o aparecimento de funções ainda não desenvolvidas completamente.

> Cada matéria escolar tem uma relação própria com o curso do desenvolvimento da criança, relação que muda com a passagem da criança de uma etapa para outra. Isto obriga a reexaminar todo o problema das disciplinas formais, ou seja, do papel e da importância de cada matéria no posterior desenvolvimento psicointelectual geral da criança (VYGOTSKY, 1998, pp. 116 - 117).

O aprendizado é o responsável por potencializar a zona de desenvolvimento próximo, pois a criança só será capaz de desenvolver-se na interação com outras pessoas. Sem ajuda externa, esses processos seriam impossíveis de ocorrer. Nesse sentido, Vygotsky (2008, p. 98) afirma que "aquilo que é a zona de desenvolvimento proximal hoje será o nível de desenvolvimento real amanhã, ou seja, aquilo que uma criança pode fazer com assistência hoje, ela será capaz de fazer sozinha amanhã".

Assim sendo, a zona de desenvolvimento proximal estabelece uma referência de desenvolvimento, porque “define aquelas funções que ainda não amadureceram, mas que estão em processo de maturação, funções que amadurecerão e que estão presentes em estado embrionário” (VYGOTSKY, 2007, p. 113). Ou seja, é instrumento que “[...] permite-nos delinear o futuro imediato da criança e seu estado dinâmico de desenvolvimento, propiciando o acesso não somente ao que foi atingido através do desenvolvimento, como também aquilo que está em processo de maturação” (VYGOTSKY, 2007, p. 113). E, ainda, Hedegaard (2002), em relação à zona de desenvolvimento proximal, escreve:

> Trabalhar em sala de aula com a zona de desenvolvimento proximal implica que o professor esteja consciente dos estágios evolutivos das crianças e que seja capaz de planejar mudanças qualitativas no ensino, direcionando-o para uma certa meta. Embora cada criança seja única, as crianças obviamente compartilham características comuns. Se fazem parte da mesma tradição, as crianças de uma mesma sala de aula compartilham habilidades e uma parcela de conhecimentos. A instrução pode ser construída sobre essas características comuns, levando em conta que elas apresentam diferentes velocidades e maneira de aprender. Assim, trabalhamos com a zona de desenvolvimento proximal como uma relação entre os passos instrucionais planejados e os passos do processo de aquisição de conhecimentos e aprendizagem das crianças (HEDEGAARD, 2002, pp. 359-360).

De acordo com Vygotsky, a condução do desenvolvimento proximal da criança é guiada pelos conceitos científicos. Os conhecimentos absorvidos no dia-a-dia são chamados de conceitos espontâneos ou cotidianos, já os conhecimentos adquiridos na escola, particularmente, pela mediação do professor, sistematizados e transmitidos, intencionalmente, de acordo com uma metodologia específica, são os conceitos científicos. Leontiev (apud HEDEGAARD, 2002, p. 200) destaca que “[...] o grau com que a criança domina os conceitos corriqueiros mostra seu nível de desenvolvimento presente, e o grau com que ela adquiriu os conceitos científicos mostra a zona de desenvolvimento proximal”. Assim, o ensino é fundamental para o desenvolvimento dos conceitos, sendo a ponte entre os conceitos cotidianos (ou corriqueiros ou cotidianos) e os conceitos científicos. Escreve Vygotsky (1982):

> Se nos conceitos espontâneos a criança conhece o objeto representado no conceito, mas não toma consciência do próprio conceito, nos conceitos científicos o início ocorre onde para o conceito espontâneo, ou seja, na explicitação do seu conteúdo, na definição verbal e mediante operações que pressupõem o emprego não espontâneo dele (VYGOTSKY, 1982, p. 250).

Para Vygotsky (2008, p. 70) a formação de conceitos científicos “é uma operação mental que exige que se centre ativamente a atenção sobre o objeto, abstraindo dele sua essência, e inibindo os aspectos secundários, permitido assim, generalizações mais amplas mediante uma síntese”. Nesse processo, o estudante deve caminhar do concreto ao abstrato e, desse, voltar ao concreto em uma relação dialética.

> Nossa investigação mostrou que um conceito se forma não pela interação de associações, mas mediante uma operação intelectual em que todas as funções mentais elementares participem de uma combinação específica. [...] quando se examina o processo de formação em toda a sua complexidade, este surge como um movimento do pensamento, dentro da pirâmide de conceitos, constantemente oscilando entre duas direções, do particular para o geral e do geral para o particular (VYGOTSKY, 2008, p. 70).

A formação de conceitos científicos pressupõe, como exigência de pensamento, a generalização que tem papel decisivo na conscientização da criança, acerca de seus próprios processos mentais. Portanto, os conceitos científicos são o meio pelo qual a consciência e o domínio se desenvolvem para, posteriormente, serem transferidos a outros conceitos e áreas do pensamento.

Durante seus estudos, Vygotsky destacou que a formação de conceitos se desenvolve, ontogeneticamente, por meio de três fases principais: pensamento sincrético, pensamento em complexos e pensamento conceitual.

No pensamento sincrético a criança organiza objetos por intuição, não tem nenhum critério de ordenação, pode agrupar por proximidade, utilizando-se da intuição ou tentativa, formando agrupamentos ao acaso. Na fase do pensamento em complexos, ao agrupar objetos, a criança já segue alguma ordem, observando semelhanças existentes entre os objetos e a relação existente entre eles. O que difere essa fase do pensamento sincrético é que a criança já consegue seguir algum tipo de critério, existindo coerência nos agrupamentos, mas o pensamento baseia-se exclusivamente em operações concretas.

Segundo Demartini (2009, p. 16), “o pensamento por complexo e o pensamento conceitual mantêm ligação por pseudoconceito que representa um elo entre a fase final do pensamento por complexo e o pensamento conceitual”. Os resultados obtidos no pseudoconceito são próximos do pensamento conceitual, mas não são os mesmos, pois nessa fase o pensamento ainda está focado no concreto e não na linguagem como acontece no pensamento conceitual, daí a principal diferença, visto que, no pensamento por conceitos, a generalização acontece de forma abstrata, ou seja, “[...] o pensamento em complexos identifica-se pelo grande número de conexões e pela inexistência de abstração, ao passo que o conceito pressupõe habilidade de abstrair para além das conexões reais” (DEMARTINI, 2009, p. 16).

Baseando-se nessas concepções, faz-se necessário destacar que, de acordo com essa abordagem, o professor deve atuar como mediador do conhecimento historicamente acumulado. O que se coloca como desafio para os profissionais do ensino. Particularmente, para professores de matemática há a necessidade de superar práticas pedagógicas que propiciem o desenvolvimento do pensamento, por meio da formação e operação com conceitos. O que significa dizer que ensinar conteúdos matemáticos está relacionado a ensinar a pensar matematicamente.

2 A teoria do ensino desenvolvimental e a formação de conceitos

Vasili Vasilyevich Davydov, foi psicólogo, professor, filósofo, mestre e doutor em psicologia. Era um escritor e pesquisador respeitável, nascido em 1930, em Moscou e morreu em 1998, aos 68 anos de idade. Foi um continuador dos estudos de Vygotsky e da Psicologia marxista, desenvolvida por Leontiev, Luria, Elkonim, entre outros colaboradores. Fez parte da terceira geração dos psicólogos russos e soviéticos. Entre os importantes resultados de suas pesquisas, que duraram 25 (vinte e cinco) anos, destaca-se a formulação da teoria do ensino desenvolvimental como desdobramento e aplicação pedagógica da teoria Histórico-Cultural, com foco em atividade de estudo, voltada para o desenvolvimento teórico de crianças e jovens.

Segundo Davydov e Márkova (1987, p.143), para à maioria dos filhos dos trabalhadores o ensino se resumia a conhecimentos e habilidades básicos, “sem os quais é impossível obter uma profissão mais ou menos significativa na produção industrial e na vida social (saber escrever, contar, ler, ter ideias elementares sobre o meio)”. Segundo Davydov, o pensamento desenvolvido nessa concepção de ensino:

> [...] tem um caráter classificador, catalizador e assegura a orientação da pessoa no sistema de conhecimentos já acumulados sobre as particularidades e traços externos de objetos e fenômenos isolados da natureza e da sociedade. Tal orientação é indispensável para fazeres cotidianos, durante o cumprimento de ações laborais rotineiras, porém é absolutamente insuficiente para assimilar o espírito autêntico da ciência contemporânea e os princípios de uma relação criativa e de profundo conhecimento em face da realidade (DAVYDOV, apud ROSA, MORAES e CEDRO, 2010, p. 71).

Desse modo, Libâneo e Freitas (2013) registram que Davydov:

> [...] defendeu em suas pesquisas que o ensino mais compatível com o mundo contemporâneo, da ciência e da tecnologia, dos meios de comunicação, da cultura, aquele compromissado com a transformação pessoal e social do aluno, que o ajude a desenvolver a análise dos objetos de estudo por uma forma de pensamento abstrata, generalizada, dialética (LIBÂNEO e FREITAS, 2013, p. 316).

Com esse propósito, Davydov (1987, 1988), ao postular um ensino voltado para o desenvolvimento integral do estudante, defende que o ensino deve chegar ao nível do pensamento teórico. O que pressupõe ultrapassar o pensamento empírico, vigente nas escolas, por meio de procedimento metodológico distinto do modo como a lógica formal assume a relação entre a abstração, a generalização e os conceitos.

Nessa perspectiva, o estudioso defendeu, a partir do legado de Vygotsky, da teoria da atividade de Leontiev e das formulações de Elkonin e de suas formulações, a escola como o ambiente apropriado ao desenvolvimento cognitivo e o aprendizado de conceitos científicos, “para aprender cultura e internalizar os meios cognitivos de compreender e transformar o mundo” (LIBÂNEO, 2004, p. 5).

Com relação a Vygotsky, Davydov (1987, 1988) destaca o entendimento de que todo conceito teórico possui um conteúdo e uma forma, sendo o conteúdo os reflexos dos processos de desenvolvimento dos sistemas integrais, das relações entre o universal e o singular, da essência e dos fenômenos; já a forma do conceito é vista como o procedimento de ascensão do abstrato ao concreto e de dedução do singular partindo do universal.

Da atividade de Leontiev (1978), considerou a compreensão de que, ao entrar na escola, a criança inicia a formação de uma importante atividade, a de estudo. Ela tem acesso a conhecimentos que, até então, desconhecia e, consequentemente, ocupava outro lugar no mundo das relações sociais, o que requer algumas novas responsabilidades. Diante dessa perspectiva, torna-se importante que a escola “se organize pela atividade para que a relação ensino-aprendizagem convirja em desenvolvimento" (LONGAREZI; FRANCO, 2013, p. 105).

De Elkonin, Davydov destaca a periodização do desenvolvimento humano que aponta a atividade de estudo, cujo objetivo é apropriação do conhecimento teórico, ou seja, o domínio de símbolos e instrumentos culturais das diversas áreas do conhecimento, disponíveis na sociedade. Como escreve Elkonimn (apud AQUINO e CUNHA, 2016):

> [...] A atividade de estudo é fundamental na idade escolar, porque, em primeiro lugar, através desta se realizam as relações básicas da criança com a sociedade; em segundo lugar, na escola se leva a cabo a formação tanto das qualidades fundamentais da personalidade da criança de idade escolar, como dos distintos processos psíquicos. Sem a análise do processo de formação da atividade de estudo e de seu nível, é impossível explicar as neoformações fundamentais na idade escolar (AQUINO e CUNHA, 2016, p. 176).

Assim, a partir das contribuições de L. S. Vygotsky[3], A. A. N. Leontiev[4] e, especialmente, de D. B. Elkonin[5], Davydov se dedicou à explicação teórica da atividade de aprendizagem[6], sugerindo um modo de organização do ensino voltado para o desenvolvimento intelecutal do estudante. Nessa organização, o conteúdo da atividade de aprendizagem é o pensamento teórico ou conceito. Como escreve Libâneo (2007), em relação ao pensamento teórico ou conceito:

> [...] não se refere apenas às características e propriedades dos fenômenos em estudo, mas a uma ação mental peculiar pela qual se efetua uma reflexão sobre um objeto que, ao mesmo tempo, é um meio de reconstrução mental desse objeto no pensamento. Nesse sentido, pensar teoricamente é desenvolver processos mentais pelos quais chegamos aos conceitos e os transformamos em ferramentas para fazer generalizações conceituais e aplicá-las a problemas específicos. Como escreve Seth Chaiklin, o conceito significa um conjunto de procedimentos para deduzir relações particulares de uma relação abstrata (LIBÂNEO, 2007, p. 61).

---

[3] Vygotsky estabeleceu a origem social da psique humana e postulou que o período escolar como um todo é o mais fértil para a aprendizagem e o desenvolvimento das funções psicológicas superiores.

[4] Tomando como ponto de partida os estudos de Vygotsky, Leontiev estudou a atividade humana, o trabalho, analisado anteriormente por Marx; criou a teoria geral da atividade e teorizou sobre os componentes estruturais dessa categoria: necessidades, motivos, objetivos, finalidades, ações, procedimentos.

[5] Daniil Borisovich Elkonin (1904-1984): estruturou a periodização do desenvolvimento psíquico e apresentou as principais hipóteses sobre atividade de estudo, a qual, até então, não tinha sido colocada como um problema pela psicologia infantil e pedagógica. "Tudo indica que as ideias de Elkonin [...] converteram-se na plataforma a partir da qual ele mesmo, V. Davydov, A. Márkova e outros desenvolveram seus estudos teóricos e experimentais sobre esse tipo especial de atividade [...]" (AQUINO; CUNHA 2016, p. 176).

[6] "[...] Davydov identificou o conhecimento teórico como o conteúdo central e específico da atividade de aprendizagem dos estudantes" (LIBÂNEO; FREITAS, 2015, p. 343).

Nas palavras de Davydov (1988):

> O pensamento teórico é o processo de idealização de um dos aspectos da atividade objetal-prática, a reprodução, nela das formas universais das coisas. Tal reprodução tem lugar na atividade laboral das pessoas como experimentação objetal sensorial peculiar. Depois, [...] adquire cada vez mais um caráter cognoscitivo, permitindo às pessoas passar, com o tempo, aos experimentos realizados mentalmente. [...] ter um conceito sobre um objeto significa saber reproduzir mentalmente seu conteúdo, construí-lo. A ação mental de construção e transformação do objeto constitui o ato de sua compreensão e explicação, a descoberta de sua essência (DAVYDOV, 1988, pp. 127-128).

Essa citação permite inferir que a finalidade básica do ensino consiste na assimilação, pelos estudantes, do processo investigativo que foi utilizado para a criação dos conceitos, nos quais se encontra incorporado o processo sócio histórico de sua produção. É o que Davydov (1987, 1988) considera apropriação dos procedimentos lógicos e investigativos, com os quais os pesquisadores trabalharam/trabalham ao formular o conhecimento de um objeto. Nessa atividade, os estudantes devem reproduzir o conhecimento teórico, vinculado ao objeto de estudo. A formação do conhecimento teórico situa-se, portanto, no processo investigativo que deu origem ao objeto científico. Desse modo, por meio da aprendizagem de conceitos teóricos, impregnados das capacidades humanas formadas historicamente e objetivadas na cultura material e espiritual, os estudantes interiorizam ações mentais de abstração e generalização inerentes ao objeto de estudo, isto é, entram em atividade e reproduzem o percurso de formação, historicamente construído, do conceito daquele objeto. Em outras palavras, assimilam o modo de proceder com esse objeto, de agir com ele por procedimentos lógicos. Sendo assim, o conteúdo do ensino é o conhecimento teórico científico, mediado pela ciência e pelo professor, que organiza o ensino propondo tarefas que conduzem os estudantes à busca das conclusões científicas, obtidas com a investigação do objeto e guiadas pelo movimento dialético: movimento do abstrato ao concreto.

Nesse sentido, Davydov propõe que, ao iniciar a aprendizagem:

> [...] de qualquer disciplina científica, os estudantes, com a ajuda do professor, analisam o conteúdo do material didático, separam nele a relação universal, constatando, simultaneamente, que se manifesta em muitas outras relações singulares existentes no material dado. Fixando, por meio de signos, a relação universal, os estudantes realizam a abstração

> substancial do objeto estudado. Continuando a análise do material, revelam a vinculação regular desta relação inicial com suas diferentes manifestações e, assim, obtêm a generalização substancial do objeto estudado. Logo as crianças utilizam a abstração e a generalização substanciais para a dedução sucessiva (também com a ajuda do professor) de outras abstrações mais particulares e para sua união no objeto integral (concreto) estudado. Quando os estudantes começam a utilizar a abstração e a generalização substanciais como meios para deduzir e unir outras abstrações, eles convertem as estruturas mentais iniciais em conceito, que fixa certa 'célula' do objeto estudado. Esta célula serve posteriormente aos estudantes como princípio geral para orientar-se em toda a diversidade do material fático, que devem assimilar em forma conceitual pela ascensão do abstrato ao concreto (DAVYDOV, 1988, p. 175, tradução nossa).

Essa orientação aponta para uma organização de ensino, voltada para o desenvolvimento das capacidades mentais dos estudantes e não para a valorização da quantidade de conteúdos; visto que, para chegar ao conhecimento teórico, é necessário analisar, generalizar, investigar a origem dos conceitos para interiorizar todo o seu processo histórico.

Segundo Souza (2015, p. 65), no ensino organizado com essa finalidade: "[...] o papel desempenhado pelo professor é singular, tendo em vista que é o responsável por organizar as atividades coletivas e individuais, que contemplem o desejo do estudante e revelem a necessidade histórica pelo objeto ensinado". Como afirma Davydov (1988, p. 72): "[...] ter um conceito sobre um objeto significa saber reproduzir mentalmente seu conteúdo, a ação mental de construção e transformação do objeto constitui o ato de sua compreensão e explicação, o descobrimento de sua essência".

Para formar o pensamento teórico:

> [...] o professor comunica aos alunos as conclusões científicas obtidas com a investigação do objeto. Para a promoção do desenvolvimento do aluno, o professor não pode apenas comunicar as conclusões científicas. Isso não é suficiente. É necessário que o professor ensine de modo que os alunos, na atividade de aprender o objeto, reproduzam o caminho para obter, investigativamente, as conclusões acerca desse objeto. Para isso, o professor organiza o ensino introduzindo tarefas que põem os alunos em busca científica, guiada pelo movimento dialético de pensamento: o movimento do abstrato ao concreto (FREITAS, 2009, p. 03).

Acresce a isso a importância de que os conteúdos a serem ensinados sejam significativos para os estudantes, uma vez que a aprendizagem não se resume a apenas apreensão de conceitos científicos, ela se mostra como um meio para o desenvolvimento mental. Portanto, "o bom ensino é o que promove o desenvolvimento mental, isto é, as capacidades e habilidades de pensamento". (LIBÂNEO, 2010, p. 9)

Nesse aspecto, Libâneo e Freitas (2007) destacam as seguintes contribuições da teoria do ensino desenvolvimental: (1) a integração entre os conteúdos científicos e o desenvolvimento dos processos de pensamento, mostrando que o conteúdo é a base dessa organização de ensino; (2) A correspondência entre o conteúdo e os motivos dos estudantes no processo de ensino e de aprendizagem, buscando o aspecto nuclear do conteúdo, formulando atividades que despertem o motivo e o desejo no estudante; (3) Por fim, o preparo do professor, que precisa conhecer a fundo o conceito que será ensinado, e sua didática, pois não adianta ter fundamentação teórica do conceito e não saber mediar esse conhecimento.

Para que os estudantes atinjam o conhecimento teórico, Davydov (1988) estabeleceu seis ações a serem realizadas pelo estudante ao aprender o objeto de estudo, considerando o movimento de ascensão do pensamento do abstrato ao concreto.

1ª Ação – Transformação dos dados da tarefa, a fim de revelar a relação universal do objeto estudado: Os estudantes devem descobrir a relação universal do objeto, ou seja, sua característica geral (abstrata) serve como base genética, pois reflete o conceito teórico e é fonte de todas as características e singularidades do objeto em estudo. É o momento inicial do processo de formação do conceito.

2ª Ação – Modelação da relação diferenciada em forma objetivada, gráfica ou por meio de letras: Consiste na criação de um "modelo", representativo da relação universal, com suas conexões internas essenciais. Esse modelo, seja em forma literal, gráfica ou objetivada, consiste em um produto da ação mental.

3ª Ação – Transformação do modelo da relação para estudar suas propriedades em "forma pura": Nessa ação estudam-se as propriedades da relação universal do objeto. Os estudantes devem transformar o modelo, analisando as propriedades da relação universal. No modelo, a relação apresenta-se de forma abstrata; no entanto, ao transformá-lo e reconstituí-lo os estudantes analisam as propriedades da relação universal em seu aspecto concreto, e não apenas abstrato. Na atividade com o modelo, o professor conduz os estudantes para que a relação universal seja aporte, para desenvolver neles um procedimento geral de solução da tarefa. Nessa fase do processo, os estudantes devem extrair o núcleo do objeto e suas múltiplas manifestações particulares.

4ª Ação – Construção do sistema de tarefas particulares que podem ser resolvidas por um procedimento geral: Nessa ação, os estudantes aplicam o procedimento geral adotado, em diferentes casos particulares e apresentado como variantes da tarefa preliminar. Nesse estágio do processo, a direção do professor deve mudar, progressivamente, para que os estudantes elevem seu nível de autossuficiência no emprego do conceito.

5ª Ação – Controle da realização das ações anteriores**:** Essa ação tem o objetivo de assegurar a realização plena e correta das operações que compõem as ações da tarefa, monitorando se as ações de aprendizagem estão correspondendo às exigências e às condições pré-estabelecidas. Os estudantes devem ser capazes de estabelecer a relação entre a tarefa a ser solucionada e o almejado, confirmando em que medida eles estejam assimilando e aplicando o procedimento geral de resolução da tarefa, ou seja, devem averiguar se a implicação de suas ações corresponde, ou não, ao objetivo final.

6ª Ação – Avaliação da Assimilação do procedimento geral como resultado da solução de tarefa de aprendizagem dada: Consiste em uma avaliação contínua e de caráter formativo, pois permite que os estudantes observem o teor de suas ações, analisem seus fundamentos e averiguem a equivalência com o resultado, modificando e reorganizando o percurso, caso seja necessário. Juntos, professor e estudantes avaliam a aprendizagem do procedimento geral como resultado da solução da tarefa. Trata-se, portanto, de um exame qualitativo do procedimento e do resultado da sua aprendizagem.

As ações formuladas por Davydov constituem a base geral para o ensino. De acordo com o conteúdo, e em função do conceito a ser estudado, essas ações e suas operações correspondentes variam, se adaptam e se adequam, conforme o objetivo proposto pelo professor e a necessidade dos estudantes.

3 A construção histórica do conceito de fração

Considerando a importância do conhecimento histórico para apreender a essência do conceito de fração, buscou-se realizar a análise lógica e histórica desse conceito com o objetivo de identificar as relações nele presentes, o tipo de movimento mental que contém e a lógica científica que o governa, como referência para planejar ações necessárias ao estudante, a fim de que ele possa, no decorrer do processo ensino-aprendizagem, reproduzir criativamente o conceito fração.

Compreender o processo que produziu o desenvolvimento do conceito faz parte do movimento de apropriação do próprio conceito, [...] “o lógico reflete não só a história do próprio objeto como também a história do seu conhecimento” (KOPNIN, 1978, p.186). O autor ressalta a necessidade de articular aspectos lógicos e históricos do objeto, permitindo sua apropriação conceitual, que se forma na unidade entre o nuclear do objeto e sua teoria. Para Kopnin (1978, p. 186):

> O estudo da história do desenvolvimento do objeto cria, por sua vez, as premissas indispensáveis para a compreensão mais profunda de sua essência, razão porque, enriquecidos da história do objeto, devemos retomar mais uma vez a definição de sua essência, corrigir, completar e desenvolver os conceitos que o expressam. Deste modo, a teoria do objeto fornece a chave do estudo de sua história, ao passo que o estudo da história enriquece a teoria, corrigindo-a, completando-a e desenvolvendo-a.

O que revela a historicidade do conceito de fração? A fração surgiu na civilização antiga dos egípcios, há cerca de 2000 anos a.C, quando começaram a desenvolver a matemática de forma indutiva, essencialmente para fins práticos, como, por exemplo, a agrimensura, arquitetura e obras de irrigação (EVES, 2004). Sendo assim, começaram a dividir terras para o controle dessas áreas e iniciar a cobrança de impostos. Mas, muitas dificuldades apareceram nessas divisões, como, por exemplo: fazer a divisão de modo justo a todas as famílias que habitavam o local e lidar com possíveis prejuízos, que as famílias viriam a ter com os períodos de cheia do rio Nilo.

Garbi (2007) faz referência a uma passagem, datada do ano V a.C., escrita por Heródoto, a respeito dos egípcios e a necessidade de divisão de terras e arrecadação de impostos:

> Esse faraó (Sesóstris) realizou a partilha das terras, concedendo a cada egípcio uma porção igual, com a condição de ser-lhe pago todos os anos certo tributo; se o rio carregava alguma parte do lote de alguém, o prejudicado ia procurar o rei e expor-lhe o ocorrido. O soberano enviava agrimensores para o local para determinar a redução sofrida pelo terreno, passando o proprietário a pagar um tributo proporcional ao que restara. Eis, ao que me parece a origem da Geometria, que teria passado do Egito para a Grécia (GARBI, 2007, p.12).

Essa necessidade gerou mudanças culturais, uma delas, afirma Eves (2004), foi a escrita, porque a atividade agrícola em desenvolvimento “[...] requeria não só cooperação e a arte da engenharia como também, igualmente, um sistema de preservação de registros” (EVES, 2004, p. 53). Para resolver os problemas de medida na época, 2000 anos a. C., foi adotado o cúbito egípcio (figura 1) como unidade de medida padrão, que nada mais era que o comprimento que se estendia do cotovelo até as pontas dos dedos do Faraó, entidade de maior referência da época. Essa medida tinha aproximadamente 524 mm e se subdivida em 28 partes iguais e, essa unidade de medida, perdurou por séculos nas medições de terras, às margens do rio Nilo.

FIGURA 1: Cúbito egípcio

FONTE: Rodrigues (2015)

Contudo, o cúbito egípcio apresentava falhas, pois, muitas vezes, nas medições sobravam pequenas partes de terras que não eram possíveis medir com o cúbito. Em virtude disso, os egípcios criaram um novo tipo de número, o fracionário.

Sobre esse novo número Patrono (2011) relata:

> Eles trabalharam com as frações unitárias e desenvolveram a ideia de fração como parte de um todo, frações quaisquer como somas de frações unitárias, soma de frações por simples superposição e divisão de produto pelo inverso do divisor (PATRONO, 2011, p. 19).

Mol (2013) explica que muitos registros da civilização egípcia chegaram aos nossos dias em papiros, alguns deles de conteúdo matemático. Um dos papiros mais importantes é o Papiro de Rhind[7], datado de 1650 a. C, que recebeu esse

[7] O papiro de conteúdo matemático mais célebre é o Papiro de Rhind, adquirido pelo egiptólogo escocês Alexander Rhind em 1858 e datado de cerca de 1650 a.C.. Com mais de 5 m de comprimento e 33 cm de largura, é possivelmente o melhor registro da matemática egípcia. Foi copiado por um escriba de nome Ahmes de um texto matemático mais antigo. Contém 84 problemas de geometria e de aritmética acompanhados de soluções. Entre os problemas aritméticos, há estudos de frações unitárias e de equações lineares e entre os

nome por ter sido adquirido pelo egiptólogo escocês Alexander Rhind, em 1858. Mesmo com os registros históricos, o surgimento da fração, a partir da medida, era impreciso. Childe (1975, pp.196-197) aponta que, nesse período, as frações sempre eram indicadas com numerador 1, pois eles entendiam a fração somente como parte de uma unidade, eles não representavam frações como, por exemplo, $\frac{2}{5}$, essas representações eram feitas por meio de somas, assim ficaria $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$ e, no lugar do numerador 1, utilizavam uma simbologia de formato oval () . Dessa forma, na representação egípcia, por exemplo, a fração $\frac{1}{3}$ era representada da seguinte forma: (). A única fração com numerador diferente de 1, permitida nas somas, era o $\frac{2}{3}$. A primeira parte do Papiro Rhind (figura 2) expõe as tábuas que foram criadas com a compilação da resolução correta de todas as frações com numerador 2 e denominadores ímpares de 3 a 101. Childe (1975) explica:

> Os egípcios não haviam, portanto, compreendido que as frações estavam sujeitas precisamente às mesmas regras dos números inteiros. Essa incapacidade se deve primeiramente à sua técnica primitiva de cálculo; a divisão realizada no plano egípcio resulta automaticamente apenas numa série de partes alíquotas. A notação defeituosa contribuía para perpetuar tal processo (CHILDE, 1975, pp.196-197).

FIGURA 2: Papiro de Rhind

FONTE: Mol (2013)

---

problemas de geometria, há o cálculo de volume de silos de base circular e retangular e cálculo de áreas. (MOL, 2013, p. 21)

Rodrigues (2015) explica, em sua pesquisa, que o estudo, da história do surgimento da fração no Egito, não fornece todas as informações necessárias para a explicação, por exemplo, de o cúbito ser subdividido em 28 (vinte e oito) partes, utilizando partes do corpo do Faraó regente; ou por quanto tempo exatamente essa unidade de medida foi utilizada. Entretanto, compreende-se que essa medida foi ponto de partida para que se iniciasse a discussão da relação da parte com o todo, o que fazer com as partes que sobravam e que esse processo foi essencial para a vida e trabalho social dos egípcios.

Até o momento em que se conseguiu unificar a noção de fração e construir um sistema coeso para suas unidades de medidas, a fração passou por mudanças em sua representação ao longo do tempo, havendo contribuição de povos antigos (IFRAH, 2010).

> Os Babilônios foram os primeiros a atribuir às frações uma notação racional, mas, não chegaram ao uso da “vírgula” para diferenciar os inteiros das frações sexagesimais da unidade. Eles não tinham um símbolo para representar a separação entre valores inteiros e os fracionários, dessa forma, a diferenciação só eram possíveis pelo contexto. Os Gregos procuraram atribuir uma notação geral às frações ordinárias, mas, sua numeração alfabética não se adequava a simbolização, o que levou a civilização grega desistir de adotar a notação sexagesimal em seus cálculos. Os Hindus desenvolveram a notação moderna das frações devido a sua numeração decimal de posição, chegaram a simbolizar mais ou menos como nós uma fração como 14/165 (14 sendo considerado numerador e 165 o denominador). Os Árabes aperfeiçoaram os números fracionários inventando a famosa barra horizontal $\boldsymbol{a/b}$. Em seguida, são descobertas as frações denominadas decimais, foi pouco a pouco ampliando o interesse da civilização árabe em prolongar a numeração decimal, isto é, a representação dos números depois da vírgula (IFRAH, 2010 apud ZEFERINO, 2016, pp. 41-42).

Ifrah (2010) explica que a noção moderna de fração atual se deu de forma decisiva pelo belga Simon Stévin, em 1582, ao anotar 578,845 por exemplo, da seguinte forma: 587(0) 8(1) 4(2) 5(3). Assim sendo, 578 unidades inteiras, 8 unidades decimais da primeira ordem ou décimos, 4 unidades decimais da segunda ordem ou centésimos e 5 unidades decimais da terceira ordem ou milésimos. Passados dez anos, o suíço Jost Bürgi simplificou um pouco mais a escrita, eliminando a menção das ordens decimais consecutivas, introduzindo um símbolo em forma de círculo (º) no alto das unidades simples. Desse modo, a escrita do número ficaria assim**:** $578^{o}\,845$. Nesse mesmo ano, o italiano Magini substituiu o símbolo da bolinha colocado no alto das unidades simples por um ponto (**.**), colocado entre o algarismo das unidades e o das dezenas. Dessa maneira, o número do exemplo seria escrito da seguinte forma: 578.845. No início do século XVII (dezessete), o neerlandês Wilbord Snellius introduziu a vírgula (,) no lugar do ponto (**.**), deixando a escrita do número decimal como se conhece hoje, ficando no exemplo da seguinte forma: 578, 845.

Rodrigues (2015) ressalta a importância de compreender o lógico-histórico na Matemática, como movimento fluente no desenvolvimento do pensamento teórico, sobretudo ressaltando os objetos de conhecimento basilares na formação do conceito de fração. Sousa (2014, p. 52) reforça essa tese ao explicar, o movimento do abstrato ao concreto mostrando que “[...] conecta o singular à totalidade, os nexos internos aos nexos externos do conceito, o pensamento flexível aos pensamentos empírico-discursivo e teórico”.

Kopnin (1978, p. 198) escreve:

> O histórico atua como objeto do pensamento, o reflexo do histórico, como conteúdo. O pensamento visa à reprodução do processo histórico real em toda a sua objetividade; complexidade e contrariedade. O lógico é o meio através do qual o pensamento realiza essa tarefa, mas é o reflexo do histórico em forma teórica, vale dizer, é a reprodução da essência do objeto e da história do seu desenvolvimento no sistema de abstrações. [...] O estudioso de qualquer campo da ciência encontra constantemente a questão de como abordar o estudo do objeto, de onde começar a reprodução de sua história no pensamento. Para revelara essência do objeto, é necessário reproduzir o processo histórico real de seu desenvolvimento, mas este é possível somente se conhecemos a essência do objeto. Por exemplo, o conhecimento da: essência do Estado pressupõe o conhecimento da história de seu surgimento e desenvolvimento, mas deve-se estudar a história do Estado tendo-se certo conhecimento da essência deste enquanto fenômeno social, pois do contrário pode-se tomar por Estado a organização gentílica do sistema comunitário primitivo

Para o 4º período, do curso de Pedagogia, com objetivo de formar o conceito de fração, foram organizadas ações, intencionalmente, planejadas na perspectiva do ensino desenvolvimental de Davydov (1982, 1988). O conceito de fração se mostra importante, pois engloba uma complexa rede de conceitos, como por exemplo, a multiplicação, a divisão, a soma, a subtração, sistema de medidas, etc. e faz parte da matriz curricular dos professores que ensinam, principalmente no 4º e 5º ano do ensino fundamental, e tem ações desdobradas nos anos posteriores e ao longo do processo de desenvolvimento do sujeito.

Entende-se que é um conceito elementar e expressivo para o aprendizado dos estudantes. Planejaram-se, com base no lógico histórico do conceito de fração, atividades de estudo para o desenvolvimento dos planos de aula, tendo como fundamentação teórica, a teoria Histórico-Cultural de Vygotsky e a teoria do ensino desenvolvimental de Davydov, por se acreditar que estudos, baseados nessas teorias, contribuirão para que o estudante desenvolva a formação do pensamento teórico, sendo capazes de dominar esse conceito e, ao conhecer essas teorias, poderão proporcionar, no futuro, um ensino de melhor qualidade para seus estudantes, sobretudo, como as crianças devem ser ensinadas; pois, a priori, o ensino desenvolvimental de Davydov (1982, 1988) foi aplicado no ensino de crianças e nessa dissertação, assume outra vertente: a formação de conceitos para sujeitos adultos que, em geral, ocupam-se de outras funções principais, além das atividades de estudo, são estudantes trabalhadores.

4 O ensino de fração: contexto e processo de aprendizagem

Nesse tópico, apresenta-se a construção, de forma resumida, de uma possibilidade de ensino, para a introdução e o desenvolvimento do conceito de fração, privilegiando o pensamento teórico.

Assim, como visto na construção histórica dos números fracionários, em que os Egípcios empregavam as frações nas medidas de terras, Caraça (2002) diz que medir e contar estão presentes na vida de todos, seja a dona de casa ao fazer provisões de roupas, seja o engenheiro ao fazer um projeto, ou o operário ajustando equipamentos de precisão. Em todas essas situações do cotidiano, exige-se a necessidade de medir, comparar, quantificar. Medir [...] “consiste em comparar duas grandezas da mesma espécie - dois comprimentos, dois pesos, dois volumes, etc.” (CARAÇA, 2002, p. 29). Em virtude disso, como ponto de partida para essa possibilidade de ensino do conceito fração, dentre as várias grandezas (números, operações, medidas, dentre outros), priorizou-se a medida de comprimento.

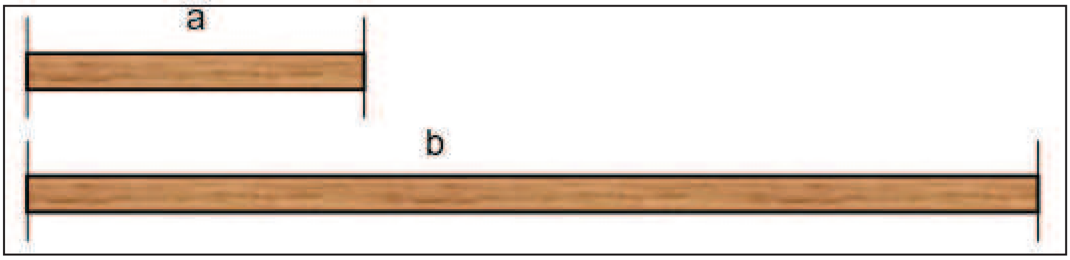
O ensino de matemática não pode ser momento de decodificar fórmulas e resolver problemas de forma repetitiva. Partindo dos estudos dos teóricos abordados nessa investigação, é preciso estimular os estudantes a abordar os temas de forma contextualizada, para que reflitam, teoricamente, os conteúdos escolares.

Nesse sentido, ao iniciar o ensino de fração, objetivando o pensamento teórico, o ponto de partida, segundo Rosa et al (2013) é,

> [...] a relação entre as grandezas, inicialmente de modo geral, ou seja, o valor da grandeza é desconhecido, por isso, representado algebricamente por meio de letras. Depois, a partir da introdução da unidade de medida é possível atribuir um valor aritmético para a medida da grandeza e sua localização na reta numérica (ROSA et al, 2013, p. 237).

No exemplo (figura 3), foram representados dois pedaços de madeira, identificados por **“a”** e **“b”**. De acordo com Rosa, Hobold, Bernardo, Corrêa e Inácio (2013) inicia-se o estudo por comparação das medidas de comprimento.

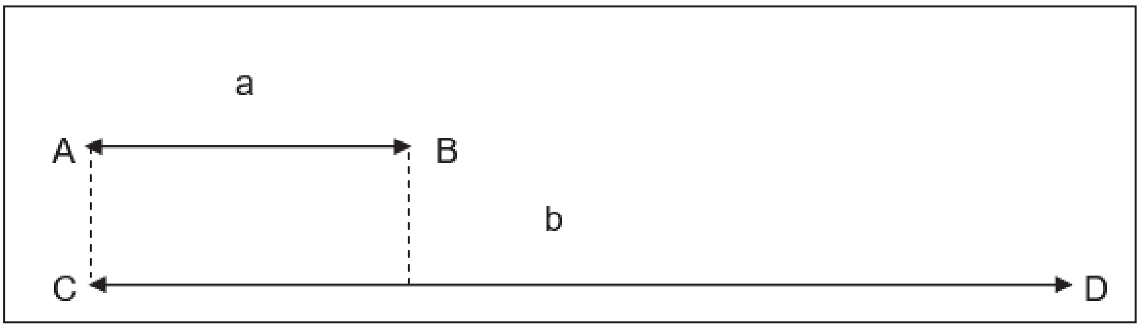
FIGURA 3: Comparação entre pedaços de madeira



FONTE: Figura ilustrativa elaborada pelo autor, 2018.

Pode-se representar o comprimento da madeira “**a”** pelos segmentos **$\overline{AB}$,** então, **a = $\overline{AB}$**, e o comprimento de madeira “**b”** pelo segmento **$\overline{CD}$**, então, **b = $\overline{CD}$**, conforme figura 4. De acordo com Caraça (2002), podem-se fazer as comparações, verificando que a medida do comprimento **$\overline{AB}$** é menor que o de **$\overline{CD}$**, ou que a medida do comprimento **$\overline{CD}$** e maior que o de **$\overline{AB}$**, nesses termos **$\overline{AB}$ < $\overline{CD}$** ou **$\overline{CD}$ > $\overline{AB}$.** E observa-se, também, que as medidas de **a** < **b** ou **b** > **a**.

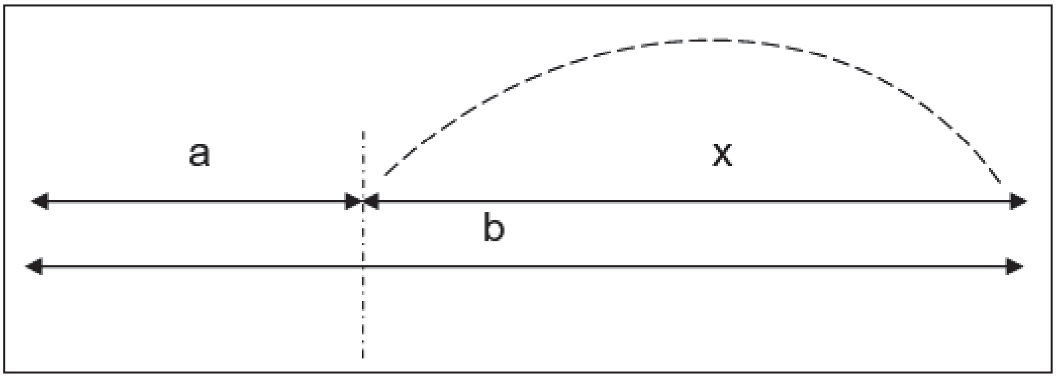
FIGURA 4: Comparação entre segmentos



FONTE: Figura ilustrativa elaborada pelo autor, 2018.

Seguindo o raciocínio de Rosa et al (2013), relacionando os comprimentos, pode-se observar na figura 4 (quatro) que **a + x = b** ou **b - x = a,** ou ainda**, x = b - a.**

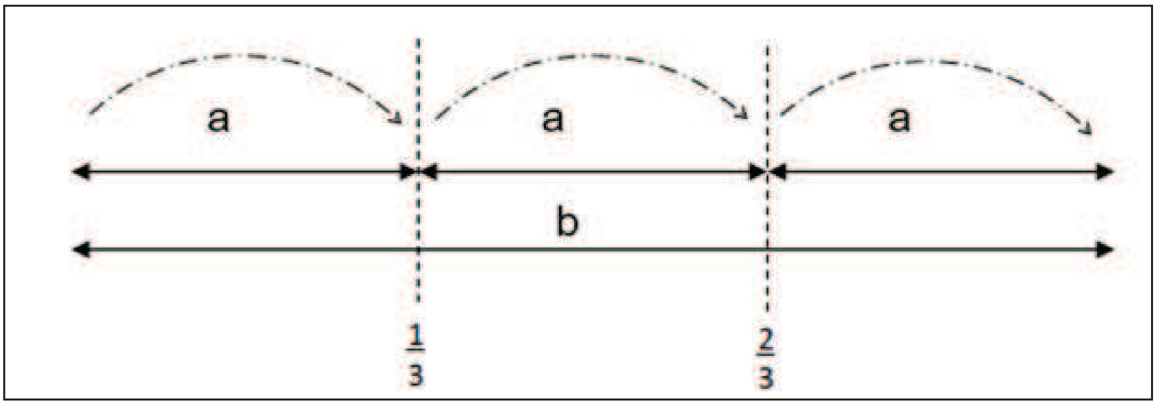
FIGURA 5: Relação entre comprimentos “a” e “b”



FONTE: Figura ilustrativa elaborada pelo autor, 2018.

Comparando o esquema, quantas vezes a medida de **“a”** cabe em **“b”**? ou, voltando à figura 3, quantas vezes o pedaço de madeira **b** é maior que o pedaço de madeira **“a”**? Caraça (2002) explica que, para responder essa questão, é necessário subdividir a unidade de medida **“b”** em certo número de partes iguais. Ou seja, para que o problema seja resolvido, deve-se subdividir a unidade de medida **“b”** em três partes iguais, conforme mostra a figura 6. Caso esse procedimento não seja adequado ao problema, faz-se necessário continuar o processo de subdivisão da unidade de medida até que o processo de medição seja realizado com perfeição.

FIGURA 6: Divisão de “b” em 3 partes iguais



FONTE: Figura ilustrativa elaborada pelo autor, 2018.

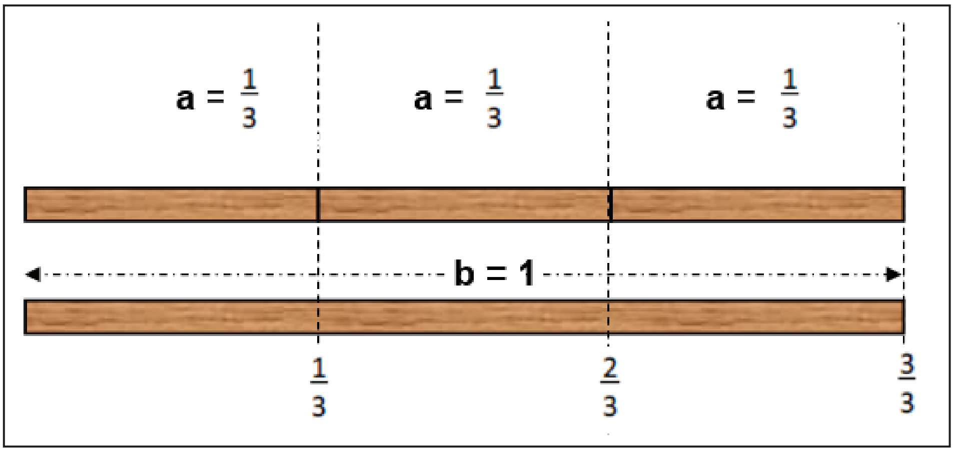
A figura 6 mostra a divisão do segmento $\overline{CD}$ em 3 partes iguais, onde **a =** $\frac{1}{3}$ **b** ou seja, **a/b =** $\frac{1}{3}$.

Diante do exposto Rosa et al (2013, p. 240) concluem que,

> A partir da relação universal do conceito de número no campo dos reais $\frac{a}{b}$ = c, foi possível determinar a representação singular ($\frac{1}{3}$) da medida do comprimento de AB por meio de uma particularidade, a unidade de medida ***b***. Sem a mediação desta, teríamos apenas as representações gerais para as medidas dos comprimentos em análise (***a*** e ***b***). O referido movimento só foi possível a partir da relação entre a grandeza contínua (comprimento) e a discreta (quantidade de vezes que a unidade de medida coube na grandeza em medição). E, na inter-relação das significações geométricas (segmentos), algébricas (expressão literal para representar a medida das grandezas desconhecidas e os símbolos para representar as relações de igualdade e desigualdade) e aritméticas (sua representação numeral: $\frac{1}{3}$).

De volta à situação real, na figura 7, é possível perceber que o pedaço de madeira "**b**", é 3 (três) vezes maior que o pedaço de madeira "**a**", ou, o pedaço de madeira "**b**" corresponde a medida de 3 pedaços de madeira "**a**", e cada parte da madeira "**a**" corresponde a $\frac{1}{3}$ do todo (pedaço de madeira "b").

FIGURA 7: Três partes iguais de um inteiro



FONTE: Figura ilustrativa elaborada pelo autor, 2018.

De acordo com Rosa (2009) e Bessa (2015) que desenvolveram estudos sobre a formação de conceitos de equação do segundo grau, perímetro e área, os estudantes, na teoria Histórico-Cultural, assimilam os conceitos em seu caráter geral, ou seja, apreendem o aspecto nuclear do objeto, para que, posteriormente, possam utilizá-los nas diversas situações particulares que a vida em sociedade exige, diferentemente do ensino que parte de exemplos particulares, em que o estudante só consegue resolver situações, cujo exemplo já tenha sido desenvolvido anteriormente.

Entende-se que o sensorial e o intuitivo, ou seja, o pensamento empírico são pontos de partida para a compreensão dessas representações matemáticas, competindo ao estudante a disposição das suas experiências pessoais reais e ao professor “guiar a instrução com base em leis gerais, enquanto as crianças devem lidar com essas leis gerais com a maior clareza possível, por meio da investigação de suas manifestações” (HEDEGAARD, 2002, p. 349).

A partir das contribuições desses autores organizou-se, com base nos pressupostos da teoria do ensino desenvolvimental, o experimento didático-formativo, acerca do conceito de fração. Experimento realizado com uma turma do 4º período, no curso de Licenciatura em Pedagogia, ou seja, sujeitos adultos, que tem o trabalho e o estudo como atividade principal, tendo convicção de que “durante o cumprimento da atividade de estudo, desenvolve-se nos escolares, junto com a assimilação dos conhecimentos teóricos, a consciência e o pensamento teórico” (DAVYDOV, 1988, p. 96), conforme descrito no capítulo a seguir.

CAPÍTULO III

OBJETIVAÇÃO DA PROPOSTA DE DAVYDOV PARA APRENDIZAGEM DO CONCEITO FRAÇÃO

O objetivo desse capítulo consiste em apresentar a análise dos resultados do experimento didático-formativo, desenvolvido com estudantes do 4º período, do curso de Pedagogia, de uma Instituição Pública do Estado de Goiás, cuja ênfase centra-se na apropriação do conceito de fração. A intenção primeira é fazer uma apresentação do experimento didático-formativo e, em seguida, a descrição e análise dos dados do experimento didático-formativo que norteou a organização da atividade de ensino, a fim de que a atividade de aprendizagem dos estudantes se efetivasse.

1 Métodos e procedimentos de pesquisa

O ensino da matemática escolar, especificamente na Educação Básica, conforme revelam pesquisas (SOUZA, 2015; SYLVIO, 2015; RODRIGUES,2015; CUNHA, 2014, SANTOS, 2014; SOUSA, 2014; FERREIRA, 2013; PERES, 2010; OTAVIANO, 2009; ROSA, 2009), fundamentadas na teoria Histórico-Cultural e na teoria do ensino desenvolvimental, não tem propiciado avanços suficientes para o desenvolvimento de capacidades intelectuais básicas na formação de um pensamento autônomo, crítico e criativo. Nesse sentido, a opção por realizar o experimento didático-formativo, está relacionada a dificuldades, no cumprimento do objetivo do ensino dessa disciplina, que é o de contribuir para a formação do pensamento teórico dos estudantes. Assim, a concretização do principal objetivo da pesquisa esteve pautada na realização do experimento didático-formativo, que norteou a organização da atividade de ensino, a fim de que a atividade de aprendizagem do conceito de fração se efetivasse. O que pressupõe, segundo Davydov (1988), um método especial de pesquisa, denominado método genético-formativo, que visa investigar a formulação e o desenvolvimento do pensamento dos estudantes em conexão com o modo de organização do ensino, cuja característica essencial é a intervenção ativa do pesquisador nos processos psíquicos que ele estuda. Para Davydov (1988):

> O método do experimento formativo tem como característica a intervenção ativa do pesquisador nos processos mentais que ele estuda. Neste aspecto, difere substancialmente do experimento de verificação (constatação e comprovação) que somente enfoca o estado já formado e presente de uma formação mental particular. A realização do experimento formativo pressupõe a projeção e modelação do conteúdo de novas formações mentais a serem constituídas, dos meios psicológicos e pedagógicos e das vias de sua formação. Ao pesquisar os caminhos para realizar esse projeto (modelo) no processo de trabalho de aprendizagem cognitiva feito com as crianças, pode-se estudar também as condições e regularidades da origem, da gênese das novas formações mentais correspondentes (DAVYDOV, 1988, p. 196).

Nesse sentido, o experimento didático-formativo visa organizar o ensino com o objetivo de desenvolver capacidades intelectuais durante o processo de apropriação de conhecimentos, de modo que os saberes apropriados sejam mediadores de ações mentais, resultando em mudanças qualitativas nas funções cognitivas. Conforme Davydov (1988) esclarece, ao dizer que:

> O ensino e a educação experimentais não se realizam adaptando-se ao nível presente, já formado, do desenvolvimento cognitivo das crianças, mas sim utilizando na comunicação do educador com as crianças, meios que formam ativamente nelas novo nível de desenvolvimento das capacidades (DAVYDOV, 1988, p.66).

Desse modo, "o método genético-modelador de investigação aparece como método de educação e ensino experimentais que impulsionam o desenvolvimento". (DAVIDOV, 1988, p. 196).

Nesse processo, Libâneo e Freitas (2013, p. 328) considerando que o experimento formativo visa "[...] investigar os processos de surgimento de novas formações mentais nos estudantes durante a atividade de estudo, mediante orientação para se atingir determinados objetivos", destacam três condições essenciais para uma adequada organização do processo de ensino-aprendizagem:

> [...] A primeira é a orientação das necessidades e motivos dos estudantes para a apropriação das riquezas culturais da espécie humana; a segunda é a formulação de tarefas de estudo cuja solução exija dos estudantes a realização de experimentos com o objeto a ser apropriado; a terceira é que essas tarefas requeiram dos estudantes a analise das condições dos conceitos específicos do conhecimento teórico e se apropriem das ações ou modos generalizados correspondentes (FREITAS & LIBÂNEO, 2013, p. 358).

Nessa perspectiva, o que se buscou nessa pesquisa foi identificar as possíveis mudanças qualitativas no pensamento dos estudantes, por meio da realização de tarefas, intencionalmente propostas no experimento. Para isso, buscou-se priorizar, conforme recomenda Davydov (1988), a relação entre o conteúdo, as tarefas e o desenvolvimento de ações mentais dos estudantes. Desse modo, as tarefas foram organizadas com o objetivo de viabilizar o desenvolvimento de habilidades cognitivas como observação, compreensão, análise, síntese, generalização, etc., indispensáveis à formação do conceito de fração. Como observa Davydov (1988, p.97) que "[...] durante o cumprimento das ações de estudo, os escolares dominam, sobretudo, os procedimentos de reprodução de determinados conceitos, imagens, valores e normas e, por meio destes, assimilam o conteúdo de tais conhecimentos teóricos". Assim, com base nesses fundamentos, o ponto de partida para planejar o ensino, com o objetivo do desenvolvimento do pensamento teórico dos estudantes, foi a análise lógica e histórica do conceito de fração, tendo em vista sistematizar as atividades de aprendizagem, considerando as ações necessárias aos estudantes para reproduzir, criativamente, esse conceito e, por conseguinte, propiciar e desenvolver o pensamento teórico.

Conforme mencionado, na introdução dessa pesquisa, o conceito de fração foi escolhido, sobretudo, por ser um conceito que envolve muitos outros conceitos como o de divisão, números decimais, quantidade, parte/todo, quociente, probabilidade, razão, medida, operador multiplicativo, dentre outros. Em geral, esses conceitos encontram-se nos livros didáticos de matemática do Ensino Fundamental, especificamente nos 4º e 5º anos.

A opção pelo 4º período se justifica no fato de o conteúdo de fração fazer parte dos conteúdos específicos da ementa da disciplina de *Educação Matemática*, oferecida pelo curso de Pedagogia e contemplar, entre outras coisas:

> Visão histórica e epistemológica do conhecimento matemático. Os objetivos e a função social/cognitiva dos conteúdos matemáticos. **Estudo de conteúdos específicos como fração,** porcentagem, geometria, operações básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão) aplicadas aos anos iniciais do Ensino Fundamental (grifos nossos).

Os dados foram coletados por meio dos seguintes instrumentos de pesquisa: questionário para os estudantes (Apêndice 2), aplicação de duas avaliações: uma para verificar o nível de desenvolvimento real dos estudantes, sobre o conteúdo de fração, antes da realização do experimento didático-formativo (Apêndice 3); e outra, para verificar a aprendizagem do mesmo conceito, após a realização do experimento didático-formativo (Apêndice 10); entrevista semiestruturada com o professor

(Apêndice 4), observação não-participante em sala de aula (Apêndice 7), elaboração do conceito de fração – após o experimento didático-formativo, essa atividade teve a intencionalidade de retomada da ação inicial, para que todos percebessem o crescimento qualitativo da turma, ou seja, a tomada de consciência do conceito (Apêndice 9) e o plano de ensino para o experimento didático-formativo (Apêndice 8), conforme a teoria do ensino desenvolvimental.

Durante os primeiros contatos com a instituição e com o professor de *Educação Matemática* da instituição, foi evidenciado o interesse, junto à instituição, em realizar um experimento didático-formativo no 4º período do Curso, período em que estava prevista a disciplina de *Educação Matemática*. Após a elaboração do plano de ensino, juntamente com o professor colaborador (Apêndice 8), ficou definido que o experimento didático formativo ocorreria nos meses de outubro, novembro e dezembro daquele ano.

O primeiro passo da coleta de dados foi a aplicação de um questionário dividido em duas seções (Apêndice 2), com objetivo de levantar informações acerca do contexto sociocultural dos estudantes e conhecer a opinião dos mesmos sobre o processo de ensino-aprendizagem de matemática, (Apêndice 4). O questionário foi respondido por 36 (trinta e seis) estudantes, matriculados no 4º período do curso de Pedagogia, sendo 35 (trinta e cinco) do sexo feminino e 1 (um) do sexo masculino. As questões fechadas foram analisadas por contagem das frequências e mostradas em % (porcentagem), enquanto as questões abertas, por meio da análise qualitativa.

As entrevistas semiestruturadas foram realizadas com um grupo de 8 (oito) acadêmicos, escolhidos pela qualidade das respostas dadas ao questionário e com o professor de matemática da turma. A entrevista com os estudantes (Apêndice 5), foi realizada após o experimento didático com o objetivo de identificar a visão dos estudantes a respeito da metodologia de ensino, utilizada para aprendizagem do conceito de fração. A entrevista com o professor teve por objetivo a obtenção dos seguintes aspectos: formação acadêmica e profissional, estratégias que adota para o ensino, como vê a matemática no contexto social da escola e das relações com seus estudantes.

Para compreender as mudanças qualitativas no modo de pensar dos estudantes foi utilizado, como procedimento, o roteiro para a observação sistemática das aulas (Apêndice 7).

Na transcrição e análise do áudio e vídeo do experimento didático-formativo, buscou-se verificar se o caminho percorrido, no decorrer da atividade de estudo, possibilitou a aprendizagem do conceito de fração. Ou seja, buscou-se a identificação das ações mentais que indicaram mudanças qualitativas no modo de pensar dos estudantes, acerca do conceito fração. Dessa forma, a participação de cada estudante foi considerada na análise, com o intuito de identificar elementos que sugerissem o movimento do abstrato ao concreto na aprendizagem desse conceito.

O experimento didático-formativo foi proposto em 6 (seis) momentos, considerando-se as ações, propostas por Davydov, a serem realizadas pelo estudante ao aprender um objeto de estudo.

Os momentos/aulas do experimento foram planejados, considerando as ações necessárias para o estudante reproduzir, criativamente, o conceito de fração de modo a torná-lo uma “ferramenta” própria. Cada aula contou com um planejamento individualizado, contendo objetivo geral, objetivo(s) específico(s), conteúdos, desenvolvimento metodológico e ações de aprendizagem dos estudantes, conforme plano de ensino (Apêndice 8).

Antes de iniciar o experimento didático formativo, todos os estudantes assinaram o termo de consentimento como sujeito da pesquisa (Anexo 2), bem como a declaração de autorização para gravação em áudio e vídeo (Anexo 3) e o termo de consentimento livre e esclarecido (Anexo 4).

O experimento didático-formativo foi realizado no período compreendido entre setembro e dezembro de 2017, em 6 (seis) momentos/aulas de 240 (duzentos e quarenta) minutos cada, o que corresponde a 24(vinte e quatro) horas de efetivo estudo, durante os meses de setembro, outubro, novembro e dezembro de 2017. É importante destacar que alguns aspectos, observados durante o 1º semestre de 2017, foram de extrema importância para a elaboração do plano de ensino, a abordagem dos conteúdos, a participação dos estudantes em sala e os processos de apropriação das informações durante as aulas. As aulas foram gravadas em áudio e vídeo (Anexo 3), tendo em vista apreender mudanças qualitativas no pensamento dos estudantes, no decorrer das atividades realizadas em sala de aula.

2 O contexto da pesquisa

O curso de Pedagogia, da Instituição de Ensino Superior investigada até o presente momento, é exclusivamente na modalidade licenciatura, apresentando modos diferentes como presencial, modular e a distância. O estudante, ao ingressar no curso, deve ter a noção de que o objetivo principal do mesmo é formar professores/pedagogos para lecionar, sobretudo, nos anos iniciais do Ensino Fundamental, podendo exercer também outras funções como coordenação, assessoria pedagógica, direção, etc.

O curso de Pedagogia foi autorizado a funcionar pelo decreto Estadual n° 4.677 de 26/05/1996. Obteve sua autorização para funcionamento por meio da portaria de nº 1887 de 25/09/2001 – DOE de 28/09/2001, e obteve seu reconhecimento para a expedição e registro de diplomas no prazo de validade até 31 de dezembro de 2007, por meio da portaria nº 2.105 de 01/12/2004 - DOE de 07/12/2004. Sua convalidação efetuou-se por meio da resolução CEE Nº 255, de 01/12/2002, validando os atos praticados pela instituição referente ao período de 1998 a 2000.

De acordo com o projeto político pedagógico da instituição, o curso destina-se à habilitação de professores para o exercício do magistério, no Ensino Fundamental e em outras instâncias educacionais. Proporciona, também, ao profissional, uma formação capaz de recriar a teoria para uma ação qualificada no processo educativo, tendo como função básica a formação do homem em sua totalidade. O professor/pedagogo deve atuar como intelectual crítico, dialogando com a realidade, analisando criticamente sua prática educativa e buscando a intervenção técnico-científica nos diversos aspectos das práticas de ensinar e aprender da escola, de modo comprometido com o processo de desenvolvimento e aprendizagem dos estudantes.

Nesse sentido, o professor/pedagogo atua na preparação, administração e avaliação de currículo, orçamentos e programas escolares; em regência de sala de aula; no planejamento e orientação de atividades de ensino-aprendizagem; no diagnóstico de situações educativas; na organização de processos educativos para além do espaço educativo; na elaboração e execução de projetos na área educacional e no acompanhamento e elaboração de critérios para o processo de avaliação.

O curso, nesse campus, é oferecido no período noturno e sua matriz curricular está planejada para 8 (oito) períodos, distribuídos em 4 (quatro) anos, proporcionando ao estudante trabalhar enquanto estuda. Diante de uma necessidade de afastamento, o estudante poderá cumpri-la de forma integral em até 6 (seis) anos, sem prejuízos na titulação, se ele atingir 7 (sete) anos, há jubilamento. De acordo com o MEC (Ministério da Educação e Cultura), por meio do INEP (Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas), a nota do curso (ENADE – Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes) em 2014, foi de 3 (três), em 2011 foi de 2 (dois) e 3 (três) nos anos de 2008 e 2005. A avaliação de ENADE obedece a uma escala de 1,0 (um) a 5,0 (cinco), sendo essa última nota dada aos cursos com excelência. Ressalta-se, nesse contexto, que boa parte dos estudantes do curso investigado exerce algum tipo de trabalho remunerado, o que, em muitos casos, dificulta uma dedicação mais exclusiva ao curso, tendo que exercer duas atividades principais, a de estudo e a de trabalho. Conforme Leontiev (1998), a atividade principal necessariamente não é aquela que o sujeito realiza com maior frequência ou dedica maior tempo, mas a que orientam as mudanças mais importantes nos processos psíquicos e nos traços psicológicos da personalidade, em certo estágio de seu desenvolvimento.

2.1 O professor colaborador[8]

A pesquisa foi realizada por meio da colaboração de um professor com formação específica em Matemática, que ministra a disciplina de *Educação Matemática* no curso de Pedagogia. A opção por colocar em prática o procedimento investigativo, por meio do acompanhamento assistido ao trabalho do professor, foi

[8] O professor colaborador é Mestre em Ensino de Ciências pela Universidade Estadual de Goiás - UEG (turma 2015/2). É docente na Educação Superior no curso de Licenciatura em Pedagogia desde 2016. Especialista em Psicopedagogia Clínica e Institucional pela Faculdade de Ciências e Educação de Rubiataba (FACER - 2010) e Docência Universitária (UEG - 2009). Graduado em Pedagogia (licenciatura) (UEG - 2006), Análise e Desenvolvimento de Sistemas - Tecnólogo (UVA - 2012), Matemática (UVA - 2016). Possui experiência como Coordenador Pedagógico nas Graduações Tecnológicas em Análise e Desenvolvimento de Sistemas e Processos Gerenciais da UVA/FAESPE, de 2011 à 2013. Foi docente no curso de Graduação Tecnologia em Análise e Desenvolvimento de Sistemas. Atua no Ensino a Distância, no curso de Licenciatura em Computação desde 2013. Foi Coordenador Administrativo da Universidade Estadual de Goiás-UEG entre 2014 e 2015. É Professor efetivo na Secretaria Municipal de Educação, Ciências e Tecnologia de Jaraguá-GO, lotado na Coordenação Pedagógica do município, desenvolvendo projetos de formação continuada de professores da Rede Municipal de Educação e elaboração de materiais didáticos pedagógicos do Ensino Fundamental I, além de atuar como docente do 5° ano do Ensino Fundamental.

no sentido de permitir que o pesquisador se mantivesse em uma posição mais favorável à observação e, por outro, que o experimento didático-formativo ocorresse nas condições reais de sala de aula.

Um dos obstáculos, na realização da pesquisa, foi o de encontrar o professor que aceitasse o desafio de ser colaborador, em um projeto de pesquisa como esse e, ainda, planejasse uma disciplina em conjunto, principalmente porque a maioria dos professores encontra-se sobrecarregado com muitas atividades. Isso demanda tempo, dedicação e disponibilidade. Infelizmente, em função dos baixos salários da profissão, a maioria dos professores está envolvida com até três turnos de trabalho efetivo em sala de aula, em duas ou mais instituições de ensino, situação que os desanima e inviabiliza a participação nesse tipo de pesquisa. O professor em questão, felizmente foi diferente, aceitou o desafio, mesmo com limitação de tempo e se propôs a ajudar no que fosse necessário. Uma de suas grandes inquietações, enquanto professor, é a busca de novas perspectivas para a aprendizagem da maioria dos estudantes com a disciplina de matemática.

Para ele, um dos grandes desafios enfrentados, em sala de aula, pelo professor do Ensino Superior, é o despreparo e a falta de pré-requisitos com que os estudantes chegam da educação básica. Esses estudantes chegam ao ponto de nem mesmo saber as quatro operações básicas, e isso se torna um grande obstáculo para o professor que, ao mesmo tempo, precisa dar conta de seu conteúdo curricular e suprir todas as deficiências, trazidas pelos estudantes da educação básica. Nos últimos anos, uma política nacional de acesso dos estudantes ao Ensino Superior provocou uma nova dinâmica na docência, exigindo, sobretudo, um novo olhar para as especificidades da educação. E, agora se tem o novo desafio, a Base Nacional Comum Curricular – BNCC, pelo menos pelas propagandas, que exigirá uma nova performance na formação do professor. Os cursos de formação de professores/pedagogos deverão ser revisitados, com vistas a atender as competências e habilidades previstas no documento oficial. O professor/pedagogo deverá ser pesquisador e estudioso, não poderá ser um mero “resolvedor” de exercícios do livro didático.

O professor ressalta, também, sobre a grande resistência que os estudantes têm com a Matemática, em todas as etapas do ciclo estudantil, seja no Ensino Fundamental, Médio ou Superior. Esse é o grande desafio do professor de Matemática, desmitificar e tornar uma disciplina acessível para todos os estudantes, em todas as etapas de seus estudos. Por isso, o aceite para participar da execução desse projeto de pesquisa de Mestrado. Desde que começou a atuar no ensino superior, interessou-se pelo aporte teórico de Vygotsky. No entanto, no que se refere ao ensino desenvolvimental mostrou desconhecimento.

Pelo movimento de colocar o estudante em atividade, entender a historicidade dos conteúdos, estimulando o estudante a avançar no conteúdo, paulatinamente, por meio de ações previamente planejadas pelo professor, pôde ser percebida a possibilidade de melhora de parte significativa do ensino oferecido aos estudantes nas escolas.

O contato com a instituição, bem como com o professor que participou como colaborador no experimento de ensino, teve início em abril de 2017 e estendeu-se até dezembro de 2017. De maio de 2017 até junho de 2017 foram realizadas observações empíricas na sala de aula do professor titular, somando aproximadamente 20 h/a (vinte horas aulas), ou seja, 5 (cinco) dias letivos. Durante a elaboração do plano de ensino do experimento didático-formativo foram necessários mais 4 (quatro) encontros de 4 h/a cada um, realizados nos meses de agosto e setembro de 2017, totalizando mais 16 h/a (dezesseis horas/aulas).

2.2 Os sujeitos da pesquisa

Participaram da pesquisa 36 (trinta e seis) estudantes. Os mesmos foram enumerados de 1 (um) a 36 (trinta e seis) e foram confeccionados crachás para cada estudante. Dos 36 (trinta e seis) estudantes, 35 (trinta e cinco) são do sexo feminino e 1 (um) do sexo masculino. Coincidentemente, o mesmo quantitativo foi de estudantes que fizeram a educação básica, predominantemente, em escolas públicas. Segundo os relatos, apresentados no questionário (Apêndice 2), há ênfase que a qualidade da educação oferecida na educação básica não foi de boa qualidade. Muitos apresentam entraves conceituais que os impedem de avançar em conceitos mais elaborados trabalhados na graduação.

A faixa etária dos estudantes do 4º período, do curso de licenciatura em Pedagogia, foi mais expressiva com pouco mais da metade, 19 (dezenove) estudantes com idades entre 18 e 23 anos; 7 (sete) com idades entre 24 e 29 anos, ou seja, a quinta parte; 6 (seis) com idades entre 30 e 36 anos e 3 (três) com idades superiores a 36 anos. Isso mostra uma turma formada por jovens, evidenciando que o ingresso no ensino superior se deu quase imediatamente ao término do Ensino Médio, proporcionado pela grande expansão da universidade nos diversos municípios do estado, não precisando de deslocamento para os grandes centros, a fim de dar continuidade aos estudos, como ocorria em décadas passadas.

A turma pesquisada é formada por 20 (vinte) sujeitos solteiros e 14 (quatorze) casados. Em geral, 20 (vinte) estudantes têm filhos e 16 (dezesseis) não têm filhos, sendo a média de 2 (dois) filhos. A ocupação de 12 (doze) dos estudantes foi tipificada como “do lar”, ou seja, aproximadamente um terço da turma. Já, 9 (nove) são atendentes em estabelecimentos comerciais, ou seja, um quarto da turma e 4 (quatro) são estagiárias em CMEI (Centro Municipal de Educação Infantil). De maneira geral, poucos apresentam aproximação com o campo da educação formal, enquanto experiência formal.

A renda per capita de 30 (trinta) estudantes é de até três salários mínimos, ou seja, a maioria deles, caracterizando a docência como escolha dos mais pobres. No grupo familiar de 16 (dezesseis) estudantes, 3 (três) ou 4 (quatro) pessoas sobrevivem com até 3 (três salários mínimos) e 12 (doze) estudantes, 5 (cinco) ou 6 (seis) pessoas sobrevivem com a mesma renda per capita. Desse grupo, a maioria, não tem qualquer experiência na docência. No entanto, a maioria, representada por 32 (trinta e dois), deseja a docência e acredita ter feito a escolha correta, pois é um curso de fácil empregabilidade. Um dado que chamou atenção foi o de que 5 (cinco) estudantes escolheram o curso por acharem que não tinha matemática. Dos que não desejam a docência, ou seja, 4 (quatro) estudantes, a falta de identificação com o curso e a desvalorização profissional foram apontados como determinantes.

Observa-se que, a exemplo da maioria dos cursos de Pedagogia no Brasil, há predominância do sexo feminino, talvez, pelas necessidades especiais que as crianças apresentam ao ingressarem na educação formal. Características como afetividade, acolhimento, carinho, doçura estão geralmente mais presentes na figura feminina. As habilidades com trabalhos manuais, cuja manipulação se torna essencial, também é um caracterizador dessa atuação. Limonta (2009, p.129) aponta que “pode-se dizer que a relação escola-fabrica deve muito a relação mulher-maternidade, dois elementos culturais fundamentais para a explicação da feminização do magistério”. Entende-se, também, que, na graduação em Pedagogia, os estudantes, além da tarefa principal de estudar, ocupam-se com outros afazeres necessários ao provimento de renda para sua manutenção na universidade, como trabalhos domésticos, auxiliares de balcão e produção, substituição em sala de aula, vendas de produtos, dentre outros.

2.3 A Visão dos estudantes sobre o ensino de matemática

No que se refere à formação para o exercício profissional, chamou bastante atenção o relato (Apêndice 11) da estudante 12: “[...] no meu caso não gostaria de ter a responsabilidade de lecionar matemática pois não me sinto (identifico) apta para tal, para mim esse é o maior erro: colocar professores não capacitados em determinadas disciplinas para algo tão importante”. Reforçando esse entendimento a estudante 18 diz: “[...] não me sinto apta a ensinar todas as disciplinas. Mas o curso me dá a consciência crítica que devo me aperfeiçoar e buscar conhecimento para estar apta a ensinar”. Nesse sentido, dos 36 (trinta e seis) estudantes, 21 (vinte e um), ou seja, a maioria destacou que o curso de Pedagogia os prepara para a docência nos anos iniciais, e em função disso “[...] têm noção de tudo durante o curso” (estudantes 21, 22 e 36). A maior parte dos estudantes afirmou que não se sente preparada para a docência dos anos iniciais do Ensino Fundamental, particularmente no que diz respeito ao ensino de matemática.

Talvez, isso explique o fato de que ao serem indagados sobre a disciplina que gostariam de ensinar, das 36 (trinta e seis) respostas dadas a essa questão, 12 (doze), ou seja, um terço apontou que a disciplina que dá maior prazer ao ensinar é língua portuguesa e 8 (oito) apontaram que é a disciplina de ciências. Em relação à disciplina que dá menos prazer ao ensinar, 23 (vinte e três) inquiridos, ou seja, a maioria apontou que é a disciplina de matemática e 7 (sete) apontaram a disciplina de língua portuguesa. Esses dados abalizam que se torna necessário repensar a docência dos anos iniciais do Ensino Fundamental, principalmente, quando um único profissional não dá conta, com maestria, de ensinar com a mesma qualidade 8 (oito) disciplinas curriculares. Há experiências exitosas de escolas que já separam as disciplinas por professores específicos nos anos iniciais, entre elas, as da Prefeitura

Municipal de Anápolis/GO e o CEPAE - Centro de Ensino e Pesquisa Aplicada à Educação - UFG, dentre outros.

Todavia, ao serem questionados acerca da importância da matemática, 19 (dezenove) estudantes, ou seja, um pouco mais da metade enfatizou: “[...] muito importante, pois a utilizamos o tempo todo”. Alguns relatos explicitaram frustração em relação à aprendizagem dessa disciplina, “[...] antes de começar esta disciplina, nem me lembrava que matemática existia, afinal de contas, preferia ignorar do que admitir as experiências ruins e a complexidade da mesma” (estudante 20); “[...] tenho a plena consciência de que a matemática é fundamental, mas eu não consigo compreendê-la por mais que eu me esforce, aprendo no momento da explicação, mas quando é pra fazer sozinha, acabo esquecendo” (estudante 19).

Nesse sentido, alguns relatos chamaram atenção a respeito da forma como os estudantes aprenderam matemática, antes de ingressar na Universidade. “[...] trágico, aulas monótonas, professores não davam a vez aos alunos, onde tínhamos medo de perguntar e levar bronca” (estudante 25), “[...] nunca me despertou interesse” (estudantes 17 e 23), “[...] achava que Pedagogia não tinha matemática” (estudantes 12, 14, 16 e 22), “[...] era apenas decoreba e resolução de exercícios” (estudantes 18 e 34), “[...] me dava medo de ser reprovada” (estudantes 2 e 36), “[...]o ensino da matemática não me trazia importância, porque eu pensava que eu não teria que trabalhar com a matemática” (estudantes, 28 e 30), “[...] eu nunca me interessei por matemática até agora, trata-se de um território árido, com números frios, um lugar do qual, por muito tempo eu me afastei” (estudante 32), “[...] aprender matemática é muito bom, porém o psicológico tem que estar preparado. O meu estava ‘fechado’, só temos que ‘abrir’ a caixa para aprender” (estudante 31).

Esses relatos, de maneira geral, evidenciam a resistência que boa parte dos estudantes tem em aprender matemática e ratificam que, o problema com a matemática escolar, começa nos anos iniciais do Ensino Fundamental. No que se refere à forma com que os conteúdos matemáticos foram ensinados aos estudantes na educação básica, a concepção determinante foi a de que os conceitos eram provenientes das listas de exercícios, isto é, seguiam os modelos previstos pelos professores, conforme expresso na tabela 4 (quatro):

TABELA 4: Sobre os conceitos matemáticos apresentados aos estudantes do 4º período de Pedagogia na educação básica – 2017.

Item		Quant.	%
a)	Resolução de Problemas	14	22,6
b)	Contextualização – Saber Matemático	03	4,8
c)	Memorização dos Conteúdos – Livro Didático	28	45,2
d)	Listas de Exercícios	16	25,8
e)	Outros	01	1,6
Total		62	100,0

FONTE: Dados do Questionário – II Secção (Apêndice 2)

A tabela 4 (quatro) reforça que a concepção de ensino, vivenciada pela maioria dos estudantes, está fundamentada nos pressupostos da pedagogia tradicional. A lista de exercício, atitude extremamente usual nas aulas de matemática, evidencia que, em geral, o estudante acaba copiando as respostas do colega ou quando o professor explica a questão no quadro-negro. Nesse sentido, entende-se que as cópias por si só não proporcionam ensino significativo, fazendo com que essa área do conhecimento seja a menos apreciada por boa parte dos sujeitos investigados. É preciso que os professores proporcionem ensino significativo para os estudantes, o que, segundo Davydov (1988), é colocar os estudantes em ações intencionais de aprendizagem. Confirmando os resultados encontrados na tabela 4 (quatro), os estudantes relataram que as aulas de matemática, em sua maioria, concentravam-se, sobretudo, na atividade do livro didático (Apêndice 11). Embora, perceba-se uma melhora significativa dos livros didáticos nos últimos anos, principalmente após os anos de 2010, ele deve ser minuciosamente planejado, com ações intencionais do professor para que seja proporcionada a educação significativa aos estudantes. No entanto, a maioria dos estudantes teve como metodologia de ensino aula expositiva, conforme mostra a tabela 5 (cinco).

TABELA 5: Metodologia de ensino de matemática na educação básica – 4º período de Pedagogia – 2017.

Item		Quant.	%
a)	Dialogada	13	29,5
b)	Aula Expositiva	23	52,3
d)	Exercícios Contextualizados com o dia a dia	08	18,2
e)	Outros	00	00,0
Total		44	100,0

FONTE: Dados do questionário – II Secção (Apêndice 2)

Na sequência ao processo ensino-aprendizagem vivenciada pelos estudantes, do 4º período de Pedagogia, os mesmos apresentaram que, de maneira geral, resolviam atividades de forma individual, o que impossibilitava a troca de experiência entre os sujeitos envolvidos no processo ensino-aprendizagem. A troca de experiência entre os estudantes é um momento profícuo para a formação de conceitos (VYGOTSKY, 2008, 2009, 2010; DAVYDOV, 1988). O intercâmbio cultural é um rico momento de aprendizagem, pois o sujeito mais experiente auxilia o menos experiente. O ensino centrava-se na explicação por parte do professor e resolução de atividades por parte dos estudantes, como já evidenciado na tabela 5 e ratificado na tabela 6, expressando que a maioria resolvia os problemas de matemática de forma individual.

TABELA 6: Resolução de problemas matemáticos na educação básica – 2017.

Item		Quant.	%
a)	Individualmente	38	56,7
b)	Em Dupla	11	16,4
c)	Em Pequenos Grupos	03	4,5

d)	Usando Calculadora	15	22,4
e)	Outros	00	0,0
Total		67	100,0

FONTE: Dados do Questionário – II Secção (Apêndice 2)

Os estudantes investigados, em geral, ratificaram que estudar matemática é de extrema importância, principalmente pelo fato de ser parte complementar do desenvolvimento integral dos estudantes. No entanto, a pesquisa apontou como principal desafio a falta de pré-requisitos, por parte do estudante que chega ao ensino superior não dominando os conteúdos básicos. Um grupo significativo dos estudantes apontou que as aulas de matemática foram desenvolvidas, predominantemente, por meio da demonstração das atividades no quadro de giz, por parte do professor, enquanto outro grupo significativo ratificou essa informação, mostrando que a resolução dos exercícios se dava após a explicação do professor, no quadro-negro. Os resultados dessa questão podem ser observados na tabela 7.

TABELA 7: Metodologia nas aulas de matemática – curso de Pedagogia – 2017.

Item		Quant.	%
a)	Demonstrações no Quadro de Giz	20	29,4
b)	Pesquisa	12	17,6
c)	Resolução de Exercícios após a Explicação do Professor	28	41,2
d)	Problematização do Conteúdo	07	10,3
e)	Outro	01	1,5
Total		68	100,0

FONTE: Dados do Questionário – II Secção (Apêndice 2)

De acordo com os estudantes, em relação à formação de conceitos matemáticos, em especial, a metodologia do ensino apontou que boa parte deles saiu da educação básica, dominando poucos conceitos da matemática. Além disso, balizou que, para um grupo significativo de estudantes, a matemática apresentou muita abstração e pouco aprendizado, conforme aponta a tabela 8 (oito).

TABELA 8: Ensino de conceitos de matemática – curso de Pedagogia – 2017.

Item		Quant.	%
a)	Aprendi Muitos Conteúdos	08	18,6
b)	Não Aprendi Quase Nada	10	23,2
c)	Sei as Operações Básicas	07	16,3
d)	Muita Abstração, Pouco Aprendizado	18	41,9
e)	Outro	00	0,00
Total		43	100,0

FONTE: Dados do Questionário – II Secção (Apêndice 2)

Essas concepções corroboram a relação de repulsa que a maioria dos estudantes tem com os conteúdos de matemática na educação básica. Pressupõe-se que a aprendizagem de matemática, para eles, ocorreu apenas no nível empírico, de forma superficial, chegando aos pseudoconceitos que, de acordo com Vygotsky (1998), reflete um elo entre o pensamento por complexo e o pensamento por conceitos. Contudo, nessa fase, o indivíduo se encontra preso no concreto e não é capaz, ainda, de abstrair como ocorre no pensamento por conceitos. Nesse contexto, proporcionar aos estudantes metodologia de ensino que lhes permita formar conceitos, mostra-se como uma prática necessária que buscará propiciará ao sujeito o aprendizado de novos métodos de ensino e, nesse sentido, é preciso dar vivacidade aos conteúdos ensinados, isto é "os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e de modelagem podem ser citados como formas privilegiadas de atividade matemática, ou seja, objeto e estratégia para aprendizagem" (BRASIL, 2017, p. 264). Até porque a formação do professor/pedagogo deverá subsidiar, teoricamente, os profissionais responsáveis pelos primeiros contatos dos estudantes com a educação formal.

3 Organização do experimento didático-formativo: avaliação diagnóstica e o plano de ensino

3.1 Avaliação diagnóstica da aprendizagem

O primeiro contato formal com os estudantes do 4º período do Curso de Pedagogia se deu para aplicação da avaliação diagnóstica I (Apêndice 3), ocorrido no dia 16/09/2017, no horário de 7h45min às 11h45min, com a finalidade de identificar o conhecimento dos estudantes, acerca dos conteúdos necessários à aprendizagem do conceito de fração, em especial, operações com frações, comparação de frações, representação em desenhos, números decimais. Como escreve Libâneo e Freitas (2013, p. 346), "[...] é imprescindível investigar a periodização das fases do desenvolvimento mental, o que possibilita identificar mudanças a serem promovidas na atividade em cada período evolutivo". Todavia, Davydov (1988) idealizou a teoria do ensino desenvolvimental para crianças, o que pressupõe não serem necessários os conhecimentos prévios. No entanto, nesse experimento didático-formativo, adotou-se a avaliação diagnóstica (Apêndice 3) e a avaliação após o experimento didático-formativo (Apêndice 10), por se tratar de ensino de adultos, especificamente de um curso de licenciatura em Pedagogia. Também, por serem sujeitos que passaram pela educação básica de, no mínimo, 12 (doze) anos e estudaram os conteúdos elementares da matemática. Isto é, os sujeitos da pesquisa passaram por várias experiências com o processo ensino-aprendizagem da matemática elementar, quesitos adotados como importantes na formação do conceito de fração.

Foi explicado aos participantes o motivo da avaliação diagnóstica, composta de 8 (oito) questões, deixando claro que a nota atribuída na avaliação não teria impacto algum no rendimento dos estudantes naquele bimestre. Tratava-se de um estudo de um Programa *Stricto Sensu* – Mestrado em Educação, cuja pesquisa visava proporcionar uma reflexão sobre o ensino da matemática escolar, evidenciando o conceito de fração no curso de licenciatura em Pedagogia. Após essa explicação, os estudantes assinaram o termo de consentimento como sujeito da pesquisa (Anexo 2), declaração de autorização para gravação em áudio e vídeo

(Anexo 3) e o termo de consentimento livre e esclarecido (Anexo 4). Alguns estudantes fizeram perguntas, acerca da ética na pesquisa, principalmente se o nome deles e da instituição de ensino apareceriam em algum lugar do estudo realizado. Após as perguntas, foi esclarecido que os resultados são importantes fontes de reflexão, mas que nenhum nome apareceria, nem dos estudantes, nem o nome da universidade pesquisada. O que deixou os estudantes bem tranquilos.

Durante a aplicação da avaliação diagnóstica (Apêndice 3), muitas falas chamaram atenção do pesquisador , como exemplo: “já vi isto”, “meu Deus não sei de nada”, “é fácil, mas não sei fazer”, “pelo menos essa questão de comparar eu sei”, “essa matemática sempre foi meu carma”, “vou entregar essa avaliação em branco”, “professor tem certeza que a nota que eu tirar aqui, não influenciará no meu rendimento neste bimestre?”, “o que eu faço com esse um terço?”, “é muita fração para quem não sabe nada de fração”, “a gente tira o mínimo primeiro ou soma primeiro?”, dentre outras falas.

Essas falas reforçam que o ensino de matemática foi pouco significativo para boa parte dos estudantes, durante a educação básica. Muitos estudantes chegam à universidade, dominando poucos ou quase nenhum conteúdo específico da matemática; em especial, nas licenciaturas e no curso de Licenciatura em Pedagogia, o contexto não é diferente. As questões foram desenvolvidas em forma de problemas simples, cujo desejo era levar os estudantes às respostas, seja por meio de estratégias pessoais, seja por estratégias padronizadas.

A avaliação foi respondida, individualmente, por 35 (trinta e cinco) estudantes. Os resultados apontam um baixo desempenho da turma, como pode ser observado na tabela 9.

TABELA 9: Resultado: Avaliação Diagnóstica I – 4º período de Pedagogia – 2017.

Nº	**QUESTÕES**								**Acertos**	**% Acertos**
*	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**	***
1	0,2	0,2	0,2	0,2	0,3	0,0	0,3	0,3	1,70	56,57
2	0,2	0,0	0,2	0,4	0,0	0,2	0,0	0,0	1,00	33,33
3	0,0	0,0	0,2	0,3	0,0	0,0	0,0	0,0	0,50	16,67
4	0,0	0,0	0,0	0,2	0,0	0,0	0,0	0,0	0,20	6,67
5	0,0	0,2	0,0	0,3	0,2	0,0	0,0	0,0	0,70	23,33

6	0,0	0,4	0,2	0,4	0,0	0,0	0,0	0,0	1,00	33,33
7	0,0	0,0	0,0	0,1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,10	3,33
8	0,0	0,1	0,0	0,3	0,3	0,0	0,0	0,0	0,70	23,33
9	0,2	0,0	0,0	0,3	0,4	0,0	0,0	0,0	0,90	30,00
10	0,0	0,4	0,1	0,3	0,0	0,0	0,0	0,0	0,80	26,67
11	0,0	0,1	0,2	0,1	0,0	0,3	0,0	0,0	0,70	23,33
12	0,0	0,0	0,2	0,2	0,0	0,0	0,0	0,0	0,40	13,33
13	0,0	0,4	0,4	0,3	0,4	0,3	0,0	0,0	1,80	60,00
14	0,0	0,4	0,0	0,1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,50	16,67
15	0,0	0,2	0,2	0,3	0,0	0,0	0,0	0,0	0,70	23,33
16	0,0	0,1	0,0	0,2	0,0	0,0	0,0	0,0	0,30	10,00
17	0,0	0,0	0,2	0,2	0,0	0,0	0,0	0,0	0,40	13,33
18	0,0	0,0	0,2	0,2	0,0	0,0	0,0	0,0	0,40	13,33
19	0,0	0,0	0,2	0,2	0,2	0,0	0,0	0,0	0,60	20,00
20	0,2	0,4	0,2	0,2	0,0	0,0	0,0	0,0	1,00	33,33
21	0,2	0,4	0,2	0,2	0,0	0,0	0,0	0,0	1,00	33,33
22	0,0	0,4	0,2	0,2	0,0	0,0	0,0	0,0	0,80	26,67
23	0,1	0,0	0,2	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,30	10,00
24	0,1	0,0	0,2	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,30	10,00
25	0,0	0,0	0,0	0,2	0,0	0,0	0,0	0,0	0,20	6,67
26	0,0	0,4	0,2	0,3	0,3	0,1	0,0	0,0	1,30	43,33
27	0,0	0,4	0,2	0,3	0,3	0,1	0,0	0,0	1,30	43,33
28	0,2	0,0	0,2	0,1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,50	16,67
29	0,0	0,0	0,2	0,4	0,3	0,0	0,0	0,0	0,90	30,00
30	0,0	0,1	0,0	0,2	0,0	0,0	0,0	0,0	0,30	10,00
31	0,0	0,4	0,0	0,4	0,0	0,0	0,0	0,0	0,80	26,67
32	0,0	0,4	0,0	0,3	0,0	0,0	0,0	0,0	0,70	23,33
33	0,2	0,4	0,2	0,4	0,0	0,0	0,0	0,0	1,20	40,00
34	0,0	0,2	0,2	0,4	0,0	0,0	0,0	0,0	0,80	26,67
35	0,2	0,4	0,2	0,4	0,0	0,0	0,0	0,0	1,20	43,33
%[9]	**15,43**	**54,86**	**42,00**	**72,00**	**23,14**	**8,57**	**2,57**	**5,14**	**0,75**	**24,86**

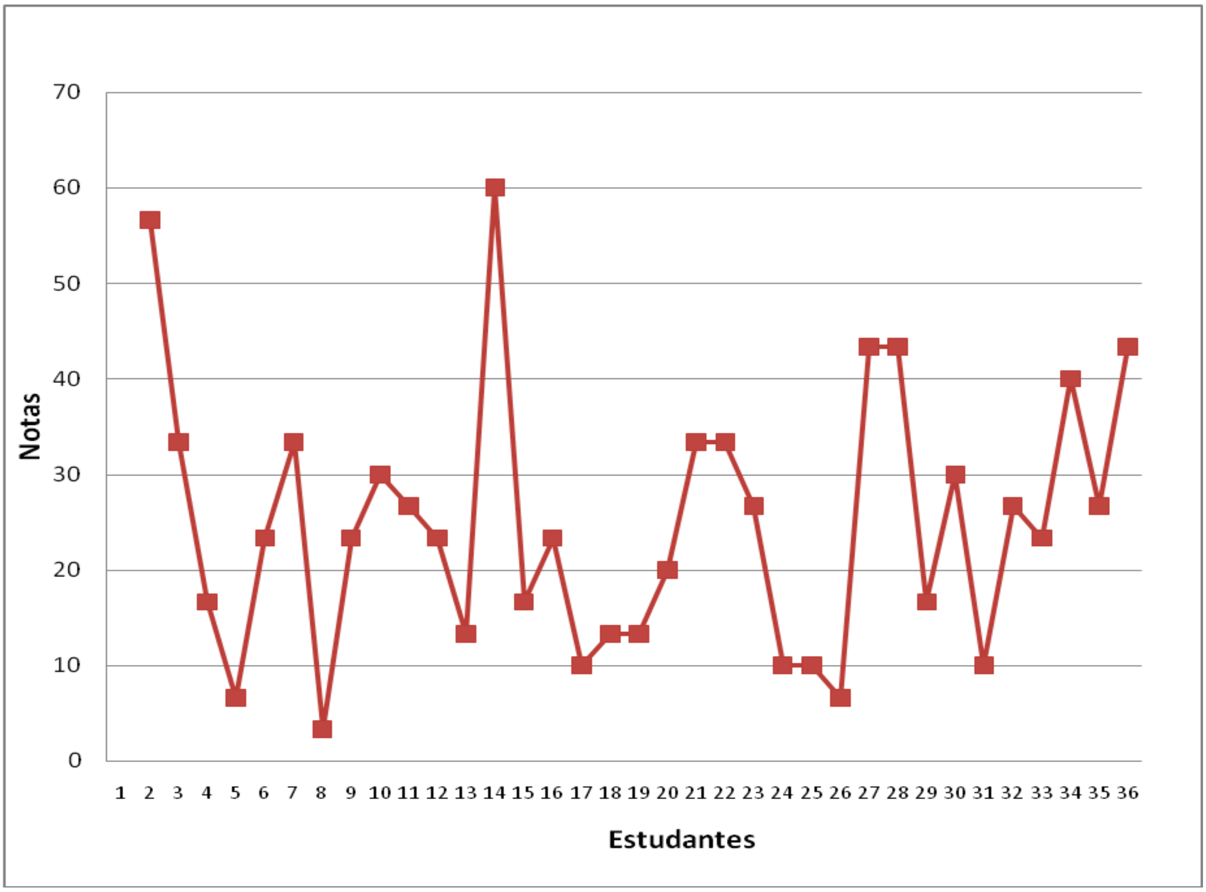
FONTE: Resultado da avaliação diagnóstica I – Apêndice 3

Os dados da tabela 9, que fazem referência à avaliação diagnóstica I[10], foram sintetizados no gráfico 1, onde é observado o nível de desenvolvimento real dos

[9] Percentual de Acertos – A Questão 1 até a 6 valia 0,4 (quatro décimos) e as questões 7 e 8, 0,3 (três décimos)
[10] Sabe-se que Davydov (1988), ao formular a teoria do ensino desenvolvimental, não exige pré-requisitos de conteúdos para o desenvolvimento das ações de aprendizagem. A avaliação diagnóstica, apenas foi utilizada como um parâmetro de observação do nível real dos estudantes no momento em que o experimento didático-formativo foi iniciado.

estudantes do 4º Período do curso de Licenciatura em Pedagogia, sobretudo, nos conteúdos relacionados ao conceito de fração.

GRÁFICO1:Resultado: Avaliação Diagnóstica I – 4º período de Pedagogia – 2017.



FONTE: Resultado da avaliação diagnóstica I (Apêndice 3)

A avaliação diagnóstica I tinha valor máximo de 3,0 (três) pontos (apenas para referência). O resultado da avaliação diagnóstica (Apêndice 3) aponta para uma turma com “conhecimento pouco expressivo” para o conceito de fração a ser estudado, ou seja, “[...] deve-se admitir que em virtude de inúmeras razões objetivamente operacionais, nosso sistema de educação pública não utiliza eficazmente o potencial educacional da atividade socialmente útil dos adolescentes” (DAVYDOV, 1988, p. 46).

Das questões da avaliação diagnóstica (Apêndice 3), em 5 (cinco) questões os estudantes poderiam se expressar da forma que desejassem, desde que chegassem ao resultado esperado ou mostrassem outras possibilidades, 3 (três) questões eram objetivas e já havia proposições que eram esperadas como respostas. Das 5 (cinco) questões subjetivas, os estudantes poderiam ter nota parcial da questão, ou seja, se interpretassem e resolvessem o problema, adequadamente, teriam a pontuação integral, ou se resolvessem a questão, parcialmente, teriam a pontuação proporcional à parte feita adequadamente. As questões 7 (sete) e 8 (oito) teriam apenas as menções 0,0 (zero), se errassem, ou 0,3 (três décimos) se acertassem e a questão 4 (quatro) também poderia ter nota parcial.

O indicador de acerto na avaliação diagnóstica foi de 24,86% (vinte e quatro vírgula oitenta e seis por cento), ou seja, menos de $\frac{1}{4}$ (um quarto) de acerto. Esse resultado reforça os dados das pesquisas nacionais que apontam que os estudantes avançam em anos de estudos, mas não estão conseguindo avançar em conhecimentos escolares, isto é “o pensamento que se realiza com ajuda das abstrações e generalizações de caráter lógico-formal somente leva a formar os chamados conceitos empíricos” (DAVYDV, 1988, p. 61). O que significa dizer, também, segundo Nascimento (2016, p. 380), que “[...] a organização do processo de ensino, visando a formação do conhecimento científico e desenvolvimento intelectual do estudante” não tem sido priorizada durante as aulas de matemática na Educação Básica.

O professor não consegue avançar para o campo científico, permanecendo no campo empírico como aponta Davydov (1998, p. 26), “o sistema educacional, da forma com que tem se desenvolvido até o momento, não está conseguindo obter uma solução adequadamente eficaz para alguns importantes problemas ligados a esta tarefa social”. Diante desses resultados, o pesquisador iniciou com o professor titular (colaborador da pesquisa) da disciplina de *Educação Matemática*, o plano de ensino para que os estudantes formassem o conceito de fração, levando em consideração que esses estudantes estavam em uma graduação e já haviam passado pela educação básica, apesar de demonstrarem ter muita dificuldade com conteúdos matemáticos, como foi evidenciado na tabela 8 e na avaliação diagnóstica (Apêndice 3).

3.2 O Plano de Ensino

Para atender ao objetivo geral da pesquisa, que foi o de compreender as contribuições da teoria do ensino desenvolvimental para a formação do conceito de fração, foi elaborado um plano de ensino (Apêndice 8) para a realização do experimento de ensino que, juntamente com as entrevistas semiestruturadas e observações, permitiram a obtenção dos dados necessários ao presente estudo.

A elaboração do plano de ensino considerou os dados apresentados, acerca das concepções e práticas dos estudantes de Pedagogia, particularmente da zona desenvolvimento real da turma, identificada por meio da avaliação diagnóstica I (Apêndice 3), aplicada com o objetivo de apreender o domínio dos conteúdos basilares da matemática, especificamente o de fração. Assim, considerando as condições concretas e reais dos estudantes, procurou-se organizar, metodologicamente, o processo ensino-aprendizagem, tendo em vista a formação do conceito de fração. Como afirma Vygotsky (2007), o aprendizado devidamente organizado resulta em desenvolvimento mental e coloca em movimento vários processos de desenvolvimento que, de outra forma, seriam impossíveis de acontecer.

Para isso, ao planejar o ensino, conforme recomenda Davydov (1988), é preciso realizar a análise lógica e histórica do conceito, visando identificar as relações nele presentes, o tipo de movimento mental que ele contém, enfim compreender o nuclear do conceito estudado. Nessa perspectiva, as atividades de ensino foram formuladas com o objetivo de estimular os estudantes à apropriação do nuclear do conceito de fração. Dessa maneira, após um estudo aprofundado do conteúdo, o plano de ensino foi elaborado, visando conduzir o estudante, por meio da organização de atividades de estudo, nas quais se encontram contidas procedimentos mentais que permitam a reprodução criativa do conceito de fração, de modo a torná-lo uma ferramenta própria para o estudante. Para a formulação das tarefas de estudo foram consideras as 6 (seis) ações descritas por Davydov (1988):

> [...] (1)Transformação dos dados da tarefa a fim de revelar a relação universal do objeto estudado (2) Modelação da relação diferenciada em forma objetivada, gráfica ou por meio de letras (3) Transformação do modelo da relação para estudar suas propriedades em “forma pura” (4) Construção do sistema de tarefas particulares que podem ser resolvidas por um procedimento geral; (5)Controle da realização das ações anteriores (6)

> Avaliação da assimilação do procedimento geral como resultado da solução da tarefa de aprendizagem dada (DAVYDOV, 1988, p. 99).

Essas ações nortearam o planejamento do ensino do conceito de fração, especificamente a elaboração das tarefas, cuja execução pode possibilitar aos estudantes se apropriarem do conceito nuclear da fração, isto é, a relação de grandeza. Para isso, as tarefas foram elaboradas, contemplando, inicialmente, as ações coletivas que propiciaram questionamentos e diálogos com o professor, considerando que o processo de formação de conceitos equivale ao movimento do geral para o particular. O que implica conduzir o processo de ensino-aprendizagem de modo que: “[...] primeiro os alunos aprendem o conceito do objeto e só depois lidam com este objeto em situações particulares, nas diversas formas que ele se apresente, em distintos contextos” (FREITAS, 2011, p.78). Isto é, considerando que a valorização dos contextos socioculturais é um fator que motiva os estudantes para a atividade de ensino, procurou-se planejar as atividades de aprendizagem, priorizando a articulação entre situações do contexto sociocultural das práticas cotidianas dos estudantes, com o objeto de estudo à formação do pensamento teórico.

A elaboração do plano de ensino (Apêndice 8) consistiu, antes de tudo, em um desafio teórico-prático para o pesquisador. Representou, também, um desafio criador mediante as características dos estudantes, já descritas anteriormente. O plano de ensino foi elaborado e compartilhado com o professor da turma, com quem foram discutidas as ideias do pesquisador, tendo como eixo principal o núcleo do objeto, ou seja, o aspecto geral que o constitui e os desafios de superar o pensamento empírico da turma, identificado por meio da avaliação diagnóstica (Apêndice 3).

No próximo tópico, o experimento didático formativo é descrito e analisado por meio de 6 (seis) aulas, aqui chamado de momentos, por analogia às sessões de teatro, em que cada momento será o ponto de partida para o momento seguinte, enfatizando, sobretudo, o desenvolvimento das ações mentais contidas nas tarefas, cuja execução indica mudanças qualitativas no modo de pensar dos estudantes, no processo de aprendizagem do conceito de fração, realizado a partir do movimento do abstrato ao concreto, do ponto de vista dialético.

4 O experimento didático-formativo: a análise

O experimento didático-formativo foi proposto, buscando analisar o ensino-aprendizagem do conceito fração por estudantes da disciplina de educação matemática do curso de licenciatura em Pedagogia, tendo como fundamento teórico-metodológico a teoria do ensino desenvolvimental de Davydov.

Para análise dos dados foram consideradas as seguintes categorias: atividade de estudo, interação, mediação, zona de desenvolvimento proximal e formação de conceitos/pensamento teórico. Essas categorias foram utilizadas em todos os momentos do experimento didático-formativo. A análise foi dividida nos seguintes momentos: (1) Aproximação com o conceito de fração na busca da relação universal do objeto estudado; (2) A modelação da relação universal; (3) Interiorização da relação universal do conceito de fração, a partir da transformação do modelo; (4) Abstração na formação do conceito de fração e a construção do sistema de tarefas particulares; (5) Controle da realização das ações mentais na formação do conceito de fração; (6) Avaliação da assimilação na formação do conceito de fração por meio da resolução de problemas. A seguir, apresenta-se a descrição e análise do experimento de ensino por meio de episódios[11] de ensino, que representam a seleção de momentos que permitem a análise das ações mentais dos estudantes, na apropriação dos conceitos.

1ª MOMENTO: APROXIMAÇÃO COM O CONCEITO DE FRAÇÃO NA BUSCA DA RELAÇÃO UNIVERSAL DO OBJETO ESTUDADO

As tarefas norteadoras deste momento consistem na apresentação da animação gráfica de forma divertida “O homem que calculava – O Problema dos camelos” (TAHAN, 2002), para contextualizar e motivar os estudantes para o ensino de frações, mostrando que o filme é um bom meio para estimular o interesse, necessidade e o desejo para evidenciando a importância da Matemática na resolução de problemas em nosso dia a dia. Reconhecer e analisar frações por meio de desenhos feitos em malha quadriculada.

---

[11] *Episódios do experimento* ou *episódios de ensino* refere-se aos momentos das aulas do experimento didático- formativo em que trabalhou-se as ações de aprendizagem de Davydov (1988). Assim, por exemplo, as aulas em que trabalhou-se a ação “modelação da relação universal” constituem-se um episódio de ensino. Os recortes desses episódios que serão utilizados para a análise do desenvolvimento intelectual do estudante será denominado de *momento*.

O professor inicia a aula, dando boas vindas aos estudantes, convidando todos a uma participação ativa nas aulas. A seguir, socializa, também, alguns itens do plano de ensino do ensino desenvolvimental e, na sequência, exibe uma animação gráfica: “O homem que calculava – o problema dos camelos” (TAHAN, 2002), com o objetivo de problematizar e motivar os estudantes para o ensino de frações. Essa breve animação gráfica, ao longo dos momentos propostos foi retomada em algumas atividades, tendo por finalidade conduzir os estudantes a perceberem, por meio dos cálculos, que, aparentemente, a solução do problema não foi resolvida de forma adequada pelos herdeiros dos camelos.

Por meio dessa animação gráfica, foi possível contextualizar a importância da matemática escolar na resolução de problemas do dia a dia. O filme também ajudou a motivar os estudantes, despertando seu interesse, necessidade e desejo na aprendizagem do conteúdo, relacionado ao objeto de estudo. Esse momento da aula buscou conduzir os estudantes, por meio de conjecturas e questões, a identificar a relação universal do conteúdo, a sua relação geral para, posteriormente, identificá-la no objeto, em dada situação particular. Os relatos, a seguir, fornecem indícios do processo de mediação exercida pelo professor, na condução da descoberta da relação universal, pelos estudantes, após a execução da animação gráfica “O homem que calculava – o problema dos camelos (TAHAN, 2002)”:

> **Professor:** Bom e aí, o que acharam?
> **Estudante 6:** Interessante, como ele deu um camelo, dividiu tudo e ainda saiu com dois camelos?
> **Professor:** Este é o problema...
> **Estudante 9:** A minha conclusão é que esse homem é muito inteligente, como ele fez isso?
> **Estudante 14:** Essa técnica eu tenho que aprender professor...
> **Estudante 6:** Eu também...
> **Estudante 18**: Fração é parte do todo e ela representa divisão.
> **Professor:** Qual a explicação matemática para a partilha realizada por Beremiz, de tal forma que além de conceder vantagens aos irmãos, ainda fez sobrar um camelo para si?

Com esse questionamento, percebeu-se, em geral, o pensamento empírico por parte dos estudantes. A fala da estudante 18 expressa um conceito ligado à lógica formal. Na mesma situação, duas estudantes mencionam a divisão. Esses estudantes apresentam indícios da apreensão relação universal, ponto de partida necessário para a identificação da relação geral, do conceito de fração. Logo após essas considerações, visando ampliar o modo de pensar dos estudantes, o professor desenhou a seguinte ilustração no quadro-giz, reforçando, sobretudo, a pergunta feita por ele, conforme figura 8.

FIGURA 8: Resolução de problemas

FONTE: Dante (2000) – Adaptado pelo Pesquisador

A ilustração teve o propósito de evidenciar a importância da leitura e interpretação na resolução de problemas. A intenção maior buscava encontrar a relação da ilustração com a pergunta “qual a explicação matemática para a partilha realizada por Beremiz, de tal forma que, além de conceder vantagens aos irmãos, ainda fez sobrar um camelo para si?” Isso, tendo em vista a apreensão do conceito de fração, sobretudo, da relação universal. Por meio desse esquema, foram definidos os seguintes objetivos de aprendizagens, para os estudantes no 1º momento/aula: (1) Entender a origem, aplicação e a evolução do conceito de fração; (2) Aguçar a visualização e a percepção espacial dos estudantes, observando as estratégias utilizadas e análises feitas no filme para resolver o problema dos camelos; (3) Construir modelos matemáticos para a representação literal e/ou gráfica, na interpretação de situações reais; (4) Mostrar que o pensamento matemático concreto está em todos os lugares na vida do homem, desde a antiguidade aos dias atuais.

O professor provocou uma grande discussão sobre o processo ensino-aprendizagem de matemática com os estudantes. Nesse momento, ficou evidenciado que, em geral, eles aprenderam matemática por meio de resolução de problemas repetitivos; porém, não estão acostumados a lidar com tarefas de um modo que exige compreensão das relações conceituais de certo conteúdo, para analisar um objeto que se apresenta na realidade social, em contextos concretos. Reafirmando, por conseguinte, o caráter empírico presente no processo de ensino-aprendizagem. Ou seja, da presença da lógica formal na formação do pensamento dominante no meio escolar, conforme evidenciam as afirmações a seguir.

> **Estudante 12**: Não nos ensinaram a pensar...
> **Estudante 18:** Aprendemos assim, resolvendo problemas e mais problemas...
> **Estudante14:** O professor repetia o que estava no livro didático.
> **Estudante 22**: Estudava para passar de ano.
> **Estudante 28**: Ninguém reprova hoje, por isso o ensino está como está, dentre outros.
> **Estudante 10**: Aprendi fazendo igual ao professor, ou seja, siga o modelo e na prova estavam os mesmos exercícios, apenas com números diferentes.

Em geral, não havia uma reflexão, evidência de que não estavam buscando culpados, principalmente porque, nas falas, não era atribuído o fracasso da educação escolar ao próprio sujeito, ao seu envolvimento com o processo ensino-aprendizagem, uma reflexão sobre o papel da escola, enfim sobre a concepção pedagógica, em que o professor se caracteriza como transmissor de conteúdo e o estudante, um reprodutor desse pensamento.

Hedegaard (2002) explica que o papel da escola deveria ser o ensino de conceitos científicos, entretanto a maior parte do conhecimento, ensinado aos estudantes, dá-se por um ensino baseado no pensamento empírico. Esse tipo de conhecimento é comum na vida cotidiana dos estudantes, mas os conceitos científicos necessitam de mediações para a sua internalização.

Ao retomar a figura 8, o professor mostrou paras os estudantes que um dos grandes problemas do ensino de matemática está na metodologia de ensino, sobretudo, na leitura e interpretação do problema. De maneira geral, os estudantes lêem, todavia não entendem o que é para ser feito. Após essa fala do professor, os estudantes apontaram que a matemática é uma disciplina muito interessante, mas as fórmulas longas e as aplicações pouco expressivas, no dia a dia, fazem com que boa parte das pessoas tenha resistência à matemática. Algumas falas chamaram atenção (Apêndice 11), como segue:

> **Estudante 16:** Professor, esse esquema ficou muito legal, mas eu nunca dei conta da matemática e para mim na Pedagogia não havia matemática...
> **Estudante 14:** Ainda bem que vou ensinar nas creches e lá não precisa de matemática...
> **Estudante 19:** A matemática e eu não combinamos, gosto de humanas, por isso escolhi Pedagogia.
> **Estudante 24:** Sinceridade, não sei por que não aprendo matemática, até gosto.

Após essa discussão, o professor propôs a realização de tarefas nas quais estavam contidas ações de aprendizagem, como reconhecer e analisar frações, por meio de desenhos feitos em malha quadriculada. Aproveitando que foi uma questão, na avaliação diagnóstica (Apêndice 3), na qual boa parte dos estudantes teve sucesso na realização. Essa atividade teve como objetivo identificar e representar frações (menores e maiores que a unidade), associando-as ao resultado de uma divisão ou à ideia de parte de um todo, buscando estabelecer a relação universal.

Para realizá-la, o professor dividiu a turma, em 10 (dez) grupos, de 3 (três) ou 4 (quatro) componentes cada, para exibir novamente o filme com o seguinte objetivo: Observar e anotar as estratégias utilizadas pelo personagem principal para resolver e/ou entender os problemas matemáticos do seu dia a dia, buscando responder as seguintes questões: Qual a relação da matemática com o nosso dia a dia? Como utilizar estratégias matemáticas relacionadas à fração?

Algumas falas dos estudantes chamaram atenção (Apêndice 11) e estão descritas na sequência:

> **Estudante 18:** A matemática está em nosso dia a dia, desde que acordamos até a hora de dormir. Ela faz parte de todas as nossas decisões. Sem a matemática, não fazemos quase nada...
> **Estudante 24:** O jornal o popular é cheio de matemática, mostra a porcentagem de homicídios de um período. Mostra o aumento do combustível, etc.
> **Estudante 22:** Aqui na faculdade vivemos uma matemática, pois ficamos 4 horas/aulas de 50 (cinquenta) minutos cada. Imagine quantos minutos ficamos em um ano?...
> **Estudante 28:** Passamos boa parte de nossas vidas, resolvendo problemas de matemática, fazendo contas de nossos salários, de nossas contas e de tudo que precisamos comprar.

O professor valorizou essas falas, reforçando que a matemática é de extrema importância na solução de problemas do dia a dia e, na sequência, exibiu novamente o filme “O homem que calculava”, para os estudantes. Logo após a exibição do filme, o professor questionou os estudantes: Quais estratégias mais lhes chamaram atenção? É possível utilizar essas estratégias em nosso dia a dia? Qual foi o papel da matemática na tomada de decisão e/ou análise do personagem? Algumas falas dos estudantes foram evidenciadas a seguir (Apêndice 11):

> **Estudante 06:** O personagem do filme se aproveitou que sabia matemática, e usou em benefício próprio.
> **Estudante 10**: Achei interessante que os filhos não perceberam que tiveram que doar um camelo para o problema ser resolvido.
> **Estudante 16:** Eu ainda não entendi qual foi à mágica!
> **Professor:** Não é mágica, é matemática...
> **Estudante 27:** O cara deu um camelo e ganhou dois e ainda fez a divisão, conforme o pai dos herdeiros tinha ordenado.
> **Professor:** É possível utilizar essas estratégias em nosso dia a dia?
> **Estudante 13**: Creio que sim, mas temos que saber lidar com a matemática.
> **Estudante 22:** Não consigo nem calcular juros, quando vou fazer uma compra, não entendo nada disso, só sei que vou pagar bem mais no produto...
> **Estudante 23:** Tem que ser fera na matemática!

Essas falas, ainda, apontam insipiência por parte dos estudantes para encontrar a relação universal do conceito de fração. Sobretudo, quando é preciso explicitar a relação de divisão e a relação com o todo. De acordo com Davydov (1988, p.99), "a primeira ação consiste na revelação pelos estudantes, dos dados que constituirão a relação essencial, universal, do conceito". Em particular, no conceito de fração, os dados que constituem a relação universal, a partir da relação de grandeza, são: unidade de medida básica, divisão e o total de unidades de partes. É possível perceber que existem grandes diferenças em relação ao desenvolvimento cognitivo da turma. Alguns estudantes estão mais envolvidos, outros resistentes, enquanto outros permanecem apenas no campo da observação.

Logo após, o professor propõe a seguinte tarefa: Caracterizar a importância da matemática na resolução de problemas do dia a dia, utilizando os elementos do filme, os recursos disponíveis na biblioteca e no laboratório de informática. Algumas respostas para esse questionamento foram evidenciadas a seguir (Apêndice 11):

> **Estudante 05:** Professor encontramos algo interessante, certas profissões usam a matemática a todo o momento, como a engenharia e a arquitetura.
> **Estudante 36:** A indústria, em geral, também utiliza. Tenho uma amiga que trabalha, pesando comprimidos em uma indústria de remédios lá em Anápolis.
> **Estudante 14:** Todos nós utilizamos a matemática, para fazer compras, olhar hora no relógio, cozinhar, etc...
> **Estudante 24:** No filme, a fração estava causando muitos problemas entre três herdeiros.

> **Estudante 26:** Parece que a matemática está presente na nossa vida, a partir do momento que acordamos, pois temos que correr contra o tempo para não chegar atrasados no trabalho.
> **Estudante 15:** Só que fazemos isso tudo sem perceber.

Após esse momento, o professor retoma a questão do conceito de fração, a partir do filme, pois ficou perceptível a fuga, por parte da maioria dos estudantes, não apresentando elementos da relação universal do conceito de fração. Essa retomada teve o objetivo de propor algumas questões, para que os estudantes pesquisassem como tarefa, podendo usar os recursos disponíveis na biblioteca e na internet, enfatizando, principalmente, a identificação dos dados que constituem a relação universal do conceito de fração, tal como prevê a primeira ação de estudo. Diante dessa explicação do professor, algumas falas destacaram a relação entre a discussão realizada e as disciplinas estudadas.

> **Estudante 18:** Professor, nós já estudamos sobre as frações e ela representa o inteiro dividido em partes.
> **Estudante 19:** É interessante pensar que a gente depende da matemática o dia todo e nem sempre sabemos, olha o caso dos camelos.
> **Estudante 32:** Acredito que o problema dos camelos se resolveria somando todas as frações...
> **Estudante 28:** Será que as frações desse problema dá um número inteiro?
> **Professor:** (Questiona a fala da estudante 28): O que você acha? Experimente somar...

E o professor distribuiu papel quadriculado aos estudantes, pedindo que representassem em desenhos as frações e, na sequência, somassem as frações do problema. O professor valorizou a participação da turma, mostrando-se satisfeito com alguns pequenos avanços em relação à maturidade das discussões.

Após essas reflexões, e um tempo para resolver as tarefas, os estudantes apresentaram os resultados da tarefa realizada com as frações, em que cada grupo deveria reconhecer e analisar frações por meio de desenhos, feitos em malha quadriculada, “baseada na análise mental, isto é, na transformação dos dados objetais da tarefa de aprendizagem” (DAVYDOV, 1988, p. 99).

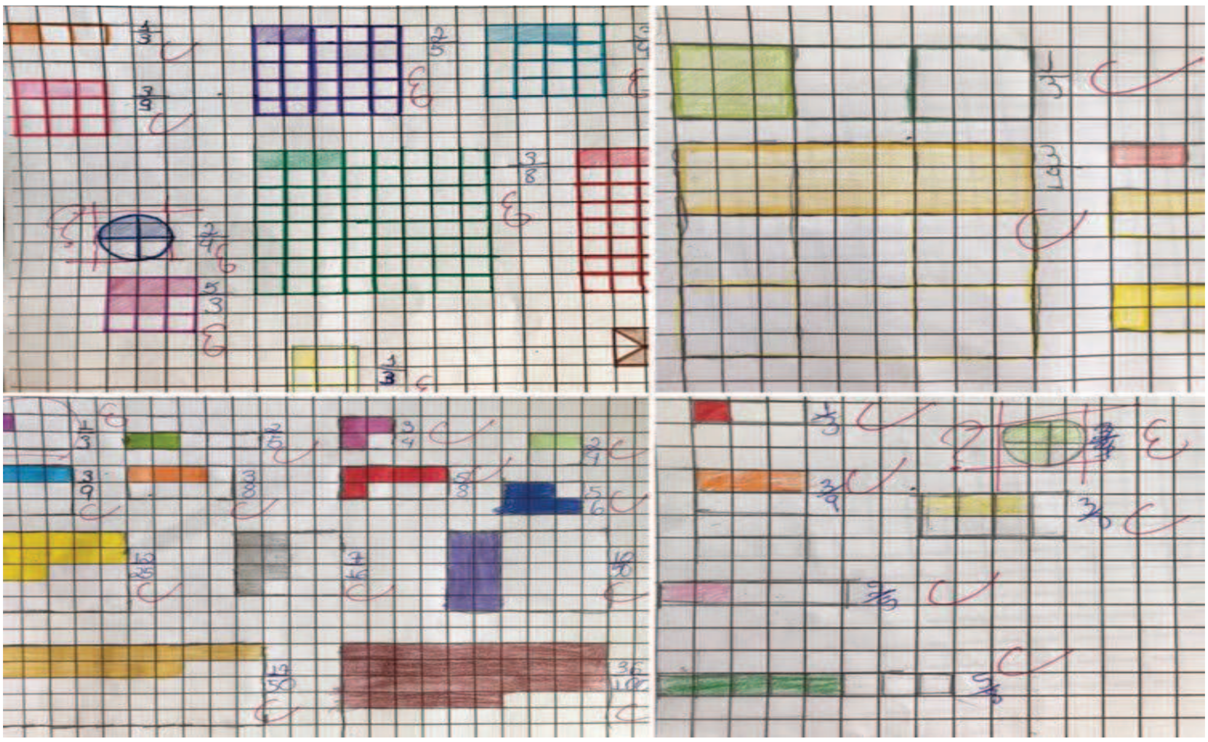
Os desenhos propostos, nessa tarefa, não foram dados prontos, para que os estudantes apenas contassem ou dividissem, mas deveriam representar as frações apresentadas na animação gráfica, como escreve Rosa et al. (2013), ficando unicamente “[...] nos limites do visual empírico”, mas eles teriam que construir seus próprios desenhos para representar as frações, conforme evidências da figura 10.

Durante a apresentação dos desenhos algumas falas dos estudantes foram evidenciadas e descritas a seguir (Apêndice 11):

> **Estudante 02:** Não achei tão difícil fazer os desenhos.
> **Estudante 20**: Não sei quando uma fração é maior ou menor que a outra...
> **Estudante 13:** Através dos desenhos é mais fácil visualizar as frações.
> **Estudante 30:** O número de baixo da fração representa a quantidade de partes que a figura vai ter e o número de cima a quantidade que tenho que colorir.
> **Professor:** Alguém sabe dizer como se chamam essas partes da fração que a colega explicitou?
> **Estudante 02:** A parte de cima chama-se numerador e a de baixo denominador.
> **Estudante 04:** Desenhar e representar a fração é bem simples. Divido o inteiro e pinto a parte desejada, está feita a fração.
> **Professor:** Essas considerações de vocês são importantes, pois evidenciam como vocês concebem as frações, valorizando, sobretudo, o teor visual empírico.

O teor visual empírico do conceito de fração surge no Ensino Fundamental, permanece no Ensino Médio e persiste no Ensino Superior (APARECIDO DOS SANTOS, 2015).

FIGURA 9: Atividade referente à representação de frações por meio de desenhos, realizada pelos grupos 2, 3, 8, 7.



FONTE: Acervo da Pesquisa.

Em geral, a maioria dos grupos associou corretamente o desenho às frações (caráter visual), mas os estudantes apresentaram dificuldades em comparar as frações. De acordo com Davydov (1987, 1988), por meio do caráter visual, as generalizações são realizadas a partir do destaque dos indícios comuns, dados externamente nos objetos. Tal princípio, na proposta de Davydov, é superado pelo caráter objetal. As ações com o objeto do conhecimento levam os estudantes a reproduzirem o modelo e o representarem na forma objetal, gráfica e literal. Desse modo, possibilita-se a revelação da essência do conceito e suas manifestações.

O professor retomou outra questão da avaliação diagnóstica (Apêndice 3), para explicar o conteúdo.

Use adequadamente os sinais > (maior que), < (menor que) ou = (igual a):

a) $\frac{1}{3}$ ____ $\frac{3}{9}$ **b)** $\frac{2}{5}$ ____ $\frac{3}{8}$ **c)** $\frac{3}{4}$ ____ $\frac{5}{8}$ **d)** $\frac{5}{2}$ ____ $\frac{8}{6}$

e) $\frac{4}{5}$ ____ $\frac{5}{9}$ **f)** $\frac{3}{2}$ ____ $\frac{8}{3}$ **g)** $\frac{2}{8}$ ____ $\frac{3}{12}$ **h)** $\frac{4}{7}$ ____ $\frac{5}{8}$

O professor pediu que todos os estudantes pegassem o papel quadriculado e representassem, em desenhos, as frações anotadas no quadro-giz. Na condução do processo ensino-aprendizagem, o professor disse: “em cinco minutos vou ver o que vocês estão fazendo” e começou a andar pela sala, observando cada estudante, durante a realização da atividade. Passados os cinco minutos, o professor disse algo que inquietou a todos: “A maioria de vocês está representando as frações de forma incorreta, foi assim que foi demonstrado no filme? Como foi feita a divisão dos camelos?” “Vocês não estão levando em consideração o princípio fundamental das frações que é o de divisão milimetricamente igual”. “Para que isso seja possível, os desenhos devem ser rigorosamente iguais”, frisou o professor. A maioria dos estudantes apagou os desenhos feitos e recomeçou a tarefa como mostram as evidências a seguir (Apêndice 11):

> **Estudante 27:** Não sei nem como começar.
> **Professor:** Façam os pares de desenho, um abaixo do outro que fica mais fácil comparar.
> **Professor:** Pessoal, prestem (sic) atenção. Estou vendo o que vocês estão fazendo, e vocês se esqueceram de algo fundamental, a divisão milimetricamente das figuras, por isso estamos usando a malha quadriculada, se vocês não seguirem as medidas não dará certo na hora de comparar os pares.
> **Estudante 18:** Vou ter que apagar tudo, eu nem me toquei disso.
> **Estudante 34:** É por isso que não estava dando certo.

> **Estudante 12**: Esse negócio de milimetricamente significa que preciso usar a régua professor?
> **Professor**: Pode utilizar régua ou a malha quadriculada como medida padrão.
> **Professor:** Agora sim está ficando correto.
> **Estudante 16:** Agora deu certo!
> **Estudante 25:** Por causa de um detalhe tive que apagar tudo e fazer de novo.
> **Estudante 08**: Todas as partes da figura têm que ter exatamente o mesmo tamanho.
> **Professor:** Esse é um princípio fundamental das frações.

Na especificidade do problema dos camelos, o experimento objetal consiste na soma das frações, que gera a necessidade do número inteiro, uma vez que a unidade de medida básica, de cada parte dos camelos (fração), faz parte de uma quantidade inteira de camelos. Para tanto, foi necessário somá-las para verificar de qual inteiro faz parte e utilizar, dessa soma, como a relação universal.

Ao final da aula, o professor apenas disse "se fizeram os desenhos iguais e marcaram as partes solicitadas de forma adequada, apenas comparem as frações". A turma mostrou bastante entusiasmo pela atividade, no entanto, a maioria não conseguiu chegar ao resultado satisfatório da soma das frações.

Ao encerrar a atividade do dia, o professor deixou como tarefa para casa, a ser feita em grupos de 3 (três) ou 4 (quatro) pessoas, pesquisar: (1) Quais as ideias que temos de fração? ("não se esqueçam de somar as frações do problema dos camelos") - (2) O homem sobrevive sem a matemática? (3) Quais evidências têm-se dessa constatação? (4) Com o objetivo de entender a origem, aplicação e a evolução da matemática, contextualizar a importância da matemática na resolução de problemas em nosso dia a dia, e mostrar que o pensamento matemático concreto está em todos os lugares na vida do homem desde a antiguidade aos dias atuais. "Na aula seguinte, os grupos devem expor para a sala de aula os resultados da pesquisa". Assim, formaram-se 8 (oito) grupos na sala e a aula foi encerrada.

2º MOMENTO: A MODELAÇÃO DA RELAÇÃO UNIVERSAL

As tarefas que norteiam esse momento consistem em apresentar aos estudantes a ideia de fração, buscando seu significado no dicionário e em sua historicidade ao longo do tempo para compreender que as frações surgiram da necessidade de representar uma medida que não tem, necessariamente, uma quantidade inteira de unidades, isto é, da necessidade de se repartir a unidade de medida. Conhecer e comparar partes do Tangram com o objetivo de ampliar a percepção de espaço, propiciando a construção de modelos de divisão para a representação e interpretação de situações reais. Expressar uma fórmula geral, literal e/ou gráfica para a representação de uma parte em relação ao todo.

Nesse sentido, o segundo momento coincide com a segunda ação de estudo, em que ocorre a modelação da relação universal nas formas objetal, gráfica e literal. Nessa ação, revela-se, sobretudo, a interconexão entre os dados destacados na primeira ação, relativa ao conceito de fração. Dessa forma, na segunda ação de estudo, a relação entre os dados correspondentes ao conceito de fração foi modelada e abstraída por meio de um sistema de símbolos, tais como: representação das frações, divisão, reta numérica, relação de grandeza. O sistema de símbolos apresentados constitui os elementos mediadores entre a ação objetal e a mental.

De acordo com Davydov (1988, p. 99):

> A segunda ação de estudo consiste na modelação na forma objetal, gráfica e literal da relação universal. É importante notar que os modelos de estudo são internamente elo essencial no processo de assimilação e conhecimentos teóricos e procedimentos de ação generalizada. Além disso, nem toda representação pode ser chamada de modelo de estudo, mas apenas a definição, precisamente, da relação universal de determinado objeto integral garante uma análise mais aprofundada.

O professor iniciou a aula com a socialização da pesquisa “caracterização da importância da matemática na resolução de problemas do dia a dia, com foco nas frações”. Cada grupo apresentou suas principais conclusões, abordando, de forma particular, a importância da matemática em nosso dia a dia, buscando contextualizar com as frações. Alguns relatos chamam atenção (Apêndice 11), principalmente pela abordagem dos conceitos matemáticos apresentados, como mostram as evidências:

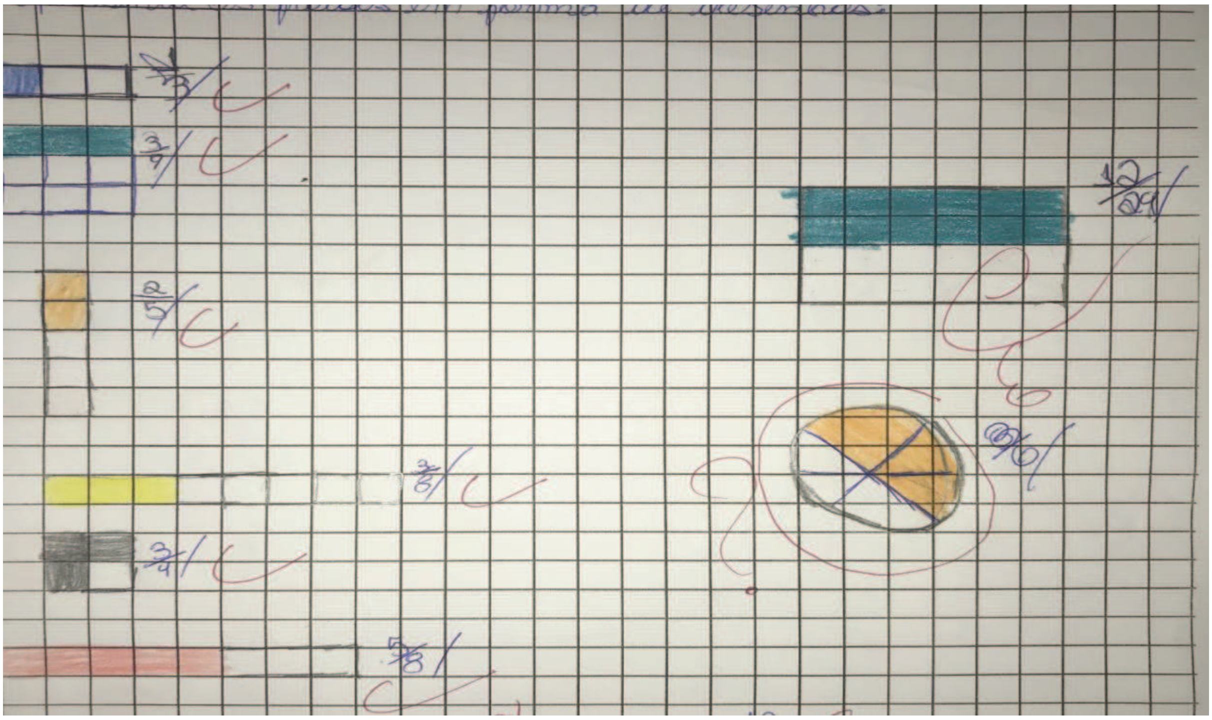
> **Grupo 3:** A matemática é um conjunto de técnicas aplicadas que nos ajudam a resolver problemas do dia a dia, entre eles, as frações.
> **Grupo 4:** A matemática é essência da vida e ela faz parte de nosso dia a dia o tempo todo, pois nosso tempo é fracionado.
> **Grupos 5:** Por meio da matemática desenvolvemos o senso crítico, principalmente quando sabemos fazer cálculo mental.
> **Grupo 7:** Quem sabe matemática é um ser iluminado, em nosso grupo ninguém sabe e vamos ter que ensinar matemática. O que será de nós?
> **Grupo 8:** Para nós, a matemática é um terreno obscuro, onde a maioria de nós escolheu Pedagogia porque não tinha matemática e chegamos aqui e nos deparamos com a mesma.

Esses relatos apontam que os estudantes, em geral, ao fazer a atividade, responderam as questões, relacionando a matemática e as frações, apontando indícios da relação universal, particularmente quando enfatizam o tempo fracionado e a resolução de problemas com as frações. Três grupos apenas observaram a participação dos demais grupos. De maneira geral, os grupos foram unânimes em reconhecer a importância da matemática, principalmente, porque, por meio dela, as pessoas desenvolvem trabalhos o tempo todo. Conseguem ir ao supermercado para fazer compras, sabem receber o troco corretamente, sabem entender o que é um aumento de salário, queda da inflação, etc. Todavia, mostraram-se insatisfeitos com o aprendizado que têm, principalmente por estarem na faculdade. Às vezes esse pode ser um motivo de vergonha diante da sociedade.

Isso pode ser comprovado, especialmente, quando relatam experiências do dia a dia na sala de aula, como a que segue: “Tive uma experiência horrível”, relatou uma estudante, pois “tinha que resolver uma situação de compra em uma loja e meu filho disse para mim, mãe como a senhora não sabe isso, eu que estou no 5º ano sei. Fiquei com tanta vergonha que tive vontade de desistir do curso” (estudante 15). Nesse momento, o professor chamou atenção para o fato de que, mesmo intuitivamente, a matemática é usada cotidianamente na resolução de problemas e, muitas vezes, não se consegue lidar com a matemática instrumental e científica, seja em uma loja, ao fazer e pagar compras, ou medir ingredientes de uma receita, pagar contas diversas, até mesmo comparar e medir objetos, por exemplo.

Na sequência, o professor apresentou aos estudantes a ideia de fração, usando os desenhos feitos na aula anterior, como mostra a figura 10, buscando apreender “a transformação do modelo com a finalidade de estudar a propriedade da relação universal que foi identificada no objeto” (DAVYDOV, 1988, p. 99).

FIGURA 10: Atividade referente à representação de frações por meio de desenhos – grupos 5 e 7.

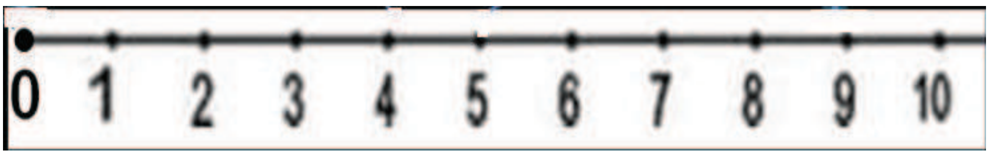


FONTE: Acervo da Pesquisa

Com a intenção de promover nos estudantes a ampliação de sua percepção de espaço e a capacidade de comparação entre grandezas, o professor perguntou à turma: “Onde vou colocar as seguintes frações?”

$$\frac{1}{3} \quad \frac{18}{9} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{12}{4} \quad \frac{5}{8} \quad \frac{5}{2} \quad \frac{8}{6}$$

FIGURA 11: Reta numérica



FONTE: Dados da Pesquisa

Nessa atividade, os estudantes precisam observar em que intervalo a fração pode ser inserida, determinando, assim, a construção adequada da reta numérica. A resposta para esse questionamento ocorre no contexto da segunda ação de estudo, por meio da modelação da relação universal, ou seja, a relação de grandeza por meio da divisão e da reta numérica.

Algumas falas durante esse procedimento foram evidenciadas (Apêndice 11), e mostram a interação entre os estudantes ao buscarem uma resposta para os questionamentos do professor:

> **Estudante 11:** Interessante professor, mas vamos misturar números inteiros com frações?
> **Estudante 18:** As frações sempre estão entre dois números naturais...
> **Estudante 24:** Uma fração é a representação de uma ou mais partes de algo que foi dividido em partes iguais.
> **Estudante 22:** Nunca consegui entender isso, uma fração também pode ficar no lugar de um número natural?
> **Estudante 28:** Acho que sim, pois a fração 8/2 pode ficar no lugar do 4, pois 8 : 2 = 4...
> **Professor:** Alguém consegue ajudar a colega a organizar esse pensamento?
> **Estudante 15:** Esse tipo de fração chama-se fração aparente, pois o numerador é maior e múltiplo do denominador, eu vi isso quando estava pesquisando sobre as frações.
> **Estudante 18:** Então, posso escrever qualquer número em forma de fração?
> **Estudante 4:** As frações são representações de um desenho representado com partes iguais.
> **Professor:** Todo "objeto original" que não tenha sido dividido é chamado de inteiro. Ao fazer cortes nesse objeto, estamos dividindo-o, ou seja, em partes milimetricamente iguais. Se a divisão resultar em partes iguais, é possível representar esse objeto por meio de frações.

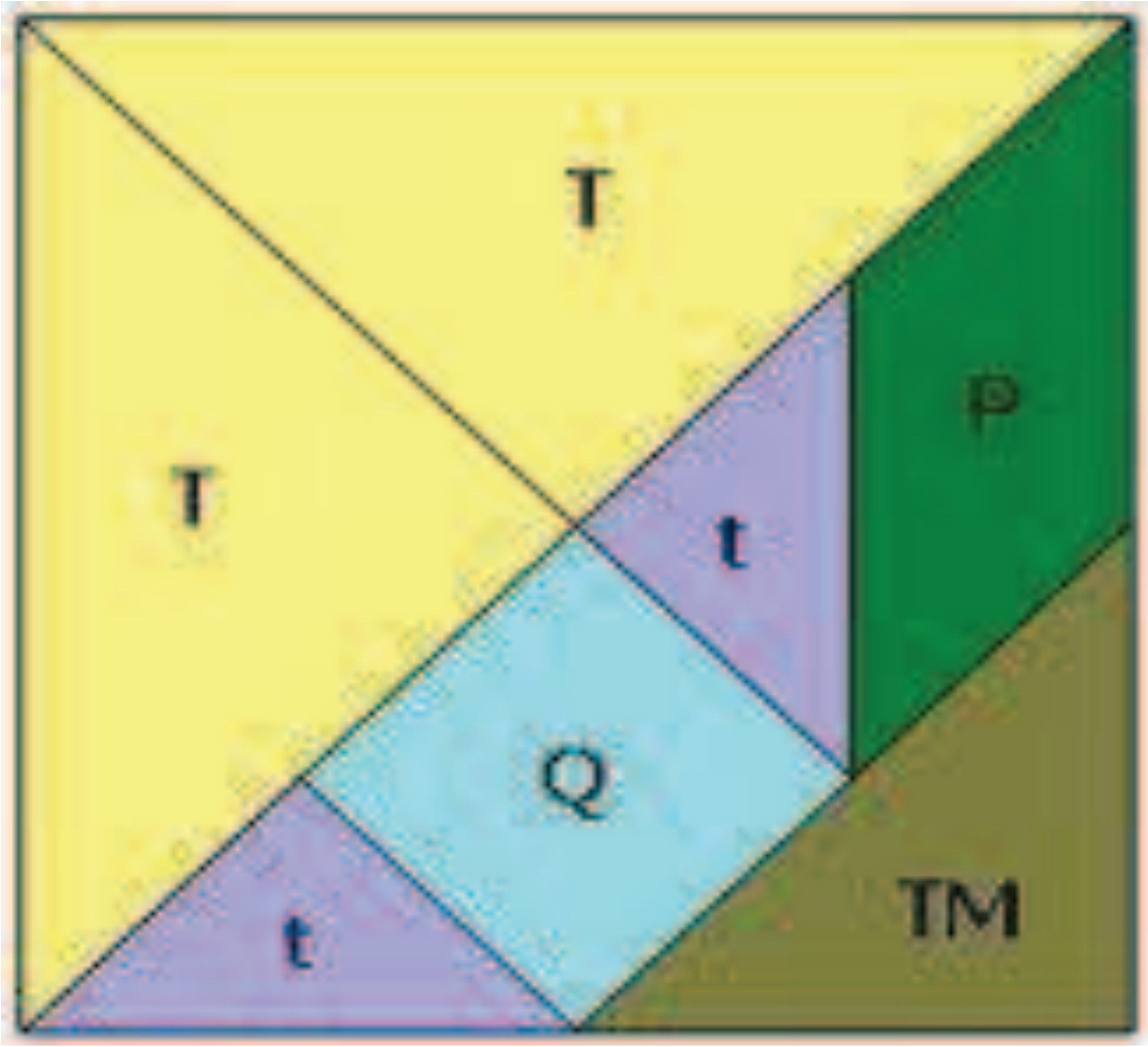
Ao localizar as frações na reta numérica, o professor pediu que os estudantes pesquisassem o significado da palavra fração. Após poucos minutos, o professor pediu que algum grupo lesse o significado encontrado, o que foi prontamente satisfeito pelo grupo 4 (quatro), "a palavra "fração" vem do latim *fractione* e quer dizer dividir, rasgar". Em seguida, o professor pediu que abrissem o dicionário para pesquisar o significado da palavra fração. No dicionário, também, diz ser "parte de um todo". O professor, ainda insistindo no significado, perguntou se alguém havia encontrado algo diferente. O grupo 7 (sete) mostrou o seguinte significado: "É um substantivo feminino. Ato pelo qual se divide, se parte algo. Parcela de um todo, porção". O professor perguntou aos estudantes se os significados diziam a mesma coisa. Nesse momento, a turma foi rever os dois significados. Na sequência, os estudantes apontaram que, embora estivessem dizendo de forma diferente, a essência era a mesma. Um avanço gradativo no conceito de fração e a modelação da relação diferenciada em forma objetivada já fora percebido, mesmo que “para a elaboração autônoma do conceito é necessário, antes de tudo, que os estudantes analisem e comparem entre si uma quantidade significativa de objetos idênticos ou parecidos especialmente selecionados e propostos pelo professor” (DAVYDOV, 1988, p. 60).

Ao dar continuidade, o professor frisou que os números fracionários surgiram da necessidade de representar uma medida que não tem uma quantidade inteira de unidades, isto é, da necessidade de se repartir a unidade de medida. Como tarefa, o professor dividiu, novamente, a turma em grupos maiores, dessa vez com 6 (seis) pessoas, e pediu que fizessem uma pesquisa sobre o conceito de fração, visando que os estudantes alcançassem os seguintes objetivos de aprendizagem: (1) Entender a origem e a evolução da fração por meio de sua história; (2) Apresentar os relatos históricos presentes no seu dia-a-dia, acerca da palavra fração; (3) Ampliar, nos estudantes, sua percepção de espaço, dimensões e sua capacidade de construir modelos de divisão para a representação e interpretação de situações reais; (4) Expressar uma fórmula geral, literal e/ou gráfica, para a representação de fração na interpretação de uma parte em relação ao todo.

Após o estudo, cada grupo nomeou um componente, a fim de socializar o resultado da pesquisa. Considerando as recomendações de Davydov (1988, p. 65), “utilizar a experiência empírica cotidiana de familiarização dos estudantes com as coisas e fenômenos com base para que assimilem os conhecimentos escolares”, o professor distribuiu, também, o Tangram[12], para que, após a pesquisa, fizessem comparações entre cada parte, utilizando a simbologia (>) maior que, (=) igual a, (<) menor que. Ao final, cada grupo mostrou os seus resultados para toda a turma.

[12] Curiosidades sobre o Tangram: O Tangram é um quebra-cabeças chinês de origem milenar. É formado por apenas 7 peças, mas com elas é possível criar cerca de 1700 figuras. A regra é usar todas as peças, lado a lado, sem sobreposição.

FIGURA 12: Tangram – jogo chinês

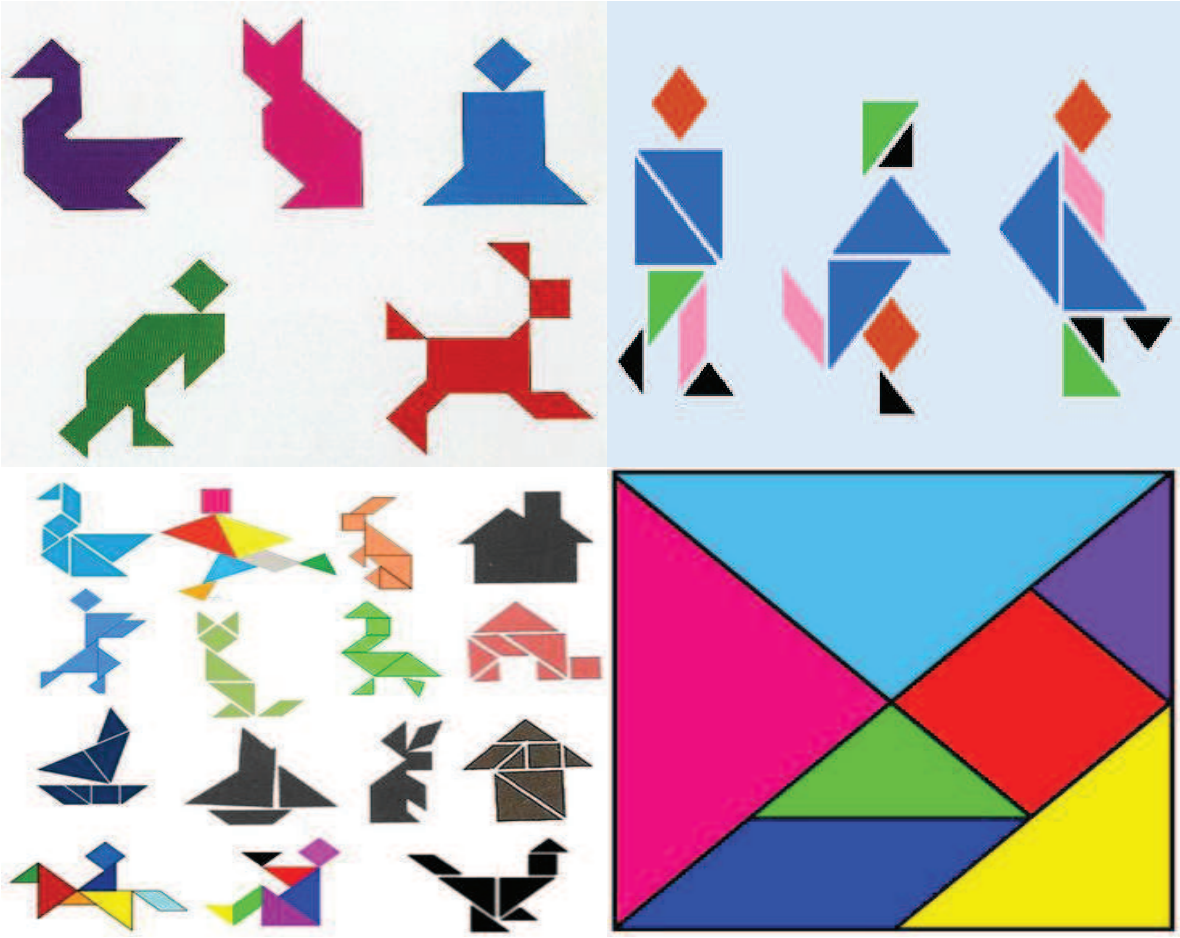


FONTE: Cavalcante (2013)

O professor projetou algumas figuras[13], formadas pelas 7 (sete) peças do Tangram. Muitos estudantes mostraram familiaridade com os desenhos. “Os modelos são uma forma peculiar de abstração, na qual as relações essenciais do objeto estão localizadas nos enlaces e relações visualmente perceptíveis e representadas, de elementos materiais e semióticos” (DAVYDOV, 1988, p. 78). Essas figuras foram reproduzidas (Figura 13), como segue:

[13] Foram priorizadas apenas algumas figuras mais significativas.

FIGURA 13: Algumas figuras formadas, utilizando o Tangram.



FONTE: Acervo da pesquisa

Em relação às atividades realizadas pelos estudantes, foi possível perceber que a abordagem ao conceito de fração caminhou para o campo científico. Alguns grupos apresentaram respostas que merecem ser destacadas (Apêndice 11):

> **Grupo 2:** As frações são tão antigas quanto as civilizações egípcias, são milhares de anos de história e sua ideia vem de divisão de terras às margens do rio.
> **Grupo 3:** As frações podem ser escritas representadas por letras, por exemplo a/b ou x/y ou qualquer letra que quisermos, onde cada letra pode assumir um valor numérico específico, se dissermos que a=3 e b=5, a fração a/b será 3/5.
> **Grupo 5:** As frações surgiram da necessidade de se utilizar algum trabalho na prática.
> **Grupo 6:** Percebemos que as frações surgiram no Egito, mas, a cada momento que outros povos tinham contato com esses números, acrescentavam novas coisas. Por exemplo, no Egito o sistema de numeração era muito complexo, difícil de escrever. Em nossas pesquisas vimos que foram os hindus que simplificaram e aperfeiçoaram a forma de escrever as frações, e os babilônios usavam o denominador 160. Interessante que cada civilização antiga agregava novas características às frações, adequando o seu uso para o que precisavam... ah! e lembrando

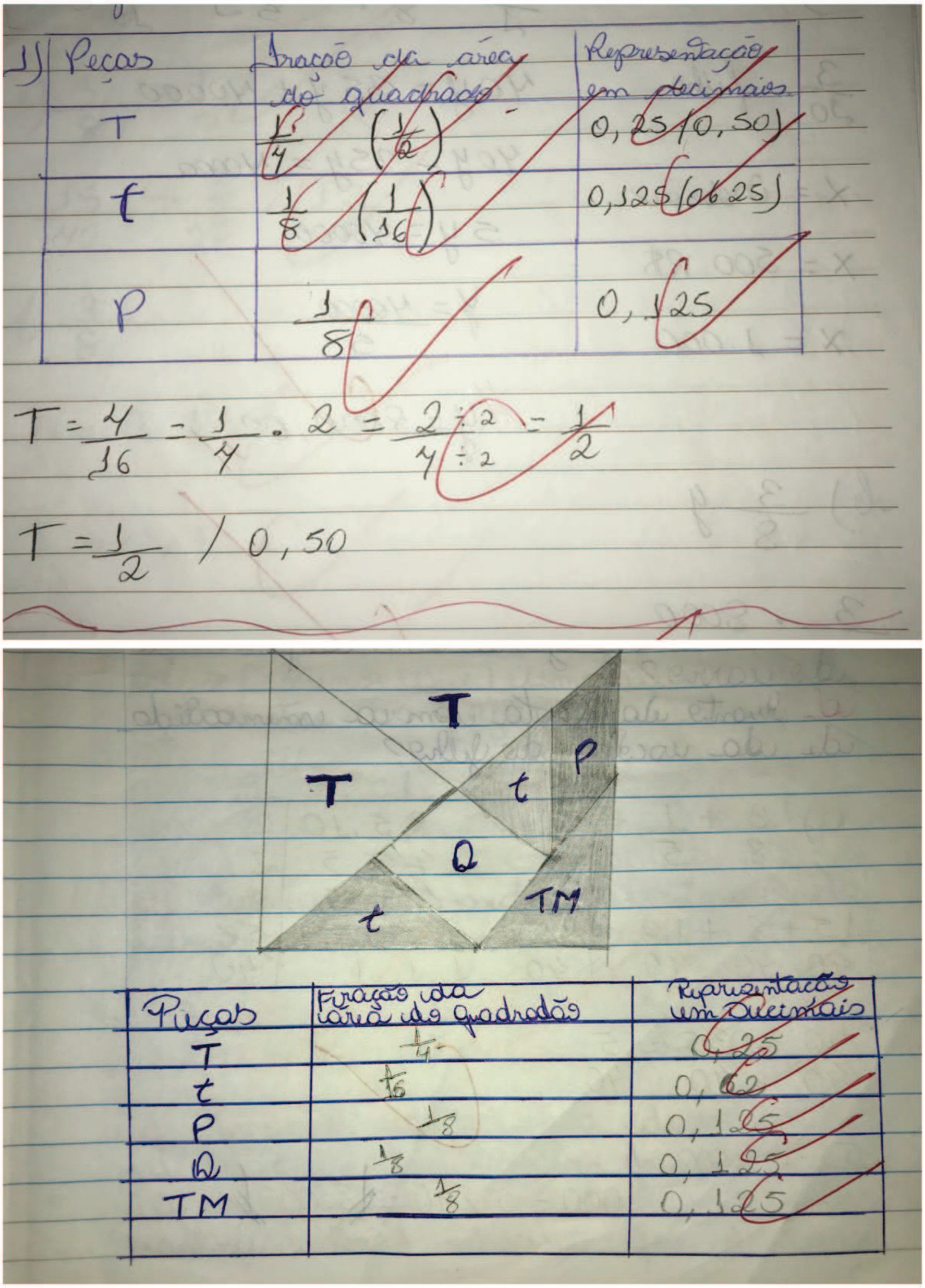
> que os egípcios usavam o denominador 1.
> **Grupo 7:** As frações surgiram a mais de 3.000 a.C, às margens do rio Nilo, quando foram distribuídas terras para plantio.

Essas respostas mostram que os estudantes avançaram no campo da contextualização histórica do conceito de fração e modelação da relação universal, sendo capazes de perceber que é um conceito milenar, cuja história coincide com a própria história do homem. Uma conclusão interessante, a que alguns grupos chegaram, foi de que a matemática surgiu da necessidade que o homem tinha de sobrevivência. Isto é, “o trabalho com o modelo de aprendizagem é um processo pelo qual se estudam as propriedades da abstração substantiva da relação universal” (DAVYDOV, 1988, p. 100). Os estudantes também foram capazes de comparar as partes do Tangram, utilizando os sinais (>) maior que, (=) igual a, (<) menor que, como evidenciam as falas a seguir (Apêndice 11):

> **Estudante 02:** T é igual a T e t é igual ao outro t.
> **Estudante 08:** T é maior que o t.
> **Estudante 36:** T é maior que TM, t é menor que V, t é menor que T.
> **Estudante 23**: Q maior que t.
> **Estudante 27:** Q igual a 2 x t.
> **Estudante 02**: Q igual a t + t.
> **Estudante 08:** TM igual a Q ou P.
> **Professor**: E aí, ainda tem algumas comparações que podemos fazer?
> **Estudante 14:** T é igual t + Q + TM, está correto professor?
> **Professor**: Pessoal, essa comparação que a colega de vocês fez está correta?
> **Estudante 29:** Sim, professor está corretíssimo!
> **Professor**: Olhem o desenho, verifiquem se essa relação é verdadeira?
> **Estudante 15:** Não professor, acho que não, eu não consegui enxergar...
> **Estudante 06:** A figura TM passa um pedaço, então está errado.
> **Professor**: Para ser correto o TM teria que estar dividido por 2.
> **Estudante 6:** Podemos representar todo o Tangram por 2T + 2t + Q + TM + P.

Esses resultados podem ser visualizados na figura 14, quando os estudantes foram capazes de comparar frações, efetuar operações, etc., seguindo as orientações de Davydov (1988, p. 99) “os modelos de aprendizagem uma representação da relação universal, identificada e diferenciada do processo de transformação dos dados da tarefa escola, o conteúdo deste modelo estabelece as características internas do objeto”.

FIGURA 14: Atividade com frações utilizando o Tangram – Grupos 2 e 7.



FONTE: Acervo da Pesquisa

Logo após esses apontamentos dos estudantes, foi possível perceber os indícios das abstrações na aprendizagem do conceito de fração, sobretudo, na modelação da relação diferenciada. Visto que "[...] além dos modelos literais, os modelos gráficos e espaciais têm um importante papel na formação dos conceitos matemáticos" (DAVYDOV, 1988, p. 117), isso foi observado, principalmente, na resolução aos problemas desencadeadores de aprendizagem. Com a intenção de expandir a aprendizagem do objeto, o professor questiona os estudantes em relação ao Tangram e em relação às terras às margens do rio Nilo: Vocês conseguem visualizar e encontrar a representação de cada parte em relação ao todo? Essa figura foi dividida em quantas partes? Em quantas partes essa figura está dividida, se considerarmos a divisão T? E se considerarmos Q? Como a fração faz parte de nossas vidas? Quando ela começou a ser estudada e desenvolvida? A seguir algumas falas evidenciam a discussão realizada na sala de aula, a respeito dos questionamentos (Apêndice 8):

> **Professor**: Vocês conseguem visualizar e encontrar a representação de cada parte em um todo? Essa figura está dividida em quantas partes?
> **Estudantes (todos):** Sete.
> **Professor**: Em relação ao T, em quantas partes eu divido a figura?
> **Estudantes (todo):** Quatro.
> **Professor**: Corretíssimo. E se considerarmos o Q?
> **Estudante 17:** Nove partes.
> **Estudantes:** (discutem entre si e respondem): oito partes.
> **Professor**: Correto, 8 partes.
> **Estudante 13**: Eu disse que eram 8 partes, acertei!
> **Professor**: E agora, quando a fração faz parte de nossas vidas?
> **Estudante 02:** Ao fazer um bolo...
> **Professor**: A fração está presente no cafezinho?
> **Estudante 14:** Por exemplo, professor, a fração depende do contexto da pessoa, para a cozinheira a fração estaria presente nas receitas, se eu fosse um pedreiro, nas medidas que eu utilizaria para fazer o reboco da construção, ou nas quantidades de material.
> **Estudante 12:** Tem muita cozinheira que faz toda a comida e nem sabe que existe as frações;
> **Professor**: Então, depois de tudo o que discutimos, vocês se lembram onde surgiram as frações?
> **Estudantes (todos):** No antigo Egito.
> **Professor**: E por quê?
> **Estudantes (todos):** Da Necessidade que eles tinham ao medir terras, para dividir os lotes e fazer seus plantios.

Continuando, o professor lançou o seguinte desafio: "Relate, na sua própria experiência, três situações em que as frações são essenciais em nosso dia a dia?" O professor incentivou os estudantes a responderem as perguntas, utilizando os recursos disponíveis na biblioteca e no laboratório de informática. Com essas tarefas, o professor visava apreender, sobretudo, o que preconizava Davydov (1988, p. 100): "... estas ações permitem que os escolares concretizem a tarefa de aprendizagem inicial e a convertam na diversidade de tarefas particulares que podem ser solucionadas por um procedimento único (geral)". O professor frisou bem a importância do estudo rigoroso, falando, principalmente, na resolução de problemas do dia a dia, buscando, no essencial “desenvolver a independência cognoscitiva do estudante, fazendo seu pensamento avançar para novos níveis de conhecimento, partindo do que o estudante já possui de conhecimentos e habilidades” (NASCIMENTO, 2016, p. 383). Partindo dessa ação, o professor (1) solicitou aos grupos que avaliassem e registrassem as conclusões encontradas nesse 2° (segundo) momento, sobre a modelação da relação diferenciada, como suas semelhanças, diferenças e relações de grandezas; (2) Após os estudantes discutirem e registrarem as questões propostas, o professor pediu que os estudantes apresentassem seus resultados da fórmula do princípio geral (gráfica e/ou literal), da divisão em partes iguais; (3) Em seguida, o professor pediu a um estudante de cada grupo que expusesse o caminho do seu pensamento para aquela conclusão, ou seja, como expressar o princípio geral em forma literal. Algumas respostas que merecem destaques, sobretudo, quando apontam indícios da modelação da relação universal (Apêndice 11):

> **Grupo 2:** Uma fração representa algo que foi dividido em partes milimetricamente iguais.
> **Grupo 4:** Uma fração é a representação de uma ou mais partes de algo que foi dividido em tamanhos ou quantidades iguais; podemos representar por a/b onde a é o numerador e b é o denominador.
> **Grupo 7:** O denominador indica quantas divisões iremos fazer, e o numerador quantas partes pegaremos da divisão, essa divisão pode ser de qualquer coisa, medidas de comprimento, volume de líquidos, peso, etc.
> **Grupo 3:** Uma fração representa uma divisão**,** em que o numerador equivale ao dividendo e o denominador equivale ao divisor.
> **Grupo 5:** Uma fração é a divisão de alguma coisa em partes milimetricamente iguais, pode ser representada por x/y.
> **Grupo 1:** A fração pode ser representada por a/b = c, onde b é o todo, e a é a parte que pegamos do todo, e c é o resultado da divisão de a por b.

É possível observar que os estudantes, conforme escreve (DAVIDOV, 1988, p. 99), começam a mostrar a necessidade de “transformação do modelo da relação para estudar suas propriedades em forma pura, superando a mera observação das propriedades superficiais, observáveis e singulares”. O professor fechou esse momento, estimulando os estudantes a pesquisarem, como tarefa de casa, sobre as seguintes questões: Que relações estão contidas na fórmula descrita que expressam a relação universal da fração? O princípio geral, em forma gráfica, é igual para qualquer tipo de fração? O que é fracionar em relação à transformação do modelo? Os estudantes foram estimulados na utilização dos recursos disponíveis na biblioteca e no laboratório de informática. Na aula seguinte, os estudantes devem expor para a sala de aula os resultados da pesquisa.

3º MOMENTO: INTERIORIZAÇÃO DA RELAÇÃO UNIVERSAL DO CONCEITO DE FRAÇÃO, A PARTIR DA TRANSFORMAÇÃO DO MODELO

Neste momento as tarefas norteadoras consistiram em propor aos estudantes, utilizando papel quadriculado, a construção e apresentação de desenhos para fazer divisões em partes iguais, comparar e efetuar operações com frações utilizando um procedimento geral.

Assim, a terceira ação de estudo, conforme afirma Davydov (1988, p. 99) “consiste na transformação do modelo com a finalidade de estudar a propriedade da relação universal do objeto que tenha sido diferenciada”. Essa relação, nos dados reais da tarefa, parece estar ‘oculta’ por muitas características particulares que, em conjunto, dificulta sua análise especial .

O professor iniciou a aula com a socialização da pesquisa : Que relações estão contidas na fórmula descrita que expressam a relação universal da fração? Por meio da pesquisa foram percebidos indícios de avanços qualitativos dos estudantes, em relação ao conceito de fração, especificamente, na transformação do modelo, pois evidenciam mudanças qualitativas no modo de pensar e operar com o conceito de fração, sobretudo, quando apontam que o conceito inicial de fração, baseado apenas na divisão do inteiro, começa a ser percebido como necessário, mas insuficiente, vejamos (Apêndice 11):

> **Estudante 2:** Entender o que é $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{8}$ é bem simples, mas ser capaz de entender que a partir dessas frações posso calcular porcentagens, realizar multiplicação, representar decimais e outras operações não é fácil.
> **Estudante 36:** O que estou mais me interessando por este conteúdo é contextualizar a história da fração. Não imaginava que era algo tão antigo, 3.000 a.C, meu Deus, é muito tempo!
> **Estudante 26:** Algo que ficou gravado para sempre foi a palavra milimetricamente igual. Eu sempre fazia um desenho e achava que era dividir em quantas partes eu quisesse. Agora tenho plena consciência que fração é uma divisão muito séria.
> **Estudante 13:** Eu também não tinha me atentado a essa palavra. A partir de agora só vou fazer fração em papel quadriculado, pois tenho a certeza que o desenho ficará perfeito.
> **Professor:** Na modelação da relação diferenciada, é possível perceber as frações na reta numérica, representação de uma fração em determinado intervalo de tempo, ou seja, as representações da relação universal são: a forma objetal, enquanto concreto sensorial, ponto de partida; as formas gráficas como elemento mediador; e a literal, como objetivação idealizada, trata-se da abstração em sua expressão literal.

Algumas tarefas foram propostas aos estudantes que, utilizando papel quadriculado, fizeram a construção e apresentação de desenhos para fazer divisões em partes iguais, buscando, sobretudo, atingir os seguintes objetivos de aprendizagem: (1) Solucionar tarefas, individualmente, utilizando o conceito de fração; (2) Comparar números fracionários e efetuar operações com frações; (3) Resolver atividades diversas, utilizando o conceito de fração, além de inúmeros procedimentos mentais. Ao comentar essas questões, o professor fez o seguinte questionamento: O que mudou em relação ao que fizemos nas aulas passadas em relação à comparação de frações? Algumas respostas foram destacadas:

> **Estudante 23:** Professor, agora tenho consciência de que para representar frações é preciso de material padronizado, fica mais fácil a visualização e a divisão milimétrica. ;
> **Estudante 9:** Eu uso a calculadora e faço a divisão. Na sequência faço as comparações e geralmente não erro. Mas com material padronizado fica mais fácil mesmo.
> **Estudante 23:** A malha quadriculada foi a melhor opção para a representação de frações e mostra a sequência adequada, desenhar, representar, comprovar, etc.

Essas respostas indicam mudanças na zona de desenvolvimento proximal dos estudantes, principalmente quando é evidenciada a qualidade na elaboração dos argumentos, em relação ao conceito estudado. Observou-se, também, que as aplicações práticas do conceito de fração, se inserem em uma contextualização histórica, conforme orienta Davydov (1988). Foram selecionadas algumas respostas conforme a figura 15 (quinze).

FIGURA 15: Resolução de atividades, estudantes 02, 09, 16, 23 e 32.

FONTE: Acervo da Pesquisa

Ao buscar o avanço na construção do conceito de fração, especialmente na transformação do modelo da relação para estudar suas propriedades em forma pura, o professor deu sequência à aula, referindo-se às propriedades gerais encontradas na fração, enfatizando, sobretudo, a divisão milimetricamente da unidade, ou seja, a relação de grandeza. E, em seguida, propôs a tarefa: Descreva, em grupo de quatro ou cinco estudantes, qual diferença/semelhança tem uma fração própria de uma imprópria? Uma fração aparente de uma fração mista? Uma fração mista de uma imprópria? O professor tinha o desejo de estimular os estudantes a pensar e resolver algumas situações desencadeadoras de aprendizagem, buscando construir o sistema de tarefas particulares que podem ser resolvidas por um procedimento geral, envolvendo o conceito de fração (DAVYDOV, 1988). Para essa atividade, a turma foi dividida em 6 (seis) grupos. Observou-se o empenho dos grupos, principalmente nas discussões sobre as diferenças e semelhanças do que foi proposto pelo professor. Após as discussões entre os grupos, o professor iniciou o diálogo com a turma:

> **Professor:** O que tem de comum nas frações próprias, impróprias, aparentes e mistas?
> **Turma:** Numerador e denominador.
> **Professor:** Somente isso?
> **Grupo 6:** As frações mistas têm parte inteira.
> **Professor:** O que mais têm as frações mistas?
> **Grupo 6:** Toda fração mista é uma fração imprópria.
> **Professor:** Algum outro grupo encontrou algo diferente?
> **Turma:** Conforme se colocam os números na fração, ela recebe um nome especial.
> **Professor:** Que princípio geral vocês chegaram com esta atividade?

O grupo 6 chegou a algumas conclusões que são destacadas a seguir:

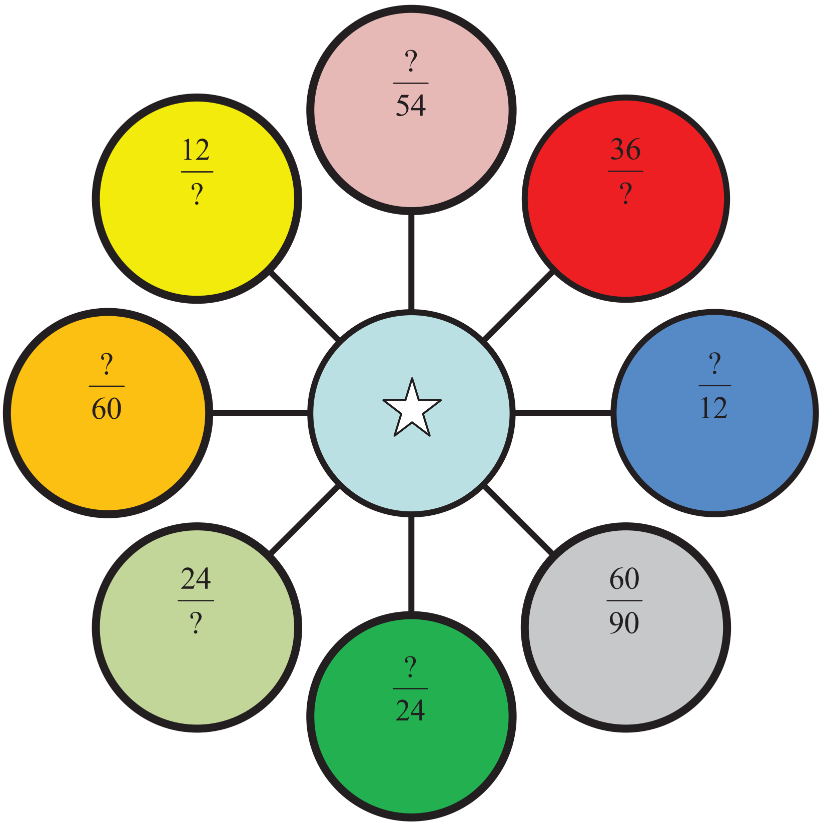
> As frações são muito importantes em nosso dia a dia. Passamos o dia inteiro fracionando. Nosso tempo é fracionado. No entanto, esse conteúdo de hoje é bastante instrumental. Uma fração é própria quando o numerador é menor que o denominador, é imprópria quando for o contrário, é aparente quando feita a divisão, dá um número inteiro e é mista quando apresenta parte inteira e parte fracionária.

Isso mostra, conforme Davydov (1988), quanto mais alto o nível de generalização, ou seja, quanto maior o conjunto de diferentes objetos que entoam na classe dada, mais abstrato e teórico será o pensamento. Isto é, a capacidade para pensar abstratamente se interpreta como índice de um alto nível de desenvolvimento do pensamento.

Logo após, valorizar a análise do grupo 6 (seis), o professor colocou a seguinte questão: Considerando a história da humanidade, de que forma surgiram o desejo e a necessidade de relacionar episódios, objetos ou quaisquer partes distintas das figuras, em especial as frações? E se considerarmos a história do conceito de fração, qual a necessidade desencadeadora da divisão em partes iguais? Qual a definição matemática de fração? Nessa questão, o professor propôs 2 (duas) situações de aprendizagem, buscando evidenciar que "o modelo de aprendizagem é um processo pelo qual se estudam as propriedades da abstração substantiva da relação universal" (DAVYDOV, 1988, p. 100).

A partir dessas transformações é que se forma o procedimento e a sistematização do algoritmo na realização das tarefas particulares, que serão apresentadas na quarta ação. Davydov (1988) destaca que essa ação tem importância fundamental no processo de aprendizagem dos conhecimentos teóricos, pois permite aos estudantes compreenderem a especificidade da orientação em um plano ideal peculiar.

Situação 1: Brincando com as frações: Substitua **?** por números naturais, de modo que as frações sejam equivalentes. Substitua ☆ pela fração equivalente irredutível.



Situação 2: Complete o quadro com frações equivalentes, multiplicando o numerador e o denominador das frações pelos números indicados.

Fração Irredutível	X 2 →	X 3 →	X 4 →	X 5 →	X 6 →
$\frac{1}{2}$	**?**	**?**	**?**	**?**	**?**
$\frac{1}{3}$	**?**	**?**	**?**	**?**	**?**
$\frac{3}{4}$	**?**	**?**	**?**	**?**	**?**
$\frac{5}{6}$	**?**	**?**	**?**	**?**	**?**

Desde o início, essas duas situações colocaram os estudantes em atividade mental, principalmente, quando tentavam encontrar a relação de grandeza por meio da equivalência, da transformação dos dados da tarefa, a fim de encontrar a relação universal, de sua modelação e de sua transformação do modelo, como se observa nas falas seguintes “basta simplificá-la, dividir o numerador e o denominador por um mesmo número até achar a fração irredutível, que não dá mais para dividir” (estudante 6) e ‘‘para achar as frações equivalentes basta multiplicar ou dividir numerador e denominador por um mesmo número natural” (estudante 2).

Ao descobrirem apenas uma relação e ver que o exemplo valia para as demais, a solução de cada questão ficou evidente. O que evidencia que as abordagens da teoria do ensino desenvolvimental são promissoras, quando diz que o objetivo primordial do ensino-aprendizagem é a formação do pensamento teórico-científico dos estudantes (DAVYDOV, 1988), especialmente, quando o professor é capaz de estimular os estudantes a estudarem o aspecto ou relação nuclear, na qual aparecem as relações fundamentais de sua gênese e transformação histórica, expressando o seu princípio geral. O professor encerrou o momento, evidenciando o crescimento qualitativo dos estudantes, pedindo, sobretudo, que observassem as aplicações teóricas/práticas do conceito de fração nas ações do dia a dia e trouxessem exemplos da aplicação das frações em situações do cotidiano, inclusive, na construção do sistema de tarefas particulares, que podem ser resolvidas por um procedimento geral.

4º MOMENTO: ABSTRAÇÃO NA FORMAÇÃO DO CONCEITO DE FRAÇÃO E A CONSTRUÇÃO DO SISTEMA DE TAREFAS PARTICULARES

As tarefas propostas neste momento consistiram em conhecer e diferenciar conhecimento empírico do conhecimento científico, buscando relacionar, sobretudo, as partes de uma figura com o todo, elaborando um conceito geral de fração, além de conhecer, diferenciar e comparar os tipos de frações existentes.

A quarta ação destinou-se à concretização do procedimento geral para a revelação da relação múltipla e resolução de tarefas particulares.

Davydov (1988, p. 100) afirma que:

> [...] a quarta ação de estudo consiste na dedução e a construção de um determinado sistema de tarefas particulares. Graças a esta ação os estudantes concretizam a primeira tarefa de estudo e a convertem na diversidade de tarefas particulares que podem ser resolvidas por um procedimento único (geral), assimilado durante a realização das anteriores ações de estudos.

Antes de iniciar as atividades o professor fez algumas considerações, acerca do conceito de frações: “Como já foi pesquisado por vocês, as notícias mais antigas do uso das frações vêm do Egito. As terras que margeavam o rio Nilo eram de propriedades do Estado. Este dividia as terras entre os grupos familiares, em troca de pagamentos de tributos. Como o rio Nilo sofria inundações periódicas, as terras tinham de ser sempre medidas, já que o tributo era pago proporcionalmente à área a ser cultivada”. E hoje como o governo tributa nossos impostos? Que fração do todo pagamos como forma de impostos? Trabalhamos quantos meses e dias para pagar os impostos? Que fração representa esses meses e dias em relação ao ano todo?

Antes que os estudantes respondessem essas questões, o professor solicitou que os exemplos da aplicação de frações no dia a dia, que ficou como tarefa de casa, fossem socializados com a turma. Alguns exemplos foram extraídos desse momento:

> **Estudante 1:** Nas receitas de bolo, sempre aparecem $1\frac{1}{2}$ de xícara de óleo, por exemplo.
>
> **Estudante 26:** Todo trabalhador, com carteira assinada tem direito a $\frac{1}{3}$ a mais no salário, quando sai de férias.
>
> **Estudante 28:** Quando comemos pizza ou pedimos uma pizza a metade de frango e a outra metade calabresa.
>
> **Estudante 23:** Quando trabalhamos com moedas, estamos mexendo com frações, por exemplo: Com duas moedas de 50 centavos consigo formar 1 real R$ 0,50 = 1/2 do Real. Com 10 moedas de 10 centavos, também formo 1 Real: R$ 0,10 = 1/10 do Real.
>
> **Estudante 18:** As notas musicais são formadas por frações, que dessa forma produzem sons diferentes.
>
> **Estudante 23:** Para verificar quanto um carro tem de combustível dentro do tanque.

O professor valorizou esses exemplos, em especial, apontando os indícios de avanços dos estudantes em relação ao conceito de fração e retornou às questões anteriores, com a turma toda, em uma roda de conversa descontraída, retomando a construção do pensamento teórico dos estudantes, viabilizando a construção do sistema de tarefas particulares que podem ser resolvidas por um procedimento geral.

Zeferino (2016, p. 86) aponta que "[...] transitar por diferentes significados do conceito de fração constitui-se como parte do desenvolvimento e estruturação do pensamento teórico sobre esse conceito". Durante essa rica discussão, perceberam-se indícios de desenvolvimento do pensamento conceitual. Algumas ponderações dos estudantes merecem destaque (Apêndice 11), aprofundando ainda mais os exemplos das frações no dia a dia:

> **Estudante 36:** Eu acho um absurdo pagar 27,5% (vinte e sete vírgula cinco por cento) de imposto de renda, mas meu sonho é pagar R$ 5.000,00 (cinco mil reais) de imposto de renda todo mês. É sinal que estou ganhando bem e como professor ainda.
> **Estudante 12:** Pago 11% (onze por cento) de previdência social e 6% (seis por cento) de vale transporte e isso tudo sai do meu salário que é ruim e fica pior.
> **Estudante 14:** Professor, você sabe de onde vem a expressão quinto dos infernos? Eu pesquisei e tem tudo a ver com a cobrança de impostos.
> **Estudante 13:** Todos nós sabemos que boa parte dos alimentos que compramos são taxados com altos impostos. E a gasolina, essa sim, é de doer.
> **Estudante 9:** Segundo os dados da internet, trabalhamos mais de 5 (cinco) meses apenas para pagar impostos. Isso significa $\frac{5}{12}$ (cinco doze avos) do meu trabalho é de imposto puro. E o pior é que não temos prestação de serviço digna. Nossa saúde está um caos, a educação pública da mesma forma. Não temos segurança e só temos impostos para pagar.

Esses relatos apontaram um avanço no modo de pensar dos estudantes, promovendo mudanças no pensamento empírico para o concreto pensado (DAVYDOV, 1988), quando os estudantes conseguem relacionar a matemática às situações vividas no dia a dia, como o imposto de renda, a previdência social, a taxação dos alimentos e a relação de tempo trabalhado em função dos impostos. Na sequência, o professor organizou outra tarefa, colocando os estudantes, novamente, em 6 (seis) grupos[14] para discutir as seguintes questões: (1) Qual a ideia que temos, então, de fração? (2) Esse é um conhecimento empírico ou científico? (3) De que forma podemos relacionar as partes de uma figura com o todo? Após propor essas 3 (três) questões, o professor marcou um intervalo de tempo para que os estudantes as discutissem. Nesse momento, o professor avisou que todos os grupos deveriam eleger uma pessoa para, em nome do grupo, apresentar as ideias principais das

[14] Em geral, os grupos foram os mesmos em todas as atividades, com exceção de duas atividades que houve troca de componentes dos grupos.

discussões. No retorno para a discussão em sala de aula, o professor solicitou que cada grupo fizesse os apontamentos considerados interessantes.

> **Grupo 1:** Fração é dividir o inteiro em partes milimetricamente iguais, usando, preferencialmente, material padronizado como a malha quadriculada.
> **Grupo 2:** Em nossa casa usamos fração o tempo todo. Quando vamos fazer uma receita de bolo usamos o meio, o litro e meio, dentre outras medidas. Aprendemos no dia a dia o que corresponde ao pensamento empírico e aqui na faculdade caminhamos para o campo científico.
> **Grupo 3:** As partes vão representar do todo, a parte tomada para si. Se coloco a fração, por exemplo, três quartos, vai significar que o inteiro foi dividido em quatro partes e foram tomadas três partes.
> **Grupo 4:** Nosso grupo discutiu sobre a malha quadriculada e percebeu que o material padronizado é bastante interessante, pois fica visível as partes do mesmo tamanho.
> **Grupo 5:** No nosso modo de ver, a fração é aplicada no campo teórico e no campo científico. No ENEM temos inúmeros problemas que são resolvidos com tudo que vimos em sala de aula.
> **Grupo 6:** As frações servem para solucionar diversos problemas do dia a dia. Inclusive ela pode ser representada em forma de decimais. É um conteúdo com inúmeras aplicações.

Após todos os grupos apresentarem os resultados da tarefa anterior, com poucas intervenções por parte do professor, sobretudo, porque observou indícios da melhora da qualidade na fala dos estudantes. O professor deu sequência à aula, estimulando os estudantes a pensarem sobre as seguintes questões: É possível calcular a parte de uma figura com diversas representações fracionárias? Que relações são feitas para o cálculo das frações próprias, das impróprias, das mistas, das aparentes? O professor, ainda, propôs que os estudantes pensassem e fizessem a relação do abstrato ao concreto, tais como: O que distingue uma fração da outra? É possível estabelecer relações do modo de calcular a parte do todo? A intenção do professor foi a de retomar algumas ações mentais dos estudantes nos momentos/aulas anteriores, buscando, principalmente "que as ações de aprendizagem examinadas estão dirigidas a que, mediante sua realização, os escolares descubram as condições de surgimento do conceito que eles vão assimilando" (DAVYDOV, 1988, p. 100). Alguns relatos foram evidenciados a seguir (Apêndice 11):

> **Estudante 14:** Quando o numerador é menor que o denominador chamamos de fração própria.
> **Estudante 9:** Quando é o contrário chamamos de imprópria.
> **Professor:** E quando são aparentes?
> **Estudante 17:** Quando o numerador é múltiplo do denominador, e sua divisão tem como resultado um número inteiro.
> **Estudante 14:** Simplificar uma fração é achar a fração irredutível através de

> divisões do numerador e denominador por um mesmo número. **Estudante 15:** O que diferencia uma fração da outra é a relação de grandeza, classificação, representação de medidas ou volumes. **Estudante** 30: Professor lá no livro do 5º ano tinha o seguinte exemplo: Em uma escola havia 240 alunos, dos quais $\frac{3}{5}$ (três quintos) eram meninas e o restante era de meninos. Qual a quantidade de meninos e meninas dessa escola? Professor acho que esse é um exemplo onde se estabelece relações do modo de calcular a parte do todo.

Esses relatos coincidem com a quarta ação, que ocorreu por meio da análise das propriedades da relação universal em suas manifestações singulares (DAVYDOV, 1988). Nesse momento, ocorreram os indícios da passagem do universal (abstrato) para o singular (concreto), uma vez que o procedimento universal pôde ser aplicado na resolução das diversas tarefas singulares.

Ao observar atentamente as respostas, o professor percebeu o desenvolvimento e as mudanças qualitativas no modo de ver e operar dos estudantes com o objeto de aprendizagem. O professor, geralmente, precisa ajudar o estudante até certo momento, “mas gradualmente os estudantes adquirem as capacidades correspondentes (é nesse processo que forma nos estudantes a atividade de aprendizagem autônoma, isto é, a capacidade de aprender)” (DAVYDOV, 1988, p. 99). O professor encerrou a aula, apontando para a turma os avanços percebidos, além de ter valorizado a participação individual e grupal da turma.

5º MOMENTO: CONTROLE DA REALIZAÇÃO DAS AÇÕES MENTAIS NA FORMAÇÃO DO CONCEITO DE FRAÇÃO

As tarefas que nortearam esse momento consistiram em utilizar o problema dos camelos socializado e discutido no 1º momento/aula para contextualizar as operações com frações, calculando, por meio da relação de grandeza, as partes de um todo.

A quinta ação diz respeito ao controle da realização das ações. Nela foram apresentadas tarefas com alguma contradição, quanto à relação universal do conceito. Assim, professor e estudantes controlaram o processo de aprendizagem, principalmente pelos indícios da qualidade das falas dos estudantes.

> O controle consiste em determinar a correspondência de outras ações de estudo e as condições e exigências da tarefa de estudo. Permite aos estudantes, ao mudar a composição operacional das ações, descobrir sua conexão com umas ou outras peculiaridades dos dados da tarefa a ser resolvida e do resultado a ser alcançado (DAVYDOV, 1988, p. 100).

Antes de iniciar o momento, o professor propôs a socialização da pesquisa, solicitada no momento anterior: "relacionar as partes da figura com o todo", buscando, sobretudo, utilizar o problema dos camelos (TAHAN, 2002), para contextualizar as operações com frações, com a intenção de conduzir os estudantes a calcular, por meio da relação de grandeza, as partes de um todo, principalmente, no controle da realização das ações anteriores de aprendizagem. Após essas ações de aprendizagem, o professor propôs algumas tarefas para que os estudantes avançassem na construção do conceito de fração, tendo em vista: (1) Descrever as relações de grandezas existentes nas frações; (2) Representar simbolicamente, gráfica e/ou literal as relações de medidas existentes nas partes das figuras em relação ao todo; (3) Solucionar tarefas, individualmente, utilizando o conceito de fração; (4) Resolver atividades diversas, utilizando o conceito de fração e procedimentos mentais variados.

O professor retomou alguns questionamentos já feitos aos estudantes, mas que ainda necessitam de aprofundamento cognitivo: Qual a ideia que temos de operações com frações? De que forma podemos relacionar as partes de uma figura com o todo? Após os questionamentos, o professor propôs um debate com a leitura da seguinte situação, desencadeadora de aprendizagem "O problema dos camelos":

O Problema dos Camelos

Beramis Samir viajava por uma estrada deserta no Oriente, quando encontrou três homens em acalorada discussão. Querendo saber o motivo de tamanha disputa, Beramis escutou o relato do mais velho dos três homens.

– Somos irmãos e recebemos 35 camelos como herança de nosso pai. Segundo o testamento, o mais velho dos filhos deve receber a metade dos camelos, o filho do meio recebe a terça parte, e o mais novo, a nona parte.

Como a herança era de 35 camelos, os herdeiros não conseguiam dividi-la nem pela metade: 35 é um número impar e nenhum deles queria cortar um camelo ao meio.

Como resolver a situação?

Enquanto escutava a história, Beramis Samir rabiscava a areia com um pedacinho de madeira.

Herança de 35 camelos

Filho mais velho: $\frac{1}{2}$ de 35

Filho do meio: $\frac{1}{3}$ de 35

Filho mais novo: $\frac{1}{9}$ de 35

Beramis Samir, também conhecido como “o homem que calculava[15]” ofereceu juntar o seu camelo aos 35 que os irmãos possuíam, com uma condição.

– Qual condição? – perguntaram ao mesmo tempo os irmãos, demonstrando espanto pela oferta.

“O homem que calculava” combinou que, se cada um dos filhos recebesse a parte que lhe cabia e, se ainda assim sobrasse algum animal, ele ficaria com a sobra.

Os homens aceitaram a proposta.

Bom, vamos ao que aconteceu:

Beramis juntou o seu camelo aos 35 (trinta e cinco), totalizando 36 (trinta e seis) camelos. Entregou ao filho mais velho a metade deles: 18 (dezoito) camelos. Ao filho do meio entregou a terça parte, o que dava 12 (doze) camelos. E ao filho mais novo coube 4 (quatro) camelos, correspondente à nona parte.

Os irmãos ficaram muito satisfeitos com a divisão, pois todos saíram ganhando.

Mas, e nosso amigo Beramis? Pois ele ficou com 2 (dois) camelos, um a mais

---

[15] O escritor árabe Malba Tahan nasceu em 1885, em uma aldeia nas proximidades de Meca, lugar santo da religião muçulmana, o Islamismo. Estudou no Cairo e em Constantinopla. Chegou a assumir o cargo de queimaçã (prefeito), da cidade de El-Medina. Aos 27 anos, recebeu grande herança do pai e iniciou uma longa viagem pelo Japão, Rússia e Índia. Morreu em 1921, lutando pela libertação de uma tribo na Arábia Central. Malba Tahan, conta a história de Beramis Samir em “O problema dos camelos”. Na verdade, Malba Tahan nunca existiu! Ou melhor existiu na imaginação de Júlio César de Mello e Sousa, professor, educador, pedagogo, conferencista e um dos nossos escritores mais conhecidos internacionalmente.

do que tinha antes de resolver a contenda.

Sabem como isso foi possível? A pergunta foi feita pelo professor aos estudantes, que ficaram surpresos com o desenrolar da atividade. Em seguida expôs para os estudantes as anotações de Beramis:

Filho mais velho: $\frac{1}{2}$ de 36 = 18

Filho do meio: $\frac{1}{3}$ de 36 = 12

Filho mais novo: $\frac{1}{9}$ de 36 = 4

Total: 34 camelos

E com um camelo a mais, Beramis Samir partiu para novas aventuras.

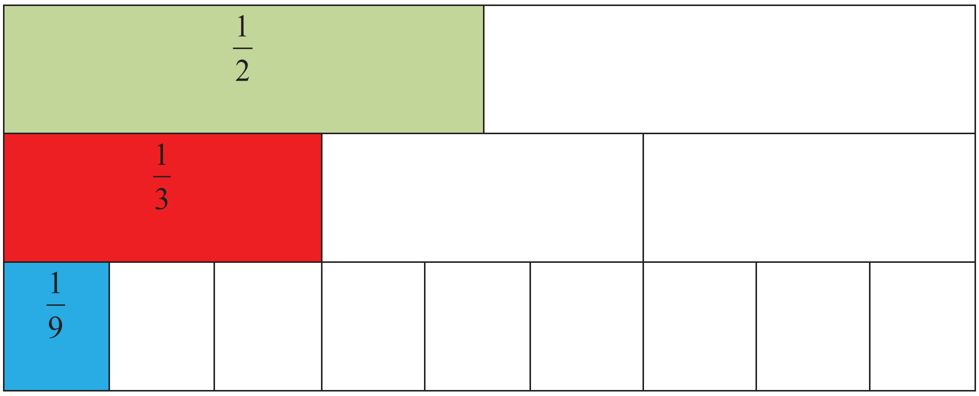
FONTE: TAHAN, Malba. O homem que calculava (adaptado).

Após a leitura do texto, houve debate entre os estudantes em busca de possíveis respostas aos questionamentos do professor, alguns relatos foram evidenciados (Apêndice 11):

> **Estudante 02:** Pelo que vimos até agora, temos o conhecimento empírico.
> **Estudante 14:** Estamos estudando para chegar no conhecimento científico.
> **Estudante 32:** Quando vou cozinhar e uso frações nas medidas, mesmo sem perceber, estou usando conhecimento empírico.
> **Estudante 22:** O conhecimento científico vai muito além de uma simples atividade onde é preciso colorir partes de uma pizza ou de um chocolate para representar uma fração.
> **Estudante 06:** Quando utilizamos o conceito de fração, não precisamos relacionar a um objeto específico, quer dizer, uma pizza, ou medida contida em uma xícara, por exemplo, pois a divisão é de uma unidade.

Na sequência, o professor pediu que os estudantes representassem as frações $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{9}$, utilizando três desenhos de mesmo tamanho e fazendo uma análise de cada representação.

> **Estudante 2**: 1/2 é a metade da figura, divido ela em duas e pinto a metade.
> **Estudante 13:** Professor ao colorir o desenho é possível perceber que 1/9 é a menor das frações, e 1/2 a maior.
> **Estudante 7:** Sempre acho mais fácil comparar as frações depois que desenho, fica na cara quem é a menor e quem é a maior.
> **Estudante 27:** 1/3 está no meio, é menor que ½, mas é maior que 1/9.



Como esse resultado foi possível? Por que sobrou um camelo para o Beramis Samir? Com esses questionamentos, o professor estimulou os estudantes a pensar estratégias matemáticas que os ajudassem nas soluções de problemas, envolvendo o conceito de fração, principalmente nas operações com frações. De maneira geral, a turma não conseguiu entender qual era o segredo que estava oculto na questão do camelo. No entanto, o professor deu uma pista valiosa: experimentem somar essas frações. E em poucos minutos, a solução do problema foi apresentada, como mostram alguns diálogos entre os estudantes e o professor:

> **Estudante 02**: Professor, tem que tirar o mínimo múltiplo comum professor?
> **Professor**: Interessante, aí você já começa a clarear as ideias, alguém sabe o que é mínimo múltiplo comum?
> **Estudante 2:** É o menor número que dá para dividir os três ao mesmo tempo!

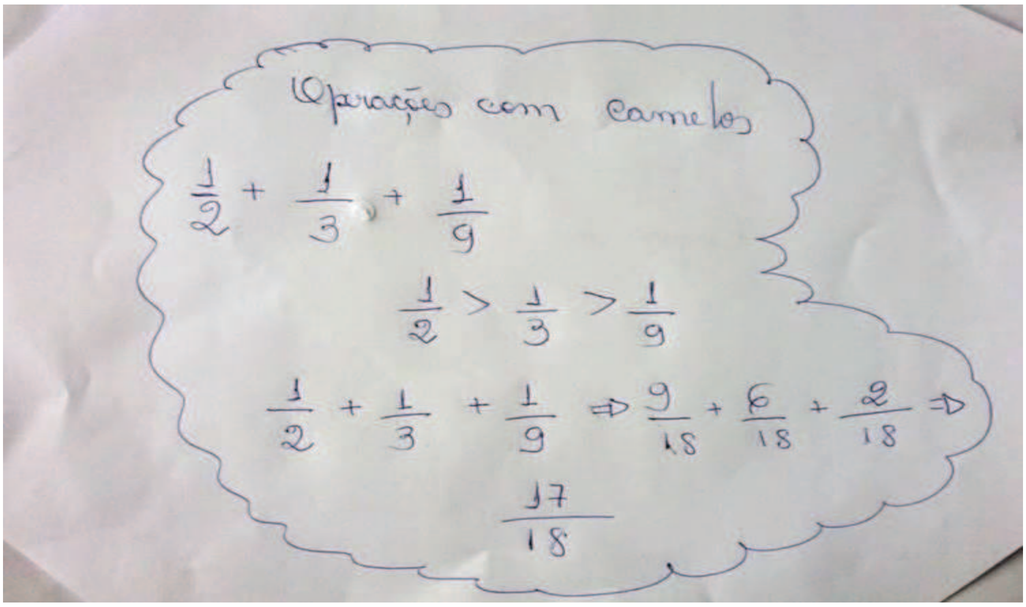
Nesse momento, o professor relembra aos estudantes a importância dos conceitos matemáticos aprendidos no ensino fundamental, como por exemplo: múltiplos e divisores, números primos, decimais, mínimo múltiplo comum, dentre outros (Apêndice 11). De acordo com Caraça (1989), o que permite o avanço a níveis superiores de conhecimento, são as barreiras e situações-problema, pois a formulação de caminhos, diante de uma dificuldade, possibilita a compreensão e apropriação do conceito. O professor começou a instigar os estudantes sobre como realizar as operações com as frações, seguindo alguns passos. Em primeiro lugar, como fazer o mínimo múltiplo comum entre dois ou mais números e, posteriormente, somando as frações (Apêndice 11), os estudantes debateram entre si em busca da solução. Houve alguns momentos, em que esgotaram as possibilidades e recorreram ao professor. Ao final, a maioria conseguiu relembrar e fazer os cálculos necessários para realizar a operação de soma de frações. Como mostra o diálogo a seguir:

> **Professor**: Ao somar os resultados, ou seja, conservando o denominador e somando os numeradores teremos 17/18, aqui tem um segredo desta conta ter dado certo. Qual é o segredo?
> **Estudante 16:** Por que este primeiro era 17, depois ficou 18?
> **Professor**: Não é isso...
> **Professor**: Porque ao adicionar um camelo ele resolveu todos os problemas, e ainda saiu com dois camelos?
> **Estudante 22:** Se você pegar 18/18 e 17/18, então 18/18 é um inteiro, e o 17/18, é... professor, me enrolei!
> **Professor**: Seu raciocínio está correto, só vamos completá-lo agora...
> **Professor**: Alguém pensou como a colega e é capaz de explicar melhor? Pessoal esse momento é muito importante nas discussões, pois vocês estão criando ações mentais para resolver o problema.
> **Estudante 12:** Eu não consigo professor.
> **Estudante 25**: Eu também não.
> **Estudante 14:** Depois que chegou nesse ponto professor, pega 18/18 e tira 17/18, e sobra 1/18, que representa o camelo.
> **Professor**: Exatamente, a fração que o pai utilizou para dividir os camelos não fecha em um camelo inteiro.

Uma participação chamou atenção: “sobrará um camelo, pois a soma das três frações não representa um número inteiro, logo, sobrará camelo” (Estudante 14). A partir dessa constatação, todos os demais estudantes tentaram fazer a soma das frações. E o professor recolheu as operações de todos os estudantes.

A figura 16 evidencia as operações realizadas pela estudante:

FIGURA 16: Operações com camelos.



FONTE: Atividades com o texto “Operações com camelos” – Estudante 14.

Essa atividade foi respondida adequadamente por 32 (trinta e dois), dos estudantes presentes. Observou-se que eles já eram capazes de perceber os vários significados que envolvem o conceito de frações: parte-todo, medida, quociente, razão, entre outros. Ou seja, há indícios de que foram capazes de apresentar controle da realização das ações anteriores. Esses indícios confirmam que “o ensino desenvolvimental trata os escolares como um todo, com a atividade integral que reproduz no indivíduo as necessidades, as capacidades, os conhecimentos e as formas de comportamento socialmente produzidos” (DAVYDOV, 1988, p. 107).

O professor encerrou a aula e anunciou que, na próxima aula, os estudantes colocariam em prática o modo de pensar as frações desenvolvidas nos momentos/aulas anteriores, resolvendo situações-problemas. O mesmo que a avaliação da assimilação do procedimento geral, como resultado da solução da tarefa de aprendizagem dada.

6º MOMENTO: AVALIAÇÃO DA ASSIMILAÇÃO NA FORMAÇÃO DO CONCEITO DE FRAÇÃO, POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

As tarefas que nortearam este momento consistiram em resolver problemas, individualmente e/ou em grupos, utilizando o procedimento geral do conceito de fração na resolução de tarefas particulares.

Na ação de avaliação, verificou-se a ocorrência da aprendizagem ou não, por parte do estudante, do conceito referente à tarefa de estudo (DAVYDOV, 1988). A ação de avaliação permite:

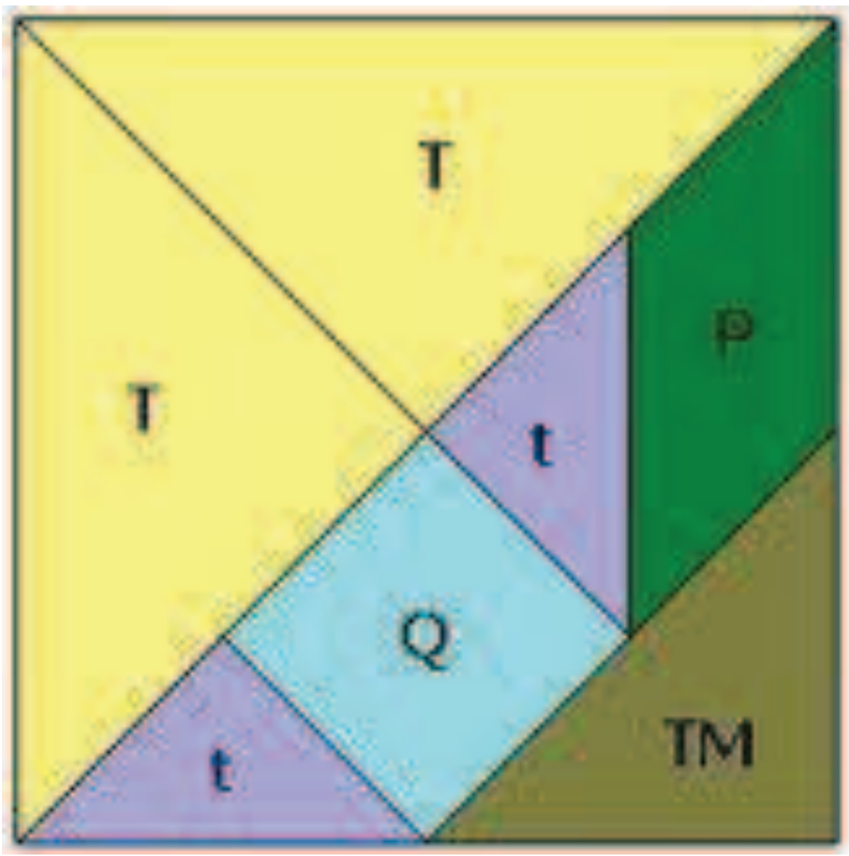
> Determinar se está assimilado ou não, e em que medida, o procedimento geral de solução da tarefa de estudo dada, se o resultado das ações de estudo corresponde ou não, e em que medida, a seu objetivo final. Desta forma, a avaliação não consiste na simples constatação destes momentos, mas no exame qualitativo substantiva do resultado da assimilação em sua confrontação com finalidade (DAVYDOV, 1988, p. 100).

A ação de avaliação está conectada com a ação de controle, pois uma “avaliação correta está intimamente vinculada com o controle” (DAVYDOV, 1988). Além disso, “a ação de avaliação está em todas as etapas de solução da tarefa de estudo, orienta as demais ações ao resultado final: a obtenção e utilização do número como um meio especial de comparação das medidas” (DAVYDOV, 1988, pp. 100).

Segundo Davydov (1988, p. 118), “Quando os estudantes já desenvolveram o modo geral de solução da tarefa de aprendizagem pode-se exigir deles que o apliquem no contexto de problemas particulares de natureza prática”. O professor discutiu com os estudantes a questão dos camelos, fazendo a mesma demonstração das operações realizadas pela estudante 14 (quatorze), cujo objetivo da aula era o de resolver problemas envolvendo o conceito de fração, ou seja, “a atividade de estudo é efetivada quando os escolares realizam as ações correspondentes” (DAVYDOV, 1988, p. 96).

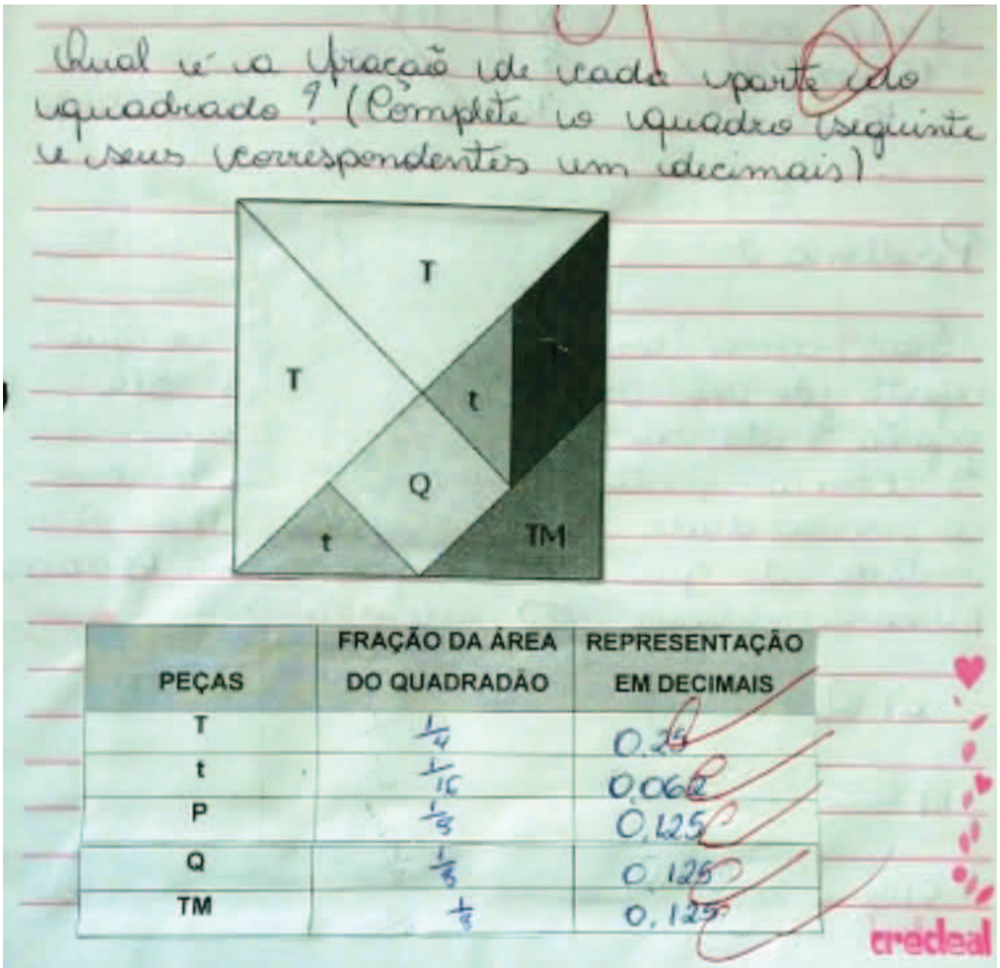
Após fazer as intervenções necessárias, o professor estimulou os estudantes a refletir sobre as operações matemáticas envolvidas, utilizando, quando necessário, instrumentos tecnológicos de apoio, como internet, mídias disponíveis, calculadora, dentre outros. Nessa fase do experimento didático-formativo houve tempo para debates, diálogos e pesquisas com o objetivo de resolver 6 (seis) problemas, envolvendo o conceito de fração, em grupos de 3 (três) ou 4 (quatro) estudantes.

Problema 1: Qual é a fração de cada parte do quadradrão? (complete o quadro seguinte e seus correspondentes em decimais):



PEÇAS	FRAÇÃO DA ÁREA DO QUADRADÃO	REPRESENTAÇÃO EM DECIMAIS
T		
T		
P		
Q		
TM		

FIGURA 17: Resolução de atividades - grupo 6.



FONTE: Acervo da Pesquisa

Problema 2: Iraci ama as frações e divide o que gasta do seu salário em frações. Ela gasta $\frac{3}{8}$ do seu salário com aluguel. $\frac{1}{5}$ com a prestação do carro e $\frac{3}{10}$ com a mensalidade da escola do filho. A metade do que sobra equivale a R$ 500,00. Nessas condições, pergunta-se:

- **a)** Qual é o salário de Iraci?
- **b)** Quanto ela gasta com aluguel?
- **c)** Quanto ela gasta com a prestação do carro?
- **d)** Quanto ela gasta com a mensalidade da escola do filho?
- **e)** Utilizando os sinais **<** (menor que) ou **>** (maior que) complete os espaços entre as frações:

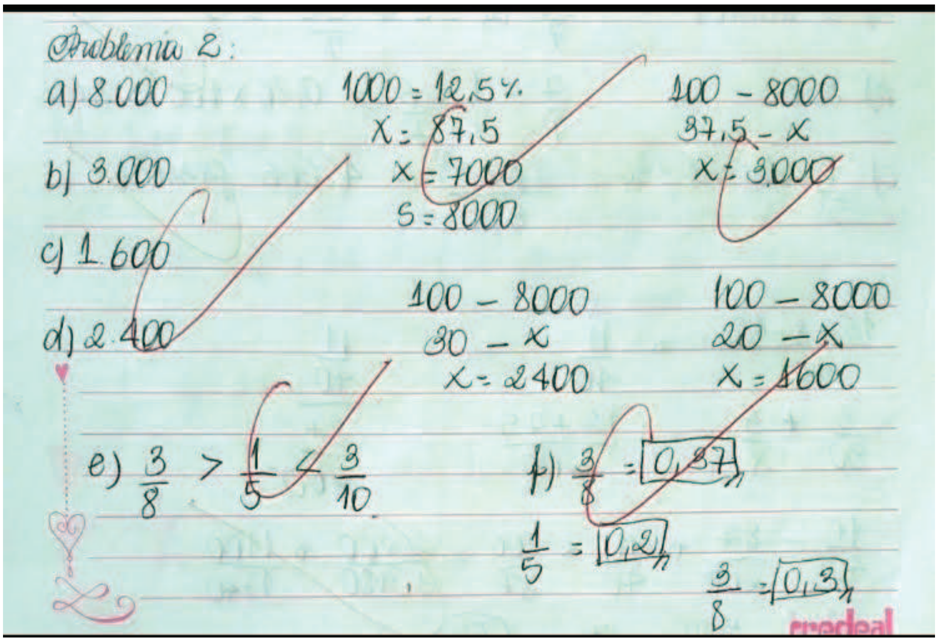
$$\frac{3}{8} \_\_\_\_\_\_ \frac{1}{5} \_\_\_\_\_\_ \frac{3}{10}$$

- **f)** Escreva utilizando os números decimais em cada uma das frações:

$\frac{3}{8} =$ ______ $\frac{1}{5} =$ ______ $\frac{3}{10} =$ ______

- **g)** Represente, em frações, cada uma dessas frações do salário de Iraci e faça a comparação de cada uma e sua relação com o salário que ela recebe.

FIGURA 18: Resolução de atividades – grupo 8.



FONTE: Acervo da Pesquisa

Problema 3: Fabiana assumiu uma turma de 5º ano do Ensino Fundamental, nesse semestre. Na turma dela há 35 estudantes. O conteúdo previsto e planejado para essa semana foi o de operações com frações. Ela levou uma barra de chocolate, para a sala de aula, para motivar os estudantes na visualização da divisão em partes iguais. Iniciou a aula fazendo perguntas para a turma, em que ficou evidenciado que apenas $\frac{1}{7}$ (um sétimo) não reconheciam as frações e não as representavam adequadamente. Esses estudantes não conheciam numerador e denominador de uma fração e não eram capazes de classificar as frações. Mediante essa realidade, responda as questões seguintes:

a) Quantos estudantes não sabiam nada sobre as frações?

b) Qual é a porcentagem dos estudantes que tinham as noções necessárias para o desenvolvimento adequado do conteúdo da semana, frações?

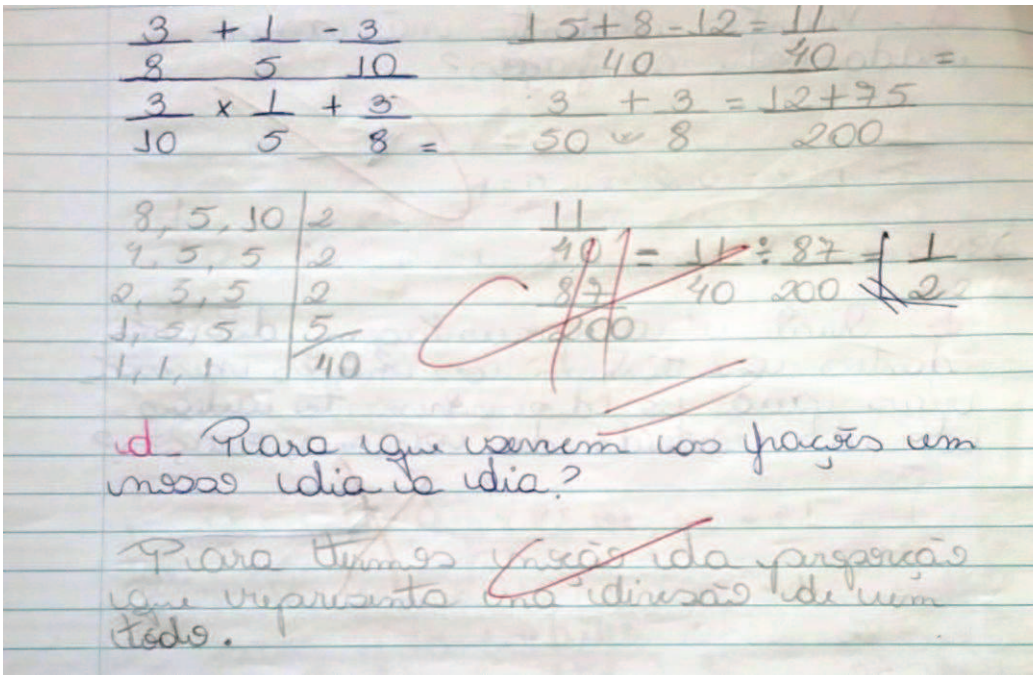
c) Como a maioria da turma sabia as noções elementares de frações, Fabiana colocou no quadro as seguintes situações, que agora você irá resolver:

$\frac{1}{5}$ de 23.330 pessoas, são quantas pessoas?

$$\frac{\frac{3}{8}+\frac{1}{5}-\frac{3}{10}}{\frac{3}{10}x\frac{1}{5}+\frac{3}{8}} =$$

d) Para que servem as frações em nosso dia a dia?

FIGURA 19: Resolução de atividades – grupo 2.



FONTE: Acervo da Pesquisa

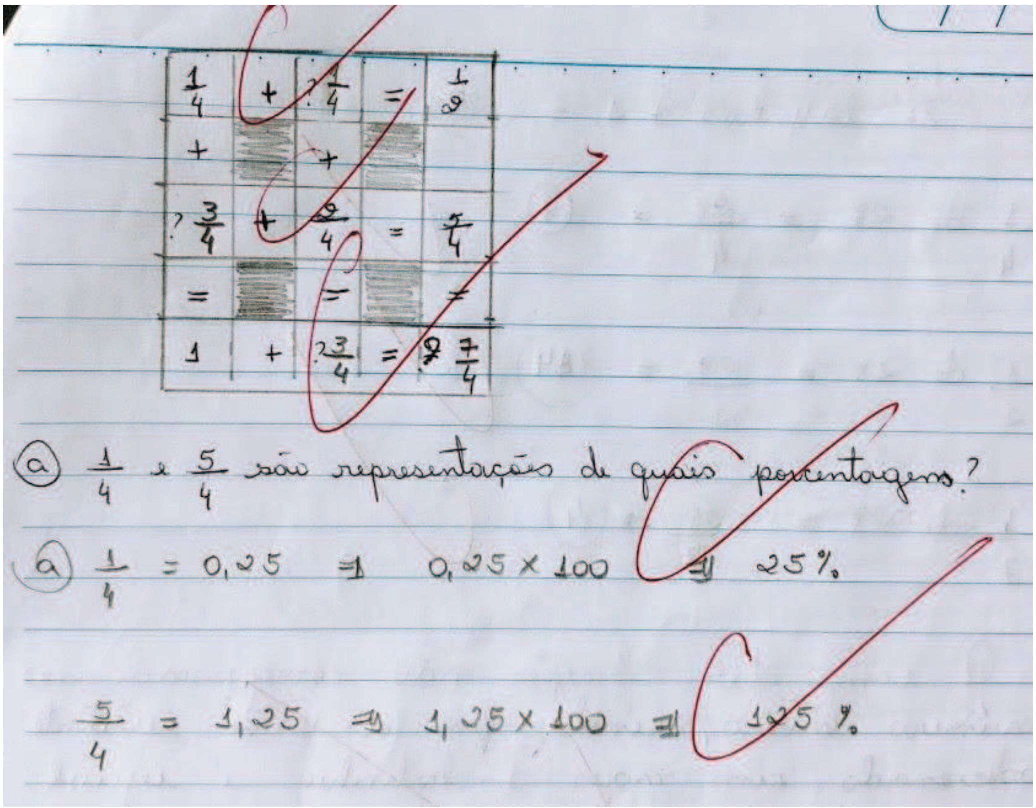
Problema 4: Substitua as **?** de tal forma que os resultados sejam verdadeiros.

$\frac{1}{4}$	+	?	=	$\frac{1}{2}$
+		+		+
?	+	$\frac{2}{4}$	=	$\frac{5}{4}$
=		=		=
1	+	?	=	?

a) $\frac{1}{4}$ e $\frac{5}{4}$ são representações de quais porcentagens?

b) Supondo que tivéssemos 27 balinhas a serem distribuídos para três meninos de tal forma que um recebesse $\frac{1}{4}$, outro recebesse $\frac{1}{2}$ e outro recebesse $\frac{1}{7}$ e você tivesse uma balinha no bolso e se propusesse a resolver o problema, como Beramis Samir resolveu o problema dos camelos, que resultado você teria? Como você encontrou todos os resultados? Você teve lucro ou prejuízo?

FIGURA 20: Resolução de atividades – grupo 9.



FONTE: Acervo da Pesquisa

Problema 5: Leia o texto “A divisão da Melancia”, para responder as questões seguintes:

A Divisão da Melancia

– Ótimo! Exclamou de repente o Visconde. – Esta melancia veio mesmo de propósito para ilustrar o que eu ia dizer. Ela era um inteiro. Tia Anastácia picou-a em pedaços, ou frações. As frações formam a parte da aritmética de que eu ia tratar agora.

– Se pedaço de melancia é fração, vivam as frações! – gritou Pedrinho.

– Pois fique sabendo que é – disse o Visconde.

– Uma melancia inteira é uma unidade. Um pedaço de melancia é uma fração dessa unidade. Se a unidade, ou a melancia, for partida em dois pedaços, esses dois pedaços formam duas frações – dois meios. Se for partida em três pedaços, cada pedaço é uma fração igual a um terço. Se for partida em quatro pedaços, cada pedaço é uma fração igual a um quarto.

– Está compreendido. Passe adiante – disse o menino, ansioso para chegar ao fim da lição e avançar na melancia.

– Temos de aprender – continuou o Visconde – o que é número inteiro e o que é número misto. Número inteiro é a melancia ou as melancias que ainda não foram partidas. Número misto é a melancia inteira com mais uns pedaços ao lado.

– Chega – disse Pedrinho –, isto é tão claro que não vale a pena perder tempo insistindo. Agora eu quero saber para que serve conhecer frações.

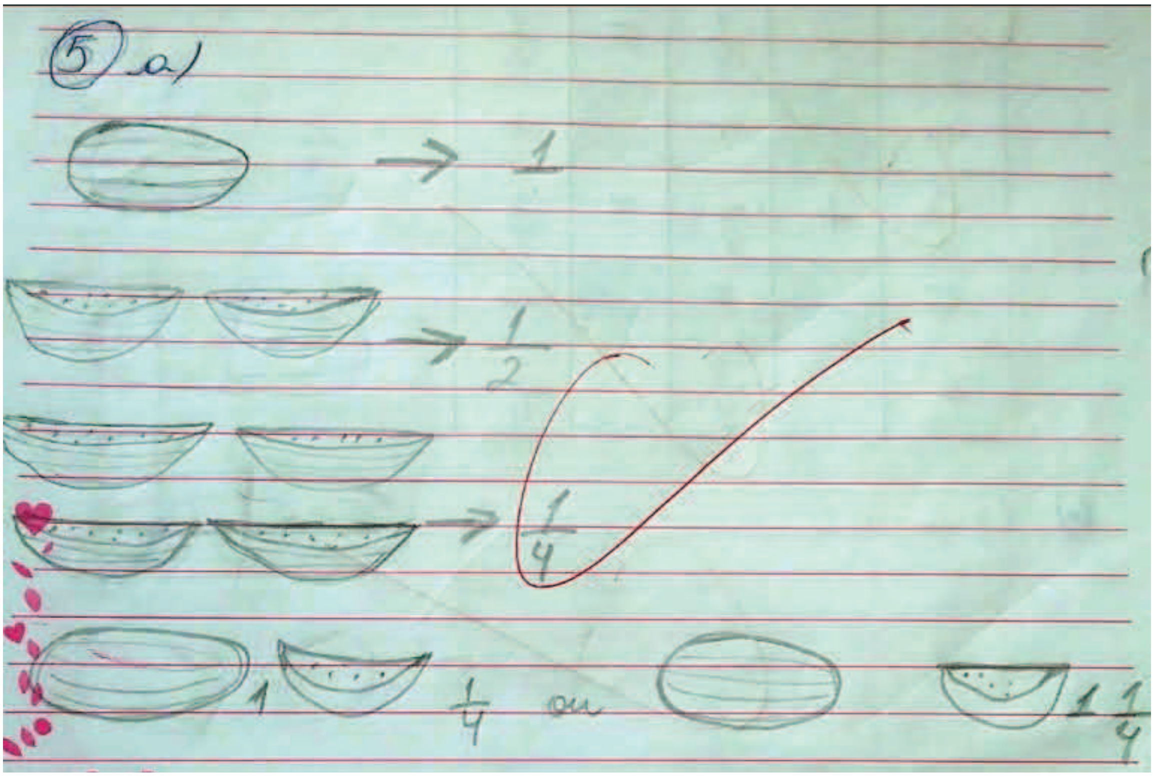
– Para mil coisas – responde o Visconde. – Na vida, todos os dias a gente lida com frações sem saber que o está fazendo.

FONTE: LOBATO, Monteiro. Aritmética da Emília (Adaptado).

a) Represente as frações que estão no texto, utilizando desenhos do mesmo tamanho.

b) Dê exemplos de situações reais sobre frações que se encaixam na última frase desse texto: “Para mil coisas – responde o Visconde. – Na vida, todos os dias a gente lida com frações sem saber que o está fazendo.”

FIGURA 21: Resolução de atividades – grupo 7.



FONTE: Acervo da Pesquisa.

Problema 6: Observe a seguinte receita para responder as questões seguintes:

Bolo de Fubá

- 4 ovos
- $4\frac{1}{2}$ xícaras de leite
- 3 xícaras de açúcar
- $2\frac{1}{2}$ xícaras de farinha de trigo
- $1\frac{1}{2}$ xícaras de fubá
- $2\ \frac{1}{2}$ colheres de margarina
- 100 g de queijo ralado
- 1 colher de fermento em pó

Para alguns cálculos tome, como referência, a seguinte tabela:

Leite, água, óleo		Açúcar	
1 xícara	240 ml.	1 xícara	180 g.
1 colher (sopa)	15 ml.	I colher (sopa)	12 g.
1 colher (chá)	5 ml.	Farinha de Trigo	
½ xícara	120 ml.	1 xícara	120 g.

a) Quais seriam as quantidades dos ingredientes **“Leite e farinha de trigo”,** para 3 receitas de bolo de fubá?

b) Quantas xícaras de farinha de trigo equivalem a 1 kg?

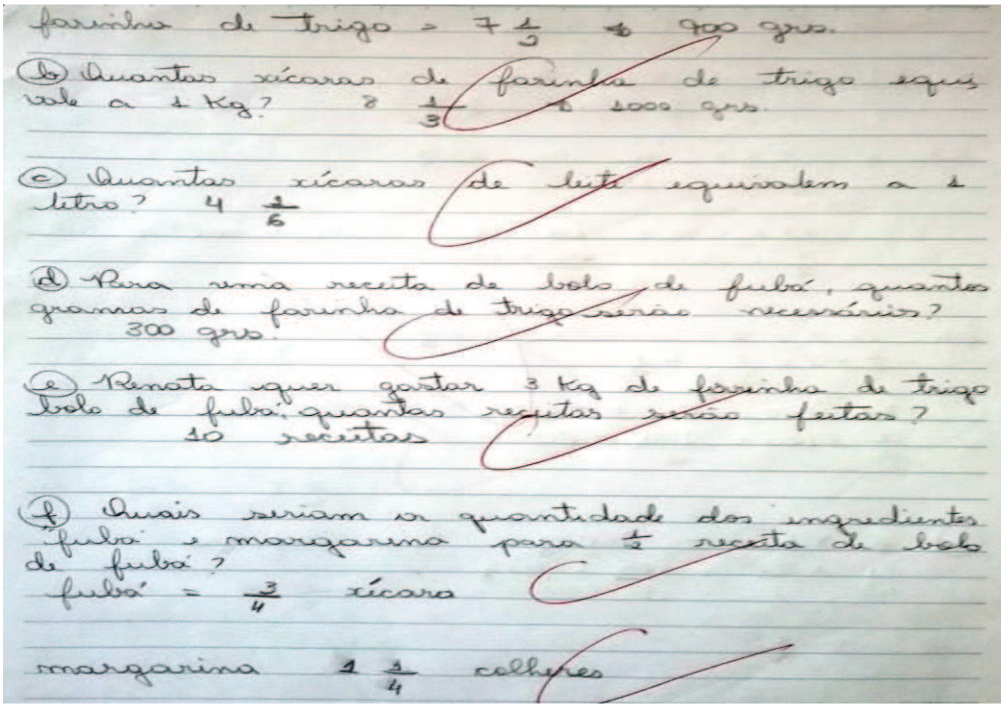
c) Quantas xícaras de leite equivalem a 1 litro?

d) Para uma receita de bolo de fubá, quantos gramas de farinha de trigo serão necessários?

e) Renata quer gastar 3 kg de farinha de trigo fazendo bolo de fubá, quantas receitas serão feitas?

f) Quais seriam as quantidades dos ingredientes “fubá e margarina”, para $\frac{1}{2}$ receita de bolo de fubá?

FIGURA 22: Resolução de atividades – grupo 7


farinha de trigo = 7 1/2 ≈ 900 grs.

(b) Quantas xícaras de farinha de trigo equivale a 1 Kg? 8 1/3 ≈ 1000 grs.

(c) Quantas xícaras de leite equivalem a 1 litro? 4 1/6

(d) Para uma receita de bolo de fubá, quantos gramas de farinha de trigo serão necessários? 300 grs.

(e) Renata quer gastar 3 kg de farinha de trigo bolo de fubá, quantas receitas serão feitas? 10 receitas

(f) Quais seriam a quantidade dos ingredientes "fubá" e margarina para 1/2 receita de bolo de fubá?
fubá = 3/4 xícara
margarina 1 1/4 colheres

FONTE: Acervo da Pesquisa.

Esses 6 (seis) problemas foram resolvidos em grupos de 4 (quatro) componentes. Ocorreram muitas discussões na solução dos problemas, nelas era possível perceber a mudança de nível dos estudantes, particularmente no que diz respeito ao desenvolvimento de capacidades de abstrações e soluções de problemas, considerados, pelos mesmos, como muito difíceis, de acordo com o que é mostrado na tabela 10 (dez):

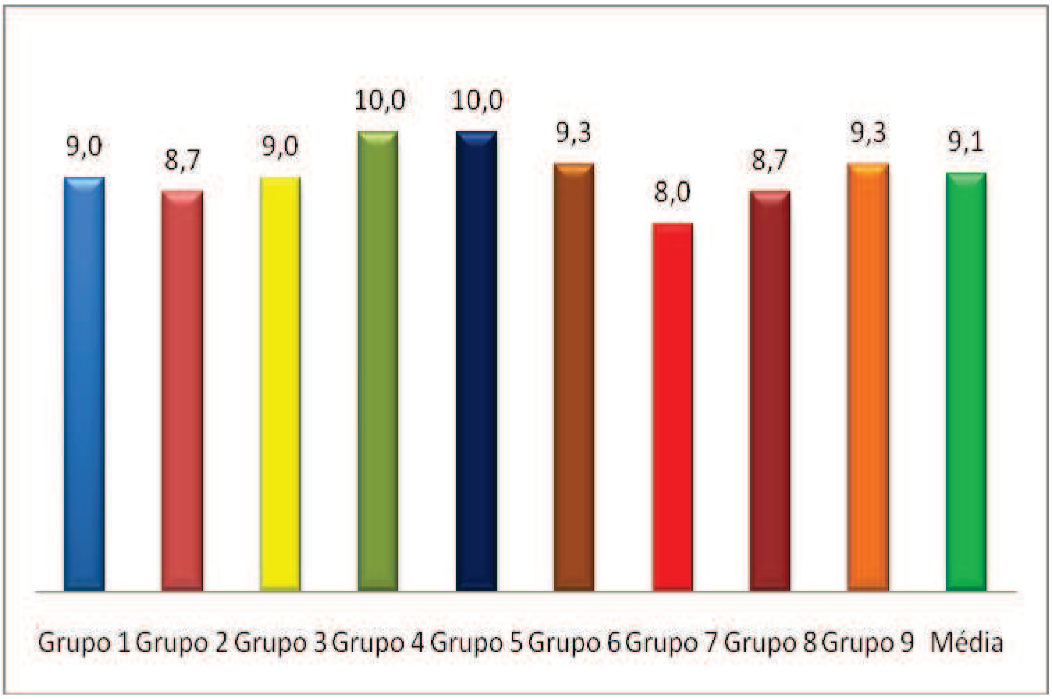
TABELA 10: Atividades de aplicação em grupos – 4º Período – 2017.

***	Questão 1	Questão 2	Questão 3	Questão 4	Questão 5	Questão 6	Nota	% Acerto
Grupo 1	0,5	0,5	0,4	0,3	0,5	0,5	2,7	9,0
Grupo 2	0,5	0,5	0,3	0,4	0,5	0,4	2,6	8,7
Grupo 3	0,5	0,4	0,3	0,5	0,5	0,5	2,7	9,0
Grupo 4	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	3,0	10,0
Grupo 5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	3,0	10,0
Grupo 6	0,5	0,5	0,3	0,5	0,5	0,5	2,8	9,3
Grupo 7	0,5	0,3	0,3	0,4	0,5	0,4	2,4	8,0
Grupo 8	0,5	0,3	0,5	0,4	0,4	0,5	2,6	8,7
Grupo 9	0,5	0,5	0,3	0,5	0,5	0,5	2,8	9,3
Total	4,5	4,0	3,4	4,0	4,4	4,3	24,6	82,0
% Acerto	100,0	88,9	75,6	88,9	97,8	95,6	**91,1**	**91,1**

FONTE: Acervo da Pesquisa/Atividade de Aplicação

O trabalho em grupo proporcionou avanços significativos para todos os estudantes. Não houve nenhum estudante que ficou sem analisar as questões, principalmente porque todos deveriam participar e ajudar a encontrar soluções para os problemas, segundo a orientação dada pelo professor. O trabalho em equipe deve ser colaborativo. Os dados dessa atividade, também, podem ser observados no gráfico 1, onde se percebe que a maioria dos estudantes entrou em atividade de ensino, provocando mudanças qualitativas no seus modos de pensar e agir, isto é, "o método genético-modelador de investigação é, assim, um método de educação e ensino experimentais que impulsiona o desenvolvimento" (DAVYDOV, 1988, p. 107).

GRÁFICO 2: Formação do conceito de fração – 4º período de Pedagogia – 2017.

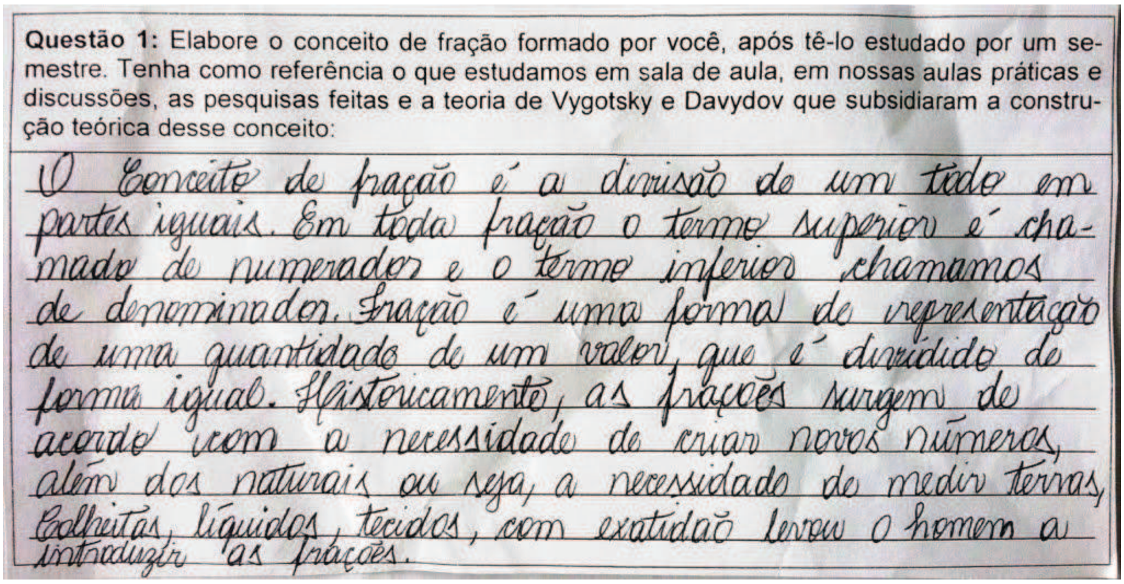


FONTE: Acervo da Pesquisa – Atividade Grupal

Após a resolução desses problemas em grupo, o professor solicitou que cada estudante construísse o conceito de fração de forma individual e, na sequência, elaborasse um problema, envolvendo a aplicação do conceito de fração (Apêndice 9), que possibilitasse construções mentais por meio dos diferentes caminhos de resolução. Após a elaboração, deveriam resolver e apresentar o conceito interiorizado de fração, mediante o exercício elaborado.

Foram selecionados 2 (dois) conceitos e 2 (dois) problemas resolvidos, como mostram as figuras 23 (vinte e três), 24 (vinte e quatro), 25 (vinte e cinco) e 26 (vinte e seis). Essa atividade tinha a intencionalidade de retomada da ação inicial, para que todos percebessem o crescimento qualitativo da turma, ou seja, a tomada de consciência do conceito, uma vez que "o conteúdo da atividade de aprendizagem, em outras palavras, é o conhecimento teórico" (DAVYDOV, 1988, p. 91). As evidências apontaram grandes indícios de qualidade das abstrações, sobretudo, na mudança qualitativa dos sujeitos no decorrer do experimento didático-formativo. Isto é, nessa ação, foi possível constatar se o procedimento universal da ação, realizado pelo estudante, foi inadequado. A avaliação determina a necessidade de busca pela relação universal adequada para a solução da tarefa de estudo, e não somente “a obtenção de um ou outro resultado parcial de sua solução” (DAVYDOV, 1988, p. 102).

FIGURA 23: Conceito de fração – elaborado após o experimento – 2017

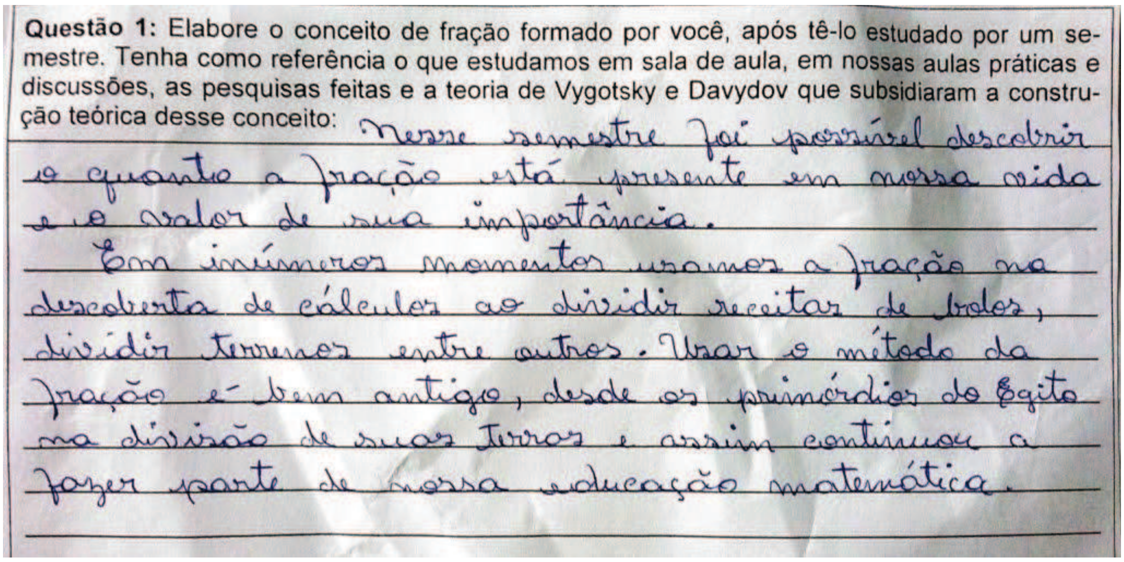


Questão 1: Elabore o conceito de fração formado por você, após tê-lo estudado por um semestre. Tenha como referência o que estudamos em sala de aula, em nossas aulas práticas e discussões, as pesquisas feitas e a teoria de Vygotsky e Davydov que subsidiaram a construção teórica desse conceito:

O Conceito de fração é a divisão de um todo em partes iguais. Em toda fração o termo superior é chamado de numerador e o termo inferior chamamos de denominador. Fração é uma forma de representação de uma quantidade de um valor, que é dividido de forma igual. Historicamente, as frações surgem de acordo com a necessidade de criar novos números, além dos naturais ou seja, a necessidade de medir terras, colheitas, líquidos, tecidos, com exatidão levou o homem a introduzir as frações.

FONTE: Acervo da Pesquisa – Estudante 14 (Apêndice 9)

FIGURA 24: Conceito de fração – elaborado após o experimento – 2017

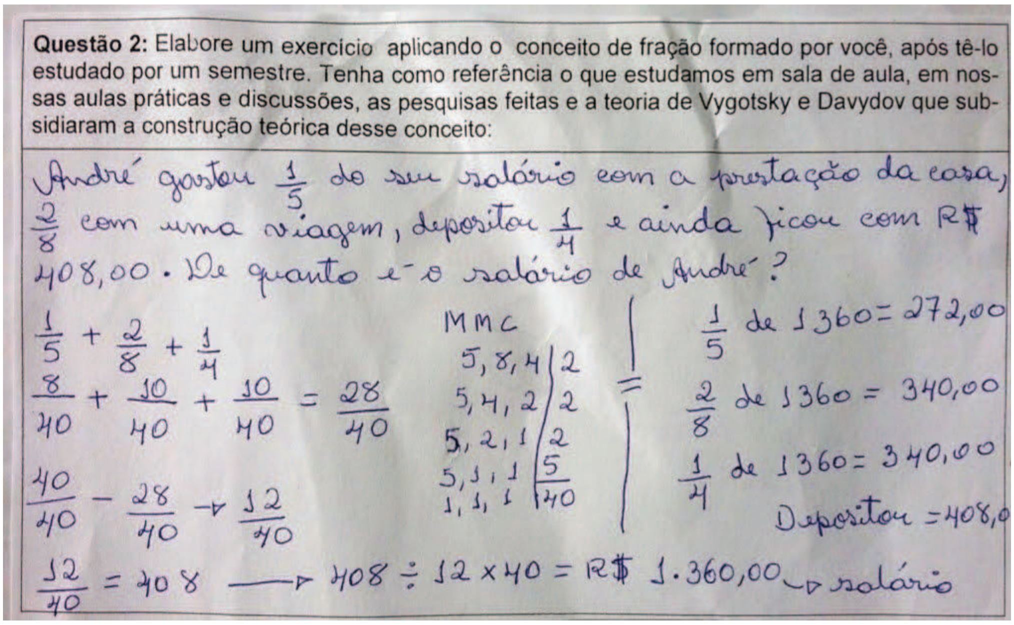


Questão 1: Elabore o conceito de fração formado por você, após tê-lo estudado por um semestre. Tenha como referência o que estudamos em sala de aula, em nossas aulas práticas e discussões, as pesquisas feitas e a teoria de Vygotsky e Davydov que subsidiaram a construção teórica desse conceito: Nesse semestre foi possível descobrir o quanto a fração está presente em nossa vida e o valor de sua importância.

Em inúmeros momentos usamos a fração na descoberta de cálculos ao dividir receitas de bolos, dividir terrenos entre outros. Usar o método da fração é bem antigo, desde os primórdios do Egito na divisão de suas terras e assim continuou a fazer parte de nossa educação matemática.

FONTE: Acervo da Pesquisa – Estudante 12 (Apêndice 9)

FIGURA 25: Atividade de aplicação – conceito de fração – elaborado após o experimento didático-formativo – 2017



Questão 2: Elabore um exercício aplicando o conceito de fração formado por você, após tê-lo estudado por um semestre. Tenha como referência o que estudamos em sala de aula, em nossas aulas práticas e discussões, as pesquisas feitas e a teoria de Vygotsky e Davydov que subsidiaram a construção teórica desse conceito:

André gastou $\frac{1}{5}$ do seu salário com a prestação da casa, $\frac{2}{8}$ com uma viagem, depositou $\frac{1}{4}$ e ainda ficou com R$ 408,00. De quanto é o salário de André?

$\frac{1}{5} + \frac{2}{8} + \frac{1}{4}$

$\frac{8}{40} + \frac{10}{40} + \frac{10}{40} = \frac{28}{40}$

$\frac{40}{40} - \frac{28}{40} \rightarrow \frac{12}{40}$

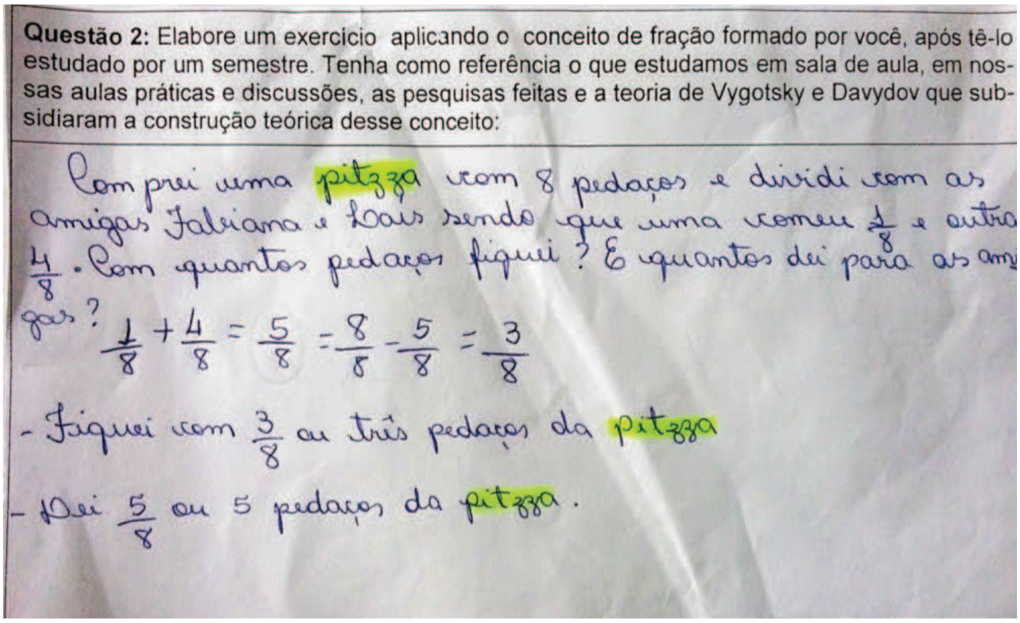
$\frac{12}{40} = 408 \longrightarrow 408 \div 12 \times 40 = R\$\ 1.360,00 \rightarrow$ salário

MMC
5, 8, 4 | 2
5, 4, 2 | 2
5, 2, 1 | 2
5, 1, 1 | 5
1, 1, 1 | 40

$\frac{1}{5}$ de 1360 = 272,00
$\frac{2}{8}$ de 1360 = 340,00
$\frac{1}{4}$ de 1360 = 340,00
Depositou = 408,0

FONTE: Acervo da Pesquisa – Estudante 24 (Apêndice 9)

FIGURA 26: Atividade de aplicação – conceito de fração – elaborado após o experimento didático-formativo – 2017



Questão 2: Elabore um exercício aplicando o conceito de fração formado por você, após tê-lo estudado por um semestre. Tenha como referência o que estudamos em sala de aula, em nossas aulas práticas e discussões, as pesquisas feitas e a teoria de Vygotsky e Davydov que subsidiaram a construção teórica desse conceito:

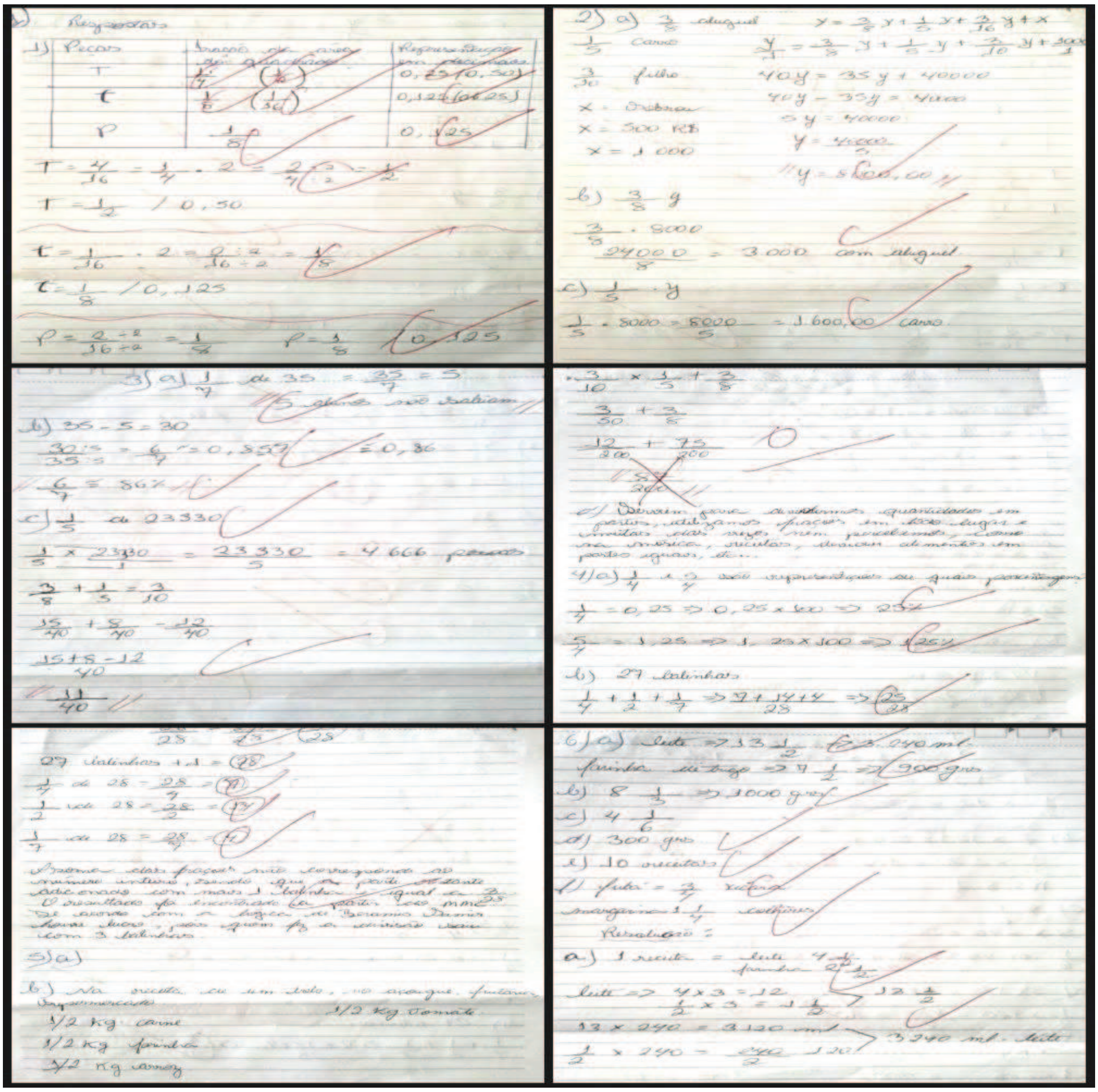
Comprei uma pitzza com 8 pedaços e dividi com as amigas Fabiana e Laís sendo que uma comeu $\frac{1}{8}$ e outra $\frac{4}{8}$. Com quantos pedaços fiquei? E quantos dei para as amigas?

$\frac{1}{8} + \frac{4}{8} = \frac{5}{8} = \frac{8}{8} - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

- Fiquei com $\frac{3}{8}$ ou três pedaços da pitzza
- Dei $\frac{5}{8}$ ou 5 pedaços da pitzza.

FONTE: Acervo da Pesquisa – Estudante 27 (Apêndice 9)

FIGURA 27: Resolução de atividades em grupo – Pedagogia – 2017



FONTE: Acervo da Pesquisa

MONITORANDO AS AÇÕES NO PROCESSO ENSINO-APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE FRAÇÃO

A ação de avaliação e do monitoramento está presente em todas as etapas de solução da tarefa de estudo, pois orienta as demais ações ao resultado final: a obtenção e utilização do conceito de fração, como um meio especial de comparação das grandezas. Desse modo, ela tem como objetivo determinar se o procedimento geral de solução da tarefa de estudo foi ou não apropriado pelos estudantes. O professor avalia se o estudante está pronto para resolver diferentes tarefas, o que exige um novo procedimento de resolução em outro contexto (DAVYDOV, 1982).

Após a realização dos 6 (seis) momentos/aulas, em que foram percebidas os indícios das mudanças qualitativas no modo de pensar dos estudantes, conforme recomenda Davydov (1988), enfatizando, sobretudo, a formação do conceito de fração, estudado durante o período da realização do experimento didático-formativo. Entendeu-se como necessário mostrar o resultado quantitativo, expresso por meio de acertos e erros dos estudantes, no que se refere ao conceito de fração. Para atingir esse objetivo, foi aplicado uma avaliação após o experimento didático-formativo (Apêndice 10), contendo 10 (dez) questões, exigindo, sobretudo, a habilidade de lidar com esse conceito, especialmente as relações de grandezas, operações com frações, comparação, reta numérica, etc. Os resultados estão expressos na tabela 11 (onze):

TABELA 11: Avaliação após experimento didático–formativo – 4º período de Pedagogia – 2017**.**

nº	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Acertos	% Acertos
1	1,0	0,7	1,0	0,8	0,3	0,3	1,0	1,0	0,3	0,6	7,00	70,00
2	1,0	1,0	1,0	0,7	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	9,70	97,00
3	0,5	0,5	0,7	0,8	0,0	0,6	1,0	1,0	0,5	0,8	6,40	64,00
4	1,0	1,0	0,5	1,0	0,5	0,0	0,0	1,0	1,0	0,9	6,90	69,00
5	1,0	1,0	1,0	0,8	1,0	1,0	0,0	1,0	1,0	0,8	8,60	86,00
6	0,5	0,5	0,6	1,0	1,0	0,2	1,0	1,0	0,3	0,6	6,70	67,00
7	0,6	0,3	0,3	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0,5	0,5	7,20	72,00
8	0,0	0,4	0,4	0,8	1,0	0,7	1,0	1,0	0,5	0,5	6,30	63,00
9	1,0	1,0	0,5	1,0	1,0	1,0	0,0	1,0	1,0	1,0	8,50	85,00
10	0,3	0,8	0,5	0,9	1,0	1,0	1,0	1,0	0,8	0,3	7,60	76,00
11	0,3	1,0	0,6	0,9	1,0	0,0	0,0	1,0	0,7	0,8	6,30	63,00
12	0,3	0,3	0,3	1,0	0,5	1,0	1,0	1,0	0,5	0,3	6,20	62,00
13	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0,0	1,0	0,8	8,80	88,00
14	1,0	1,0	0,9	0,8	1,0	1,0	1,0	0,0	1,0	0,7	8,40	84,00
15	1,0	0,0	1,0	0,7	1,0	1,0	0,0	1,0	0,7	0,8	7,20	72,00
16	0,5	0,5	1,0	0,5	1,0	0,3	1,0	0,0	0,5	0,6	5,90	59,00
17	0,8	0,2	0,7	1,0	0,5	0,8	1,0	1,0	0,4	0,3	6,70	67,00
18	0,5	1,0	0,3	1,0	0,5	1,0	1,0	0,0	1,0	0,0	6,30	63,00
19	0,3	0,2	0,5	0,8	0,0	1,0	1,0	1,0	0,5	0,8	6,10	61,00
20	0,5	0,3	0,8	1,0	0,5	1,0	1,0	1,0	0,6	0,5	7,20	72,00
21	0,8	0,8	0,5	0,9	0,3	0,0	1,0	1,0	0,5	0,5	6,30	63,00
22	0,6	0,7	0,6	0,8	0,3	0,6	1,0	0,0	0,7	0,7	6,00	60,00
23	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0,2	0,5	8,70	87,00
24	0,5	0,3	0,3	1,0	0,5	0,5	1,0	1,0	0,4	0,5	6,00	60,00

25	1,0	0,2	0,5	0,7	0,8	1,0	0,0	1,0	0,3	0,4	5,90	59,00
26	1,0	1,0	0,7	1,0	1,0	0,8	1,0	1,0	1,0	0,9	9,40	94,00
27	1,0	0,3	0,5	1,0	1,0	0,5	1,0	0,0	0,3	0,5	6,10	61,00
28	0,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0,5	1,0	0,0	0,3	0,5	6,30	63,00
29	0,8	0,8	1,0	0,5	0,6	1,0	1,0	0,0	0,2	0,5	6,40	64,00
30	0,3	0,0	0,8	0,8	1,0	0,0	1,0	1,0	0,6	0,6	6,10	61,00
31	0,8	1,0	0,5	1,0	1,0	0,5	0,0	1,0	0,9	0,8	7,50	75,00
32	1,0	1,0	0,8	0,3	1,0	1,0	0,0	1,0	0,2	0,0	6,30	63,00
33	1,0	1,0	0,8	0,8	0,5	0,5	0,0	0,0	0,8	0,8	6,20	62,00
34	1,0	1,0	0,8	1,0	0,8	1,0	0,0	1,0	1,0	0,8	7,40	84,00
35	0,0	0,3	1,0	0,8	0,0	0,5	1,0	1,0	0,8	0,8	6,20	62,00
36	0,8	1,0	0,8	0,9	1,0	1,0	0,0	1,0	0,8	0,8	8,10	81,00
%	**68,61**	**66,94**	**70,00**	**86,11**	**73,89**	**70,28**	**69,44**	**72,22**	**63,33**	**61,67**	**7,03**	70,53

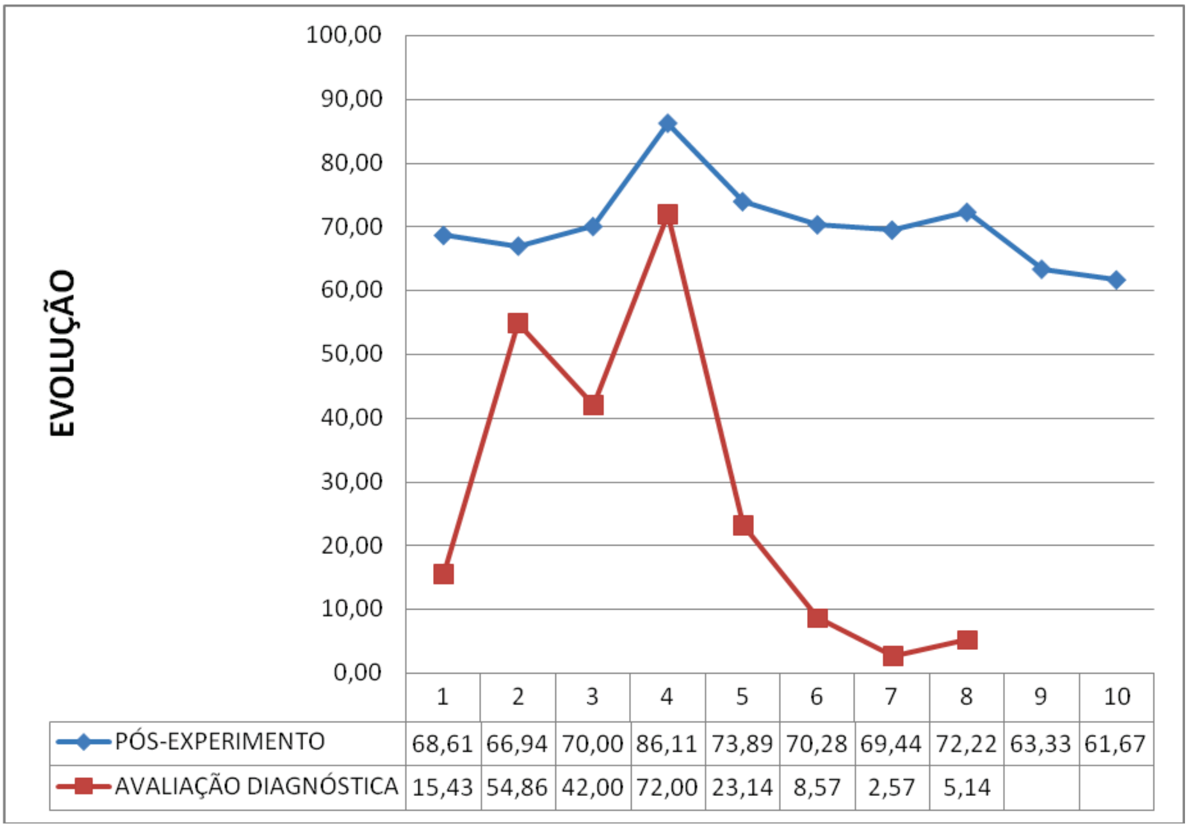
FONTE: Avaliação após o experimento didático-formativo – Apêndice 10

Iniciou-se o experimento didático formativo com um dado bastante assustador, do ponto de vista pedagógico, para os estudantes do curso de Pedagogia, pois foram registrados 24,19% (vinte e quatro vírgula dezenove por cento) de acertos, na avaliação diagnóstica I. Após os 6 (seis) momentos/aulas, ou seja, 3 (três) meses e 24 (vinte e quatro) horas de efetivo estudo, esse resultado subiu para 70,53% (setenta vírgula cinquenta e três por cento). O que mostra que as intervenções, em sala de aula, durante a realização do experimento didático-formativo, contribuíram para ampliar qualitativamente o desenvolvimento intelectual dos estudantes. Apontando, portanto, para a viabilidade da organização do ensino de matemática, com base na teoria do ensino desenvolvimental de Davydov (1982, 1988), no curso de licenciatura em Pedagogia, isto é, a base do ensino desenvolvimental é seu conteúdo e dele se originam os métodos (ou modelos) de organização de ensino (DAVYDOV, 1988, p. 94).

O ensino desenvolvimental apresentou-se como uma alternativa produtiva de ensino para o curso de licenciatura em Pedagogia, confirmando o estudo de Bessa (2015), quando, por meio do ensino desenvolvimental, ajudou os estudantes de Pedagogia a formarem os conceitos de perímetro e área.

O gráfico 3 mostra o crescimento estatístico dos estudantes, ao evidenciar o resultado da avaliação diagnóstica I, antes do experimento didático-formativo e da avaliação após esse experimento.

GRÁFICO 3: Resultado comparativo das avaliações – 4º período de Pedagogia – 2017.



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
PÓS-EXPERIMENTO	68,61	66,94	70,00	86,11	73,89	70,28	69,44	72,22	63,33	61,67
AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA	15,43	54,86	42,00	72,00	23,14	8,57	2,57	5,14		

FONTE: Gráfico elaborado pelo pesquisador com base nos resultados da avaliação diagnóstica e da avaliação após o experimento didático-formativo (Apêndices 3 e 10).

Os dados obtidos, a partir da ação direta dos estudantes, possibilitaram apreender mudanças de qualidade na apropriação do conceito de fração, expressos pelas manifestações do pensamento dos estudantes. Após a realização do experimento didático formativo, 28 (vinte e oito) os estudantes apontaram (Apêndice 6) que sua maneira de ver o ensino da matemática mudou, após ter a disciplina *Educação Matemática*, principalmente pela abordagem do ensino desenvolvimental, utilizada nas aulas, como mostram alguns relatos: “quando a matemática é bem aplicada surge um interesse de você entendê-la” (estudante 1), “passei a ver a importância que um simples número tem” (estudante 17), “às vezes eu olhava a matemática com outros olhos, primeiramente por não ter muita afinidade, mas quando você pega a entender um pouco, você pega a ter gosto por ela” (sic) (estudante 19), “hoje vejo a importância da contextualização” (estudante 21), “agora vejo que matemática não é só contas, e ela tem, outros objetivos. Ela tem história também" (estudante, 26), "ficamos mais de dois meses estudando um conteúdo só de frações e realmente consegui aprender muito mais que apenas frações (estudante 18), "hoje tudo mudou, já se passaram 11 anos que acabei o ensino médio. Nos tempos atuais, os professores têm o interesse de saber se o aluno realmente aprendeu, hoje só não aprende quem não quer, pois os professores estão mais abertos e próximos dos alunos, apesar de a forma de ensino não ter mudado tanto (sic) (estudante, 6)".

Após o experimento didático-formativo, 28 (vinte e oito) estudantes inquiridos apontaram que é importante aprender matemática, no curso de Licenciatura em Pedagogia, principalmente porque a maioria acabará exercendo a função docente, confirmando o que disse Davydov (1988, p. 94): "a exposição do conhecimento científico se realiza pelo procedimento de ascensão do abstrato ao concreto, em que se utilizam as abstrações e generalizações substantivas e os conceitos teóricos". Mesmo que, nem sempre, seja possível formar um conceito em função do curto espaço de tempo, a mudança no modo de pensar e organizar o ensino, de acordo com a teoria do ensino desenvolvimental, provoca mudanças qualitativas mais significativas nos sujeitos envolvidos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ser professor de matemática, para este pesquisador, sempre foi uma tarefa desafiadora, por essa razão o desejo e a necessidade de superação das dificuldades do processo ensino-aprendizagem, em matemática, originaram a escrita da presente dissertação. Sabe-se que ensinar conceitos matemáticos não é tarefa fácil, pois é uma das disciplinas escolares que possui maiores indicadores de aversão pelos estudantes, principalmente da educação básica. Um fator apontado nessa pesquisa, que contribui para isso, é o modelo de educação vigente, hoje no Brasil, que classifica os estudantes por meio de avaliações. É preocupante saber que muitos estudantes passam pelo Ensino Fundamental, chegam ao Ensino Médio e, até mesmo, no Ensino Superior sem competência e habilidades para lidar com os conceitos matemáticos. Agravante pensar que essa observação vale também para as outras disciplinas. Os professores, em geral, reproduzem em sala de aula sua própria experiência de aprendizagem, ou seja, constroem seus conhecimentos de ensino, aplicando e colocando à prova suas próprias construções, sendo que as mesmas vão sendo reorganizadas ao longo da experiência docente.

Observou-se, nos sujeitos da pesquisa, grande precariedade no domínio de conceitos básicos da matemática como, por exemplo, as quatro operações (adição, subtração, multiplicação e divisão), conceitos geométricos, frações, números decimais, porcentagens, dentre outros conteúdos já, supostamente, aprendidos durante a educação básica. Em seus relatos, presentes em várias partes do capítulo 3 (três), ficam evidentes as experiências, em sua grande maioria, com um ensino tradicional, concentrado, sobretudo, nos livros didáticos e em lista de exercícios, quase sempre de forma individual, impossibilitando assim a troca de experiências entre os pares. Em grande parte, os professores, segundo os estudantes, eram meros transmissores de conteúdos, geralmente ensinados de forma isolada e descontextualizada, não proporcionando a relação lógico-histórica dos conteúdos, ficando, assim, no campo da lógica formal, desfavorecendo a formação dos conceitos científicos.

Um grande desafio a ser superado, apontado nessa pesquisa, é a falta de pré-requisitos por parte dos estudantes, que chegam ao ensino superior não dominando conteúdos básicos de matemática. Para eles, a matemática apresenta muita abstração e pouco aprendizado, o que corrobora com a relação de repulsa que a maioria tem com os conteúdos básicos da disciplina em questão. Outra questão que chamou atenção, nessa pesquisa, foram os relatos que indicam o curso de Licenciatura em Pedagogia com muita teoria pedagógica e pouca prática de conteúdos específicos (LIBÂNEO, 2010; GATTI e NUNES, 2009), em que quase metade dos sujeitos relatou não se sentir apta a ensinar todas as disciplinas, principalmente a matemática. Na concepção dos sujeitos investigados, a licenciatura em Pedagogia deveria promover a aprendizagem dos conteúdos que deverão ensinar, mesmo que tenham supostamente aprendido esses conteúdos, uma vez que, na prática, a realidade é outra.

Um fator positivo, e que motivou o seguimento dessa pesquisa, é que 28 (vinte e oito) estudantes apontaram mudança em sua maneira de ver o ensino da matemática, após a abordagem do ensino desenvolvimental nas aulas, mostrando-se mais motivados com a aprendizagem de conceitos matemáticos, em especial, com o conceito de fração. Isso evidencia, também, que o ensino desenvolvimental, pensado a priori no ensino de crianças, foi adaptado de forma apropriada para o ensino de adultos, priorizando, sobretudo, como se deve ensinar as crianças e enfatizando, também, qual é o movimento de aprendizagem que as crianças fazem para aprender os conteúdos da disciplina de matemática. Por essa razão, acredita-se que a teoria Histórico-Cultural de Vygotsky, e, em particular, a teoria do ensino desenvolvimental de Davydov mostram-se promissoras no campo da educação, pois consideram não só o conceito científico em si, mas também o estudante como sujeito atuante, emancipado, capaz de desenvolver-se e construir seu próprio caminho no meio social em que vive.

Nesse sentido, o problema norteador, que essa pesquisa procurou responder, foi se o ensino de Matemática, fundamentado na teoria do ensino desenvolvimental, pode ajudar, os estudantes do curso de licenciatura em Pedagogia, a formar o pensamento teórico do conceito de fração? Apontada essa questão, a pesquisa partiu do pressuposto de que a teoria do ensino desenvolvimental pode colaborar e desenvolver um pensamento teórico do conceito fração, por meio das atividades desenvolvidas em sala de aula. Esse problema foi norteado pelo objetivo geral de analisar o ensino-aprendizagem do conceito fração, realizado por estudantes da disciplina de *Educação Matemática*, do curso de Licenciatura em Pedagogia, tendo como fundamento teórico-metodológico a teoria do ensino desenvolvimental de

Davydov, ou seja, “o ensino e a educação constituem as formas universais do desenvolvimento mental das crianças; nelas se expressa à colaboração entre os adultos e as crianças, orientada para que estas se apropriem das riquezas da cultura material produzidas pela humanidade” (DAVYDOV, 1988, p. 138).

Na construção dessa dissertação buscou-se esclarecer como organizar o ensino de matemática, com base na teoria do ensino desenvolvimental, para que os estudantes do curso de Licenciatura em Pedagogia assimilassem o conceito de fração. A opção por esse conceito se justifica pelo fato de ser um conceito relevante e fundamental, em diversas aplicações e em inúmeras áreas do conhecimento, como também por estar no grupo dos conceitos que, em geral, os estudantes de Pedagogia apresentam dificuldades de aprendizagem. Essa dificuldade torna-se, em futuro próximo, um desafio em sua vida profissional, em especial para aqueles que ensinam esse conteúdo aos estudantes do 4º (quarto) e 5º (quinto) anos do Ensino Fundamental.

Uma contribuição dessa dissertação, que pode ser destacada, está no sentido de oferecer melhor compreensão de como os estudantes formulam, concebem e desenvolvem a formação de conceitos, apontando, assim, subsídios para a elaboração de projetos de alteração curricular da disciplina de matemática, do curso de Pedagogia, seja na formação inicial ou, até mesmo, na formação continuada desses profissionais que atuam nos anos iniciais do Ensino Fundamental. A ideia é que ocorram mudanças nas práticas existentes, corroborando o que Davydov (1988, p. 132) mostrou, quando afirma que “vários estudantes das séries experimentais apresentaram um interesse, que cresceu estavelmente de série para série, nos modos gerais de resolução de problemas e nas regularidades teóricas do material em estudo”.

Na etapa empírica dessa pesquisa, empenhou-se na realização de uma análise que permitisse identificar as ações desencadeadoras do pensamento dos estudantes, por meio de um experimento didático-formativo. Para tanto, os subsídios nos pressupostos da teoria Histórico-Cultural de L. S. Vygotsky e na teoria do ensino desenvolvimental de V.V. Davydov, em razão da crença de que essa seja uma alternativa para a organização do ensino, em que o objetivo final seja o desenvolvimento do pensamento teórico dos estudantes.

O experimento didático-formativo foi desenvolvido em uma turma do 4º período, do curso de Licenciatura em Pedagogia, em que foram propostos 6 (seis) momentos, obedecendo às recomendações dos autores da teoria Histórico-Cultural e da teoria do ensino desenvolvimental, em especial de Davydov (1982, 1988), como processos que constituem uma unidade dialética entre a atividade de ensino e a atividade de aprendizagem. Durante a realização desse experimento, foi possível evidenciar que as mudanças da atividade docente promovem mudanças no tipo de pensamento, em que o pensamento empírico pode ser extrapolado, qualitativamente, na direção do pensamento teórico.

Os dados obtidos nessa investigação apresentam indícios de que a organização do ensino e do conteúdo são elementos indissociáveis e elementares, na atividade de ensino para constituição do pensamento teórico, sobretudo, na ação intencional de cada atividade desenvolvida em cada momento, pois o professor, ao se apropriar de elementos do conhecimento científico (conteúdo), no caso o conceito teórico de fração, tem a possibilidade de transformar o pensamento empírico que os estudantes tinham, inicialmente, para desenvolver o pensamento teórico na sua relação com o objeto de ensino e reorganizar situações desencadeadoras de aprendizagem, desenvolvidas em cada momento de aula.

O plano de ensino foi desenvolvido pelo pesquisador em conjunto com o professor colaborador, programando atividades intencionalmente pensadas, buscando motivar e despertar o desejo nos estudantes, de modo que fossem capazes de percorrer o caminho lógico e histórico do conceito fração. Por outro lado, promovendo, também, o desenvolvimento cognitivo, em um movimento oposto ao ensino tradicional, para que, ao final, se desenvolvesse nos estudantes o pensamento teórico, isto é, "o ensino e aprendizagem são os meios através dos quais os adultos organizam a atividade das crianças e a sua implementação, reproduzem em si mesmos as necessidades surgidas historicamente, essenciais para a solução exitosa, das diferentes tarefas da vida produtiva cívica" (DAVYDOV, 1988, p. 138).

As limitações teóricas das propostas iniciais, apresentadas pelos estudantes, foram evidenciadas, sobretudo, no 1º Momento, cuja abordagem permitiu a aproximação com o conceito de fração, investigando a relação universal do objeto estudado, em que foi apresentada a animação gráfica, "O homem que calculava - o problema dos camelos", com o objetivo de problematizar e motivar os estudantes para o ensino do conceito de fração, provocando interesse, necessidade e o desejo de discutir o conteúdo. Ao analisar os relatos dos estudantes, ficou evidenciado que, em geral, eles aprenderam matemática por meio de resolução de problemas repetitivos, lista de exercícios e memorização de conteúdos no livro didático, ratificando que a matemática sempre foi ensinada a eles nos limites do visual empírico. Nesse momento/aula foi possível observar que o conhecimento do conceito de fração estava baseado na observação e na representação concreta do objeto, a partir da utilização de exemplos associados a alguma classe formal e à comparação dos objetos, relacionados apenas as suas características comuns, ou seja, na lógica formal que, embora seja importante, torna-se insuficiente para a formação do conhecimento científico.

Já no 2º Momento, partindo dos indícios, embora insipientes, da formação do pensamento teórico, buscou-se a modelação da relação universal, em que os estudantes fizeram o estudo lógico-histórico do conceito de fração, por meio de pesquisas, a fim de aproximar o entendimento da origem e da evolução da fração, utilizando sua evolução ao longo do tempo e sua aplicação prática no dia a dia. Utilizou-se, como metodologia de ensino, a comparação de desenhos, esquemas gráficos e partes do tangram, envolvendo algumas grandezas como partes do todo, área total e parte representativa, buscando expressar uma fórmula geral, literal e/ou gráfica para o conceito de fração, na representação de uma parte em relação ao todo. Foi possível constatar, por meio dos relatos, que os estudantes ainda permanecem no campo empírico, apresentando pequenos indícios de evolução na construção do conceito de fração.

Na sequência, no 3º Momento, buscando a interiorização da relação universal do conceito de fração, a partir da transformação do modelo, os estudantes tinham como objetivo de aprendizagem, entre outros, solucionar tarefas, comparar números fracionários, localizar os números fracionários na reta numérica, realizar operações e resolver atividades diversas, utilizando inúmeros procedimentos mentais com o conceito de fração. Utilizou-se o papel quadriculado e instrumentos próprios para que os estudantes desenhassem, comparassem e realizassem cálculos com frações. Por meio dessa metodologia, começaram a compreender que a fração é a divisão de uma unidade inteira, em partes iguais. Dessa forma, muitos já conseguiram operar com as frações na forma literal $a/b = c$, e compará-las, utilizando sinais de > (maior que), < (menor que) e = (igual a). Foi possível observar, por meio das atividades realizadas, e dos relatos dos estudantes, que o conhecimento começa a sair do nível empírico e apresentam-se indícios de formação do pensamento teórico.

Seguindo o experimento didático-formativo, no 4º Momento buscava-se a abstração na formação do conceito de fração e a construção do sistema de tarefas particulares. Nessa etapa do experimento, os estudantes começaram a diferenciar o conhecimento empírico do científico, em uma roda de conversa, onde relacionam as frações a questões ligadas a situações práticas do dia a dia. O professor retomou as ações mentais dos estudantes, dos momentos/aulas anteriores, relacionados ao processo lógico-histórico e às propriedades gerais da fração, como classificação, operações e comparação de grandezas, estimulando-os a utilizar esses procedimentos na solução de problemas do cotidiano. Os estudantes procuraram compreender o movimento conceitual, desde a primeira ação de estudo, ao revelar corretamente os dados que compõem a relação universal, após representar o modelo gráfico da fração e, em seguida, melhorar qualitativamente no entendimento do modelo literal que expressa a relação universal, necessária para aplicação nas múltiplas tarefas singulares. Isso, tal como ocorre na quarta ação de estudo, em que se transforma a relação universal em suas particularidades, diante da terceira ação.

Já no 5º Momento, que buscou o controle da realização das ações mentais na formação do conceito de fração, os estudantes foram estimulados pelo professor a encontrar meios para solucionar o problema apresentado pela animação gráfica "o homem que calculava – o problema dos camelos", efetuando diversas operações com frações. O professor observou, por meio dos relatos e atividades realizadas pelos estudantes, que grande parcela deles já conseguia fazer cálculos e utilizar as frações sem depender de desenhos, para representá-las, saindo do visual empírico e se aproximando, ainda mais, do pensamento teórico, evidenciando indícios de avanços na formação do conceito de fração.

Por fim, no 6º Momento, com vistas a promover a avaliação da assimilação na formação do conceito de fração, por meio da resolução de problemas, o professor distribuiu os estudantes em grupos, para resolverem 6 (seis) problemas práticos, utilizando o procedimento geral da fração, na resolução de tarefas particulares. As novas tarefas não são completamente novas, a não ser em uma parte de seus dados ou condições, e os estudantes foram capazes de identificá-las e, às vezes, reconhecer a insuficiência do procedimento geral de ação de que dispuseram para resolvê-los, buscando assim um novo procedimento geral na solução da tarefa sugerida (DAVYDOV, 1988). Durante a resolução da tarefa proposta, ocorreram inúmeras discussões entre os estudantes. Momento que possibilitou a percepção, por meio de seus relatos, de indícios na mudança de nível, no que diz respeito ao desenvolvimento de capacidades de abstração e soluções de problemas considerados, por eles, como muito difíceis. O indicador de acerto dessa atividade mostrou que a maioria do grupo conseguiu resolver de forma adequada as questões.

A evolução da qualidade da aprendizagem do conceito de fração foi evidenciada por meio de várias atividades, realizadas ao longo dos seis momentos de aula. Na avaliação diagnóstica I (Apêndice 3), que foi aplicada antes do experimento didático-formativo, realizada de forma individual, o percentual de acerto foi 24,86% (vinte e quatro vírgula oitenta e seis por cento) (tabela 9, p. 88). Ao final do 6º momento de aula, os estudantes realizaram atividades, em grupos, de 3 ou 4 componentes, em que 91,1% (noventa e um vírgula um por cento) dos estudantes (tabela 10, p. 140) acertaram as questões, relacionadas à formação do conceito de fração. Na avaliação, após o experimento didático-formativo (Apêndice 10), realizada de forma individual, 70,53% (setenta vírgula cinquenta e três por cento) dos estudantes (tabela 11, p. 145) acertaram as questões, ou seja, os dados estatísticos comprovam aumento nos escores da aprendizagem do conceito de fração.

Comprovadamente, observaram-se avanços na teoria do ensino desenvolvimental de Davydov, sobretudo, na formação de conceitos, por estudantes do curso de Pedagogia, que irão ensinar as crianças nos anos iniciais do Ensino Fundamental, apontando, principalmente, como elas devem ser ensinadas, a fim de formarem o pensamento teórico.

Sugerem-se novas pesquisas, confirmando os avanços apontados nessa teoria e relatados nessa dissertação, ou até mesmo a constatação de suas fragilidades, sobretudo, na qualidade da aprendizagem, oferecida aos milhares de estudantes brasileiros, das licenciaturas em Pedagogia.

REFERÊNCIAS

APARECIDO DOS SANTOS. **O conceito de fração em seus diferentes significados: um estudo diagnóstico junto a professores que atuam no Ensino Fundamental**. Dissertação de Mestrado. São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2005.

AQUINO, Orlando Fernández; CUNHA, Neire Márcia da. Concepção Didática da Tarefa de Estudo: dois modelos de aplicação. In: BARVOSA, V. M, MILLER, S., MELLO, S. A. (Org.). ***Teoria histórico-cultural*****: questões fundamentais para a educação escolar.** Marília: Oficina Universitária; São Paulo: Cultura Acadêmica, 2016, p. 175-200.

ARAUJO, Marlova Neumann. **Organização do ensino da matemática na educação infantil : análise com fundamentos histórico-cultural da proposta de uma rede municipal de ensino**. 195 f. Dissertação de Mestrado. (Programa de Pós-Graduação em Educação) - Universidade do Extremo Sul Catarinense: Criciúma, 2016.

ASBAHR, Flávia da Silva Ferreira. **Por que aprender isso, professora? Sentindo pessoal e atividade de estudo na Psicologia Histórico-Cultural.** 219 f. Tese de Doutorado (Programa de Pós-Graduação em Educação) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2011.

BACCARIN, Sandra Aparecida de Oliveira. **Investigação Matemática: Uma análise da contribuição na construção de conceitos algébricos.** 147 f. Dissertação de Mestrado (Programa de Pós-graduação em Educação). Faculdade de Educação, Universidade de Brasília, Brasília, 2009.

BARROS, Kliver Moreira. **Formação De Conceitos Matemáticos: Um Estudo Baseado Na Teoria Do Ensino Desenvolvimental.** 188 f. Dissertação de Mestrado(Programa de Pós-Graduação em Educação para Ciências e Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás: Jataí, 2015.

BESSA, Marcio Leite de. **Aprendizagem de geometria no curso de pedagogia: um experimento de ensino sobre a formação dos conceitos de perímetro e área baseado na teoria de V. V. Davydov.** 261 f. Tese (Doutorado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de Goiás: Goiânia, 2015.

BRASIL. **Diretrizes Curriculares Nacionais para o Curso de Pedagogia** Secretaria de Educação Superior. Brasília: CNE/CP, 2006.

_________. **Base Nacional Comum Curricular.** Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. Brasília, DF, 2017.

CAMPOS, Tânia Maria Mendonça; RODRIGUES, Wilson Roberto**. A idéia de unidade na construção do conceito do número racional.** *REVEMAT: Revista Eletrônica de Educação Matemática*. Universidade Federal de Santa Catarina, UFSC/MTM/PPGECT, Florianópolis, SC, v. 2. 4, p. 68-93, 2007. Disponível em: <http://www.periodicos.ufsc.br>. Acesso em: 31 de agosto de 2017.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa: Topografia Matemática, 1989.

_________. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. 2ª Ed. Lisboa: Gradiva, 2002.

CARRAHER, Terezinha et al. **Na Vida Dez, na Escola Zero.** São Paulo: Cortez, 2001.

CATANANTE, Ingrid Thais; ARAUJO, Elaine Sampaio. **Os limites do cotidiano no ensino da matemática para a formação de conceitos científicos. Poiésis**, Tubarão. Volume Especial, p. 45-63, jan./jun. 2014.

CAVALCANTE, José Luíz. **Resolução de Problemas e formação docente: saberes e vivências no Curso de Pedagogia.** Paco Editorial. Jundiaí, 2013.

CEDRO, Wellington Lima. **O motivo e a atividade de aprendizagem do professor de Matemática**: **uma perspectiva histórico-cultural.** 2008. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.

CEDRO, Wellington Lima; MORAES, Silva Pereira Gonzaga; ROSA, Josélia Euzébio. **A atividade de ensino e o desenvolvimento do pensamento teórico em Matemática.** Ciência & Educação,v. 16, n. 2, p. 427-445, 2010.

CHILDE, Vere Gordon. **A evolução cultural do homem**. 3ª ed. Rio de Janeiro: Zahar, 1975.

CRESTANI, Sandra. **Análise conceitual das proposições de Davydov e seus colaboradores para o ensino do conceito de divisão.** Monografia (Especialização em Educação Matemática). Universidade do Extremo Sul Catarinense: Criciúma, 2013.

CUNHA, André Luiz Araújo. **Ensino de estatística: uma proposta fundamentada na teoria do ensino desenvolvimental.** 128 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de Goiás: Goiânia, 2014.

DANTE, Luiz Roberto. **Didática da resolução de problemas de matemática**. Ática: São Paulo, 2000**.**

D‘ AMBROSIO, Ubiratan. ***Da realidade à ação:* reflexões sobre educação e matemática.** São Paulo: Summus, 1986.

______. ***Etnomatemática:* arte ou técnica de explicar ou conhecer.** 5. ed. São Paulo: Ática, 1998.

______. A História da Matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na Educação Matemática. In: BICUDO, M. A. (Org.) ***Pesquisa em Educação Matemática*: concepções & perspectivas.** São Paulo: Editora UNESP, 1999. pp. 97-116.

DAVYDOV, Vasili Innokentyevich. **Tipos de generalización em la enseñanza**. Habana: Editorial Pueblo y Educación, 1982.

________. Análisis de los principios didácticos de la escuela tradicional y posibles principios de enseñanza en el futuro próximo. In: SHUARE, M. **La psicología Evolutiva y pedagógica en la URSS.** Moscú: Progreso, 1987. p. 143-155.

________. **Problemas do ensino desenvolvimental: A experiência da pesquisa teórica e experimental na psicologia**. Trad. José Carlos Libâneo e Raquel Aparecida Marra da Madeira Freitas. Moscú: Editorial Progresso, 1988.

________; MÁRKOVA, A. El desarrollo del pensamiento en la edad escolar. In: SHUARE, M. **La psicología Evolutiva y pedagógica en la URSS**. Moscú: Progreso, 1987.

DEMARTINI, Idite Terezinha. **Refletindo sobre a Formação do Conceito de Número Racional na Forma Fracionário**. Dissertação de Mestrado. Universidade de Passo fundo, Passo Fundo, 2009.

DIAS, Marisa da Silva. **Formação da imagem conceitual da reta real: um estudo do desenvolvimento do conceito na perspectiva lógico-histórica.** Tese de Doutorado, Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010..

________. **A fração na dialética entre medida e número racional: a atividade na formação conceitual.** Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil, 2011.

EVES, Howard Whitley. **Introdução à história da Matemática**. Tradução: DOMINGUES, H.H. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

FERREIRA, Valdivina Alves. **A formação de conceitos matemáticos nos anos iniciais: como professores pensam e atuam com conceitos.** 154 f. Tese de Doutorado (Programa de Pós-Graduação em Educação). Pontifícia Universidade Católica de Goiás, Goiânia, 2013.

FREITAS, Raquel Aparecida Marra da Madeira. **Organização do ensino na escola contemporânea - contribuições da teoria histórico-cultural**. In: Colóquio Internacional Educação e Contemporaneidade, 2009, UFS Campus Itabaiana-Se. III Colóquio Internacional Educação e Contemporaneidade, 2009.

________. Aprendizagem e formação de conceitos na Teoria de Vasili Davydov. **Concepções e Práticas de Ensino num mundo em mudança.** LIBÂNEO, José Carlos (org). Goiânia: CEPED/Editora PUC Goiás, 2011, p. 71 – 84.

________. **Ensino por problemas: uma abordagem para o desenvolvimento do aluno.** Educação e Pesquisa (USP. Impresso), v. 38, p. 403-418, 2012.

GALDINO, Ana Paula da Silva. **O conhecimento matemático de estudantes do 3º ano do ensino fundamental sobre o conceito de multiplicação.** 110 f.

Dissertação de Mestrado. (Mestrado em Educação) - Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão, 2016.

GARBI, Gilberto Gerardo. **A rainha das ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática**. 2ª ed. Campinas, SP: Editora Livraria da Física, 2007.

GATTI, Bernardete Angelina; NUNES, Marina M. R. (orgs). **Formação de professores para o ensino fundamental: estudo de currículos das licenciaturas em pedagogia, língua portuguesa, matemática e ciências biológicas.** São Paulo: Fundação Carlos Chagas/DPE, 2009.

GONÇALVES SILVA, Iraci Balbina. **Formação de conceitos matemáticos na educação infantil na perspectiva histórico-cultural**. 179 f. Dissertação de Mestrado (Programa de Pós-graduação em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de Goiás, Goiânia, 2010.

GATTI, Bernardete Angelina et al. **Por uma política nacional de formação de professores**. São Paulo: Editora Unesp, 2013.

HEDEGAARD, Mariane. A zona de desenvolvimento proximal como base para o ensino. In: DANIELS, H.(org). **Uma introdução a Vygotsky**. Trad. Marcos Bagno. São Paulo: Edições Loyola. 2002.

IFRAH, Georges**. Os números: história de uma grande invenção**. Tradução Stella Maria de Freitas Senra; revista técnica Antônio José Lopes, Jorge José de Oliveira. – 11 ed. – São Paulo: Globo, 2010.

ITELSON, Lev B. Caracterização geral da atividade da pessoa. **In: Fundamentos Psicológicos e Didáticos do Ensino Desenvolvimental.** Andréa MaturanoLongarezi; Valdés Roberto (orgs.). Uberlândia: EDUFU, 2017. p. 89 – 124.

KHIDIR, Kaled Sulaiman. **Aprendizagem da álgebra. Uma análise baseada na teoria do ensino desenvolvimental de Davydov.** 103 f. Dissertação de Mestrado (Programa de Pós-graduação em Educação) Pontifícia Universidade Católica de Goiás, Goiânia, 2006.

KOPNIN, P. V. **A dialética como lógica e teoria do conhecimento**. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1978.

LANNER DE MOURA, Anna Regina. **Educar com a Matemática – Fundamentos.** São Paulo: Cortez, 2016.

LEMOS, L. V. **A atividade do professor e a matemática no ensino fundamental:** uma análise sócio histórica de sua estrutura e conteúdo. 2014. 154 f. Dissertação (Mestrado)-Universidade do Extremo Sul Catarinense, Programa de Pós-Graduação em Educação, Criciúma, 2014.

LEONTIEV, Alexei Nikolaevich. Uma contribuição a teoria do desenvolvimento da psique infantil. In: VYGOTSKY, Lev Semenovitch; LURIA, A. R.; LEONTIEV, A. N.

Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem. São Paulo: Ícone Editora, 1988.

________. **O desenvolvimento do Psiquismo.** Trad. Manuel Dias Duarte. 3 ed. Lisboa: Horizonte Universitário, 1978.

LIBÂNEO, José Carlos. **A didática e a aprendizagem do pensar e do aprender: a Teoria Histórico-cultural da Atividade e a contribuição de Vasili Davydov**. In: Revista Brasileira de Educação. Set /Out /Nov /Dez 2004, N. 27.

________. **A didática e a aprendizagem do pensar e do aprender: a Teoria Histórico-Cultural da Atividade e a contribuição de Vasili Davydov.** Revista Brasileira de Educação, n. 27, 2007. pp. 5-24.

________. **Pedagogia e Pedagogos, para quê?** 12 ed. São Paulo: Cortez, 2010.

________ . **O ensino da Didática, das metodologias específicas e dos conteúdos específicos do ensino fundamental nos currículos dos cursos de Pedagogia**. In: Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos, Brasília, v. 91, n. 229, set/dez, 2010.

________; FREITAS, Raquel A. Marra da Madeira. VasilyVasilyevich Davydov: A escola e a formação do pensamento teórico-científico. **In: Ensino Desenvolvimental: Vida, pensamento e obra dos principais representantes russos.** Andréa Maturano Longarezi; Valdés Roberto (orgs.). Uberlândia: EDUFU, 2013. pp. 331 – 366.

________. Vygotsky, Leontiev, Davydov – Contribuições da teoria histórico-cultural para a didática. In: **Didática e interfaces.** SILVA, C. C.; SUANNO, M. V. R. (Org.). Rio de Janeiro-Goiânia: Descubra, 2007.

LIMA, L.; MOISÉS, R. P. – **Apostila básica de Matemática**. Secretaria de Estado da Educação – Projetos de Educação Continuada – Pólo 3 – Universidade de Mogi das Cruzes. São Paulo/SP, CTEAC, 1998.

LIMONTA, Sandra Valéria. **Currículo e Formação de Professores: Um estudo da proposta curricular do curso de Pedagogia da Universidade Estadual de Goiás.** Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Educação, Faculdade de Educação, Universidade Federal de Goiás, 2009, 331 f.

LONGAREZI, Andréa Maturano; FRANCO, Patrícia Lopes Jorge. **Educação escolar enquanto unidade significado social/sentido pessoal**. Revista Nuances, n.1, v. 24, p. 92-109, jan./abr. 2013.

MAINARDES, Jefferson; PINO Angel . **Publicações brasileiras na perspectiva vygotskiana**. Educação e Sociedade , Campinas - SP, v. 21, n.71, p. 255-269, 2000.

MAJMUTOV, Mirza I. **La Enseñanza Problémica**. Habana: Pueblo y Revolución, 1983.

MAME, Osvaldo Augusto Chissonde. **Os Conceitos Geométricos nos Dois Anos Iniciais do Ensino Fundamental na Proposição de Davýdov.** Dissertação de Mestrado (Programa de Pos-Graduação em Educação Mestrado Em Educação) - Universidade do Extremo Sul Catarinense. Criciúma, 2014.

MARTINS, Fernanda Medeiros Alves Besouchet .**O número como signo: relatos de uma experiência de ensino de frações a partir das teorias sócio-interacionista e dos registros de representações semióticas.** Dissertação de Mestrado. UNISUL,Grande Florianópolis, 2012.

MELO, Tattiana Fernandes De Oliveira. **O software geogebra como elemento mediador na formação do conceito de polígonos semelhantes: um estudo na perspectiva do ensino desenvolvimental.** 158 f. Dissertação de Mestrado (Programa de Pós-Graduação em Educação para Ciências e Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Jataí, 2014.

MEZZAROBA, Cristiane Dorst. **Problemas de Lógica como motivadores no fazer matemática no sexto ano.** 147 f. Dissertação de Mestrado (Programa de Pós-graduação em Educação). Faculdade de Educação, Universidade de Brasília, Brasília, 2009.

MOL, Rogério Santos**. Introdução à história da matemática**. Belo Horizonte: AED-UFMG, 2013.

MOURA, Manoel Oriosvaldo et all. **Atividade orientadora de ensino: unidade entre ensino e aprendizagem**. In: Diálogo Educ., Curitiba, v. 10, n. 29, p. 205-229, jan./abr. 2010a.

________ (org.). **A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural.** Brasília: Liber Livro, 2010b.

________. Educação matemática nos anos iniciais do ensino fundamental:princípios e práticas da organização do ensino. **In: XVI ENDIPE - Encontro Nacional de Didática e Práticas de Ensino - UNICAMP** - Campinas – 2012.

MOYSÉS, Lúcia. **Aplicações de Vygotsky à educação matemática**. 10 ed. Campinas, SP: Papirus, 2010.

MOYA, Paula Tamyris. **Princípios para a organização do ensino de matemática no primeiro ano do ensino fundamental**. 167f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Maringá. Orientadora: Profa. Dra. Silvia Pereira Gonzaga de Moraes. Maringá, 2015.

NASCIMENTO, Rubem de Oliveira. Uma introdução à Contribuição de Mirza Majmutov para a Teoria e Prática do Ensino Problematizador. In: **Ensino Desenvolvolvimental: Vida, Pensamento e obra dos Principais Representantes Russos.** Roberto Valdés Puentes & Andréa Maturano Longarezi (orgs). Livro II. Uberlândia: EDUFU, 2016.

OTAVIANO, Alessandra Barbosa Nunes. **Percepção de alunos do ensino médio quanto ao estímulo à criatividade por seus professores e motivação em matemática.** 71 f. Dissertação de Mestrado (Programa de Pós-graduação em Educação). Faculdade de Educação, Universidade de Brasília, Brasília, 2009.

PAIS, Luiz Carlos. **Ensinar e aprender matemática.** 2 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.
PATRONO, Rosângela Milagres. **Aprendizagem de números racionais na forma fracionária no 6º ano do ensino fundamental [manuscrito]: análise de uma proposta de ensino**. 184f. Dissertação de Mestrado. (Departamento de Matemática) - Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2011.

PERES, Thalitta Fernandes De Carvalho. **Volume De Sólidos Geométricos – Um Experimento De Ensino Baseado Na Teoria De V. V. Davydov**. 148f. Dissertação de Mestrado (Programa de Pós-graduação em Educação) Pontifícia Universidade Católicade Goiás, Goiânia, 2010.

PERES, Thalitta Fernandes De Carvalho; FREITAS, Raquel Aparecida Marra da Madeira. **Ensino Desenvolvimental: uma alternativa para a educação matemática** – Unisul, Volume Especial, p. 10 - 28, Jan/Jun, Tubarão, 2014.

PERLIN, Patrícia. **A formação do professor dos anos iniciais do Ensino Fundamental no movimento de organização do ensino de frações: Uma contribuição da Atividade Orientadora de Ensino.** 196 f. Dissertação de Mestrado (Programa de Pós-Graduação em Educação) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2014.

PINO, Angel. **As marcas do humano: as origens da constituição cultural da criança na perspectiva de Lev S. Vigotski**. São Paulo: Cortez, 2005.

PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações matemáticas na sala de aula.** 3 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

PONTE, João Pedro et al. Investigações geométricas. In: _____. **Investigações matemáticas na sala de aula.** Belo Horizonte: Autêntica, 2003. p. 71-89. (Tendências em Educação Matemática).

PRESTES, Zoia; TUNES, Elizabeth; NASCIMENTO, Ruben. Lev Semionovitch Vigotski: Um estudo da vida e da obra do criador da Psicologia Histórico-Cultural**.** In: **Ensino Desenvolvimental: Vida, Pensamento e Obras dos Principais Representantes Russos.** Roberto Valdés Puentes & Andréa Maturano Longarezi (horas.). Livro I. Uberlândia: EDUFU, 2017.

PRESTES, Zoia. **Quando não é quase a mesma coisa: Traduções de Lev Semionovitch Vygotsky no Brasil.** Campinas – SP: Autores Associados, 2012.

RODRIGUES, Carolina Innocente. **Uma proposta de ensino de frações no 6º ano do ensino fundamental a partir da teoria histórico-cultural.** 132 f. Dissertação de Mestrado (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática) Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia 2015.

ROSA, Viviane Mendonça Gomides. **Aprendizagem da equação do 2º grau – uma análise da utilização da teoria do ensino desenvolvimental.** 124 f.Dissertação de Mestrado (Programa de Pós-graduação em Educação) Pontifícia Universidade Católica de Goiás, Goiânia, 2009.

ROSA, Josélia Euzébio da; MORAES, Silvia Pereira Gonzaga de; CEDRO, Wellington Lima. As particularidades do pensamento empírico e do pensamento teórico. In: MOURA, M. O (org.) **A Atividade pedagógica na teoria histórico-cultural**. Brasília: Liber Livro, 2

ROSA, Josélia Euzébio da et al. **Relações entre as proposições para o ensino do conceito de fração com base no ensino tradicional e na Teoria Histórico-Cultural.** *REVEMAT*. eISSN 1981-1322. Florianópolis (SC), v. 08, *Ed. Especial* (dez.), p. 227-245, 2013.

SANTOS, Jussara Resende Costa. **Formação de conceitos: promovendo mudanças qualitativas no processo ensino e aprendizagem**. 237 f. Tese de Doutorado. (Programa de Pós-graduação em Educação) Pontifícia Universidade Católica de Goiás, Goiânia, 2014.

SAVIANI, Dermeval. **Formação de professores no Brasil: dilemas e perspectivas.** *Poiésis Pedagógica*, v.9, n. 1, p. 07-19, jan./jun. 2011.

SERRÃO, Maria Isabel Batista. ***Estudantes de pedagogia e a "atividade de aprendizagem"do ensino em formação.*** Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2004.

SFORNI, Marta Sueli de Faria. **Aprendizagem Conceitual e Organização do Ensino: contribuições da teoria da atividade.** Araraquara-SP: JM Editora, 2004.

SILVA, Fernanda Laureano da. **Laboratório Virtual de Matemática: Uma abordagem complementar no ambiente Moodle para o aprendizado de Funções baseado em Objetos Digitais de Aprendizagem**. 232 f. Dissertação de Mestrado (Curso de Mestrado Profissional em Gestão e Tecnologias Aplicadas à Educação) - Universidade do Estado da Bahia, Salvador, 2015.

SOARES, Fernanda Chaves Cavalcante. **O ensino desenvolvimental e a aprendizagem de matemática na primeira fase do ensino fundamental.** 118 f. Dissertação de Mestrado. (Programa de Pós-graduação em Educação) Pontifícia Universidade Católica de Goiás, Goiânia, 2007.

SOUSA, Valdirene Gomes de. **Realidade e possibilidades da prática docente em Matemática nos anos iniciais: um estudo mediado pelas proposições davydovianas**. 221 f. (Programa de Pós-Graduação – Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Piauí: Teresina, 2014.

SOUZA, Simone Ariomar de. **Ensino do conceito de função por meio de problemas: contribuições de Davydov e de Majmutov.**171 f. Tese (Doutorado em Educação) Pontifícia Universidade Católica de Goiás: Goiânia, 2015.

SYLVIO, Mara Cristina de. **Ensinar e aprender nos anos iniciais do ensino fundamental: contribuições da teoria histórico-cultural e da teoria do ensino desenvolvimental.**163 f.(Dissertação de Mestrado) Programa de PósGraduação em Educação. - Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2015.

TAHAN, Malba. ***O Homem que Calculava.*** 58 ed. Rio de Janeiro: Record, 2002.

VYGOTSKY, Lev Semenovitch. **Obras escogidas: problemas de psicologia geral.** Fuenlabrada. Madrid, 1982.

________. **O desenvolvimento psicológico na infância**. São Paulo: Martins Fontes, 1998.

________. **A formação social da mente. O desenvolvimento dos processos psicológicos superiores.** Trad. José Cipolla Neto, Luiz Silveira Menna Barreto e Solange Castro Afeche. 7 ed. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

________. **Pensamento e linguagem**. Trad. Jefferson Luiz Camargo. 4 ed. São Paulo: Martins Fontes, 2008.

_______. **A construção do pensamento e da linguagem.** Trad. Paulo Bezerra. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2009.

_______. **Psicologia Pedagógica.** Trad. Paulo Bezerra. 3 ed. São Paulo: Martins Fontes, 2010.

ZEFERINO, Lidiane Chaves. **Aprender a ensinar frações a partir do conceito de Atividade Orientadora de Ensino: um estudo com professores de quartos e quintos anos do ensino fundamental**. Dissertação de Mestrado (Programa de Pós-Graduação em Educação) - Universidade Federal de São Paulo, Guarulhos, 2016.

ANEXOS

Anexo 1: Declaração de Aceite da Instituição de Ensino Superior

DECLARAÇÃO

Declaramos para os devidos fins que o pesquisador Artur José de Oliveira e Silva, portador da C.I. 3626548 SPTC-GO e CPF 800.091.071-34 e o Professor Colaborador Wilker Rodrigues de Oliveira, portador da C.I. 6820894 PC-GO e CPF 787.873.352-04, foram aceitos nesta Instituição de Ensino Superior para desenvolver a pesquisa intitulada: "**APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE FRAÇÃO: UM EXPERIMENTO DE ENSINO BASEADO NA TEORIA DE VASILY V. DAVYDOV**", no segundo semestre do ano de 2017.

Declaramos, também, que o Componente Curricular onde será desenvolvido a pesquisa "Educação Matemática", faz parte das disciplinas do Núcleo Livre Opcional e será ministrada no 4º (quarto) período do curso de Pedagogia, aos sábados, no período de 7h30min às 11h30min. A disciplina está de acordo com o projeto de pesquisa do Mestrando Artur José de Oliveira e Silva, de onde poderão ser coletados os dados para a pesquisa e realização do Experimento Didático Formativo. A disciplina está com 36 (trinta e seis) acadêmicos matriculados.

Secretaria da Instituição, aos 14 dias do mês de Agosto de 2017.

Adevane da Silva Pinto
Coordenador do Curso de Pedagogia

Anexo 2: Termo de Consentimento como Sujeito da Pesquisa

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA

MESTRADO EM EDUCAÇÃO

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE GOIÁS

CONSENTIMENTO DA PARTICIPAÇÃO DA PESSOA COMO SUJEITO DA PESQUISA

Eu, ____, RG nº ______________

CPF nº ________________ abaixo assinado, concordo em participar da Pesquisa **"Aprendizagem Do Conceito De Fração: Um Experimento De Ensino Baseado Na Teoria De Vasily V. Davydov"**. Fui devidamente informado e esclarecido pelo pesquisador, Prof. Esp. Artur José de Oliveira e Silva, e pelo Professor Colaborador, Wilker Rodrigues de Oliveira, sobre a pesquisa, os procedimentos nela envolvidos, assim como os possíveis riscos e benefícios decorrentes de minha participação. Foi-me garantido o sigilo das informações e que posso retirar meu consentimento a qualquer momento, sem que isso leve a qualquer penalidade ou interrupção de meu acompanhamento/ assistência/tratamento.

Nome: ____

Assinatura do sujeito ou responsável: ________________________________

Presenciamos a solicitação de consentimento, esclarecimentos sobre a pesquisa e aceite do sujeito em particular.

Testemunhas (não ligadas à equipe de pesquisadores):

Nome: ________________________________ Assinatura ____________________

Nome: ________________________________ Assinatura ____________________

Secretaria da Instituição, __________ de ___________ de 2017.

Anexo 3: Declaração de Autorização para Gravação em Áudio e Vídeo

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA

MESTRADO EM EDUCAÇÃO

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE GOIÁS

DECLARAÇÃO DE AUTORIZAÇÃO PARA GRAVAÇÃO EM ÁUDIO E VÍDEO

Eu, ____________________________________, C.I. nº ____________________, autorizo a gravação em áudio e vídeo, durante a coleta de dados da pesquisa intitulada **“Aprendizagem Do Conceito De Fração: Um Experimento De Ensino Baseado Na Teoria De Vasily V. Davydov”**, realizada pelo pesquisador Artur José de Oliveira e Silva, portador da C.I. 3626548 SPTC-GO e CPF 800.091.071-34, sob orientação da Profª. Drª. Beatriz Aparecida Zanatta.

____

Assinatura

Secretaria da Instituição, aos 16 dias do mês de setembro de 2017.

Anexo 4: Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA

MESTRADO EM EDUCAÇÃO

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE GOIÁS

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

INFORMAÇÕES SOBRE A PESQUISA:

Pesquisa: **"Aprendizagem do Conceito de Fração: um Experimento de Ensino baseado na Teoria de Vasily V. Davydov"**

Pesquisador Responsável: os responsáveis pela pesquisa são o Mestrando Artur José de Oliveira e Silva e sua orientadora, Prof.ª Drª. Beatriz Aparecida Zanatta. A pesquisa é para dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação (mestrado e doutorado) da Pontifícia Universidade Católica de Goiás (PUC Goiás). Os telefones para contato são: 62 39461274 (PUC/GO) e 62 991789049 (Artur - Mestrando) – E-mail: tucobio@hotmail.com. Os pesquisadores poderão ser contatados a qualquer momento, antes, durante e após a realização da pesquisa, para tirar dúvidas e prestar esclarecimentos, mesmo em ligações a cobrar. Poderá ser contatado o Comitê de Ética em Pesquisa da PUC - Goiás, pelo telefone (62) 3946-1512, caso o sujeito envolvido na pesquisa sinta-se prejudicado ou lesado.

Objetivo da pesquisa:

Aplicar, analisar e avaliar os pressupostos da Teoria do Ensino Desenvolvimental proposta por Vasily V. Davydov no processo ensino-aprendizagem na formação do conceito de Fração por estudantes da Disciplina de Educação Matemática, do Curso de Licenciatura em Pedagogia, de uma instituição pública de ensino superior do Estado de Goiás

Descrição da participação dos sujeitos na pesquisa:

Estudantes do 4º Período, de um Curso de Licenciatura em Pedagogia, de uma Instituição Pública do Estado de Goiás, serão convidados a participar da investigação empírica durante a observação e participando da realização do Experimento Didático Formativo.

Esclarecimentos dos riscos e benefícios: Estudantes

- ✓ Durante a realização da pesquisa empírica, o professor/colaborador será acompanhado pelo pesquisador.
- ✓ Os riscos relacionados à participação dos estudantes são mínimos, podendo apenas provocar um incômodo comum ao se dedicar ao conteúdo da aprendizagem requerida, durante a realização das aulas do Experimento Didático Formativo.
- ✓ Quanto aos benefícios, espera-se que os dados obtidos com a participação dos estudantes proporcionem melhor compreensão dos mesmos sobre a organização do ensino, firmada na Teoria do Ensino Desenvolvimental e o aumento do conhecimento científico para a área da educação, principalmente aos estudantes envolvidos na pesquisa. Outro beneficio decorrente de sua participação e de sua colaboração, é a possibilidade de também se apropriar e aprofundar nas contribuições de Davydov sobre a organização do ensino do conceito de Fração, pondo em prática os princípios da Teoria do Ensino Desenvolvimental.
- ✓ Espera-se, também, que os estudantes tenham a oportunidade de compreender o processo de formação de conceitos e em particular o conceito de Fração.

Outros esclarecimentos:

- ✓ Os materiais e dados obtidos na coleta de dados não serão utilizados para fins alheios a essa pesquisa e os resultados poderão ser divulgados em eventos e/ou revistas científicas.
- ✓ Somente o pesquisador e a orientadora terão acesso ao material, resguardando-se totalmente a confidencialidade da identidade dos sujeitos e sua privacidade;
- ✓ Os conteúdos serão gravados em áudio e vídeo e serão realizados com autorização expressa do participante e servirão para análise posterior;
- ✓ Quanto à destinação do material coletado para a realização da pesquisa, este será destruído e descartado após 12 (doze) meses da defesa da dissertação, que está prevista para agosto de 2018;
- ✓ Não haverá nenhuma Indenização ou Ressarcimento, decorrentes da participação do sujeito na pesquisa.

Pesquisador: Artur José de Oliveira e Silva - C.I. 3626548 SPTC-GO e CPF 800.091.071-34

Assinatura do pesquisador: ____

Secretaria da Instituição, ____de _______________de 2017.

APÊNDICES

Apêndice 1: Resultado da busca e refinamento de pesquisas no banco de teses da Capes no período de 2007 – 2016.

MESTRADOS				
Nº	**Titulo**	**Autor**	**Ano**	**Instituição**
1	O ensino desenvolvimental e a aprendizagem de matemática na primeira fase do ensino fundamental	Fernanda Chaves Cavalcante Soares	2007	PUC/Goiás[16]
2	Manifestações do pensamento e da linguagem algébrica de estudantes: indicadores para a organização do ensino	Maria Lucia Panossian	2008	USP[17]
3	Aprendizagem da equação do 2º grau –uma análise da utilização da teoria do ensino desenvolvimental	Viviane Mendonça Gomides Rosa	2009	PUC/Goiás
4	Formação de conceitos matemáticos na educação infantil na perspectiva histórico-cultural	Iraci Balbina Gonçalves	2010	PUC/Goiás
5	Volume de sólidos geométricos: um experimento de ensino baseado na teoria de V. V. Davydov	Thalitta Fernandes de Carvalho Peres	2010	PUC/Goiás
6	Modelagem inicial para o ensino de geometria euclidiana plana segundo a teoria da atividade de estudo	Simone Scarpim	2010	Unesp[18]/Bauru
7	Evidências da produção de sentidos dos princípios da proposta didática lógico-histórica da álgebra por professores de matemática em atividade de ensino	Núbia Cristina dos Santos Lemes	2012	UFG[19]
8	O uso de material didático de manipulação no cotidiano da sala de aula de matemática	Rômulo Alexandre Silva	2012	UEPB[20]
9	Sentido do tema de casa no processo de aprendizagem de matemática	Jussara Vanz	2013	UPF[21]
10	As Inter-Relações do uso das Tecnologias de Informação e de Comunicação com alguns conceitos da Teoria de Davydov para o Ensino de Matemática	Silvia Aimi	2014	Unesp/Rio Claro
11	Ensino de estatística: uma proposta fundamentada na teoria do ensino desenvolvimental	André Luiz Araujo Cunha	2014	PUC/Goiás
12	O software GeoGebra como elemento mediador na formação do conceito de polígonos semelhantes: um estudo na perspectiva do ensino	Tattiana Fernandes de Oliveira Melo	2014	IFG[22]

[16] Pontifícia Universidade Católica de Goiás.
[17] Universidade de São Paulo.
[18] Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho.
[19] Universidade Federal de Goiás.
[20] Universidade Estadual da Paraíba.
[21] Universidade de Passo Fundo.
[22] Instituto Federal de Goiás.

	desenvolvimental			
13	Os conceitos geométricos nos dois anos iniciais do ensino fundamental na proposição de Davydov	Osvaldo Augusto Chissonde Mame	2014	Unesc[23]
14	Estágio supervisionado: o planejamento compartilhado como organizador da atividade pedagógica	Maria Marta da Silva	2014	UFG
15	A apropriação dos conceitos de função afim e quadrática por estudantes de cursos de engenharia	Ana Paula Arantes Lima Manzan	2014	Uniube[24]
16	Proposições para o ensino da tabuada com base nas lógicas formal e dialética	Ediséia Suethe Faust Hobold	2014	Unisul[25]
17	Matematização: estudo de um processo	Rodrigo Camarinho de Oliveira	2014	UEL[26]
18	Necessidades emergentes na organização do ensino davydoviano para o número negativo	Lucas Sid Moneretto Burigo	2015	Unesc
19	A tricotomização entre aritmética, álgebra e geometria nos erros apresentados por estudantes da disciplina de cálculo diferencial integral	Beatriz Alves da Silva Dalmolin	2015	Unisul
20	Unidade entre lógico e histórico no movimento conceitual do sistema de numeração proposta por Davýdov e colaboradores para o ensino das operações da adição e subtração	Gisele Mezzari Silveira	2015	Unisul
21	Concepções de didática nas pesquisas sobre formação de professores de matemática na região centro-oeste	Marcia Rodrigues Leal	2015	PUC/Goiás
22	Estudo da reta numérica na perspectiva histórico-cultural	Priscila de Mattos	2015	USP/Ribeirão Preto
23	Princípios para a organização do ensino de matemática no primeiro ano do ensino fundamental	Paula Tamyris Moya	2015	UEM[27]
24	A apropriação dos significados de polinômios: um estudo na perspectiva da teoria histórico-cultural	Soraia Abud Ibrahim	2015	Uniube
25	O ensino e a aprendizagem de álgebra nos anos finais do ensino fundamental: a formação do conceito de função Uberaba	José Divino Neves	2015	Uniube
26	A álgebra nos livros didáticos de matemática do 8º ano do ensino fundamental: um estudo na perspectiva histórico-cultural	Juciane Teixeira Silva	2015	Uniube
27	Potencialidades da atividade de estudo no desenvolvimento do pensamento e da linguagem algébrica dos alunos dos anos finais do ensino	Maisa Gonçalves da Silva	2015	Uniube

[23] Universidade do Extremo Sul Catarinense.
[24] Universidade de Uberaba.
[25] Universidade do Sul de Santa Catarina.
[26] Universidade Estadual de Londrina.
[27] Universidade Estadual de Maringá.

	fundamental			
28	Formação de conceitos matemáticos: um estudo baseado na teoria do ensino desenvolvimental	Kliver Moreira Barros	2015	IFG
29	Ensino desenvolvimental e investigação matemática com o geogebra: uma intervenção pedagógica sobre o teorema de tales	Sergio Ricardo Abreu Rezende	2016	PUC/GOIÁS
30	Organização do ensino de matemática na perspectiva do desenvolvimento do pensamento teórico: uma reflexão a partir do conceito de divisão	Sandra Crestani	2016	Unisul
31	Ensino desenvolvimental: um experimento didático formativo para o estudo dos números complexos	Douglas Pereira Azevedo	2016	IFG
32	O conhecimento matemático de estudantes do 3º ano do ensino fundamental sobre o conceito de multiplicação: um estudo com base na teoria histórico cultural	Ana Paula Da Silva Galdino	2016	Unisul
33	Análise da aprendizagem do conceito da subtração: contribuições da teoria histórico-cultural'	Nilza Marcia Mulatti Silva	2016	UNESPAR[28]
34	A formação de professor de matemática: o jogo como recurso de ensino	Bruno Silva Silvestre	2016	UFG
35	Organização do ensino da matemática na educação infantil: análise com fundamentos histórico-cultural da proposta de uma rede municipal de ensino'	Marlova Neumann Araujo	2016	Unesc
36	Contribuições da ferramenta gráfica blockly no processo ensino-aprendizagem na disciplina de algoritmos	Carmem Vera Scorsatto Brezolin	2016	UPF
37	Aprender a ensinar frações a partir do conceito de atividade orientadora de ensino: um estudo com professores de quartos e quintos anos do ensino fundamental	Lidiane Chaves Zeferino	2016	UNIFESP[29]
	DOUTORADOS			
38	Avaliação do processo de ensino e aprendizagem em matemática: contribuições da teoria histórico-cultural	Silvia Pereira Gonzaga de Moraes	2008	USP
39	Estudo das elaborações dos professores sobre o conceito de medida em atividades de ensino	Micheline Rizcallah Kanaan da Cunha	2008	Unicamp[30]
40	Proposições de Davydov para o ensino de matemática no primeiro ano escolar: inter-relações dos sistemas de significações numéricas	Josélia Euzébio da Rosa	2012	UFPR[31]

[28] Universidade Estadual do Paraná.
[29] Universidade Federal de São Paulo.
[30] Universidade Estadual de Campinas.
[31] Universidade Federal do Paraná

41	A formação de conceitos matemáticos nos anos iniciais: como professores pensam e atuam com conceitos	Valdivina Alves Ferreira	2013	PUC/Goiás
42	Realidade e possibilidades da prática docente em matemática nos anos iniciais: um estudo mediado pelas proposições davydovianas	Valdirene Gomes de Sousa	2014	UFPI[32]
43	Motivos para envolvimento em tarefas investigativas em aulas de matemática à luz da teoria da atividade: um estudo com alunos do ensino fundamental	Edmilson Minoru Torisu	2014	UFMG[33]
44	Aprendizagem de geometria no curso de pedagogia: um experimento de ensino sobre a formação dos conceitos de perímetro e área baseado na teoria de v. V. Davydov	Marcio Leite de Bessa	2015	PUC/Goiás
45	Ensino do conceito de função por meio de problemas: contribuições de Davydov e de Majmutov	Simone Ariomar de Souza	2015	PUC/Goiás
46	Materiais didáticos na atividade de ensino de matemática: significação dos artefatos mediadores por professores em formação contínua	Ronaldo Campelo da Costa	2016	USP

[32] Universidade Federal do Piauí.
[33] Universidade Federal de Minas Gerais.

Apêndice 2: Questionário aplicado aos estudantes de Pedagogia

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA

MESTRADO EM EDUCAÇÃO

PONTÍFICIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE GOIÁS

Caro (a) Acadêmico (a), eu sou Artur José de Oliveira e Silva, estudante de Mestrado em Educação da Pontifícia Universidade Católica de Goiás. Estou realizando, sob orientação da Profª Beatriz Aparecida Zanatta, uma pesquisa acerca dos processos de ensinar e aprender Matemática com o objetivo de analisar as contribuições da Teoria do Ensino Desenvolvimental para organização do conteúdo de Matemática e sua aplicação prática, tendo em vista o ensino-aprendizagem do Conceito de Fração, por estudantes do Curso de Pedagogia. Para atingir os objetivos propostos, solicitamos sua participação nessa busca. Antecipadamente agradecemos sua atenção e participação!

I Secção – Identificação

Nome (ou apelido, se preferir) : ______________________________( ) M ( ) F

(Para finalidades de relatório – o seu nome e o nome da escola serão substituídos por letras ou símbolos convencionais conforme menciona a ética na pesquisa).

01) Sua formação básica foi feita predominantemente:

a) ( ) Escola Pública b) ( ) Escola Privada c) ( ) Escola Conveniada

02) Idade

a) ( ) menos de 18 anos b) **(** **)** entre 18 e 23 anos c) **(** **)** entre 24 e 29 anos
d) **(** **)** entre 30 e 35 anos e) **(** **)** entre 36 e 41 anos f) **(** **)** 42 anos ou mais

3) Situação

a) ( ) Casado (a) b) ( ) Solteiro (a) c) ( ) Divorciado (a) d) ( ) Outro: ______

04) Tem Filhos? ( ) Sim ( ) Não   Se sim, quantos? ______________________

05) Ocupação:

a) ( ) Do lar b) ( ) Doméstica c) ( ) Atendente d) Outro: ________________

06) Renda per capita familiar (Soma de todos os salários da família principal)

a) **( )** até 3 salários mínimos   b) **( )** de 4 a 6 salários mínimos
c) **( )** de 7 a 9 salários mínimos   d) ( ) 10 ou mais salários mínimos

07) Quantas pessoas dependem dessa renda?

a) ( ) menos de 3 pessoas   b) ( ) 3 ou 4 pessoas

c) ( ) 5 ou 6 pessoas   d) ( ) 7 ou mais pessoas.

08) Exerce função docente atualmente: a) ( ) Sim b) ( ) Não

Se sim, há quanto tempo? ____

Como prepara as suas aulas de matemática? Utiliza livros? Sim ( ) não ( )

Quais?
____

II Secção – Ensino-aprendizagem de Matemática

01) De que forma os conteúdos de matemática foram ensinados a você na educação básica? (pode marcar mais de um)

a) ( ) Memorização dos conteúdos através de exercícios do livro didático

b) ( ) Resolução de problemas

c) ( ) Considerando o saber matemático que você já possuía como referência para aprendizagem do conteúdo ensinado.

02) No período em que você fez a educação básica, predominavam aulas de Matemática (pode marcar mais de um):

a) ( ) Expositiva

b) ( ) Dialogada

c) ( ) Relacionadas ao cotidiano

03) Os alunos, em sua maioria, resolviam os exercícios de Matemática (pode marcar mais de um):

a) ( ) Individualmente

b) ( ) Em dupla

c) ( ) Em pequenos grupos

d) ( ) Usando calculadora

e) ( ) outras: ____

04) As aulas de Matemática, foram realizadas utilizando: (pode marcar mais de um):

a) ( ) Exposição do professor, leitura e resolução exercícios após a explicação do professor

b) ( ) Demonstrações no quadro de giz

c) ( ) Pesquisa

d) ( ) Problematização do conteúdo

e) ( ) Tv, vídeos, internet

f) ( ) Jogos de simulação

g) (   ) Dramatização.

h) **(   )** outros: ____

05) Em relação aos conteúdos de Matemática que você aprendeu na Educação Básica:

a) **(   )** Aprendi muitos conteúdos

b) **(   )** Não aprendi quase nada

c) **(   )** Sei as operações básicas

d) **(   )** Muita abstração, pouco aprendizado

e) **(   )** outro: ____

06) Na sua visão, o curso de Pedagogia te prepara para ensinar todas as disciplinas dos anos iniciais do Ensino Fundamental? (   ) Sim   Não (   )

Justificativa:

____

____

____

07) Das disciplinas que terá que ensinar, qual é a que mais lhe dá prazer ao aprender: _________________ e a que menos lhe é agradável: ________________.

08) Qual a importância da Matemática para você?

____

____

____

09) Por que é importante estudar Matemática no Curso de Pedagogia?

a) **(   )** Como professor (a) é importante para ensinar melhor.
b) **(   )** Faz parte do currículo de Pedagogia
c) **(   )** É parte integrante da formação crítica do professor.
d) **(   )** Não vejo importância da disciplina no curso de Pedagogia
e) **(   )** Outro: ____

10) Você considera a Matemática importante para formação dos Estudantes?

____
____
____
____

III Secção – Autorização

(   ) autorizo a publicação dos relatos

(   ) não autorizo a publicação dos relatos

Obrigado por sua participação.

Artur José de Oliveira e Silva - Pesquisador

Apêndice 3: Avaliação Diagnóstica I – Aplicada no 4º Período do Curso de Pedagogia – Setembro de 2017

Disciplina:	EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - Avaliação Diagnóstica		**Data:**	
Série/Período:	4º Período		**Ano Letivo:**	2017
Professor:	**Wilker Rodrigues de Oliveira** Pesquisador: **Artur José de Oliveira e Silva**			
ACADÊMICO(A):				

Obs: Esta Avaliação é composta de 8 (oito) questões e todas devem ser resolvidas e anunciadas as respostas.

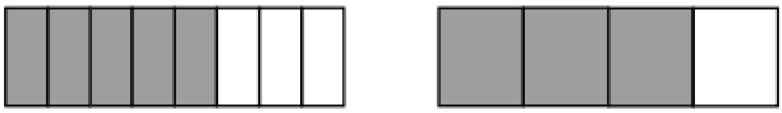
Questão 1: Antônio gastou $\frac{1}{5}$ (um quinto) do seu salário com a prestação da casa, $\frac{2}{8}$ (dois oitavos) com uma viagem, depositou $\frac{1}{4}$ (um quarto) e ainda ficou com R$ 408,00. De quanto é o salário de Antônio?
Questão 2: Dos moradores de Piraporinha, $\frac{1}{3}$ (um terço) deve votar em João Valente para prefeito e $\frac{3}{8}$ (três oitavos) devem votar em Luís Metralhadora. Os demais votarão nulo ou branco. Sabendo que a cidade tem 12.240 eleitores. Supondo que todos votem, calcule: a) Quantos votos serão nulos? b) Quantos votos terá João Valente?

c) Quantos votos terá Luís Metralhadora? d) Considerando que o mais votado será o prefeito de Piraporinha, quem será?
Questão 3: Roberto e Marina juntaram dinheiro para comprar um videogame . Roberto pagou por $\frac{5}{8}$ (cinco oitavos) do preço e Marina contribuiu com R$ 240,00. Quanto custou o videogame ? Quanto Roberto contribuiu? Quanto é $\frac{5}{8}$ de R$ 320,00?
Questão 4: Observe atentamente as frações e substitua _____ por um dos sinais >, < ou =
a) $\frac{1}{3}$ ____ $\frac{3}{9}$ **b)** $\frac{2}{5}$ ____ $\frac{3}{8}$ **c)** $\frac{3}{4}$ ____ $\frac{5}{8}$ **d)** $\frac{5}{2}$ ____ $\frac{8}{6}$ **e)** $\frac{4}{5}$ ____ $\frac{5}{9}$ **f)** $\frac{3}{2}$ ____ $\frac{8}{3}$ **g)** $\frac{2}{8}$ ____ $\frac{3}{12}$ **h)** $\frac{4}{7}$ ____ $\frac{5}{8}$
Questão 5: Gabriela fez $\frac{3}{4}$ dos exercícios de Matemática em 57 minutos. Mantendo esse ritmo, quanto tempo gastará para fazer os exercícios que faltam? Ao terminar o trabalho, quanto tempo Gabriela terá consumido para fazer toda a lista?

Questão 6: Resolva as três expressões abaixo, deixando o resultado em uma fração irredutível).

a) $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} - \frac{3}{8} =$ **b)** $\frac{3}{5} \times \frac{8}{3} - \frac{4}{5} \times \frac{5}{9}$ **c)** $\frac{2}{8} : \frac{3}{12} - \frac{4}{6} \times \frac{5}{8}$

Questão 7) A figura mostra duas barras idênticas de chocolate que foram divididas, cada uma delas em partes iguais, sendo que a área destacada representa a quantidade de chocolate consumido por uma pessoa.



Qual é a fração que podemos representar o total de chocolate consumido?

a) ( ) $\frac{11}{8}$ **b)** ( ) $\frac{5}{4}$ **c)** ( ) $\frac{8}{6}$ **d)** ( ) $\frac{3}{2}$ **e)** ( ) $\frac{8}{12}$

Questão 8) Um tratador de animais precisa preparar diariamente a ração dos animais que trata. Segundo o veterinário, na fase de engorda, a ração é composta de $\frac{1}{4}$ (um quarto) de soja, $\frac{2}{5}$ (dois quintos) de aveia, $\frac{1}{3}$ (um terço) de farelo e o restante de sal. Do total da ração que ele prepara, a quantidade de sal corresponde a:

a) ( ) $\frac{1}{60}$ **b)** ( ) $\frac{1}{50}$ **c)** ( ) $\frac{59}{60}$ **d)** ( ) $\frac{1}{40}$ **e)** ( ) $\frac{1}{30}$

O saber que não vem da experiência não é realmente saber. Lev Vygotsky
Felicidades!!

Apêndice 4: Roteiro de entrevista semiestruturada com o professor.

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA

MESTRADO EM EDUCAÇÃO

PONTÍFICIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE GOIÁS

Pesquisa: **"Aprendizagem do Conceito de Fração: Um Experimento de Ensino Baseado na Teoria de Vasily V. Davydov""**

ROTEIRO DE ENTREVISTA PARA PROFESSOR (A)

1 - Poderia informar-me qual é sua formação profissional (curso de graduação, de pós-graduação, formação continuada, etc.)?

2 - Há quanto tempo atua como docente? E especificamente no Curso Superior?

3 - Quando iniciou sua atividade nesta Instituição de Ensino?

4 – Qual sua concepção acerca do Ensino Superior? Que influências sua formação básica exerce sobre sua atuação como professor do Ensino Superior?

5 – Que relação o senhor faz da docência da Educação Básica e a Docência do Ensino Superior?

6 - Em que referências pedagógicas você busca fundamentar sua prática pedagógica aqui no Ensino Superior e na Educação Básica?

7 - Como concretiza essa referência no planejamento e organização do ensino, particularmente do ensino de matemática? Poderia exemplificar?

8 - Poderia falar sobre sua compreensão acerca do que é um "conceito"? Como chegou a essa compreensão? Formar conceitos no Ensino Superior é diferente da Educação Básica? Qual sua concepção acerca dessas questões?

9 - Poderia descrever que "caminho didático" segue para organizar o ensino de um conceito?

10 - Dentre os conceitos da Matemática está o de Fração. Poderia descrever como compreende esse conceito e a partir de que referências?

11 - Como você ensina o conceito de Fração aos acadêmicos do curso de Pedagogia e da Educação Básica?

12 – Como você percebe que o acadêmico compreendeu, ou não, determinado conceito. Que mudanças identifica no pensamento e nas práticas quando eles aprendem?

Apêndice 5: Roteiro de entrevista semiestruturada com o (a) Acadêmico (a)**.**

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA

MESTRADO EM EDUCAÇÃO

PONTÍFICIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE GOIÁS

Questão 1) Que avaliação você faz de seu processo de aprendizagem?

____
____
____
____

Questão 2) O que mudou na sua forma de pensar e no seu processo de aprendizagem após ter participado do experimento didático?

____
____
____
____

Questão 3) A forma como você pensa agora, ajuda ter uma aprendizagem mais significativa do conceito de fração?

____
____
____
____

Questão 4) O que significa ensinar e aprender para você?

____
____
____
____
____

Apêndice 6: Roteiro de Avaliação do Experimento Didático-Formativo.

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
MESTRADO EM EDUCAÇÃO
PONTÍFICIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE GOIÁS

Questão 1) Em relação ao Experimento Didático Formativo, que avaliação você faz da metodologia de ensino utilizada no ensino do conceito de Fração?

____
____
____

Questão 2) O que significou, para você, aprender por este caminho?

____
____
____

Questão 3) Fale sobre a visão que você tinha da metodologia de ensino nas aulas de Matemática e a visão que você tem, agora, sobre a metodologia de ensino utilizada durante o experimento didático para ensino do conceito de fração.

____
____
____

Questão 4) O experimento didático lhe proporcionou um modo de pensar diferente do que costumeiramente foi ensinado? Quais aspectos mais relevantes podem ser ressaltados?

____
____
____

Obrigado por sua participação!

Artur José de Oliveira e Silva - Pesquisador

Apêndice 7: Roteiro de Observação em Sala de Aula

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA

MESTRADO EM EDUCAÇÃO

PONTÍFICIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE GOIÁS

Pesquisa: **"Aprendizagem Do Conceito De Fração: Um Experimento De Ensino Baseado Na Teoria De Vasily V. Davydov"**

Roteiro para observação da condução do processo de ensino-aprendizagem da construção do Conceito de Fração.

I - **ATUAÇÃO DO PROFESSOR** de Educação Matemática – Mediação Didática

Acolhimento dos estudantes no início da aula. Relacionamento Professor x Estudantes;

Plano de aulas, informação sobre os objetivos e tarefas;

Organização, desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem (organização do tempo, dosagem de conteúdos e tarefas, uso de normas e regras, uso de material didático, etc.);

O ensino dos conteúdos como atividade mediadora do desenvolvimento mental dos estudantes;

A identificação de um princípio interno comum que está na origem da constituição de um determinado conteúdo foi dirigida pelo professor aos estudantes;

Análise do conteúdo da matéria (estrutura conceitual básica) para identificar a relação geral que se aplica a manifestações particulares desse conteúdo, ou seja, do abstrato ao particular;

Instrumentos utilizados nas aulas.

II - **MEDIAÇÃO COGNITIVA** dos Conhecimentos e habilidades em relação ao desenvolvimento do conceito (Fração) e das tarefas

Atitudes e posturas dos estudantes na sala de aula;

Desenvolvimento do Conteúdo conforme planejamento do plano de estudo;

Os objetivos do professor, registrados no plano de estudo, expressam resultados da aprendizagem dos estudantes em termos de formação de ações mentais relacionados com os conteúdos;

Conteúdos e processos de mediação cognitiva, ou seja, o movimento da aprendizagem se dá do plano coletivo para o plano individual;

Metodologia e procedimentos em relação à aprendizagem (tarefas que atuam nos motivos e necessidades dos estudantes);

Formas de avaliação e comprovação da compreensão do conteúdo por parte dos estudantes (avaliação diagnóstica, formativa, somativa).

III – **MEDIAÇÃO DIDÁTICA** dos procedimentos utilizados

Formas de propiciar o ambiente favorável de trabalho (clima de aula);

Clareza na orientação da atividade de estudo dos estudantes e na proposição das tarefas;

Aproveitamento das vivências socioculturais dos estudantes (família, trabalho, experiências sociais, etc.);

Provimento de situações de cooperação entre os estudantes.

IV – **INTERAÇÃO**: Relacionamento com/entre os estudantes

Interações com os estudantes e qualidade das interações entre si (inclusive solução de conflitos);

Atenção às diferenças individuais, sociais e culturais;

Capacidade dos estudantes para o trabalho em grupo. Discussão entre grupos e socialização do saber construído.

V - **ATIVIDADE DOS ESTUDANTES,** domínio cognitivo

Indícios nas falas e diálogos, de interiorização de conceitos pelos estudantes (qualidade das interlocuções e respostas, como os estudantes trabalham mentalmente com os conteúdos) ou seja, o ensino foi capaz de levar os estudantes à formação de ações mentais (capacidades intelectuais) por meio dos conteúdos;

Grau de envolvimento e participação dos estudantes nas tarefas (motivação, concentração, interesse, tipos de perguntas, etc.);

Capacidade para participar em grupos de discussão, respeito ao outro, argumentação sem apelar para o pessoal, etc;

Desempenho cognitivo nas atividades práticas, nos exercícios e na solução de problemas;

Capacidade de expressar conceitos e sua aplicação a situações particulares;

Nível (grau) de internalização dos conceitos, capacidade de aplicação e de operar mentalmente com os conceitos;

Manifestações de raciocínio abstrato, criatividade na argumentação e na proposição de soluções, ou seja, o conteúdo como instrumento para pensar os objetos e fenômenos.

VI – **AVALIAÇÃO** das mudanças qualitativas dos estudantes

O caminho da aprendizagem possibilita aos estudantes a interiorização de ações mentais, culminando na formação de conceitos;

Domínio do modo geral de funcionamento mental em relação ao objeto de estudo;

Construção do sistema de tarefas particulares que podem ser resolvidos por um procedimento geral.

As mudanças qualitativas no modo de ser e agir dos estudantes implica considerar os motivos da atividade principal dos estudantes e a possibilidade do professor de atuar sobre estes motivos possibilitando a ascensão do pensamento do abstrato ao concreto;

Os estudantes mostram o seu próprio desempenho no cumprimento das ações de aprendizagem e alcance dos objetivos propostos.

Apêndice 8: Plano de Ensino: Formação do Conceito de Fração.

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA

MESTRADO EM EDUCAÇÃO

PONTÍFICIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE GOIÁS

CONCEITO: FRAÇÃO

QUESTÕES BÁSICAS QUE NORTEARÃO A ELABORAÇÃO DO PLANO DE ENSINO

1. O modo de trabalhar pedagogicamente com algo depende do modo de trabalhar epistemologicamente com algo, considerando as condições físicas, cognitivas, afetivas do estudante e o contexto sociocultural e institucional em que vive;
2. Defender a exigência da formação cultural e científica (no sentido de conteúdos como base para o desenvolvimento de capacidades intelectuais);
3. Estabelecer conexões entre conceitos de: Atividades de estudo, motivos dos estudantes, tarefas de aprendizagem, operações mentais (conceitos);
4. Papel do conceito nuclear (ou modelo germinal/principio/relação geral básica) no processo de ensino-aprendizagem e na elaboração do plano de ensino (na perspectiva da teoria do ensino para o desenvolvimento humano).

CONSIDERAÇÕES

Para responder as questões anteriores tivemos como referências principais dois teóricos da Psicologia Histórico-Cultural. Um deles, Vygotsky (2008, 2009, 2010) que iniciou a Teoria Histórico-Cultural, principalmente porque a partir dela, diversos pesquisadores continuaram a investigação das relações entre a forma de organização do ensino, a aprendizagem de conceitos teóricos e o desenvolvimento do pensamento dos estudantes, priorizando o desenvolvimento qualitativo dos sujeitos no processo ensino-aprendizagem. E Davydov (1982, 1988), pertencente à escola de Vygotsky (3ª geração) que estudou um modo de organização do ensino voltado para a formação de conceitos na aprendizagem em contexto escolar. O processo ensino-aprendizagem muito tem a se beneficiar do legado da Teoria Histórico-Cultural, particularmente com as contribuições destes dois teóricos, cujos legados apontam caminhos para todo professor que busque organizar o ensino como processo, que promova o desenvolvimento integral do estudante e amplie sua aprendizagem por meio da formação de conceitos.

Ao recomendar um modo de organização do ensino, Davydov (1982, 1988) concebe os métodos de ensino como decorrentes dos conteúdos das disciplinas que formam a base do processo ensino-aprendizagem. Em sua proposta, a aprendizagem do estudante deve resultar do desenvolvimento das funções mentais por meio da formação de conceitos. Esse processo, que decorre da conexão entre a atividade de ensino do professor e a atividade de aprendizagem do estudante, deve propiciar o desenvolvimento das capacidades e habilidades cognitivas por meio da apropriação dos conceitos centrais do objeto estudado, de modo a utilizá-lo posteriormente nas atividades cotidianas. Assim, mediante o processo de aprendizagem de um novo objeto, ocorre a formação do pensamento teórico e o desenvolvimento das capacidades psíquicas a ele vinculados, tais como planejamento, análise, reflexão e avaliação.

O plano de ensino é uma ação intencional do professor que evidencia os objetivos a serem alcançados em um determinado conteúdo, tendo como imperativo assumir a educação como atividade que considera o conhecimento em suas múltiplas dimensões físicas, cognitivas e afetivas, etc. Isto é, "cabe ao professor organizar o ensino, tendo em vista que os conhecimentos elaborados historicamente pela humanidade possam ser apropriados pelos indivíduos" (MOURA, 2010, p. 25), nesse sentido, a escola é instituição privilegiada como uma possibilidade no processo de humanização do homem. Davydov (1982) afirma que o conhecimento teórico constitui o objetivo principal da atividade de ensino, pois é por meio de sua aquisição que se estrutura a formação do pensamento teórico e, por consequência, o desenvolvimento psíquico do estudante culminando na formação de conceitos. "Para elaboração autônoma do conceito é necessário, antes de todo, que os estudantes analisem e comparem entre si uma quantidade bastante grande de objetos idênticos ou parecidos, especialmente selecionadas e propostos pelo professor" (DAVYDOV, 1988, p. 60). "Entender a escola como o lugar social privilegiado para a apropriação de conhecimentos produzidos historicamente é necessariamente assumir que a ação do professor deve estar organizada intencionalmente para esse fim" (MOURA, 2010, p. 89). Diante deste contexto, tendo como referência as proposições de Vygotsky acerca da formação de conceitos, Davydov (1988) concebe o conceito como forma superior de atividade mental pela qual o ser humano reproduz, idealmente, um objeto e seu sistema de relações, sistema esse que reflete a essência do próprio objeto. O conceito é, ao mesmo tempo, uma forma de reprodução mental de um objeto material e o meio, ou método de pensamento, pelo qual é possível essa reprodução mental. Para Davydov (1988, p.126), "ter um conceito sobre um objeto significa saber reproduzir mentalmente seu conteúdo, construí-lo. A ação mental de construção e transformação do objeto constitui o ato de sua compreensão e explicação, a descoberta de sua essência". Há, portanto, uma relação de interdependência entre o conteúdo de um conceito e o procedimento mental pelo qual ele é construído. Assim, entender algo significa expressar a essência desse algo na forma de conceito, ou seja, "expressar o objeto em forma de conceito significa compreender sua essência" (DAVYDOV, 1988, p. 74). Portanto, considerar a formação de conceitos como, está na base do desenvolvimento do pensamento dos estudantes, permitindo ir além de uma aprendizagem puramente quantitativa para alcançar a dimensão qualitativa.

O plano de ensino deve vislumbrar as possíveis mudanças qualitativas no pensamento dos estudantes por meio da realização de tarefas propostas pelo professor. Para tanto, os passos do plano de ensino devem ser pensados estabelecendo a relação entre a realização de tarefas e o desenvolvimento de ações mentais necessárias à apropriação dos conceitos. Nesta perspectiva, os estudos de Davydov (1982; 1988) têm evidenciado que a organização do ensino requer uma análise lógica, psicológica e pedagógica para que a aprendizagem se efetive, o que pressupõe clareza da proposição de Vygotsky (2007; 2008, 2009, 2010) sobre a Zona de Desenvolvimento Proximal, isto é, para Vygotsky o "bom ensino" é somente aquele que se adianta ao desenvolvimento, atuando sobre a Zona de Desenvolvimento Proximal do estudante. Neste sentido, a análise qualitativa deverá enfocar o processo de formação de conceitos e os elementos intervenientes nesse processo. Essa forma de organização do ensino, recorre à articulação entre a teoria e a prática, isto é, constitui a atividade do professor, mais especificamente a atividade de ensino, como evidencia Moura (2010, p. 90) "o professor deve gerar e promover a atividade do estudante. Ela deve criar nele um motivo especial para a sua atividade: estudar e aprender teoricamente sobre a realidade" sendo o ensino uma forma necessária e relevante para o desenvolvimento quando aproxima o estudante de um determinado conhecimento.

No processo ensino-aprendizagem estão envolvidos 4 (quatro) elementos básicos e inseparáveis, o conteúdo de aprendizagem (1), o sujeito que aprende (2), o professor que ensina (3) e a constituição de um momento geral de apropriação da cultura e do desenvolvimento humano genérico (4). Tomando como referência esses 4 (quatro) elementos educar é bem mais que transmissão de conhecimento de um sujeito mais experiente para outro menos experiente, é então, propiciar ao estudante um encontro pedagógico com os conceitos, ou seja, a formação de uma visão de transformação e de movimento contínuo da realidade humana. Para Davydov (1982) no ensino é necessário, tendo como base as teses gerais da área do saber e não dos casos particulares, buscar a célula dos conceitos, isto é, a sua gênese e a sua essência. Nesse sentido, o plano de ensino deve revelar o processo de produção do conceito, considerando seu aspecto lógico-histórico.

Conteúdos:

1 – Concepção Histórica de Fração;

2 – Apresentação das semelhanças e diferenças entre os tipos de Frações

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{5}, \frac{6}{2}.$ etc;

3 – A Fração como a <u>divisão</u> de um todo em partes iguais;

4 – Operações com Frações e suas relações;

5 – Modelação da relação geral em forma objetivada, gráfica ou por meio de letras da Fração;

6 – Construção do sistema de tarefas particulares que podem ser resolvidos por um procedimento geral.

7 – Avaliação e Controle

OBJETIVO GERAL:

Formar o conceito de Fração

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

1 – Instigar nos estudantes por meio dos seus conhecimentos cotidianos, o desejo e a necessidade de relacionar o todo e sua divisão em partes iguais, isto é, apropriação do conhecimento científico;

2 – Comparar as representações das partes do todo de forma direta e indireta (colocando-as lado a lado, escrevendo suas representações, etc.). Este objetivo consiste na transformação dos dados da tarefa a fim de identificar a relação universal do objeto, com início no momento em que os estudantes consideram a divisão do todo e seus elementos, nomeando-as e relacionando-as de uma forma bastante peculiar estabelecendo relações com as informações do vídeo e as considerações do professor;

3 – Inserir a ação investigativa e coletiva como motivação e meio de estudo dos conteúdos da Matemática ligando o princípio geral: relação de grandezas na divisão em partes iguais, que se fundamenta na relação universal na unidade das formas literal, gráfica, objetal ou com letras, ocorrendo quando os estudantes ilustram a relação entre os elementos (parte) do tangram e as figuras montadas, a divisão dos camelos e das partes da melancia;

4 – Compreender o conceito de Fração como um tipo específico de relação, identificando unidades adequadas (padronizadas ou não) para dividir o todo em partes iguais. Este objetivo consiste na transformação do modelo da relação universal para estudar suas propriedades em forma pura. Tal ação ocorre quando o professor apresenta mais exemplos, instigando vários questionamentos a respeito das ilustrações e mediando o ensino através da definição científica;

5 – Elucidar o conteúdo matemático como construção coletiva, isto é, dedução e construção de um determinado sistema de tarefas particulares que podem ser resolvidas por um procedimento geral, têm possibilidades de ocorrência na realização da tarefa de casa. Tal objetivo também pode ocorrer quando o professor instiga com questionamentos e medeia o ensino através da definição científica. Observação, descrição e comparação dos desenhos (divisão dos camelos, das partes do tangram e da melancia) quanto às semelhanças existentes;

6 – Refletir e descrever sobre as relações de medidas existentes na figura toda, isto é, controle e modificação da realização das ações anteriores, ocorre no momento em que alguns estudantes são convidados a apresentar na lousa e debater com os demais colegas, as questões referentes ao processo de desenvolvimento e conclusão das tarefas destinadas ao grupo: Criação de um modelo representativo de Fração e o todo, vice-versa;

7 – Representar gráfica e/ou literal as relações de medidas existentes nas figuras semelhantes, isto é, avaliação da apropriação do procedimento geral como resultado da solução da tarefa de estudo dada, ocorre em paralelo com o objetivo anterior, de forma que o próprio estudante seja capaz de avaliar sua aprendizagem, por meio da apresentação do processo de desenvolvimento da tarefa, ou pela desenvoltura nas discussões em grupo: Generalização do conceito de Fração (DAVIDOV, 1999, p. 99-100).

DESENVOLVIMENTO METODOLÓGICO – TAREFAS DE APRENDIZAGEM

1 – Apresentação da animação gráfica de forma divertida "O homem que calculava – O Problema dos camelos" para contextualizar e motivar os estudantes para o ensino-aprendizagem do conceito de Frações;

2 – Caracterização do fazer matemático como modo de pensar, usar e inferir as relações de grandezas em nosso dia a dia;

3 – Apresentar aos estudantes um todo (que poderá ser uma barra de chocolate) que será dividido em partes iguais fazendo suas relações;

4 – Propor aos estudantes, utilizando papel quadriculado, a construção e apresentação de desenhos (tangram) para efetuar comparações;

5 – Escolher algumas construções para serem socializados com os colegas de classe;

6 – Ler e interpretar as relações matemáticas nos textos: "A divisão da melancia e o problema dos camelos para contextualizar o ensino das Frações.

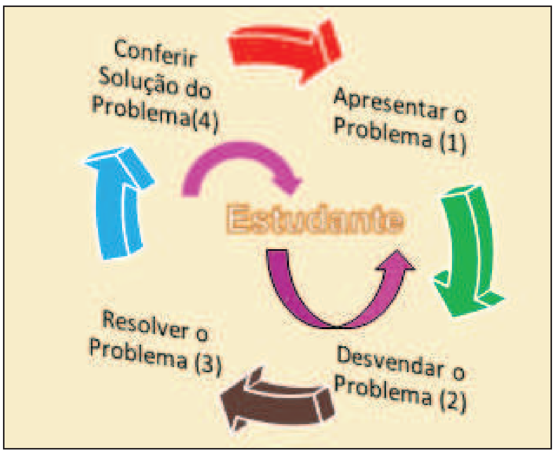
1º MOMENTO/AULA – APROXIMAÇÃO COM O CONCEITO DE FRAÇÃO NA BUSCA DA RELAÇÃO UNIVERSAL DO OBJETO ESTUDADO

Tarefas norteadoras:

Apresentação da animação gráfica de forma divertida "O homem que calculava – O Problema dos camelos" para contextualizar e motivar os estudantes para o ensino de Frações;

Contextualizar a importância da Matemática na resolução de problemas em nosso dia a dia;

Mostrar que o filme é um bom meio para estimular o interesse, necessidade e o desejo para aprender, numa perspectiva de:



Objetivos de Aprendizagem dos Estudantes

1. Entender a origem, aplicação e a evolução da Matemática;

2. Aguçar a visualização e a percepção espacial dos estudantes, observando as estratégias utilizadas e análises feitas no filme;
3. Promover nos estudantes a ampliação de sua percepção de espaço, dimensões e de sua capacidade de construir modelos matemáticos para a representação literal e/ou gráfica na interpretação de situações reais;
4. Mostrar que o pensamento matemático concreto está em todos os lugares na vida do homem desde a antiguidade aos dias atuais.

Ações de Aprendizagem

1. O professor divide a turma, em 10 grupos, de 3 ou 4 componentes cada e exibe o filme com o seguinte objetivo: Observar e anotar as estratégias utilizadas pelo personagem principal para resolver e/ou entender os problemas matemáticos do seu dia a dia, buscando responder as seguintes questões: Qual a relação da Matemática com o nosso dia a dia? Como se caracteriza o pensar matemático? Com utilizar estratégias Matemática na resolução de problemas?
2. Logo após, a exibição do filme o professor questiona os estudantes. Quais estratégias mais lhes chamaram atenção? É possível utilizar essas estratégias em nosso dia a dia? Qual foi o papel da Matemática na tomada de decisão e/ou análise do personagem? Tendo por base essas perguntas anteriores, o professor dá a seguinte tarefa: "Caracterizar a importância da Matemática na resolução de problemas do dia a dia" respondendo as seguintes questões, utilizando para essa tarefa, os elementos do filme e os recursos disponíveis da biblioteca e o laboratório de informática.

2º MOMENTO/AULA: A MODELAÇÃO DA RELAÇÃO UNIVERSAL

Iniciando a aula: Socialização da pesquisa "Caracterização da importância da Matemática na resolução de problemas do dia a dia"

Tarefas Norteadoras:

Apresentar aos estudantes a ideia de fração: A palavra “Fração” vem do latim fractione e quer dizer dividir, rasgar;

Evidenciar que Fração, no dicionário, também quer dizer “parte de um todo”;

Caracterizar que os números fracionários surgiram da necessidade de representar uma medida que não tem uma quantidade inteira de unidades, isto é, da necessidade de se repartir a unidade de medida;

Objetivos de aprendizagem dos Estudantes

1 - Entender a origem e a evolução da Fração por meio de sua história.

2 - Observar os relatos históricos e presente no seu dia-a-dia acerca da palavra Fração.

3 - Promover nos estudantes a ampliação de sua percepção de espaço, dimensões e de sua capacidade de construir modelos de divisão para a representação e interpretação de situações reais.

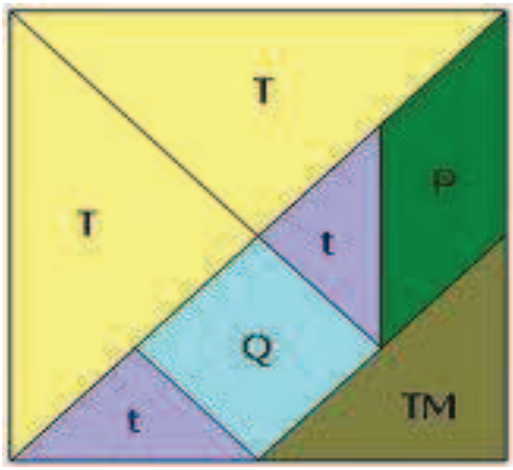
4 - Expressar uma fórmula geral, literal e/ou gráfica para a representação de Fração na representação de uma parte em relação ao todo.

Ações de Aprendizagem

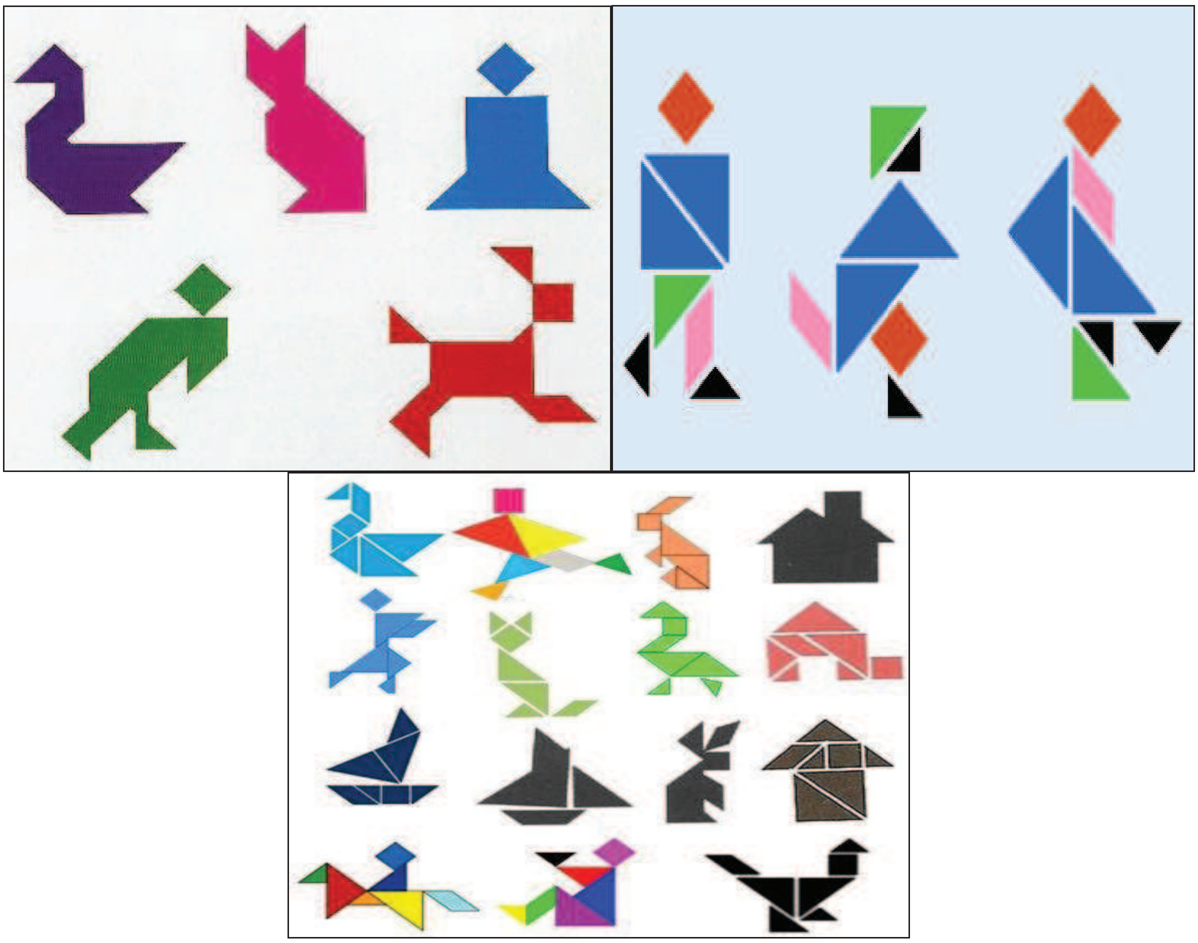
1. O professor divide a turma em grupos de quatro ou cinco estudantes e estabelece um período de 45 minutos para que os estudantes visualizem as figuras que formam o tangram[34] e faça a comparação entre cada parte, utilizando a simbologia (>) maior que.. (=) igual a ... (<) menor que... Depois, os grupos mostram seus resultados para toda a turma.

---

[34] Curiosidades sobre o Tangram: O tangram é um quebra-cabeças chinês de origem milenar. É formado por apenas 7 peças, mas com elas é possível criar cerca de 1700 figuras. A regra é usar todas as peças, lado a lado, sem sobreposição.



Algumas figuras[35] formadas pelas 7 (sete) peças do tangram:



[35] Priorizamos apenas algumas figuras mais significativas.

2. Logo após, o professor questiona os estudantes: Vocês conseguem visualizar e encontrar a representação de cada parte em relação ao todo? Essa figura foi dividida em quantas partes? Em quantas partes esta figura está dividida, se considerarmos a divisão T? E se considerarmos Q? Como a fração faz parte de nossas vidas? Quando ela começou a ser estudada e desenvolvida? Antes de responderem as perguntas, o professor dá o seguinte desafio: Encontre três situações em que as Frações são essenciais em nosso dia a dia? O professor incentiva os estudantes a responderem as perguntas anteriores através da seguinte tarefa: Investigar a origem da Matemática, utilizando os recursos disponíveis na biblioteca e no laboratório de informática. Na aula seguinte, os estudantes devem expor para a sala de aula os resultados da pesquisa.
3. O professor solicita aos grupos que avaliem e registrem as conclusões encontradas neste 2° (segundo) momento sobre as Frações, como suas semelhanças, diferenças e relações.
4. Após os estudantes discutirem e registrarem as questões propostas, o professor pede que os estudantes apresentem seus resultados da fórmula do princípio geral (gráfica e/ou literal) da divisão em partes iguais.
5. Em seguida, o professor pede a um estudante de cada grupo para expor o caminho do seu pensamento para aquela conclusão, ou seja, como expressar o princípio geral em forma literal.

   O professor fecha esse momento, estimulando os estudantes a pesquisarem como tarefa de casa, sobre a seguinte questão: Que relações estão contidas na fórmula descrita que representa o princípio geral da Fração? O princípio geral é igual para qualquer tipo de Fração? O que é fracionar? Utilizando os recursos disponíveis da biblioteca e no laboratório de informática. Na aula seguinte, os estudantes devem expor para a sala de aula os resultados da pesquisa.

3º MOMENTO/AULA: INTERIORIZAÇÃO DA RELAÇÃO UNIVERSAL DO CONCEITO DE FRAÇÃO, A PARTIR DA TRANSFORMAÇÃO DO MODELO

Antes de iniciar: Socialização da pesquisa “Que relações estão contidas na fórmula descrita que representa o princípio geral da Fração?”

Tarefas Norteadoras:

Propor aos estudantes, utilizando papel quadriculado, a construção e apresentação de desenhos para fazer divisões em partes iguais.

Objetivos de aprendizagem dos estudantes

1. Solucionar tarefas individualmente utilizando o conceito de Fração;
2. Comparar números fracionários e efetuar operações com Frações;
3. Resolver atividades diversas utilizando o conceito de Fração, utilizando inúmeros procedimentos mentais.

Ações de Aprendizagem

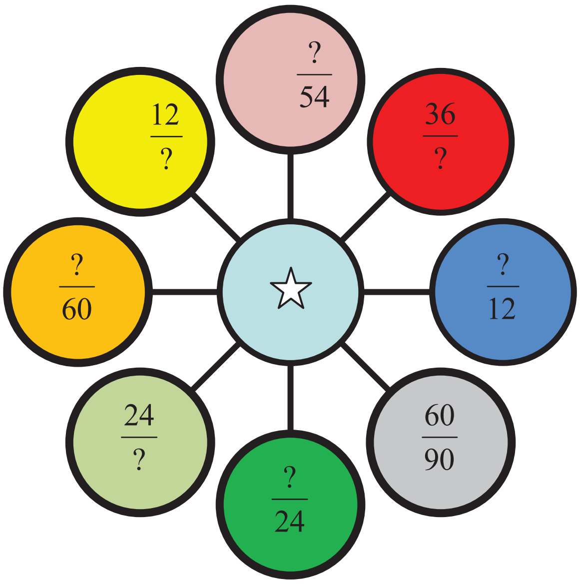
1. O professor começa a aula lembrando-se das propriedades gerais encontrada na Fração. E logo, coloca a tarefa: Descreva, em grupo de quatro ou cinco estudantes, o que diferencia uma Fração própria de uma imprópria? Uma Fração aparente de uma Fração mista, uma Fração mista de uma imprópria, etc;
2. O professor estimula os estudantes a pensar e resolver as seguintes situações desencadeadora de aprendizagem, buscando construir o sistema de tarefas particulares que podem ser resolvidas por um procedimento geral, envolvendo o conceito de Fração;
3. Logo após a análise, o professor chama a atenção dos estudantes com a seguinte situação desencadeadora de aprendizagem: Considerando a história da humanidade, de que forma surgiram o desejo e a necessidade de

relacionar episódios, objetos ou quaisquer partes distintas das figuras? E se considerarmos a história da Matemática, qual a necessidade desencadeadora da divisão em partes iguais? Qual a definição matemática de Fração?

Situação 1: Brincando com as Frações:

Substitua **?** por números naturais, de modo que as frações sejam equivalentes.

Substitua ☆ pela fração equivalente irredutível.



Situação 2: Complete o quadro com frações equivalentes, multiplicando o numerador e o denominador das frações pelos números indicados.

Fração Irredutível	X 2 →	X 3 →	X 4 →	X 5 →	X 6 →
$\frac{1}{2}$	**?**	**?**	**?**	**?**	**?**
$\frac{1}{3}$	**?**	**?**	**?**	**?**	**?**

$\frac{3}{4}$	?	?	?	?	?
$\frac{5}{6}$	?	?	?	?	?

4º MOMENTO/AULA: ABSTRAÇÃO NA FORMAÇÃO DO CONCEITO DE FRAÇÃO E A CONSTRUÇÃO DO SISTEMA DE TAREFAS PARTICULARES

Antes de iniciar as atividades o professor faz algumas considerações acerca de frações: "Como já foi pesquisado por vocês, as notícias mais antigas do uso das frações vêm do Egito. As terras que margeavam o rio Nilo eram de propriedades do Estado. Este dividia as terras entre os grupos familiares, em troca de pagamentos de tributos. Como o rio Nilo sofria inundações periódicas, as terras tinham de ser sempre medidas, já que o tributo era pago proporcionalmente à área a ser cultivada". E hoje como o governo tributa nossos impostos? Que fração do todo pagamos como forma de impostos? Trabalhamos quantos meses e dias para pagar os impostos? Que fração representa esses meses e dias representam em relação ao ano todo?

Ações de Aprendizagem

1. Os estudantes, em grupos, são convidados pelo professor a discutir as questões anteriores e na sequência, o professor pergunta: Qual a ideia que temos, então, de Fração? Esse é um conhecimento empírico ou científico? De que forma podemos relacionar as partes de uma figura com o todo?
2. Após a apresentação dos resultados da tarefa anterior, o professor estimula os estudantes a pensarem sobre as seguintes perguntas: É possível calcular a parte de uma figura com diversas representações fracionárias? Que relações são feitas para o cálculo das Frações próprias, das impróprias, das mistas, das aparentes? Eis alguns problemas para os estudantes pensarem e

fazer a relação do abstrato ao concreto, tais como: O que distingue uma fração da outra? É possível estabelecer relações do modo de calcular a parte do todo?

3. O professor observa atentamente o desenvolvimento e as mudanças qualitativas no modo de ver e operar dos estudantes com o objeto de aprendizagem.
4. O professor geralmente precisa ajudar o estudante até certo momento, mas gradualmente os estudantes adquirem as capacidades correspondentes (é nesse processo que forma nos estudantes a atividade de aprendizagem autônoma, isto é, a capacidade de aprender) (DAVYDOV, 1988, p. 99).

5º MOMENTO/AULA: CONTROLE DA REALIZAÇÃO DAS AÇÕES MENTAIS NA FORMAÇÃO DO CONCEITO DE FRAÇÃO

Antes de iniciar: Socialização da pesquisa “Relacionar as figuras as partes da figura com o todo e as questões dos impostos”

Tarefas Norteadoras:

Utilizar o problema dos camelos (Malba Tahan) para contextualizar as operações com frações;

Calcular, por meio da relação de grandeza, as partes de um todo.

Objetivos de aprendizagem dos estudantes

1. Descrever as relações de grandezas existentes nas Frações;
2. Representar simbolicamente, gráfica e/ou literal as relações de medidas existentes nas partes das figuras em elação ao todo;
3. Solucionar tarefas individualmente utilizando o conceito de Fração;
4. Resolver atividades diversas utilizando o conceito de Fração, utilizando procedimentos mentais variados.

Ações de Aprendizagem

1. Os estudantes, em grupos, são questionados pelo professor: Qual a ideia que temos de operações com frações? Esse é um conhecimento empírico ou científico? De que forma podemos relacionar as partes de uma figura com o todo?
2. O professor propõe um debate com a leitura da seguinte situação desencadeadora de aprendizagem "O problema dos camelos":

O Problema dos Camelos

Beramis Samir viajava por uma estrada deserta no Oriente quando encontrou três homens em acalorada discussão. Querendo saber o motivo de tamanha disputa, Beramis escutou o relato do mais velho dos três homens.

– Somos irmãos e recebemos 35 camelos como herança de nosso pai. Segundo o testamento, o mais velho dos filhos deve receber a metade dos camelos, o filho do meio recebe a terça parte, e o mais novo, a nona parte.

Como a herança era de 35 camelos, os herdeiros não conseguiam dividi-la nem pela metade: 35 é um número impar e nenhum deles queria cortar um camelo ao meio.

Como resolver a situação?

Enquanto escutava a história, Beramis Samir rabiscava a areia com um pedacinho de madeira.

Herança de 35 camelos

Filho mais velho: $\frac{1}{2}$ de 35

Filho do meio: $\frac{1}{3}$ de 35

Filho mais novo: $\frac{1}{9}$ de 35

Beramis Samir, também conhecido como "o homem que calculava[36]" ofereceu juntar o seu camelo aos 35 que os irmãos possuíam, com uma condição.

– Qual condição? – perguntaram ao mesmo tempo os irmãos, demonstrando espanto pela oferta.

"O homem que calculava" combinou que, se cada um dos filhos recebesse a parte que lhe cabia e, se ainda assim sobrasse algum animal, ele ficaria com a sobra.

Os homens aceiraram a proposta.

Bom, vamos ao que aconteceu:

Beramis juntou o seu camelo aos 35 (trinta e cinco) , totalizando 36 (trinta e seis) camelos. Entregou ao filho mais velho a metade deles: 18 (dezoito) camelos. Ao filho do meio entregou a terça parte, o que dava 12 (doze) camelos. E ao filho mais novo coube 4 (quatro) camelos, correspondente à nona parte.

Os irmãos ficaram muito satisfeitos com a divisão, pois todos saíram ganhando.

Mas, e nosso amigo Beramis? Pois ele ficou com 2 (dois) camelos, um a mais do que tinha antes de resolver a contenda.

Sabem como isso foi possível?

Acompanhe as anotações de Beramis:

Filho mais velho: $\frac{1}{2}$ de 36 = 18

Filho do meio: $\frac{1}{3}$ de 36 = 12

Filho mais novo: $\frac{1}{9}$ de 36 = 4

---

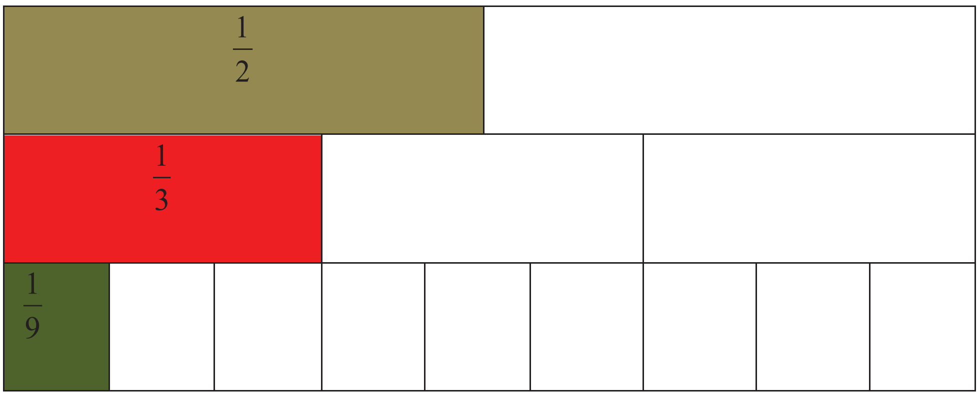
[36] O escritor árabe Malba Tahan nasceu em 1885 em uma aldeia nas proximidades de Meca, lugar santo da religião muçulmana, o islamismo. Estudou no Cairo e em Constantinopla. Chegou a assumir o cargo de queimaçã (prefeito), da cidade de El-Medina. Aos 27 anos, recebeu grande herança do pai e iniciou uma longa viagem pelo Japão, Rússia e Índia. Morreu em 1921, lutando pela libertação de uma tribo na Arábia Central. Malba Tahan, conta a história de Beramis Samir em "O problema dos camelos". Na verdade, Malba Tahan nunca existiu! Ou melhor existiu na imaginação de Júlio César de Mello e Sousa, professor, educador, pedagogo, conferencista e um dos nossos escritores mais conhecidos internacionalmente.

Total: 34 camelos

E com um camelo a mais, Beramis Samir partiu para novas aventuras.

FONTE: TAHAN, Malba. O homem que calculava (adaptado)

Na sequência, pede que os estudantes representem as frações $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{9}$ utilizando três desenhos de mesmo tamanho e faça uma análise de cada representação:



Como esse resultado foi possível? Por que sobrou um camelo para o Beramis Samir? Dessa forma, o professor estimula os estudantes a pensar estratégias matemáticas que os ajudem nas soluções de problemas envolvendo o conceito de Fração, principalmente nas operações com Frações (Esta tarefa será discutida na próxima aula).

6º MOMENTO/AULA: AVALIAÇÃO DA ASSIMILAÇÃO NA FORMAÇÃO DO CONCEITO DE FRAÇÃO, POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS.

Antes de iniciar a aula, o professor discute com os estudantes a questão dos camelos e faz alguns questionamentos.

Tarefa norteadora

Resolver problemas envolvendo o conceito de Fração

.Objetivo de aprendizagem dos estudantes

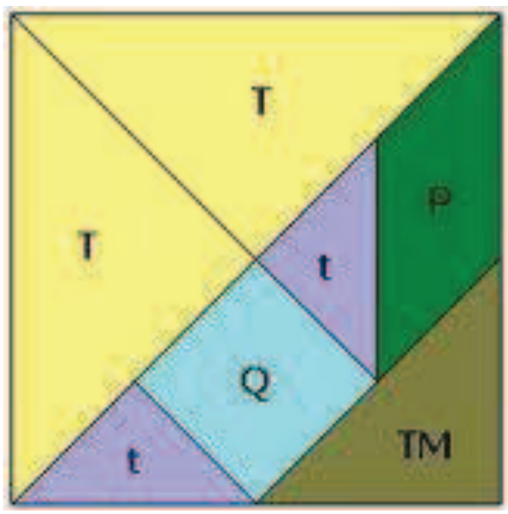
1. Resolver problemas, individualmente e/ou em grupos, utilizando o conceito de Frações.

Ações de Aprendizagem

1. Refletir sobre as operações matemáticas necessárias nas soluções de problemas envolvendo o conceito de Fração.

Problema 1:

Qual é a fração de cada parte do quadradrão? (complete o quadro seguinte e seus correspondentes em decimais)



PEÇAS	FRAÇÃO DA ÁREA DO QUADRADÃO	REPRESENTAÇÃO EM DECIMAIS

T		
t		
P		
Q		
TM		

Problema 2:

Iraci ama as frações e dividi o que gasta do seu salário em frações. Ela gasta $\frac{3}{8}$ do seu salário com aluguel. $\frac{1}{5}$ com a prestação do carro e $\frac{3}{10}$ com a mensalidade da escola do filho. A metade do que sobra equivale a R$ 500,00. Nessas condições, pergunta-se:

h) Qual é o salário de Iraci?
i) Quanto ela gasta com aluguel?
j) Quanto ela gasta com a prestação do carro?
k) Quanto ela gasta com a mensalidade da escola do filho?
l) Utilizando os sinais **<** (menor que) ou **>** (maior que) complete os espaços entre as frações:

$$\frac{3}{8} \;\_\_\_\_\_\_\; \frac{1}{5} \;\_\_\_\_\_\_\; \frac{3}{10}$$

m) Escreva utilizando os números decimais cada uma das frações:

$\frac{3}{8} =$ ______ $\frac{1}{5} =$ ______ $\frac{3}{10} =$ ______

n) Represente cada uma dessas frações do salário de Iraci em frações e faça a comparação de cada uma e sua relação com o salário que ela recebe.

Problema 3:

Fabiana assumiu uma turma de 5º ano do Ensino Fundamental neste semestre. Na turma dela há 35 alunos. O conteúdo previsto e planejado para esta semana foi o de operações com Frações. Ela levou uma barra de chocolate para a sala de aula para motivar os estudantes na visualização da divisão em partes iguais. Iniciou a aula fazendo perguntas para a turma, onde ficou evidenciado que apenas $\frac{1}{7}$ não reconheciam as Frações e não representavam adequadamente as Frações. Esses estudantes não conheciam numerador e denominador de uma Fração e não eram capazes de classificar as Frações. Mediante esta realidade, responda as questões seguintes:

- **e)** Quantos estudantes não sabiam nada sobre as Frações?
- **f)** Qual é a porcentagem dos estudantes que tinham as noções necessárias para o desenvolvimento adequado do conteúdo da semana, Frações?
- **g)** Como a maioria da turma sabia as noções elementares das Frações Fabiana colocou no quadro as seguintes situações, que agora você irá resolver:

$\frac{1}{5}$ de 23.330 pessoas, são quantas pessoas?

$$\frac{\frac{3}{8}+\frac{1}{5}-\frac{3}{10}}{\frac{3}{10}x\frac{1}{5}+\frac{3}{8}} =$$

- **h)** Para que servem as frações em nosso dia a dia?

Problema 4: Substitua as **?** de tal forma que os resultados sejam verdadeiros.

$\frac{1}{4}$	**+**	**?**	**=**	$\frac{1}{2}$
+		**+**		**+**

?	+	$\frac{2}{4}$	=	$\frac{5}{4}$
=		=		=
1	+	?	=	?

c) $\frac{1}{4}$ e $\frac{5}{4}$ são representações de quais porcentagens?

d) Supondo que tivéssemos 27 balinhas a serem distribuídos para três meninos de tal forma que um recebesse $\frac{1}{4}$, outro recebesse $\frac{1}{2}$ e outro recebesse $\frac{1}{7}$ e você tivesse uma balinha no bolso e propusesse a resolver o problema como Beramis Samir resolveu o problema dos camelos, que resultado você teria? Como você encontrou todos os resultados? Você teve lucro ou prejuízo?

Problema 5: Leia o texto “A divisão da Melancia” para responder as questões seguintes:

A Divisão da Melancia

– Ótimo! Exclamou de repente o Visconde. – Esta melancia veio mesmo de propósito para ilustrar o que eu ia dizer. Ela era um inteiro. Tia Anastácia picou-a em pedaços, ou frações. As frações formam a parte da aritmética de que eu ia tratar agora.

– Se pedaço de melancia é fração, vivam as frações! – gritou Pedrinho.

– Pois fique sabendo que é – disse o Visconde.

– Uma melancia inteira é uma unidade. Um pedaço de melancia é uma fração dessa unidade. Se a unidade, ou a melancia, for partida em dois pedaços, esses dois pedaços formam duas frações – dois meios. Se for partida em três pedaços, cada pedaço é uma fração igual a um terço. Se for partida em quatro pedaços, cada pedaço é uma fração igual a um quarto. [...]

– Está compreendido. Passe adiante – disse o menino, ansioso para chegar ao fim da lição e avançar na melancia.

– Temos de aprender – continuou o Visconde – o que é número inteiro e o que é numero misto. Número inteiro é a melancia ou as melancias que ainda não foram partidas. Número misto é a melancia inteira com mais uns pedaços ao lado [...]

– Chega – disse Pedrinho –, isto é tão claro que não vale a pena perder tempo insistindo. Agora eu quero saber para que serve conhecer frações.

– Para mil coisas – responde o Visconde. – Na vida de todos os dias a gente lida com frações sem saber que o está fazendo.

FONTE: LOBATO, Monteiro. Aritmética da Emília (Adaptado)

a) Represente as frações que estão no texto utilizando desenhos do mesmo tamanho.
b) Dê exemplos de situações que se encaixam na última frase desse texto.

Problema 6: Observe a seguinte receita para responder as questões seguintes:

Bolo de Fubá

- 4 ovos
- $4\frac{1}{2}$ xícaras de leite
- 3 xícaras de açúcar

- $2\frac{1}{2}$ xícaras de farinha de trigo
- $1\frac{1}{2}$ xícaras de fubá
- $2\ \frac{1}{2}$ colheres de margarina
- 100 g de queijo ralado
- 1 colher de fermento em pó

Para alguns cálculos tome como referência a seguinte tabela:

Leite, água, óleo		**Açúcar**	
1 xícara	240 ml.	1 xícara	180 g.
1 colher (sopa)	15 ml.	I colher (sopa)	12 g.
1 colher (chá)	5 ml.	**Farinha de Trigo**	
½ xícara	120 ml.	1 xícara	120 g.

a) Quais seriam a quantidade dos ingredientes **"Leite e farinha de trigo"** para 3 receitas de bolo de fubá?

b) Quantas xícaras de farinha de trigo equivalem a 1 kg?

c) Quantas xícaras de leite equivalem a 1 litro?

d) Para uma receita de bolo de fubá, quantos gramas de farinha de trigo serão necessários?

e) Renata quer gastar 3 kg de farinha de trigo fazendo bolo de fubá, quantas receitas serão feitas?

f) Quais seriam a quantidade dos ingredientes "fubá e margarina" para $\frac{1}{2}$ receita de bolo de fubá?

Ações de Aprendizagem Final: O professor pede a cada estudante para elaborar e resolver um problema envolvendo o conceito de Fração, que possibilita construções mentais para diferentes caminhos de resolução. Após a elaboração, devem resolver e apresentar o conceito interiorizado de fração mediante o exercício elaborado.

REFERÊNCIAS

DAVYDOV, Vasili V. **Tipos de generalización en la enseñanza.** Habana: Editorial Pueblo y Educación, 1982.

__________. **Problemas do ensino desenvolvimental: A experiência da pesquisa teórica e experimental na psicologia.** Tradução para o português do texto em russo publicado na Revista Soviet Education, Agosto 1988, Vol. XXX, nº 8 com apoio do mesmo texto em espanhol, por José Carlos Libâneo e Raquel A. M. da Madeira Freitas.

MOURA, Manoel Oriosvaldo (org.). **A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural.** Brasília: Liber Livro, 2010.

VYGOTSKY, Lev Semenovitch. **A formação social da mente. O desenvolvimento dos processos psicológicos superiores.** Trad. José Cipolla Neto, Luiz Silveira Menna Barreto e Solange Castro Afeche. 7 ed. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

________. **Pensamento e linguagem**. Trad. Jefferson Luiz Camargo. 4 ed. São Paulo: Martins Fontes, 2008.

_______. **A construção do pensamento e da linguagem.** Trad. Paulo Bezerra. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2009.

_______. **Psicologia Pedagógica.** Trad. Paulo Bezerra. 3 ed. São Paulo: Martins Fontes, 2010.

Apêndice 9: O Conceito de Fração – Após o Experimento Didático-Formativo

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA

MESTRADO EM EDUCAÇÃO

PONTÍFICIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE GOIÁS

CONCEITO: FRAÇÃO

Questão 1: Elabore o conceito de fração formado por você, após tê-lo estudado por um semestre. Tenha como referência o que estudamos em sala de aula, em nossas aulas práticas e discussões, as pesquisas feitas e a teoria de Vygotsky e Davydov que subsidiaram a construção teórica desse conceito:
____ ____ ____ ____ ____ ____ ____ ____ ____

Questão 2: Elabore um exercício aplicando o conceito de fração formado por você, após tê-lo estudado por um semestre. Tenha como referência o que estudamos em sala de aula, em nossas aulas práticas e discussões, as pesquisas feitas e a teoria de Vygotsky e Davydov que subsidiaram a construção teórica desse conceito:
____ ____ ____ ____ ____ ____ ____ ____

Apêndice 10: Avaliação Após o Experimento Didático-Formativo - Formação do Conceito de Fração

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA

MESTRADO EM EDUCAÇÃO

PONTÍFICIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE GOIÁS

CONCEITO: FRAÇÃO

Questão 1: O conceito nuclear de fração é a relação de grandeza. Fração, deve ser entendida, conforme nossas aulas, na divisão de um inteiro em partes milimetricamente iguais. Em geral, dividimos o nosso salário em várias partes que usamos para pagar as nossas despesas durante um determinado período, como alimentação, aluguel, prestação da casa, financiamentos, conta de energia e água, etc. Cada parte desse gasto, damos o nome de fração. Veja como Antônio dividiu o seu salário no mês passado: $\frac{1}{5}$(um quinto) do seu salário foi usado na prestação da casa, $\frac{2}{8}$ (dois oitavos) foi usado com uma viagem e $\frac{1}{4}$(um quarto) foi usado com as compras de casa. Depois que ele fez essas operações, percebeu que ainda havia ficado com R$ 408,00. Após fazer todas as operações dos gastos anotados por Antônio, calcule qual é o valor do salário de Antônio?
Questão 2: A definição mais rápida e fácil para a fração é que ela representa a parte de um todo (inteiro), conforme visto em nossas aulas. O jornal local da cidade de Piraporinha mostrou os seguintes dados a respeito das eleições: Dos moradores de Piraporinha, $\frac{1}{3}$(um terço) deve votar em João Valente para prefeito e $\frac{3}{8}$(três oitavos) devem votar em Luís Metralhadora. Os demais votarão nulo ou branco. Sabendo que a cidade tem 12.240 eleitores. Supondo que todos votem e que essa estatística seja confirmada, calcule:

a) Quantos votos serão nulos ou brancos? b) Quantos votos terá João Valente? c) Quantos votos terá Luís Metralhadora? d) Considerando que o mais votado será o prefeito de Piraporinha, quem será?
Questão 3: Fabiane assumiu uma turma de 5º ano do Ensino Fundamental neste semestre. Na turma dela há 30 (trinta) alunos. O conteúdo previsto e planejado para esta semana foi o de operações com Frações. Ela levou uma barra de chocolate para a sala de aula para motivar os estudantes na visualização da divisão em partes iguais. Iniciou a aula fazendo diversas perguntas para a turma e foi anotando no quadro os acertos e erros. Mediante as anotações ficou evidenciado que apenas $\frac{1}{6}$ (um sexto), **não sabiam nada** sobre frações, ou seja, não reconheciam as frações e não representavam adequadamente as frações. E esses estudantes não conheciam numerador e nem denominador de uma Fração, não eram capazes de classificar as frações. Já $\frac{1}{3}$ (um terço) **sabiam as informações básicas** de frações, como reconhecer numerador, denominador, diferenciando-os, bem como, eram capazes classificar as frações em próprias, impróprias e aparentes e o restante da turma, ou seja, $\frac{1}{2}$(um meio) **sabiam muito** sobre frações, inclusive resolver problemas diversificados. Mediante esta realidade, responda as questões seguintes, proposta pela professora Fabiane a sua turma:
a) Se apenas $\frac{1}{6}$ (um sexto) não reconheciam as frações e não representavam adequadamente as frações, quantos estudantes estavam nesse grupo, ou seja não sabiam nada sobre frações?

b) Se $\frac{1}{3}$ (um terço) sabiam as informações básicas de frações, quantos estudantes estavam nesse grupo? c) Se $\frac{1}{2}$ (um meio) sabiam muito sobre frações, quantos estudantes estavam nesse grupo? Mediante os cálculos efetuados nos itens anteriores, qual era o maior grupo, ou seja, a maior fração da turma da Professora Fabiane? Era representada por quem não sabia nada de fração ou por quem tinha conhecimento básico ou por quem tinha conhecimento avançado?
Questão 4: Para responder esta questão, leia o excerto do livro “A Aritmética da Emília” de Monteiro Lobado: **A Divisão da Melancia** – Ótimo! Exclamou de repente o Visconde. – Esta melancia veio mesmo de propósito, nesta tarde ensolarada, para ilustrar o que eu ia dizer. Ela era um inteiro. Tia Anastácia picou-a em pedaços, ou frações. As frações formam a parte da aritmética de que eu ia tratar agora. – Se pedaço de melancia é fração, vivam as frações! – Gritou Pedrinho! – Pois fique sabendo que é, disse o Visconde. – Uma melancia inteira é uma unidade. Um pedaço de melancia é uma fração dessa unidade. Se a unidade, ou a melancia, for partida em dois pedaços, esses dois pedaços formam duas frações, ou seja $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{2}$, que é igual a $\frac{2}{2}$, isto é, o inteiro. Se for

partida em três pedaços, cada pedaço é uma fração igual a um terço, ou seja, $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$, que é igual a $\frac{3}{3}$, isto é, o inteiro. E se for partida em quatro pedaços, pergunta Emília! Pedrinho logo diz, cale a boca menina atrevida. Visconde diz muito bem Emilia, cada pedaço é uma fração igual a um quarto, ou seja, $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$, isto é, $\frac{4}{4}$, o inteiro novamente, responde Pedrinho, pedindo a sua parte, ou seja, a sua fração da melancia para chupar.

– Está compreendido? Perguntou Visconde a meninada. Passe adiante, disse o menino Pedrinho, ansioso para chegar ao fim da lição e avançar na melancia.

– Temos de aprender – continuou o Visconde – o que é número inteiro e o que é numero misto. Ainda tem mais? diz Pedrinho! Número inteiro é a melancia ou as melancias que ainda não foram partidas. Número misto é a melancia inteira com mais uns pedaços ao lado [...]

– Chega – disse Pedrinho –, isto é tão claro que não vale a pena perder tempo insistindo. Agora eu quero saber para que serve conhecer frações.

– Para mil coisas – responde o Visconde!

– Na vida, o tempo todo, todos os dias a gente lida com frações sem saber o que está fazendo.

FONTE: LOBATO, Monteiro. Aritmética da Emília (Adaptado)

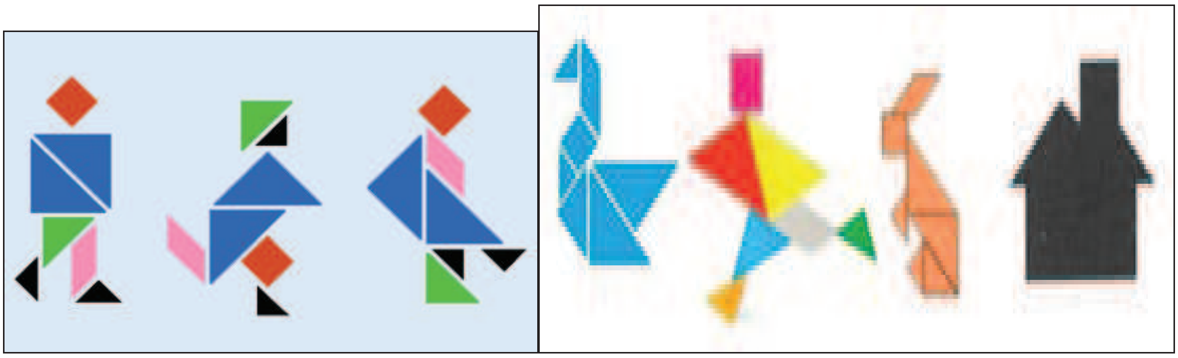
Antes de avançarmos na melancia, vejam as frações que anotei aqui no quadro, mostra Visconde, com entusiasmo!. Só depois que vocês substituírem os traços “ ___” por um dos sinais >, < ou =, é que vamos saborear a melancia. Pedrinho logo gritou, assim não vale, mas correu para resolver a questão e te convidou para ajudá-lo, boa sorte!!

a) $\frac{1}{3}$ ____ $\frac{1}{4}$ **b)** $\frac{2}{5}$ ____ $\frac{3}{8}$ **c)** $\frac{3}{4}$ ____ $\frac{5}{8}$ **d)** $\frac{5}{2}$ ____ $\frac{8}{6}$

e) $\frac{4}{5}$ ______ $\frac{5}{9}$ **f)** $\frac{2}{2}$ ______ $\frac{3}{3}$ **g)** $\frac{2}{8}$ ______ $\frac{3}{12}$ **h)** $\frac{3}{7}$ ______ $\frac{5}{8}$

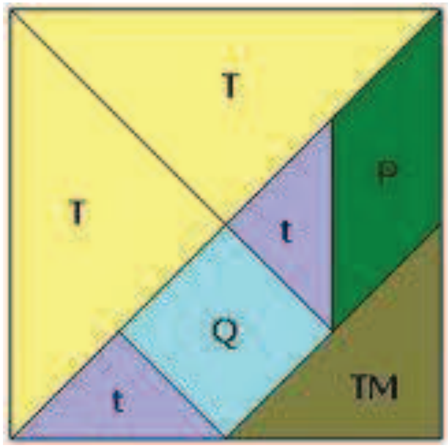
Questão 5: Gabriela fez $\frac{3}{4}$ dos exercícios de uma lista de Matemática em 57 minutos. Supondo que fosse possível manter esse ritmo, quanto tempo gastará para fazer os exercícios que faltam? Ao terminar a lista toda, quanto tempo Gabriela terá consumido?

Para responder à questão seguinte, leia as informações sobre o Tangram. O Tangram é um jogo antigo que surgiu no Oriente e consiste em sete peças. É formado basicamente por uma base quadrada dividida em cinco triângulos de tamanhos diferentes, um pequeno quadrado e um paralelogramo. Seu objetivo é conseguir montar uma determinada forma, usando as sete peças. Não se sabe ao certo quem inventou e quando o Tangram foi inventado. Em chinês, é conhecido como Chi Chiao Tu, ou as Sete Peças Inteligentes. Hoje, o Tangram é utilizado por todo o mundo, especialmente por professores no ensino da geometria, matemática, psicologia e, principalmente, na pedagogia. Apesar de passar uma simplicidade no manuseio, ele se revela um jogo de difícil resolução por exigir muito raciocínio lógico, veja 7 (sete) figuras distintas formadas com as sete peças (frações) do Tangram:



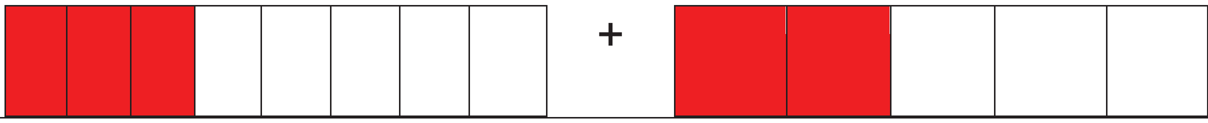
(Fonte: http://www.centrovirtualgoeldi.com - Adaptado)

Questão 6: Tendo como referência o quadrado maior (quadradão), utilizado para formar as 7 (sete) figuras, calcule qual é a fração de cada parte do quadradrão e em seguida, represente a fração encontrada em números decimais, completando o quadro seguinte:



PEÇAS	FRAÇÃO EM RELAÇÃO AO QUADRADÃO	COORRESPONDENTE EM DECIMAIS (USE DUAS CASAS DECIMAIS)
T		
T		
P		
Q		
TM		

Questão 7) Como vimos em nossas aulas, as frações são usadas para medir quantidades iguais. Usamos frações para medir parte do tempo como meia hora, meio dia, etc. As frações são usadas, também, para medir porção dos alimentos, meio quilo e assim por diante. As figuras de dois chocolates, abaixo, são representações da fração, cujo inteiro, de cada é $\frac{8}{8}$. O professor Adevane presenteou, com uma barra de chocolate, semelhante à figura, os dois melhores alunos da turma Wilker e Renata, e, em seguida liberou os alunos para o recreio. Quando os alunos voltaram do recreio, o professor Adevane perguntou aos dois alunos: Vocês ainda têm chocolates? Wilker respondeu ao professor, comi apenas $\frac{3}{8}$(três oitavos) e guardei a maior parte para amanhã. E Renata respondeu que havia comido $\frac{2}{5}$ (dois quintos) de sua barra de chocolate. O professor, então, inicia a explicação: como vocês podem perceber, a figura mostra dois desenhos idênticos que foram divididos em partes iguais com os resultados dados por Wilker e Renata, sendo que a parte destacada representa a quantidade de chocolate consumido por cada aluno. Nessa situação, se juntarmos as partes que foram comidas, que fração representa essa soma?



a) ( ) $\frac{16}{40}$ **b)** ( ) $\frac{15}{40}$ **c)** ( ) $\frac{5}{13}$ **d)** ( ) $\frac{31}{40}$ **e)** ( ) $\frac{8}{12}$

Questão 8) Um tratador de animais precisa preparar diariamente a ração dos animais que trata. Segundo o veterinário, na fase de engorda, a ração é composta de $\frac{1}{4}$(um quarto) de soja, $\frac{2}{5}$ (dois quintos) de aveia, $\frac{1}{3}$(um terço) de farelo e o restante de sal. Do total da ração que ele prepara, a quantidade de sal corresponde a que fração do total?

a) ( ) $\frac{1}{60}$ **b)** ( ) $\frac{1}{50}$ **c)** ( ) $\frac{59}{60}$ **d)** ( ) $\frac{1}{40}$ **e)** ( ) $\frac{1}{30}$

Questão 9: Iraci ama as frações e dividi o que gasta do seu salário em frações. Ela gasta $\frac{1}{4}$ do seu salário com aluguel. $\frac{1}{5}$ com a prestação do carro e $\frac{3}{10}$ com a mensalidade da escola do filho. A metade do que sobra equivale a R$ 500,00. Nessas condições, pergunta-se:

a) Qual é o salário de Iraci?

b) Quanto ela gasta com aluguel?

c) Quanto ela gasta com a prestação do carro?

d) Quanto ela gasta com a mensalidade da escola do filho?

e) Utilizando os sinais **<** (menor que) ou **>** (maior que) complete os espaços entre as frações:

$$\frac{1}{4} \_\_\_\_\_\_ \frac{1}{5} \_\_\_\_\_\_ \frac{3}{10}$$

f) Escreva utilizando os números decimais cada uma das frações:

$\frac{1}{4} =$ ______ $\frac{1}{5} =$ ______ $\frac{3}{10} =$ ______

g) Represente cada uma dessas frações do salário de Iraci em frações e faça a comparação de cada uma e sua relação com o salário que ela recebe.

Questão 10) Fabiana assumiu uma turma de 5º ano do Ensino Fundamental neste semestre. Na turma dela há 35 alunos. O conteúdo previsto e planejado para esta semana foi o de operações com Frações. Ela levou uma barra de chocolate para a sala de aula para motivar os estudantes na visualização da divisão em partes iguais. Iniciou a aula fazendo perguntas para a turma, onde ficou evidenciado que apenas $\frac{1}{5}$ não reconheciam as Frações e não representavam adequadamente as Frações. Esses estudantes não conheciam numerador e denominador de uma Fração e não eram capazes de classificar as Frações. Mediante esta realidade, responda as questões seguintes:

a) Quantos estudantes não sabiam nada sobre as Frações?

b) Qual é a porcentagem dos estudantes que tinham as noções necessárias para o desenvolvimento adequado do conteúdo da semana, Frações?

c) Como a maioria da turma sabia as noções elementares das Frações, Fabiana colocou no quadro as seguintes situações, que agora você irá resolver:

$\frac{1}{5}$ de 23.330 pessoas, são quantas pessoas?

$$\frac{\frac{3}{8}+\frac{1}{5}-\frac{3}{10}}{\frac{3}{10}x\frac{1}{5}+\frac{3}{8}} =$$

d) Para que servem as frações em nosso dia a dia?

Apêndice 11: Transcrição dos áudios/vídeos do experimento didático-formativo

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
MESTRADO EM EDUCAÇÃO
PONTÍFICIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE GOIÁS – PUC/GO
CONCEITO: FRAÇÃO

TRANSCRIÇÃO DOS AUDIOS/VÍDEOS DO EXPERIMENTO DIDÁTICO.

Avaliação Diagnóstica: 16/09/2017

1º momento. 21/10/2017 (7h:30min as 11h:30min)

Professor: Bom dia pessoal, então vocês fizeram uma pequena avaliação diagnóstica a respeito do conteúdo de frações, mas vocês sabem de onde surgiram as frações? Qual é o conceito histórico de frações? Vamos começar esta aula assistindo a uma animação, "O homem que calculava, o problema dos camelos". E depois vamos fazer algumas reflexões.
Professor: Bom e aí? O que acharam?
Estudante 06: Interessante, como ele deu um camelo, dividiu tudo e ainda saiu com dois camelos?
Professor: Este é o problema.
Estudante 09: A minha conclusão é que esse homem é muito inteligente, como ele fez isso?
Estudante 14: Essa técnica eu tenho que aprender professor.
Estudante 06: Eu também.
Estudante 18: Fração é parte do todo e ela representa divisão.
Professor: Qual a explicação matemática para a partilha realizada por Beremiz, de tal forma que além de conceder vantagens aos irmãos, ainda fez sobrar um camelo para si?
Professor: Vejam essa ilustração que está projetada, ela nos mostra a importância da leitura e interpretação na resolução de problemas.

Estudantes: (Discutem entre si sobre o assunto).

Estudante 20: Na minha época não tinha muitos problemas pare resolver, eram mais listas de exercícios.

Estudante 12: Não nos ensinaram a pensar.

Estudante 18: Aprendemos assim.

Estudante14: O professor repetia o que estava no livro didático.

Estudante 22: Estudava para passar de ano.

Estudante 28: Ninguém reprova hoje, por isso o ensino está como está.

Estudante 05: Nunca gostei de problemas, nunca sei qual operação fazer.

Estudante 06: Quase nunca resolvíamos problemas. Hoje as coisas estão diferentes.

Professor: Hoje é importante que os estudantes usem a matemática para resolver problemas práticos que envolvam seu dia a dia. Um dos grandes problemas na resolução de problemas está na leitura e interpretação. Se o estudante não consegue interpretar, como irá conseguir fazer os cálculos necessários para resolver o problema.

Estudante 08: O problema começa lá na aula de português então.

Estudante 16: Professor, esse esquema ficou muito legal, mas eu nunca dei conta da matemática e para mim na Pedagogia não havia matemática.

Estudante 14: Ainda bem que vou ensinar nas creches e lá não precisa de matemática.

Estudante 19: A matemática e eu não combinamos, gosto de humanas, por isso escolhi Pedagogia.

Estudante 35: Não consigo aprender matemática, acho muito difícil.

Estudante 24: Sinceridade, não sei porque não aprendo matemática, até gosto

Professor: Bom pessoal, trouxe para vocês estas folhas com malha quadriculada, proponho a vocês nesta atividade a fazer desenhos que represente frações, aproveitem as frações apresentadas no filme “O homem que calculava”, para realizar a atividade dividam-se em grupos de três ou quatro pessoas.

Estudante 07: Professor precisa usar régua?

Professor: Sim.

Estudante: 09: Professor precisa ser colorido com lápis de cor?

Professor: Pode sim.

Estudante 34: A quantidade total de divisões na figura tem que ser o mesmo do numerador, e a parte colorida a do denominador, né professor?.

Estudante 18: Tenho que colorir qual quantidade? A parte de baixo ou de cima da fração?

Professor: O numerador indica a quantidade de divisões que sua representação terá!

Professor: Vamos assistir mais uma vez à animação, tentem relacionar o filme as seguintes questões: Qual a relação da matemática com o nosso dia a dia? Como utilizar estratégias matemáticas na resolução de problemas?

Estudante 18: A matemática está em nosso dia a dia, desde que acordamos até a hora de dormir. Ela faz parte de todas as nossas decisões. Sem a matemática, não fazemos quase nada.

Estudante 24: O jornal o popular é cheio de matemática, mostra a porcentagem de homicídios de um período. Mostra o aumento do combustível, etc.

Estudante 22: Aqui na faculdade vivemos uma matemática, pois ficamos 4 horas/aulas de cinquenta minuto cada. Imagine quantos minutos ficamos em um ano?

Estudante 28: Passamos boa parte de nossas vidas resolvendo problemas de matemática, fazendo contas de nossos salários, de nossas contas e de tudo que precisamos comprar.

Professor: Percebem o quanto a matemática este presente em nosso dia a dia? Todos os dias usamos matemática para realizar as mais variadas tarefas. Por isso é importante sabermos utilizá-la na hora de resolver problemas que surgem em nosso cotidiano. Quais estratégias usadas no filme mais lhes chamaram atenção?

Estudante 06: O personagem do filme, aproveitou que sabia matemática, e usou em beneficio próprio.

Estudante 10: Achei interessante que os filhos não perceberam que tiveram que doar um camelo para o problema ser resolvido.

Estudante 16: Eu ainda não entendi qual foi a mágica!

Professor: Não é magica, é matemática!

Estudante 27: O cara deu um camelo e ganhou dois, e ainda fez a divisão conforme o pai dos herdeiros tinha ordenado.

Professor: É possível utilizar essas estratégias em nosso dia a dia?

Estudante 13: Creio que sim, mas temos que saber lidar com a matemática.

Estudante 22: Não consigo nem calcular juros, quando vou fazer uma compra, não entendo nada disso, só sei que vou pagar bem mais no produto.

Estudante 23: Tem que ser fera na matemática.

Professor: Agora quero que vocês realizem a próxima atividade, podem manter os grupos, vocês deverão caracterizar a importância da matemática na resolução de problemas do dia a dia, podem utilizar o laboratório de informática, a biblioteca, e o que mais vocês conseguirem. Podem começar.

Estudante 05: Professor encontramos algo interessante, certas profissões usam a matemática a todo momento, como a engenharia.

Estudante 36: A indústria em geral também utiliza, tenho uma amiga que trabalha pesando comprimidos em uma indústria de remédios lá em Anápolis.

Estudante 14: Todos nós utilizamos a matemática, para fazer compras, olhar hora no relógio, cozinhar, etc.

Estudante 24: No filme, a fração estava causando muitos problemas entre os três herdeiros.

Estudante 26: Parece que a matemática esta presente na nossa vida a partir do momento que acordamos, pois temos que correr contra o tempo para não chegar atrasados no trabalho.

Estudante 15: Só que fazemos isso tudo sem perceber.

Professor: Isso mesmo, utilizamos a matemática cotidianamente, e não percebemos. Muitas vezes não sabemos como proceder com alguns cálculos. Observem essa ilustração que projetei no quadro, ela nos mostra que os conhecimentos que trazemos de casa, aprendidos em nosso cotidiano, os conhecimentos espontâneos são muito importantes, eles são o primeiro degrau para aprendermos um conceito novo. Chamamos esse tipo de conhecimento de conhecimento empírico. É o conhecimento que vem da pratica e da experiência, aprendemos desde pequenos com pessoas mais velhas, com colegas, etc. Vejam bem, na ilustração temos um conhecimento espontâneo, e uma zona de desenvolvimento proximal, que simplificando, é o que conseguimos aprender com ajuda de alguém mais experiente, seja um professor ou um colega. Utilizamos os conhecimentos prévios que os estudantes têm, para planejar atividades significativas que permitam que eles cheguem ao conhecimento científico. O bom ensino é aquele que proporciona o conhecimento cientifico, e não fique somente no conhecimento empírico, que é um tipo de conhecimento muito superficial.

Estudantes: (Houve uma breve discussão sobre o assunto).

Estudante 18: Professor, nós já estudamos sobre a Zona de Desenvolvimento Proximal na disciplina de Psicologia da Educação.

Estudante 19: É interessante pensar que a gente depende da matemática o dia todo e nem sempre sabemos.

Estudante 32: Acho que fico apenas no campo empírico, minha Zona de Desenvolvimento Proximal é fechada para a matemática e acabo arrastando, passo por sorte.

Estudante 28: O conhecimento espontâneo é o que trazemos de casa e o científico é o que está nos livros?

Professor: E qual foi o papel da matemática na tomada de decisão do personagem?

Estudante 18: Utilizando a matemática ele conseguiu um camelo extra.

Estudante 25: Graças a inteligência dele, ele se saiu bem.

Estudante 13: Acho que a pessoa que sabe matemática se sai bem nas situações.

Professor: Gente agora quero que vocês socializem os desenhos e representações das frações que fizeram no papel quadriculado.

Estudante 02: Não achei tão difícil fazer os desenhos.

Estudante 20: Não sei quando uma fração é maior ou menor que a outra.

Estudante 13: Através dos desenhos é mais fácil comparar as frações.

Estudante 30: O número de baixo da fração representa a quantidade de partes que a figura vai ter e o número de cima a quantidade que tenho que colorir.

Professor: Alguém sabe dizer como se chama essas partes da fração que a colega explicitou?

Estudante 02: A parte de cima chama-se numerador e a de baixo denominador

Estudante 04: Desenhar e representar a fração é bem simples. Divido o inteiro e pinto a parte desejada, está feita a fração.

Professor: Essas considerações de vocês são importantes, pois evidenciam como vocês concebem as frações, valorizando, sobretudo, o teor visual empírico.

Professor: Os desenhos estão corretos, agora proponho a vocês representarem essas frações que coloquei no quadro e façam as comparações com os sinais de maior que, menos que, e igual a.

Estudante 27: Não sei nem como começar.

Professor: Façam os pares de desenho, uma abaixo do outro que fica mais fácil comparar.

Professor: Pessoal, prestem atenção! Estou vendo o que vocês estão fazendo, e vocês se esqueceram de algo fundamental, a divisão milimetricamente das figuras, por isso estamos usando a malha quadriculada, para facilitar. Se vocês não seguirem as medidas não dará certo na hora de comparar os pares.

Estudante 18: Vou ter que apagar tudo, eu nem me toquei disso.

Estudante 34: É por isso que não estava dando certo.

Estudante 12: esse negócio de milimetricamente significa que preciso usar a régua professor?

Professor: Agora sim está ficando correto!

Estudante 16: Agora deu certo!

Estudante 25: Por causa de um detalhe tive que apagar tudo e fazer de novo.

Estudante 08: Todas as partes da figura têm que ter exatamente o mesmo tamanho.

Professor: Esse é um princípio fundamental das frações.

Professor: E qual foi o papel da matemática na tomada de decisão do personagem?

Estudante 18: Utilizando a matemática ele conseguiu um camelo extra.

Estudante 25: Graças a inteligência dele ele se saiu bem.

Estudante 13: Acho que a pessoa que sabe matemática se sai bem nas situações.

Professor: Pessoal para a próxima aula quero que vocês formem grupos de oito pessoas e façam a seguinte pesquisa: Quais as ideias que temos de fração? O homem sobrevive sem a matemática? Quais evidências têm-se dessa constatação? Na aula seguinte, os grupos irão expor para a sala de aula os resultados da pesquisa.

Professor: Vamos ficar por aqui, foi muito bom estar com vocês.

Estudantes: (Batem palmas).

2º Momento 28/10/2017 (7h:30min as 11h:30min)

Professor: Bom dia pessoa, vamos começar a aula socializando a pesquisa que vocês fizeram, "Caracterização da importância da matemática na resolução de problemas do dia a dia". Cada grupo pode fazer suas principais considerações, abordando, sobretudo, a importância da matemática em nosso dia a dia.

Grupo 03: A matemática é um conjunto de técnicas aplicadas que nos ajudam a resolver problemas do dia a dia.

Grupo 04: A matemática é essência da vida e ela faz parte de nosso dia a dia o tempo todo.

Grupos 05: Por meio da matemática desenvolvemos o senso crítico, principalmente quando sabemos fazer cálculo mental.

Grupo 07: Quem sabe matemática é um ser iluminado, em nosso grupo ninguém sabe e vamos ter que ensinar matemática. O que será de nós?

Grupo 08: Para nós a matemática é um terreno obscuro, onde a maioria escolheu Pedagogia porque não tinha matemática e chegamos aqui e nos deparamos com a mesma.

Estudante 15: Tive uma experiência horrível, tinha que resolver uma situação de compra em uma loja e meu filho disse para mim, mãe como a senhora não sabe isso, eu que estou no 5º ano sei. Fiquei com tanta vergonha que tive vontade de desistir do curso.

Professor: Observem a importância do relato da colega de vocês, porque mesmo intuitivamente usamos a matemática cotidianamente na resolução de problemas, e muitas vezes não conseguimos lidar com a matemática instrumental, seja em uma loja ao fazer e pagar compras, ou medir ingredientes de uma receita, pagar contas diversas, e até mesmo comparar e medir objetos por exemplo.

Professor: Peguem agora os desenhos feitos na aula anterior, observem com bastante atenção o que vocês fizeram, e as frações representadas.

Professor: Agora observem o desenho da reta numérica projetada e o lugar na reta onde se localiza cada fração.

Estudante 11: Interessante professor.

Estudante 18: Elas sempre estão entre dois números naturais.

Estudante 24: Só de olhar essa imagem, minha cabeça já dói.

Estudante 22: Nunca consegui entender isso, uma fração também pode ficar no lugar de um número natural?

Estudante 18: Acho que sim, pois a fração 8/2 pode ficar no lugar do 4. Pois 8 dividido por 2 é quatro.

Professor: Alguém consegue ajudar a colega a organizar esse pensamento?

Estudante 15: Esse tipo de fração é classificado como fração aparente, pois o numerador é maior e múltiplo do denominador, eu vi isso quando estava pesquisando sobre as frações.

Estudante 18: Então posso escrever qualquer número em forma de fração.

Estudante 04: As frações são representações de um desenho representado com partes iguais.

Professor: Todo “objeto original” que não tenha sido dividido é chamado de inteiro. Ao fazer cortes nesse objeto, estamos dividindo-o, ou seja, em partes milimetricamente iguais. Se a divisão resultar em partes iguais, é possível representar esse objeto por meio de frações.

Professor: Agora proponho a vocês que pesquisassem o significado da palavra FRAÇÃO. Podem ir à sala de informática quem não tem internet no celular, vou dar um tempo.

Grupo 04: Professor encontramos que a palavra “FRAÇÃO” vem do latim fractione e quer dizer dividir, rasgar.

Professor: Trouxe alguns dicionários, podem pesquisar neles também.

Grupo 07 e 08: Professor aqui diz que é um substantivo feminino. Ato pelo qual se divide, se parte algo. Parcela de um todo; porção.

Professor: Os dois significados dizem a mesma coisa?

Estudante 28: Acho que sim, tem a ver com dividir em parte iguais.

Estudante 12: É verdade, concordo.

Professor: Agora quero que vocês novamente façam grupo maiores, de seis pessoas mais ou menos, para fazer a próxima atividade, que será uma pesquisa realizada na biblioteca e na sala de informática. Vocês terão cerca de 45 minutos e deverão fazer uma pesquisa sobre o conceito de fração, a origem e a evolução da fração por meio de sua história. Tentar expressar uma fórmula geral, literal e/ou gráfica para a representação de fração na representação de uma parte em relação ao todo.

Professor: Quem pode socializar com a turma os resultados encontrados?

Grupo 02: As frações são tão antigas quanto as civilizações egípcias, são milhares de anos de história e sua ideia vem de divisão de terras às margens do rio Nilo.

Grupo 03: As frações podem ser escritas representadas por letras, por exemplo a/b ou x/y ou qualquer letra que quisermos, onde cada letra pode assumir um valor numérico especifico, se dissermos que a=3 e b=5, a fração a/b será 3/5.

Grupo 05: As frações surgiram da necessidade de se utilizar algum trabalho na prática.

Grupo 07: As frações surgiram a mais de 3.000 a.C às margens do rio Nilo, quando foram distribuídas terras para plantio.

Professor: Como alguns de vocês colocaram, pelo menos há dois mil anos as margens do rio Nilo lá no Egito antigo em que os sujeitos tiveram a necessidade de medir terras, ou seja, criar proporcionalidade. E faz-se uma outra perguntinha: Quais as primeiras relações de uso que nós podemos anotar? Nós já falamos algumas delas, medição de terra é uma relação, o que mais vocês encontraram nas pesquisas de vocês?

Estudante 01: Medir terras.

Estudante 22: Distribuir colheitas.

Professor: (Insiste). O que é mais pessoal? O que vocês pensam? Quero ouvir o que vocês têm para dizer.

Estudante 05: Qual é a pergunta mesmo por favor?

Professor: Quais as primeiras relações uso das frações? lembrem-se que vocês já disseram medir terras, distribuir colheitas, ou seja uma questão de sobrevivência.

Estudante 09: As porcentagens também professor.

Estudante 26: Tem também os números decimais.

Professor: E nós percebemos que fomos nos moldando de acordo as nossas necessidades, hoje por exemplo, nós usamos frações para quê?

Estudante 08: Usamos também para fazer receita de bolo.

Estudante 13: No supermercado ao comprar carne por exemplo, quando digo quero 2 kg e meio de carne, é uma fração, não é professor?

Estudante 02: Sim, ou seja, 2 kg + 1/2 quilo de carne.

Professor: Percebam que não utilizamos frações complexas ali no supermercado, digo por exemplo: Me dê 2 kg e 3/4, porque são números que a gente não tem uma certa precisão da quantidade que eles representam, mas existe, 2 kg de 3/4 é o mesmo que 2,75 quilos, ou seja 2 kg e 750 gramas. Pensar no conceito de frações é pensar em partir, dividir... E por que nós estamos trabalhando o conceito de frações? Esse conceito, é um conceito nuclear do Ensino Fundamental muito importante, dele deriva as porcentagens, os números decimais, até mesmo os números naturais. O que é o número 1? posso dizer que é uma fração?

Estudante 14: Sim professor, o número 1 é um inteiro, ele não está partido.

Professor: Mas lembrem-se que esse 1 pode ser qualquer fração cujo numerador é igual ao denominador, por exemplo se eu chegasse e perguntasse para vocês: O que é 60/60?

Estudante 08: É um inteiro professor porque 60 / 60 = 1.

Professor: E 30/30?

Estudantes: Um inteiro professor.

Professor: Então qual é a diferença dessas duas frações?

Estudante 02: Professor se as duas são iguais a 1 então elas são iguais, eu acho.

Professor: Então pensar neste conceito é também pensar em uma rede de conceitos que temos lá no Ensino Fundamental. Lembrando que este conceito de fração é um conceito muito forte que utilizamos cotidianamente em nossos afazeres. Hoje por exemplo, passamos o tempo inteiro calculando com frações, utilizamos divisão, os decimais, números inteiros, múltiplos, operações de adição, subtração e multiplicação, dentro de uma mesma perspectiva correto? Se começarmos a observar, iremos perceber que as frações fazem parte do nosso dia a dia.

Estudantes: É verdade professor, se pararmos para pensar, utilizamos frações diariamente e nem percebemos.

Professor: Agora quero escutar dos grupos, o que mais vocês têm de contribuição para nós a respeito das frações, vou dar cinco minutinhos para vocês pesquisarem o material de vocês e socializarem com a sala.

Grupo 01: Percebemos que as frações surgiram no Egito, mas a cada momento que outros povos tinham contato com esses números, acrescentavam novas coisas. Por exemplo, no Egito o sistema de numeração era muito complexo, difícil de escrever, em nossas pesquisas vimos que foram os hindus que simplificaram e aperfeiçoaram a forma de escrever as frações, e os babilônios usavam o denominador 160. Interessante que cada povo antigo agregava novas características as frações, adequando o seu uso para o que precisavam, há e lembrando que os egípcios usavam o denominador 1.

Grupo 04: Em nossa pesquisa vimos que os egípcios utilizavam cordas com nós para fazer as medições de suas terras, e que muitas vezes não dava certo por que a medida finalizava entre dois nós, e eles não sabiam o que fazer, por isso criaram as frações.

Grupo 03: Achamos interessante a escrita, o modo como eles escreviam as representações numéricas.

Professor: Outra questão importante e que vocês não podem esquecer é que a fração é uma divisão milimétrica em partes iguais, e aí a questão é: O que é ser milimetricamente igual? O que vocês pensam a respeito disso?

Estudante 06: Todos os tamanhos têm que ter o mesmo pedaço.

Professor: Ou seja, precisa ser medidas exatas, não pode passar ou faltar. Mas alguma consideração acerca do conceito de frações? Então agora eu quero que vocês façam a seguinte atividade: Utilizando o Tangram, vocês conhecem? É um jogo chinês formado por várias peças que funciona como um quebra-cabeça, as peças tem formato geométrico, com essas peças podemos formar mais de 2000 figuras. Observem, coloquei alguns exemplos nos slides para vocês verem como funciona. A sala está dividida em sete grupos, podem continuar no mesmo grupo para fazer este trabalho. Então para esta atividade vocês irão usar as peças do Tangram para fazer comparações entre frações, utilizando os sinais de maior que, menor que, igual a. Vou dar alguns minutinhos para vocês observarem as figuras para podermos fazer as comparações.

Professor: Olhando para o desenho quais figuras são iguais.

Estudante 02: O T é igual ao outro T.

Estudante 02: O t é igual ao outro t.

Estudante 08: O T é maior que o t.

Estudante 36:T é maior que TM, t é menor que V, t é menor que T.

Estudante 23: Q maior que t.

Estudante 27: Q igual a 2 t.

Estudante 02: Q igual a t + t.

Estudante 08: TM igual a Q ou P.

Professor: E aí, ainda tem algumas comparações que podemos fazer?

Estudante 14: T é igual t + Q + TM, está correto professor?

Professor: Pessoal essa comparação que a colega de vocês fez está correta?

Estudante 29: Sim, professor está corretíssimo!

Professor: Olhem o desenho, verifiquem se essa relação é verdadeira?

Estudante 15: Não professor, acho que não, eu não consegui enxergar.

Estudante 06: A figura TM passa um pedaço, então está errado.

Professor: Para ser correto o TM teria que estar dividido por 2.

Estudante 06: Podemos representar todo o Tangram por 2T + 2t + Q + TM + P.

Professor: Por que estou colocando você para pensar assim? Ao analisar as figuras e questionar, vocês vão criando sentido para as comparações que estão fazendo, verificando o que está certo e o que está errado.

Professor: Vocês conseguem visualizar e encontrar a representação de cada parte em um todo? Esta figura está dividida em quantas partes?

Estudantes: Sete.

Professor: Se eu pegar o T, em quantas parte eu divido a figura?

Estudantes: Quatro.

Professor: Corretíssimo, e se considerarmos o Q?

Estudante 17: Nove partes

Estudantes (discutindo entre si): Oito partes.

Professor: Correto, 8 partes,

Estudante 13: Eu disse que eram 8 partes, acertei!

Professor: E agora, quando a fração faz parte de nossas vidas?

Estudante 02: Ao fazer um bolo

Professor: A fração está presente no cafezinho? Observem, quando vou fazer o café eu uso um litro de água, três colheres de açúcar, eu gosto do café super amargo, então coloco 4 colheres de pó ou seja, se eu for fazer eu dobro. Eu não mudo a receita, ou seja, são situações proporcionais, que muitas vezes as pessoas utilizam sem ao menos perceberem que neste caso estão fracionando ingredientes.

Estudante 03: Por exemplo professor, a fração depende do contexto da pessoa, para cozinheira a fração estaria presente nas receitas, se eu fosse um pedreiro, nas medidas que eu estaria fazendo na construção, ou nas quantidades de material.

Estudante 12: Tem muita cozinheira que faz toda a comida e nem sabe que existem as frações.

Professor: Então, depois de tudo o que discutimos, vocês se lembram onde surgiu a fração?

Estudantes: No antigo Egito.

Professor: E por que elas surgiram?

Estudantes: Da necessidade que eles tinham ao medir terras, para dividir os lotes e fazer seus plantios.

Professor: Eu coloquei agora uma situação problema aqui na frente, e vocês terão 20 minutinhos para tentar achar a solução. O problema é o seguinte: Um terreno de 400 por 400 metros foi dividido em sete lotes de tamanhos distintos, porém alguns lotes têm tamanhos iguais, calcule a área de cada lote em metros quadrados. Observem que cada lado do terreno tem 400 metros, agora eu quero que vocês pensem, em grupos, e encontrem a resposta.

Estudante 06: Preciso usar regra de três professor?

Professor: Não precisa, multiplicação primeiro e na sequência trabalhe as frações de cada um deles, podemos verificar que este lote equivale a 1/4 apenas olhando, esse aqui também, e este aqui?

Estudante 10: 1/16 professor.

Professor: Exatamente, já matamos a charada, agora é só calcular.

Estudante 02: Achei interessante professor o senhor usou o Tangram para criar esta atividade e nos fazer pensar em uma situação do dia a dia.

Professor: Gostaria agora que alguns grupos socializassem o que encontrou em sua pesquisa a respeito da fórmula do princípio geral (gráfica e/ou literal) da divisão em partes iguais.

Grupo 02: Encontramos que uma fração é a representação de uma ou mais partes de algo que foi dividido em partes iguais**;**

Grupo 04: Uma fração é a representação de uma ou mais partes de algo que foi dividido em partes iguais; podemos representar por a/b, onde a é o numerador e b é o denominador.

Grupo 07: O denominador indica quantas divisões iremos fazer, e o numerador quantas parte pegaremos da divisão.

Grupo 03: Uma fração representa uma divisão**,** em que o numerador equivale ao dividendo e o denominador equivale ao divisor.

Grupo 01: A fração pode ser representada por a/b = c, onde b é o todo, e a é a parte que pegamos do todo, e c é o resultado da divisão de a por b.

3º momento 04/11/2017 (7h:30min as 11h:30min)

Professor: Bom dia pessoal, animados para a aula de hoje?

Professor: O que vocês podem dizer sobre as relações que estão contidas na fórmula descrita que representa o princípio geral da fração? O princípio geral é igual para qualquer tipo de fração? O que é fracionar?

Estudante 10: Acho que vale para todas as situações, pois nos lugares de a e b, sempre mudarão os números.

Estudante 02: Fracionar é dividir em partes iguais.

Estudante 06: Acho que o princípio geral vale para qualquer fração.

Estudante 09: Descobri em um livro que o principio geral é a divisão de a por b que é igual a c, o c é o resultado da divisão. Toda fração é uma divisão em partes iguais.

Estudante 15: Entender o que é 1/2, 2/5, 3/8 é bem simples, mas ser capaz de entender que a partir dessas frações posso calcular porcentagens, realizar multiplicação, representar decimais e outras operações não é fácil.

Estudante 36: O que estou mais me interessando por este conteúdo é contextualizar a história da fração. Não imaginava que era algo tão antigo, 3.000 a.C, meu Deus, é muito tempo!

Estudante 26: Algo que ficou gravado para sempre foi a palavra milimetricamente igual. Eu sempre fazia um desenho e achava que era dividir em quantas partes eu quisesse. Agora tenho plena consciência que fração é uma divisão muito séria.

Estudante 13: Eu também não tinha me atentado a essa palavra. A partir de agora só vou fazer fração em papel quadriculado, pois tenho a certeza que o desenho ficará perfeito.

Professor: Na modelação da relação diferenciada, é possível perceber as frações na reta numérica, representação de uma fração em determinado intervalo de tempo, ou seja, as representações da relação universal são: a forma objetal, enquanto concreto sensorial, ponto de partida; as formas gráficas como elemento mediador; e a literal, como objetivação idealizada, trata-se da abstração em sua expressão literal.

Professor: Quero agora que vocês façam novamente representações de frações no papel quadriculado, comparando as frações que coloquei no quadro, e me digam se mudou algo quando vocês estão fazendo a tarefa.

Estudante 23: Professor, agora tenho consciência de que para representar frações é preciso material padronizado, fica mais fácil a visualização e a divisão milimétrica, como o senhor falou.

Estudante 09: Eu uso a calculadora e faço a divisão. Na sequência faço as comparações e geralmente não erro. Mas com material padronizado fica mais fácil mesmo.

Estudante 23: A malha quadriculada foi a melhor opção para a representação de frações e mostra a sequência adequada, desenhar, representar, comprovar, etc.

Estudante 02: Antes eu fazia os desenhos de qualquer jeito, agora sei que as divisões precisam ser exatamente do mesmo tamanho.

Estudante 14: Agora sei que preciso usar a régua e usar medidas padrões.

Professor: Lembrem-se das propriedades gerais das frações encontradas, como a divisão milimetricamente do desenho, ou seja, a relação de grandeza. Quero que vocês descrevam, em grupo de quatro ou cinco estudantes, qual diferença ou semelhança tem uma fração própria de uma imprópria? uma fração aparente de uma fração mista? uma fração mista de uma imprópria?

Professor: O que tem de comum nas frações próprias, impróprias, aparentes e mistas?

Estudantes: Numerador e denominador.

Professor: Somente isso?

Grupo 06: As frações mistas têm parte inteira.

Professor: O que mais tem as frações mistas?

Grupo 06: Toda fração mista é uma fração imprópria.

Professor: Algum outro grupo encontrou algo diferente?

Estudantes: Conforme se coloca os números na fração, ela recebe um nome especial.

Professor: Que princípio geral vocês chegaram com esta atividade?

Grupo 06: As frações são muito importantes em nosso dia a dia. Passamos o dia inteiro fracionando. Nosso tempo é fracionado. No entanto, esse conteúdo de hoje é bastante instrumental. Uma fração é própria quando o numerador é menor que o denominador, é imprópria quando for o contrário, é aparente quando feita a divisão, dá um número inteiro e é mista quando apresenta parte inteira e parte fracionária.

Professor: Considerando a história da humanidade, de que forma surgiram o desejo e a necessidade de relacionar episódios, objetos ou quaisquer partes distintas das figuras? E se considerarmos a história da matemática, qual a necessidade desencadeadora da divisão em partes iguais? Qual a definição matemática de fração? Com esses questionamentos quero propor duas atividades. Primeira situação: Brincando com as frações, observem e substituam a interrogação por números naturais de modo que as frações sejam equivalentes, substitua a estrelinha pela fração equivalente irredutível. Que fração é essa gente?

Estudante 03: três terços.

Professor: Olha aqui gente, não tem uma fração incompleta?

Estudantes: Tem.

Professor: Então basta simplifica-la. O que é simplificar uma fração?

Estudante 06: É dividir o numerador e o denominador por um mesmo número até achar a fração irredutível, que não dá mais para dividir.

Professor: Então aqui dá para dividir por 30, 60 por 30 é igual a 2, 90 por 30?

Estudantes: 3.

Estudante 02: Então a fração fica 2/3.

Estudante 02: Isso, e para achar as frações equivalentes basta multiplicar ou dividir numerador e denominador por um mesmo número natural.

Professor: Agora vamos resolver este problema: A velocidade da luz é de aproximadamente 299792 quilômetros por segundo, como promover significado para questões como essa? Vocês conseguem imaginar essa velocidade?

Estudantes: Não.

Professor: Então gravem bem esse número, 299792. Proponho uma atividade onde as frações estejam relacionadas a esse número para o 5º ano. Tenho como extrair a metade desse número? Qual é a fração que representa a metade desse número? para calcular a metade desse número o que eu faço?

Estudante 02: Dividir por 2.

Professor: E como eu faria para calcular 3/4 desse número? Esse número é divisível por 4?

Alguns estudantes: Não!

Professor: É divisível por 4?

Estudante 04: É.

Estudante 05: Não.

Estudante 04: Pode ser.

Professor: É preciso fazer a divisão para descobrir se é divisível por 4?

Estudante 09: Acho que sim, para saber se é divisível.

Estudante 04: Também acho que precisa dividir.

Estudante 02: Acho que não, deve ter algum segredo aí.

Professor: Existe alguns critérios de divisibilidade, são regras onde basta eu olhar o número e saberei se é divisível ou não. Por exemplo, eu posso afirmar que esse número não é divisível por 3, dividam esse número por 3.

Estudantes: (Começam a executar a divisão e a discutir como fazer a divisão).

Estudante 32: Encontramos um número com vírgula, quer dizer, não é uma divisão exata.

Estudante 12: O número é 99 930,6667 fiz na calculadora professor.

Professor: Posso afirmar também que esse número não é divisível por 6.

Estudante 14: Por que professor?

Estudante14: Por que 3 e 6 são múltiplos?

Professor: Se ele não for divisível por 3 não será por 6, sabe por quê? Porque para ser divisível por 6 o número precisa ser divisível por 2 e 3 ao mesmo tempo. Também não é por 9.

Professor: Primeira regra, todo número par é divisível por 2, para ser divisível por 3 tenho que somar os valores absolutos do número e o resultado tem que ser divisível por 3, então o número também será. Somem os números.

Estudante 02: É 38 professor.

Professor: 38 dá para dividir por 3, a conta é exata?

Estudantes: Não.

Professor: Ele é divisível por 4? façam a divisão.

Estudante 25: Sim professor, a conta deu exata.

Professor: A regra para o 4 é a seguinte, se o número formado pelos dois últimos algarismos for divisível por 4, terminar em 00, o número será divisível por 4. Dividam 92 por 4.

Estudante 02: 23, professor.

Estudante 06: Então o número é divisível por 4, pois o número formado pelos dois últimos algarismos é 92 e pode dividir por 4, que é 23.

Estudante 35: Essa regra vale para qualquer número professor?

Professor: Sim, essas regras valem para qualquer número, são ensinados geralmente no 5º ano, no capítulo de múltiplos e divisores do livro de matemática.

Estudante 12: Muito interessante, eu não me lembrava mais, acho que nunca estudei isso.

Estudante 20: Também não me lembro de ter estudado isso.

Professor: Esse número não é divisível por 5, para ser divisível por 5 o número tem que terminar em 0 ou 5, para ser divisível por 7 não tem critério definido. E qual é o critério para ser divisível por 10?

Estudante 06: Esse eu sei professor, o número precisa terminar com zero.

Professor: É isso aí, está correto. Se o número não terminar em zero não é divisível por 10.

Professor: 792 é divisível por 8? O que vocês acham?

Estudante 02: Acho que é sim.

Professor: Qual é o resultado?

Estudante 06: 99.

Professor: Então observem, o critério para 8 é muito parecido com o critério para 4, para ser divisível por 8, o número tem que terminar em 000 ou o número formado pelos três últimos algarismos tem que ser divisível por 8.

Professor: Relembrando, o critério para o 9 é o mesmo critério para o 3, alguém se lembra?

Estudante 17: Vixe, deixa eu olhar.

Estudante 20: Se somarmos todos os algarismos do número, e o resultado for divisível por 3, então o número também será. A regra é a mesma para o 9 né professor?

Professor: Sim, é isso mesmo. A soma de todos os valores absolutos do número é igual a 38, é divisível por 3?

Estudante 01: Não professor.

Professor: Então...

Estudante 01: Também não será divisível por 9.

Professor: É isso mesmo.

Professor: Quantas classes e quantas ordens tem esse número?

Estudantes: 9 classes

Estudante 30: Quatro classes, unidades, dezenas, centenas.

Professor: Não está correto pessoal, esse número tem 2 classes, 6 ordens.

Estudante 02: Ah lembrei professor, a cada três números terá uma classe, e cada número é uma ordem.

Estudante 18: Não sei nem o que é isso mais.

Professor: Vejam bem, começamos com o número, e quantos conteúdos já trabalhamos. Observem, a colega de vocês está certa, a cada 3 algarismos temos uma classe, primeira classe das unidades simples, temos, unidade, dezena e centena, três números ou algarismos formam a classe dos milhares, teremos unidade de milhar, dezena de milhar, e centena de milhar, e assim sucessivamente.

Estudante 17: Não lembro de mais nada disso professor.

Estudante 32: Faz muito tempo que vimos isso, não lembro mais.

Professor: Então este número é composto de duas classes e seis ordens. Observem que hoje trabalhamos conteúdos de 5º ano, vocês irão dar aulas para o 5º ano no futuro, é lógico que esses conteúdos são ensinados de forma mais simples lá, mas vocês precisam saber além...

Professor: Vamos decompor esse número? O que é decompor um número, alguém sabe?

Estudante 02: Somar as unidades, dezenas e centenas professor? tipo 200000 + 90000 + 9000 + 700 + 90 + 2

Professor: E qual é esse número?

Estudantes 24: 299 792.

Professor: É isso mesmo.

Estudante 15: Isso é muito complicado.

Professor: Como se lê esse número?

Estudantes: Duzentos e noventa e nove mil, setecentos e noventa e dois.

Professor: Se fosse dinheiro como seria escrito?

Estudantes: Acrescenta-se a palavra reais no final.

Estudantes: Duzentos e noventa e nove mil, setecentos e noventa e dois reais.

Estudante 02: Eu acho que o senhor tinha que dar mais aulas para nós professor, para aprendermos mais.

Professor: Vamos finalizar gente, quero dar os parabéns, já é perceptível o desenvolvimento de vocês durante as aulas. Quero que observem as aplicações teóricas/práticas do conceito de fração nas ações do dia a dia e tragam exemplos da aplicação das frações em situações do cotidiano, sobretudo, na construção do sistema de tarefas particulares que podem ser resolvidas por um procedimento geral.

4º Momento: 11/11/2017 (7h:30min as 11h:30min)

Professor: Bom dia pessoal.

Estudantes: Bom dia

Professor: Antes de iniciarmos nossa aula, quero que vocês socializem os exemplos da aplicação de frações no dia a dia que ficou como tarefa de casa.

Estudante 1: Nas receitas de bolo, sempre aparecem $1\frac{1}{2}$ de xícara de óleo, por exemplo.

Estudante 26: Todo trabalhador, com carteira assinada tem direito a $\frac{1}{3}$ a mais no salário quando sai de férias.

Estudante 28: Quando comemos pizza ou pedimos uma pizza a metade de frango e a outra metade calabresa.

Estudante 23: Quando trabalhamos com moedas estamos mexendo com frações, por exemplo: Com duas moedas de 50 centavos consigo formar 1 real R$ 0,50 = 1/2 do Real. Com 10 moedas de 10 centavos, também formo 1 Real: R$ 0,10 = 1/10 do Real.

Estudante 18: As notas musicais são formadas por frações, que dessa forma produzem sons diferentes.

Estudante 23: Para verificar quanto um carro tem de combustível dentro do tanque.

Professor: Muito bem, dando continuidade, como já foi pesquisado por vocês, as notícias mais antigas sobre o uso das frações vêm do Egito. As terras que margeavam o rio Nilo eram de propriedades do Estado. Este dividia as terras entre os grupos familiares, em troca de pagamentos de tributos. Como o rio Nilo sofria inundações periódicas, as terras tinham de ser sempre medidas, já que o tributo era pago proporcionalmente à área a ser cultivada. E hoje como o governo tributa nossos impostos? Que fração do todo pagamos como forma de impostos? Trabalhamos quantos meses e dias para pagar os impostos? Que fração representa esses meses e dias em relação ao ano todo?

Estudantes: (Discutem entre si).

Estudante 36: Eu acho um absurdo pagar 27,5% de imposto de renda, mas meu sonho é pagar R$ 5.000,00 de imposto de renda todo mês. É sinal que estou ganhando bem e como professor ainda.

Estudante 12: Pago 11% de previdência social e 6% de vale transporte e isso tudo sai do meu salário que é ruim e fica pior.

Estudante 14: Professor, você sabe de onde vem a expressão quinto dos infernos? Eu pesquisei e tem tudo a ver com a cobrança de impostos.

Estudante 13: Todos nós sabemos que boa parte dos alimentos que compramos são taxados com altos impostos. E a gasolina, essa sim, é de doer.

Estudante 09: Segundo os dados da internet, trabalhamos mais de 5 meses apenas para pagar impostos. Isso significa 5/12 do meu trabalho é de imposto puro. E o pior é que não temos prestação de serviço digna. Nossa saúde está um caos, a educação pública da mesma forma. Não temos segurança e só temos impostos para pagar.

Professor: Pessoal quero que vocês formem 6 grupos para discutirmos algumas questões.

Professor: Reflitam. Qual a ideia que temos então, de fração? Esse é um conhecimento empírico ou científico? De que forma podemos relacionar as partes de uma figura com o todo? vocês terão 25 minutos para discutirem essas questões. Podem começar.

Estudantes: (Começa uma longa discussão entre os estudantes)

Professor: Então, os grupos agora podem socializar o que pensaram a respeito dos questionamentos.

Grupo 01: Fração é dividir o inteiro em partes milimetricamente iguais, usando, preferencialmente, material padronizado como a malha quadriculada.

Grupo 02: Em nossa casa usamos fração o tempo todo. Quando vamos fazer uma receita de bolo usamos o meio, o litro e meio, dentre outras medidas. Aprendemos no dia a dia e aqui na faculdade caminhamos para o campo científico.

Grupo 03: As partes vão representar do todo, a parte tomada para si. Se coloco a fração, por exemplo, 3/4, vai significar que o inteiro foi dividido em quatro partes e foram tomadas três partes.

Grupo 04: Nosso grupo discutiu sobre a malha quadriculada e percebeu que o material padronizado é bastante interessante, pois fica visível as partes do mesmo tamanho.

Grupo 05: No nosso modo de ver, a fração é aplicada no campo teórico e no campo científico. No ENEM temos inúmeros problemas que são resolvidos com tudo que vimos em sala de aula.

Grupo 06: As frações servem para solucionar diversos problemas do dia a dia. Inclusive ela pode ser representada em forma de decimais. É um conteúdo com inúmeras aplicações.

Professor: Agora quero que vocês reflitam sobre as seguintes questões. É possível calcular a parte de uma figura com diversas representações fracionárias? Que relações são feitas para o cálculo das frações próprias, das impróprias, das mistas e das aparentes?

Professor: O que distingue uma fração da outra? É possível estabelecer relações do modo de calcular a parte do todo?

Professor: O que são frações equivalentes?

Estudante 02: É quando representam o mesmo valor.

Estudante 17: Não me lembro, tem muito tempo que estudei isso.

Professor 36: A colega de vocês está certa. São frações que representam o mesmo valor, por exemplo 1/2 e 2/4, 2/3 e 4/6.

Estudante 36: Eu me lembro, para achar a fração equivalente, basta multiplicar o numerador e o denominador por um mesmo número.

Professor: Vale somente multiplicar?

Estudante 12: Pode dividir também.

Professor: E o que é uma fração própria, imprópria ou aparente? E um número misto?

Estudante 34: Número misto eu lembro, é quando tem um número inteiro junto com a fração.

Professor: Isso mesmo.

Professor: Vou dar um tempo para que vocês pesquisem sobre frações próprias, impróprias e aparentes.

Estudantes: (Houve uma breve discussão, e alguns grupos foram a biblioteca e na sala de informática pesquisar).

Estudante 14: Professor encontramos, quando o numerador e menor que o denominador chamamos de fração própria.

Estudante 9: Quando é o contrário chamamos de imprópria.

Professor: E quando são aparentes?

Estudante 17: É quando o numerador é múltiplo do denominador, e representam sempre um inteiro.

Estudante 14: Simplificar uma fração, é achar a fração irredutível através de divisões do numerador e denominador por um mesmo número.

Estudante 15: O que diferencia uma fração da outra é a relação de grandeza, classificação, representação de medidas ou volumes.

Estudante 30: Professor lá no livro do 5º ano tinha o seguinte exemplo: Em uma escola haviam 240 alunos, dos quais $\frac{3}{5}$ (três quintos) eram meninas e o restante era de meninos. Qual a quantidade de meninos e meninas dessa escola? Professor acho que esse é um exemplo onde se estabelece relações do modo de calcular a parte do todo.

Professor: Muito bem!

Professor: Vejam a reta numérica projetada no quadro, observem, e reflitam, todo número natural é maior que zero, mas nem todo número maior que zero é natural.

Estudante 24: Não entendi, é muito complicado professor.

Professor: Olhem para a reta, quais números que vocês veem?

Estudante 2: Zero, um, dois, três...

Professor: Isso, e que números são esses?

Estudante 8: São os números naturais.

Professor: Existe números entre os naturais?

Estudante 01: Não.

Estudante 12: Aí não vejo nenhum.

Estudante 27: Existe professor, os decimais.

Estudante 5: E as frações também, pois são pedaços dos inteiros.

Professor: Isso mesmo.

Professor: Agora formem grupos, de três ou quatro para realizar a próxima atividade.

Professor: Para finalizar a aula iremos assistir novamente a animação “O homem que calculava, o problema dos camelos”, quero que vocês assistam com bastante atenção, e reflitam sobre o filme, e tentem encontrar a resposta para o problema q o filme propõe, e também quais relações estão contidas na fórmula descrita que representa o princípio geral da fração? O princípio geral é igual para qualquer tipo de fração? O que é fracionar? pois iremos discutir na próxima aula.

5º Momento 18/11/2017 (7h:30min as 11h:30min)

Professor: Lembram da animação o problema dos camelos, então agora vamos fazer algumas considerações sobre o filme e tentar resolver o problema. Qual a ideia temos de operações com frações? Esse é um conhecimento empírico ou científico? De que forma podemos relacionar as partes de uma figura com o todo?

Estudante 02: Pelo que vimos até agora, temos o conhecimento empírico

Estudante 14: Estamos estudando para chegar no conhecimento científico.

Estudante 32: Quando vou cozinhar e uso frações nas medidas, mesmo sem perceber, estou usando conhecimento empírico.

Estudante 22: O conhecimento cientifico vai muito além de uma simples atividade onde é preciso colorir partes de uma pizza ou de um chocolate para representar uma fração.

Estudante 06: Quando utilizamos o conceito de fração, não precisamos relacionar a um objeto especifico, quer dizer, uma pizza, ou medida contida em uma xícara, por exemplo, pois a divisão é de uma unidade.

Professor: Tem uma maneira de pensar, onde está a solução deste problema, tem uma solução?

Professor: Antes de começarmos a pensar nas possíveis soluções, quero que vocês representem as frações 1/2, 1/3, 1/9 utilizando três desenhos do mesmo tamanho e façam as possíveis comparações.

Estudante 05: É para usar a malha quadriculada professor?

Professor: Se possível sim, para termos um padrão de medida lembra?

Estudante 02: 1/2 é a metade da figura, divido ela em duas e pinto a metade.

Estudante 13: Professor ao colorir o desenho é possível perceber que 1/9 é a menor das frações, e 1/2 a maior.

Estudante 07: Sempre acho mais fácil comparar as frações depois que desenho, fica na cara quem é a menor e quem é a maior.

Estudante 27: 1/3 está no meio, é menor que 1/2, mas é maior que 1/9.

Professor: Agora que vocês visualizaram as frações, e fizeram as comparações, vamos voltar ao problema dos camelos.

Estudante 02: Professor tem que tirar o mínimo múltiplo comum?

Estudante 14: Sobrará um camelo, pois a soma das três frações não representa um número inteiro, logo, sobrará camelo.

Professor: Interessante, aí você já começa a clarear as ideias, veja bem, se eu tirar o mínimo múltiplo comum... alguém sabe o que é mínimo múltiplo comum?

Estudante 2: É o menor número que dá para dividir os três ao mesmo tempo!

Professor: Então eu vou encontrar o menor número que vai dividir ao mesmo tempo o 2, 3 e 9. Observe um detalhe, se eu dividir por 2, vai dar 1, o 3 não pode e o 9 não pode. Se eu dividir por 3, desço 1, 3 dividido por 3 é um, e 9 dividido por 3 é 3. Divida novamente por 3, desço 1 aqui e aqui, 3 dividido por 3 é igual a 1. Bom e agora vocês sabem o que eu devo fazer?

Estudante 14: Tenho que multiplicar 3 pelo 3 e pelo 2 que vai dar 18.

Professor: Próximo passo, colocamos o 18 no denominador e vamos dividir denominador com denominador e multiplicar pelo numerador.

Estudante 35: Eu me lembro disso, é uma regrinha que os professores sempre ensinaram a decorar.

Professor: Ao somar os resultados, ou seja, conservando o denominador e somando os numeradores teremos 17/18. Aqui tem um segredo desta conta ter dado certo. Qual é o segredo?

Estudante 16: Porque este primeiro era 17, depois ficou 18.

Estudante 06: Só podemos somar frações com denominadores iguais**.**

Professor: Não é isso.

Professor: Por que ao adicionar um camelo ele resolveu todos os problemas? e ainda saiu com dois camelos. Por que ele acrescentou mais um?

Estudante 22: Se você pegar 18/18 e 17/18, então o 18/18 é um inteiro, e o 17/18, é..., ai professor me enrolei.

Professor: Seu raciocínio está correto, só vamos completá-lo agora.

Professor: Alguém pensou como a colega e é capaz de explicar melhor. Pessoal esse momento é muito importante nas discussões, pois vocês estão criando ações mentais para resolver o problema.

Estudante 12: Eu não consigo professor.

Estudante 25: Eu também não.

Estudante 14: Depois que chegou nesse ponto professor, pega 18/18 e tira 17/18, e sobra 1/18, que representa o camelo.

Professor: Exatamente, a fração que o pai utilizou para dividir os camelos não fecha em um camelo inteiro.

Estudante 22: E aí o cara usou a esperteza porque sabia mais matemática, esse é o truque, não é professor!

Professor: Ao aumentar um camelo a conta fechou e ainda sobraram camelos e os filhos ficaram felizes. Imagine agora uma situação bem mais produtiva nesse sentido, supondo que ao invés de fazer isso, eu desse 1/2 para um, 1/4 para outro, e daria para o outro 4/9, vejam bem, agora os camelos seriam suficientes? pensem 10 minutinhos e me deem a resposta.

Estudantes: (Discutem entre si, tentando achar a resposta).

Professor: Sigam o mesmo caminho do problema anterior.

Professor: Que conclusão nós chegaríamos se o pai dissesse o seguinte; eu vou dar 1/2 camelos para o filho mais velho, 1/4 para o filho mais novo, e 4/9 para o filho mais novo. Qual é a conclusão que chegaríamos?

Estudante 25: Esse senhor está fazendo as contas erradas.

Estudante 12: Não vai dar certo.

Estudante 22: Professor ele está dando mais camelos do que tem.

Estudante 17: Acho que faltaria um camelo

Professor: Isso mesmo, ele está dando mais camelos do que tem. Se chegasse alguém para distribuir esses camelos, teria que acrescentar muito mais camelos e ficaria sem nenhum.

Estudante 12: Aumentaria 7/36 de camelos professor.

Professor: Vejam bem, fazendo os cálculos necessários, tirando o mínimo, e fazendo as somas, o resultado será 43/36, ou seja, significa que ele ia gastar todos os camelos que ele tinha, que eram 35 e ainda teria que acrescentar, mas quantos camelos?

Estudante 14: Aumentaria 8 camelos e ainda perderiam 8.

Professor: Qual seria a fração para distribuir os camelos entre os filhos, e a conta seria certinha para os 35 camelos? pensem e tentem achar a solução. Será que é possível? eu não estou afirmando que é. Tentem encontrar a solução!

Estudantes: (Discutem entre si, tentando achar a solução).

Professor: Uma dica, procurem trabalhar com denominadores diferentes.

Professor: Sugiro duas linhas de raciocínio. 1ª o Beramis oferecendo um camelo resolvendo o problema, mas não ganhando nenhum camelo, 2º o Beramis fazendo a divisão igualzinha sem ter que oferecer camelos, 3ª situação, agrega um camelo, resolve o problema, e ganha um camelo de volta. Tentem essas três estratégias, qual delas dará certo?

Professor: Vocês têm 10 minutos para pensar!

Estudantes: (Discutem entre si, tentando uma solução).

Estudante 02: Professor, mas esta divisão não precisa ser em partes iguais não?

Professor: É o seguinte, essa divisão não é para ser em partes iguais não, porque 35 não é divisor de 3, resumindo não pode ser em partes iguais.

Estudante 06: Pode mudar os números?

Professor: Pode, vocês devem mudar as frações, mas o número é 35.

Estudantes: (Continuam a discussão).

Professor: Já experimentaram usar duas frações com o mesmo denominador?

Estudante 22: Hum, vou tentar.

Estudantes: (Continuam a discutir).

Professor: Conseguiram? Bom, primeira situação, para eu fazer sem ganho e o problema ser resolvido facilmente o que eu tenho que pensar? Qual é a relação que eu tenho que fazer?

Estudante 02: Coloquei o denominador 35, aí o primeiro vai ganhar 18 camelos, ou seja, 18/35 o segundo vai ganhar 12 camelos ou seja 12/35, e o terceiro para dar 35, vai ganhar cinco camelos, ou seja, 5/35. Simplifique essas frações, as que dão para simplificar, vai ficar, 18/35, 12/35 e 1/7.

Professor: Essa é uma possibilidade sem ganho, vejam bem, quais são os divisores de 35?

Estudante 01: 7 e 5 e por ele mesmo.

Professor: Então eu só teria três possibilidades de trabalhar com esta situação se eu usasse o denominador 35 ou denominador 7 ou denominador 5. Então usando esses três denominadores tentem fechar essa conta.

Estudante 37: Usando esses três números?

Professor: Sim

Estudantes 12: (Discutem mais uma vez, procurando encontrar as respostas).

Professor: Então, agora as coisas começam a ficar mais claras. O que vocês pensaram?

Estudante 22: Estou achando difícil professor.

Estudante 02: 2/5 + 3/7 + 6/35, acho que essa é a resposta.

Professor: Quem não conseguiu fazer? E quem conseguiu? Confirme se essa resposta da colega é verdadeira.

Estudante 02: Sim professor, deu 35 exatos.

Estudante 06: Tem que dar 35/35 professor?

Professor: Sim.

Estudante 17: Então deu certíssimo.

Professor: Eu faço essa soma?

Estudante 02: Precisa tirar o MMC, depois divide denominador com denominador e multiplica pelo numerador, e por último faz a soma.

Professor: Uma dica, para tirar o MMC entre números que são primos basta multiplicarmos, e se os números forem múltiplos basta pegar o maior.

Professor: Todos conseguiram achar a resposta agora?

Estudantes: Sim!

Professor: Próxima possibilidade, ele irá dar um camelo e irá perder o camelo que ganhou.

Estudante 10: Ao colocar um camelo fica 12, 18 e 6. Resolveu seu problema.

Professor: Alguém achou mais uma possibilidade?

Estudante 26: 8, 16 e 12 professor.

Estudante 05: A minha está certa? eu coloquei, 2/36 + 1/2 + 4/9.

Professor: Ele teria então 18, 4 e 16, está certo, ele perderia um também. Correto?

Professor: Então pessoal perceberam qual é o segredo? no primeiro caso a fração não fecha.

Estudante 02: Acho que é porque 35 não é múltiplo de 3.

Estudante 14: Concordo, não dá para dividir, não dá exato.

Professor: Próxima tarefa que vocês irão fazer em casa, precisará ser escrita à mão. Elabore dois exercícios contextualizados que trabalhem frações, um para o 5º ano e outro para o 8º ano, podem pesquisar à vontade nos livros didáticos. Precisa escrever o problema e resolvê-lo, é necessário ter esquemas, desenhos e ilustrações, principalmente o do 5º ano.

6º Momento 25/11/2017 (7h:30min – 11h:30min)

Professor: Bom dia! Vamos começar nossos trabalhos!

Professor: Sobre as operações realizadas no problema sobre o filme, alguém ainda tem dúvida?

Estudantes: Agora está claro professor.

Estudante 12: Foi complicado, mas no fim entendemos o que aconteceu, e quais as contas que precisam ser feitas.

Professor: Nesta ultima aula, vou propor a vocês que resolvam seis situações problema, utilizando todos os conhecimentos adquiridos sobre o conceito de frações, lembrem-se de tudo que foi discutido aqui até hoje. Durante o processo, se surgirem dúvidas vamos procurar sanar, com exemplos práticos ou similares aos problemas.

Estudante 06: Explica o primeiro professor.

Professor: Pessoal, lembram daquele problema do terreno de 400 por 400, que tem as divisórias como o Tangram, onde calculamos a área de cada divisória, e as frações dos terrenos em números decimais, lembram como ficou as respostas?

Estudante 02: É o trabalho de representações decimais.

Estudante 05: Veja se ficou certo professor, T é igual a 0,25 = 25%

Professor: É isso mesmo, então se esse Tangram representasse um terreno de 400 por 400, quanto seria em metros quadrados T, t, P, Q e TM? Vocês tiveram alguma dificuldade em fazer essa tarefa? O que significa dizer que esse terreno é 400 por 400, alguém sabe dizer?

Estudante 14: É um quadrado professor, tem os quatro lados iguais.

professor: E nessa próxima questão, alguma dúvida? Vou dar um exemplo, a estudante 3 gasta 1/4 do seu salário com aluguel, ela gasta 1/8 com salão, gasta 3 décimos com a prestação do carro, e ainda gasta 5/20 com supermercado, sobrando 500 reais do seu salário, a pergunta é: Qual é o seu salário?

Estudante 35: Esse problema é muito complexo professor.

Estudante 22: Nem sei como começar.

Professor: Na realidade ele é muito simples... o que eu preciso entender, tenho algumas frações, 1/4, 1/8, 3/10, 5/20, pensem... o que ela gasta mais?

Estudante 2: Com aluguel 1/4.

Estudante 22: Com carro?

Professor: Pensem...

Estudante 22: Eu acho que 1/4 é o maior.

Estudante 14: Se eu dividir 3 por 10 vai dar 0,3, se eu dividir 1 por 8 vai dar 0,125, se eu dividir 1 por 4 vai dar 0,25. Aí eu posso comparar né professor?

Professor: Este é um caminho para se comparar os números fracionários, ela transformou em números decimais para comparar quem era o maior quem era o menor. Isso é importante pessoal, lembrem-se, sempre que for comparar, precisa ter grandezas iguais, ou seja decimais com números decimais, porcentagem com porcentagem, metro com metro, centímetro com centímetro, etc. Neste caso a colega de vocês transformou todas as frações em números decimais para poder comparar quem era maior e quem era menor.

Professor: Então pegue a calculadora de vocês e vamos lá, dividam 1 por 4.

Estudante 2: 0,25.

Professor: Dividam 1 por 8.

Estudante 2: 0,125.

Professor: Dividam 3 por 10.

Estudante 14: 0,3.

Professor: Agora 5 por 20.

Estudante 14: 0,25.

Professor: Qual é a conclusão que chegamos?

Estudante 2: Acho que ela gasta mais com aluguel e o carro.

Estudante 14: Ela gasta mais no carro.

Professor: Por que você chegou a essa conclusão?

Professor: Vocês concordam?

Estudantes: Sim professor, ela gasta mais com carro do que com o aluguel!

Estudante 14: 0,3 é o mesmo que 30%, isso quer dizer que ela gasta 30% do salário com a prestação do carro.

Professor: Perfeito, perfeito!

Professor: E agora uma outra pergunta, quanto ela comprometeu do seu salário, só que agora quero os valores em porcentagem.

Estudante 27: O carro já é 30%.

Estudantes: (Discutem entre si tentando achar os valores, utilizando a calculadora).

Estudante 02: Noventa e dois virgula cinco por cento.

Professor: Então ela compromete 92,5% do seu salário.

Estudante 35: Como chegou nessa conta professor?

Estudante 02: Somando todas as porcentagens das frações, dá 92,5%.

Estudante 35: Só no aluguel e nas compras do supermercado já se vão 50% do salário, com o carro 30%.

Professor: Então já temos 80% dos gastos.

Estudante 14: Então faltam 12,5% do salão.

Professor: Correto, resultando em 92,5%.

Professor: Uma pergunta, o salário dessa estudante é alto ou baixo?

Estudante 06: Acho que é alto porque ainda sobrou 500 reais

Estudante 12: Concordo!

Estudante 24: Acho que não dá para saber se o salário dela é alto ou baixo.

Professor: Dá para saber sim, alguém pode ajudar?

Estudante 02: Ela gastou mais de 90% do salário, e ainda sobrou 500 reais, o salário dela é alto sim.

Professor: E qual é o salário da estudante 3?

Professor: Observe que sobraram 7,5% do salário dela, que corresponde aos 500 reais.

Professor: Será que este salário é maior ou menor que 5000 reais?

Estudantes: (Discutem tentando achar a solução).

Estudantes: Achamos que ganha mais.

Professor: por quê?

Estudante 02: Porque se 7,5 é igual a 500, então 10% equivale a mais de 500 e vamos ter 10% nove vezes.

Estudante 05: Se fosse 10% seria oitocentos

Professor: O primeiro passo para descobrir o salário da estudante 3 é somar todas as frações. Como eu somo essas frações?

Estudante 02: Precisa tirar o MMC, e usar a regrinha.

Professor: Por que tenho que tirar o MMC?

Estudante 14: Porque as frações têm denominadores diferentes.

Professor: Então vamos lá, qual é o mínimo múltiplo comum de 4, 8, 10 e 20?

Estudantes: (Fazem os cálculos necessários).

Estudante 09: É 40 professor.

Professor: Como chegaram no quarenta?

Estudante 02: Dividindo os números simultaneamente pelos números primos, começa com o 2 depois 3 e assim vai...

Professor: Correto.

Professor: E agora o que eu faço com o 40?

Estudante 12: Sempre me esqueço quando faz isso.

Estudante 23: Divide depois multiplica.

Estudante 26: Usa como denominador

Estudante 14: Divide 40 por todos os denominadores e depois multiplica pelo numerador tendo uma fração nova, e daí podemos somar tudo.

Estudante 02: Para somar, conserva o denominador.

Professor: Somando as frações qual é o valor que teremos?

Estudantes: 37/40.

Professor: E o que significa esse valor?

Estudante 17: É o que ela gastou!

Professor: Todos compreenderam?

Estudantes: Sim.

Professor: Então a pergunta que se faz é: Qual é a fração inteira que representa o salário da estudante 3?

Estudante 12: 40/40.

Professor: Qual é o resultado da soma que ela gastou?

Estudantes: 37/40.

Professor: Qual é a fração que sobrou? Todos estão me acompanhando? Este é o exercício 2.

Estudante 02: 3/40.

Professor: Então é esta sombra que é importante para nós. 3/40 é igual a quê?

Estudantes: Quinhentos.

Professor: Então qual é o salário?

Professor: 3/40 é igual quanto?

Estudante 23: 3/40 é igual a 500.

Professor: Então agora chegaremos ao salário da estudante 3.

Professor: Lembre-se, quando eu tenho o “de”, é o mesmo que multiplicação, e quando é o “igual”?

Estudante 2: É o contrário, é divisão.

Professor: Então qual é a conta que se faz?

Estudante 14: quinhentos... ai professor não sei.

Estudante 02: É só dividir 500 por 3.

Estudante 13: Faltou multiplicar.

Estudante 13: 500 dividido por 3 x 40, é isso professor?

Professor: Está certo essa conta pessoal?

Estudantes: Sim!

Professor: Qual é o salário?

Estudante 02: 6677.

Professor: Todos entenderam, encontraram uma solução? Este era parecido com o probleminha 2.

Professor: Depois vocês terão tempo de verificar se está tudo correto.

Professor: Vamos fazer um problema parecido com a questão 3, agora. alguém leia a questão 3 por favor.

Estudante 02: Fabiana assumiu uma turma de 5º ano do Ensino Fundamental neste semestre. Na turma dela há 35 estudantes. O conteúdo previsto e planejado para esta semana foi o de operações com frações. Ela levou uma barra de chocolate para a sala de aula para motivar os estudantes na visualização da divisão em partes iguais. Iniciou a aula fazendo perguntas para a turma, onde ficou evidenciado que apenas 1/7 não reconheciam as frações e não representavam adequadamente as frações. Esses estudantes não conheciam numerador e denominador de uma fração e não eram capazes de classificar as frações. Mediante esta realidade, responda as questões seguintes:

a) Quantos estudantes não sabiam nada sobre as frações?

Professor: Ok, vamos parar aí, vamos resolver um problema igual, mas com os valores diferentes. Fabiana tem 40 estudantes, dos 40, 3/8 não reconhecem frações, então a pergunta é, se 3/8 não reconhecem, então quantos reconhecem as frações?

Estudante 05: 7/8.

Estudante 19: 5/8, sei lá uai, estou jogando no bicho.

Estudante 03: 3/8.

Professor: Qual é a fração que representa um inteiro pessoal?

Estudante 02: 8/8.

Professor: Se 3/8 não reconhecem as frações, quantos reconhecem?

Estudante 12: 5/8, porque 3/8 + 5/8 é igual a 8/8.

Professor: Vocês concordam?

Estudantes: Sim!

Professor: E agora qual é a conta devo fazer para saber a quantidade de estudantes que não sabem frações?

Estudante 36: 3/8 de 40 alunos.

Professor: E qual é a conta?

Estudante 36: Se é “de”, então devo multiplicar.

Estudante 13: Então é 3 x 40 que é igual a 120.

Professor: Terminou a conta?

Estudantes: Não! falta dividir pelo 8.

Estudante 05: Eu fiz diferente, dividi 40 por 8 e multipliquei por 3, deu 15 também.

Estudante 22: Fico confusa, tem muitas formas de fazer

Professor: O jeito que a colega fez também está correto, o importante é seguir o seu raciocínio correto.

Professor: Então qual é a quantidade de estudantes que não sabem frações?

Estudante 26: 120 dividido por 8, que vai ser igual a 15.

Professor: O quê quer dizer o 15?

Estudante 13: Alunos que não sabem.

Professor: E quantos estudantes sabem? Como descubro?

Estudante 02: Tem que tirar o 15 dos 40.

Estudante 21: Tem que diminuir.

Estudante 22: São 25 estudantes que sabem.

Professor: Qual é a porcentagem dos estudantes que tinham as noções necessárias? Neste caso, quantos sabiam?

Estudante 02: 15.

Professor: Então 5/8. E como eu encontro a porcentagem agora?

Estudante 15: Basta dividir 5 por 8 e multiplicar por 100.

Estudante 01: Pode também multiplicar 5 por 100 e dividir por 8.

Estudante 17: Deu 62,5%.

Professor: Isso mesmo.

Professor: Até aqui, alguma dúvida?

Estudante 02: Não professor, até aqui consegui entender.

Estudante 22: Estou com um pouco de dificuldade, mas confesso que não tive tempo para rever os problemas.

Estudante 16: Eu também não tive tempo, trabalho muito e chego exausta em casa, e ainda tenho que cuidar da casa, marido e crianças.

Estudante 30: Isso também acontece comigo.

Professor: Todos nos temos problemas, e precisamos saber lidar com as situações, hoje são apenas atividades, mas no futuro, serão aulas que vocês terão que ministrar todos os dias, reflitam sobre isso.

Professor: Qual é a próxima pergunta da atividade?

Estudante 02: Como a maioria da turma sabia as noções elementares de frações, Fabiana colocou no quadro as seguintes situações, que agora você irá resolver.

Professor: Vamos colocar 1/8 de 48624.

Professor: Como eu tenho o “de”, então será?

Estudante 26: Multiplicação, fica 48624 x 1 dividido por 8.

Professor: E qual é o resultado?

Estudante 26: 6078.

Estudantes: Professor eu ainda não entendi a letra b, como acho a porcentagem?

Professor: Vamos imaginar essa sala, ela tem 37 estudantes, desses 37 estudantes, 12 estão fazendo o curso por fazer, aí eu pergunto, quantos por cento representa esses estudantes?

Professor: Quantos estudantes têm na sala?

Estudante 02: 37.

Professor: Quantos fazem o curso por fazer?

Estudante 14: 12.

Professor: Quero saber a porcentagem, basta dividir 12 por 37 e o resultado multiplicar por 100, aí eu encontro a porcentagem de estudantes que estão fazendo o curso por fazer. Quantos são?

Estudante 02: 32,4%.

Estudante 06: Agora eu entendi como faz a conta de porcentagem.

Professor: Qual é a próxima questão? Aqui faz a seguinte pergunta, qual a porcentagem que representa cada um dos números, por exemplo, se eu pego 1/5, essa fração representa qual porcentagem?

Estudantes: (Acontece uma breve discussão em busca da resposta).

Estudante 14: Tem que pegar 1 dividir por 5 e multiplicar por 100, é isso professor?

Professor: Exatamente, está correto. Qual é a resposta?

Estudante 14: 20.

Professor: E 1/6? Representa qual porcentagem?

Estudante 05: 16,666...

Professor: Precisa arredondar, quanto fica?

Estudante 12: 16,7%.

Professor: Vamos resolver o seguinte problema, vende-se um terreno de 600 por 400 metros. A pergunta é: Ele foi cercado completamente com 6 voltas de arame farpado, quantos rolos de 500 metros foram necessários? 15 minutinhos para vocês resolverem!

Estudantes: (Começam a discutir entre si a soluções para o problema).

Estudante 22: Eu vou fazer base x altura?

Professor: Não, aí você vai calcular a área, não é isso que queremos.

Professor: Neste caso iremos trabalhar com o quê, área ou perímetro?

Estudante 02: Perímetro.

Estudante 12: Precisamos saber qual é a medida da volta completa do terreno.

Estudante 05: É só somar os lados.

Estudantes: 12 rolos professor.

Estudante 26: 24 rolos.

Professor: Como vocês fizeram?

Estudante 26: 600 + 600 + 400 + 400 que é igual a 2000 metros.

Estudante 02: 2000 x 6 voltas é igual a: 12000 metros

Estudante 22: E agora professor?

Professor: Está certo continuem...

Estudante 15: Dividir 12000 por 500, porque o rolo só tem 500 metros

Estudante 02: Vai precisar de 24 rolos.

Professor: Se aqui desse por exemplo 24,3 rolos, e eu fosse lá comprar, quantos rolos teria que comprar?

Estudante 22: Quem tinha que fazer essa conta era o vendedor.

Estudante 22: Comprava 25, melhor passar que faltar

Professor: Por que estamos estudando este exemplo? Porque para estes casos aqui, critérios de arredondamento não vale, porque se eu levar 24 rolos vai faltar. Então observem, o 3 após a vírgula, significa 30% do próximo rolo então, quanto é 30% de 500? Observem como precisamos da porcentagem em um caso prático? Quanto será 30% de 500?

Estudante 02: Esse pedaço equivale a 150 metros de um rolo.

Estudante 22: Como você calculou isso?

Estudante 02: É só dividir 30 por 100 e multiplicar por 500.

Estudante 02: Então precisa comprar 24 rolos + 150 metros.

Professor: Alguma dúvida pessoal?

Estudantes: Não...

Professor: É isso aí, não se esqueçam de terminar e entregar o trabalho, a aula foi muito proveitosa.

Estudantes: (Batem palmas e comemoram).

Professor: Parece que são matérias difíceis e cálculos complicados, mas lembrem-se, vocês irão dar aulas para o 5º ano também, precisam saber esses conteúdos.

Professor: Dando continuidade, vou fazer uma pergunta: Em uma xícara cabem 200 gramas de farinha, para cada receita iremos gastar 3 xícaras, quantos quilos de farinha eu gasto para 5 receitas?

Estudante 02: Para cada bolo são 600 gramas.

Estudante 15: São 3 x 5 xícaras que é igual a 15.

Estudante 05: Serão 5 bolos, então multiplica 600 por 5 e será igual a 3000 gramas

Professor: Mas se for comprar a farinha, você irá pedir 3000 gramas?

Estudante 02: Não.

Estudante 22: 1 kg tem quantas gramas mesmo?

Estudante 06: Acho que o 1 quilo tem 1000 gramas

Professor: Logo 3000 gramas terão...

Estudante 02: 3 kg de farinha.

Professor: E quando eu digo uma xícara e meia de fubá, o que quer dizer?

Estudante 14: Tem uma xícara inteira cheia, e a metade de uma xícara.

Professor: E se eu for fazer cinco receitas, quanto de fubá irei gastar?

Estudante 02: 5 xícaras cheias, e 5 metades de xícara.

Professor: E quanto é isso?

Estudante 02: Se duas metades é uma xícara, então 4 metades é 2 xícaras.

Estudante 30: Então será 5 + 2 + 1/2.

Professor: Qual o resultado dessa conta?

Estudante 14: 7 xícaras e meia.

Estudante 22: Minha mãe não usa nada disso, vai colocando tudo pelo rumo, sem medir, sempre dá certo.

Estudantes: (Discutem as respostas entre si).

Professor: Agora vocês farão a seguinte atividade: Elabore o conceito de fração estudado por vocês durante este semestre, depois elabore um exercício aplicando o conceito de fração, e resolva-o. Vocês terão o restante da aula para elaborar esse exercício e rever os trabalhos. Não se esqueçam que na próxima aula iremos fazer avaliação para verificar os avanços, foi um prazer estar com vocês esse tempo tão rico de aprendizagem, espero que vocês tenham aproveitado bastante. Parabéns a todos! agora voltem ao trabalho!

Estudantes: (Risos) (Aplausos).

Avaliação pós experimento formativo: 02/12/2017 (7h:30min as 11h:30min)