



PUC GOIÁS

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE GOIÁS

PROGRAMA DE MESTRADO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO E SISTEMAS

SELEÇÃO DE PORTFÓLIO DE AÇÕES POR MEIO DE OTIMIZAÇÃO METAHEURÍSTICA HÍBRIDA COM REDES NEURASIS LSTM

Danilo Alcântara Milhomem

2020

SELEÇÃO DE PORTFÓLIO DE AÇÕES POR MEIO DE OTIMIZAÇÃO METAHEURÍSTICA HÍBRIDA COM REDES NEURAIS LSTM

Danilo Alcântara Milhomem

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção e Sistemas da Pontifícia Universidade Católica de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia de Produção e Sistemas.

Orientador (a): Maria José Pereira Dantas, D.Sc..

GOIÂNIA

MARÇO DE 2020

SELEÇÃO DE PORTFÓLIO DE AÇÕES POR MEIO DE OTIMIZAÇÃO METAHEURÍSTICA HÍBRIDA COM REDES NEURAIAS LSTM

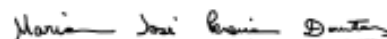
Danilo Alcântara Milhomem

Esta Dissertação julgada adequada para a obtenção do título de Mestre em Engenharia de Produção e Sistemas, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção e Sistemas da Pontifícia Universidade Católica de Goiás em março de 2020.

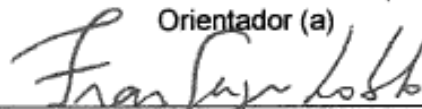


Prof. Marcos Lajovic Carneiro, D.Sc.
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em
Engenharia de Produção e Sistemas

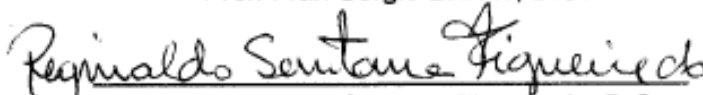
Banca Examinadora:



Prof. Maria José Pereira Dantas, D.Sc.
Orientador (a)



Prof. Fran Sérgio Lobato, D.Sc.



Prof. Reginaldo Santana Figueiredo, D.Sc.

GOIÂNIA – GOIÁS.
MARÇO DE 2020

M644s Milhomem, Danilo Alcântara

Seleção de portfólio de ações por meio de otimização
metaheurística híbrida com redes neurais LSTM / Danilo
Alcântara Milhomem.-- 2020.

111 f.: il.

Texto em português, com resumo em inglês

Dissertação (mestrado) -- Pontifícia Universidade
Católica de Goiás, Escola de Engenharia, Goiânia,
2020

Inclui referências: f. 94-108

1. Redes neurais (Computação). 2. Programação (Computadores).
3. Otimização matemática. 4. Programação não-linear.
5. Investimentos. I.Dantas, Maria José Pereira. II.Pontifícia
Universidade Católica de Goiás - Programa de Pós-Graduação
em Engenharia de Produção e Sistemas - 2020. III.
Título.

CDU: Ed. 2007 -- 004.032.26(043)

Aos meus pais, com todo meu amor e gratidão, por toda atenção, carinho e esforços dedicados a mim, investindo e acreditando na minha formação. A minha Madrinha Carmina pelos incentivos e por acreditar na minha formação.

Agradecimentos

Gostaria primeiramente de agradecer a Deus pela minha existência, pela saúde e por me amparar nos momentos difíceis, mostrando o caminho nas horas incertas e suprindo todas as minhas necessidades.

A minha orientadora, Professora Maria José Pereira Dantas, pelo seu apoio constante, boa vontade, pela disponibilidade que sempre demonstrou no apoio a realização deste trabalho, pela autonomia e incentivos a proatividade concedidos. O meu muito obrigado pelos conhecimentos repassados e pela confiança.

Ao professor Reginaldo Santana Figueiredo, pela disposição que sempre demonstrou para que pudéssemos reunir, pelas contribuições feitas ao trabalho, pela confiança, e pelos excelentes livros que me indicou.

Aos professores do MEPROS, que contribuíram para minha formação. Ao professor Wanderlei Malaquias Pereira Junior, pelos ensinamentos passados e pelo apoio, pois estes foram fundamentais não só para a realização e conclusão deste trabalho, mas também para minha formação acadêmica.

Aos professores Paula Andréa do Valle Hamberger e Gélvio Mendes Ferreira, pela confiança, pelos ensinamentos passados e pela boa vontade que sempre demonstraram.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio com a bolsa de estudos.

Aos meus pais, José de Anchiêta Milhomem de Souza e Mauronete Alcântara Mota, pela atenção, carinho, auxílio, dedicação e pela confiança. Toda a minha gratidão não faz justiça a tudo que eles fizeram por mim. A Carmina Milhomem de Souza por todo incentivo e apoio. Aos meus irmãos Marcos Alcântara Milhomem e Taynã Alcântara Milhomem, pela amizade e companheirismo.

Aos colegas do grupo de otimização e desenvolvimento da plataforma Web HYBROO, orientados pela professora Maria José, mais especificamente aos alunos: Aurélio Santos Miranda, Bruno Almêda de Oliveira, Adolfo Aires Schneider, e Ítalo Fernandes Gonçalves.

Um agradecimento especial a Maria Luiza Oliveira Silveira pela parceria e companheirismo. Aos colegas Douglas de Paula e Breno Vargas. E aos funcionários da Pontifícia Universidade Católica de Goiás que direta ou indiretamente colaboraram para a realização deste trabalho.

RESUMO

Resumo da Dissertação apresentada ao MEPROS/PUC Goiás como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia de Produção e Sistemas (M.Sc.).

SELEÇÃO DE PORTFÓLIO DE AÇÕES POR MEIO DE OTIMIZAÇÃO METAHEURÍSTICA HÍBRIDA COM REDES NEURAIS LSTM

Danilo Alcântara Milhomem

Março/2020

Orientador (a): Maria José Pereira Dantas.

O problema de otimização de portfólio consiste na formação de um conjunto de ativos e suas respectivas proporções de forma que o risco seja minimizado e o retorno maximizado. O trabalho tem como objetivo melhorar o modelo de otimização de portfólio, calibrando a cardinalidade e reduzindo o erro de estimativa da carteira, por meio do algoritmo de Colônia de Abelhas Artificiais (ABC) híbrido com Redes Neurais *Long Short Term Memory* (LSTM). Com relação a metodologia, realizou-se duas revisões sistemáticas de literatura para verificar o estado da arte sobre o tema da pesquisa. Também se fez duas aplicações: na primeira as carteiras são construídas via otimização por meio do modelo de Markowitz e na segunda usa-se o Modelo de Markowitz com restrição de cardinalidade. Os resultados mostram que, para os dados analisados, o aumento do número de ativos, em carteiras otimizadas, não reduz o risco desta. Além disso, chama-se a atenção para a importância do uso de simulações e da experimentação como principal abordagem a ser usada para definir a quantidade ideal de ativos em uma carteira. O algoritmo ABC híbrido com Redes Neurais Recorrentes LSTM mostraram-se como técnica potencial para redução do erro de estimativa e para otimização. As limitações foram: os filtros usados nas revisões de literatura podem ter excluído trabalhos importantes; além disso, a escolha de ativos com base em sua liquidez e período de participação na bolsa, embora justificada, pode ter evitado a análise de ativos com boas possibilidades de ganhos em termos de retorno.

Palavras-chave: Cardinalidade, *Long Short Term Memory*, otimização, investimentos, problema de programação quadrática inteira mista.

ABSTRACT

Summary of Dissertation presented to MEPROS / PUC Goiás as part of the necessary requirements to obtain the degree of Master in Production and Systems Engineering (M.Sc.)

STOCK PORTFOLIO SELECTION THROUGH HYBRID METAHEURISTIC OPTIMIZATION WITH LSTM NEURAL NETWORKS

Danilo Alcântara Milhomem

March/2020

Advisor: Maria José Pereira Dantas.

The portfolio optimization problem consists in the formation of a set of assets and their respective proportions so that the risk is minimized and the return maximized. The work aims to improve the portfolio optimization model, calibrating the cardinality and reducing the error of estimating the portfolio, through the hybrid Artificial Bee Colony (ABC) algorithm with Long Short Term Memory (LSTM) Neural Networks. Regarding the methodology, two systematic literature reviews were carried out to verify the state of the art on the research topic. Two applications were also made: in the first, portfolios are built via optimization using the Markowitz model and in the second, the Markowitz model with cardinality restriction is used. The results show that, for the analyzed data, the increase in the number of assets, in optimized portfolios, does not reduce its risk. In addition, attention is drawn to the importance of using simulations and experimentation as the main approach to be used to define the ideal amount of assets in a portfolio. The hybrid ABC algorithm with LSTM Recurrent Neural Networks proved to be a potential technique for reducing the estimation error and for optimization. The limitations were: the filters used in the literature reviews may have excluded important works; in addition, the choice of assets based on their liquidity and period of participation in the stock exchange, although justified, may have avoided the analysis of assets with good chances of gains in terms of return.

Keywords: *Cardinality, Long Short Term Memory, optimization, investments, mixed integer quadratic programming problem.*

Lista de Figuras

Figura 1 - Gráfico de redução de risco pela diversificação.....	1
Figura 2 - Escopo do compêndio.....	9
Figura 3 - Método para revisão sistemática de literatura.....	12
Figura 4 - RSL: pontos de atenção.....	13
Figura 5 - Diagrama do modelo ABC com LSTM.....	15
Figura 6 - Investimentos com correlação perfeitamente negativa.....	18
Figura 7 - Investimentos com correlação perfeitamente positiva.....	18
Figura 8 - Fluxograma do ABC.....	22
Figura 9 - Gráfico de convergência do ABC.....	25
Figura 10 - Categorias da <i>Web of Science</i>	31
Figura 11 - Ano de publicação dos artigos.....	32
Figura 12 - Tipos de documentos.....	32
Figura 13 - País/região de publicação com 15 ocorrências ou mais.....	33
Figura 14 - Autores citados com 15 ocorrências ou mais.....	33
Figura 15 - Coocorrência das palavras chaves do autor e da base <i>Web of Science</i> com 15 ocorrências ou mais.....	34
Figura 16 - <i>Bibliographic coupling</i>	34
Figura 17 - Fronteira eficiente.....	43
Figura 18 - MV: Portfólio com maior relação risco/retorno.....	44
Figura 19 - MV: Portfólio com o menor risco da Fronteira Eficiente.....	45
Figura 20 - a) Fronteira Eficiente; b) Simulação de Monte Carlo.....	45
Figura 21 - a) ativo de proporções iguais; b) relação risco/retorno de cada ativo.....	46
Figura 22 - Configuração da planilha de previsão.....	47
Figura 23 - Gráfico de predição.....	47
Figura 24 - Otimização com MV e Holt-Winters. a) Fronteira eficiente; b) Simulação de Monte Carlo; c) Pesos iguais; d) Ativos individuais.....	48
Figura 25 - Portfólio: MV com Holt-Winters.....	49
Figura 26 - Inclusion Criteria and Exclusion criteria.....	55
Figura 27 - Map of keywords contained in the title of the publications.....	56
Figura 28 - Country mapping in terms of publication.....	57
Figura 29 - Mapping of the most cited authors.....	57
Figura 30 - Papers distribution per year of publication.....	61
Figura 31 - Papers distribution per techniques/methods for portfolio optimization.....	62
Figura 32 - Papers distribution per type of analysis.....	67
Figura 33 - Papers distribution per software/programming language.....	68
Figura 34 - Structure of the LSTM network.....	76
Figura 35 - Detailing Long Short Term Memory.....	78
Figura 36 - The feasible region and the infeasible region.....	79
Figura 37 - Pseudocode of the modified ABC.....	80
Figura 38 - Effect of the variation of cardinality on the portfolio. a) Objective function; b) Constraint Violation; c) Return; d) Risk.....	82
Figura 39 - Score of the price prediction versus Score of the prediction of the return.....	83
Figura 40 - Observed return versus predictive return of the ELET6 asset. Legend: green line: observed; yellow line: prediction.....	84
Figura 41 - Observed price versus predictive price of ELET6 asset. Legend: green line: observed; yellow line: prediction.....	84

Lista de Quadros

Quadro 1 - Artigos mais citados segundo o site da <i>Web of Science</i>	35
Quadro 2 - Artigos selecionados após leitura	36

Lista de Tabelas

Tabela 1 - Artigos do compêndio.....	7
Tabela 2 - Resultados para a fronteira eficiente com restrição de cardinalidade.....	20
Tabela 3 - Características do algoritmo ABC	23
Tabela 4 - Parâmetros de controle adotado pelo algoritmo ABC.....	24
Tabela 5 - Algoritmos ABC aprimorados para resolver o problema de otimização de portfólio	26
Tabela 6 - Retornos e taxa de risco de ativos.....	43
Tabela 7 - Dados estatísticos do modelo.....	48
Tabela 8 - Resultados Retorno diário/Riscos do MV e MV com Holt-Winters	49
Table 9 - Protocol for Systematic Literature Review	53
Table 10 - Qualification of Journals.....	58
Table 11 - Papers that used exact methods.....	59
Table 12 - Papers that used Heuristic methods.	59
Table 13 - Realistic constraints.....	64
Table 14 - Portfolio of 6 assets	82
Table 15 - Performance of the portfolios built.	85
Table 16 - Composition of Portfolio 3.....	86

Sumário

1. Introdução	1
1.2 Justificativa e relevância da pesquisa	4
1.3 Objetivos	5
1.3.1 <i>Objetivo Geral</i>	5
1.3.2 <i>Objetivo específico</i>	5
1.4 Contribuições deste estudo	6
1.5 Limitações	7
1.6 Estrutura da dissertação	7
2. Metodologia.....	10
2.1 Visão geral	10
2.2 Procedimento de revisão sistemática de literatura.....	12
2.3 Procedimento de modelagem e aplicação.....	13
2.3.1 Modelo de Markowitz.....	16
2.3.2 Modelo de Markowitz com restrição de cardinalidade	19
2.3.3 Algoritmo de Colônia de Abelhas Artificiais	20
2.3.3 Redes Neurais Recorrentes <i>Long Short Term Memory</i>	26
3. Avaliação de tendências na otimização de portfólio: uma revisão sistemática da literatura	28
3.1 Método de pesquisa	29
3.1.1 Termo de busca	29
3.1.2 Fontes de busca.....	30
3.1.3 Formulação das <i>Strings</i> de busca.....	30
3.1.4 Critérios de inclusão e exclusão de estudos	30
3.1.5 Extração de dados	31
3.2 Resultados e discussões.....	31
3.3 Conclusões	38
4. Modelo Híbrido de Média Variância e Suavização Exponencial de Holt-Winters para Otimização de Portfólio	40
4.1 Referencial teórico	42
4.1.1 Modelo de Markowitz.....	42
4.1.2 Fronteira eficiente	43
4.1.3 Suavização exponencial de Holt-Winters.....	43
4.2 Aplicação	44
4.2.1 Modelo de Markowitz.....	44
4.2.2 Retorno esperado estimado por <i>Holt-Winters</i>	46
4.2.3 Otimização com dados preditos	48

4.3 Resultados	49
4.4 Considerações Finais	50
5. Analysis of new approaches used in portfolio optimization: a Systematic Literature Review	51
5.1 Methodology	53
5.1.1 Research method	53
5.1.2 Research Questions	54
5.1.3 Inclusion Criteria and Exclusion Criteria	54
5.1.4 Deviations in the protocol	55
5.2 Results	56
5.2.1 Research results	58
5.3 Discussion	61
5.3.1 Which key methods, tools, or optimization techniques are used in the portfolio optimization problem?	61
5.3.2 Which realistic constraints are used?	64
5.3.3 What type of analysis is done regarding the stock: fundamental, technical, or mixed (fundamental and technical)?	66
5.3.4 Which software/programming language is used?	68
5.4 Conclusions	69
6. Hybrid model of LSTM network with ABC algorithm applied to the portfolio optimization problem	72
6.1 Methodology	72
6.1.1 Markowitz model with cardinality constraint	74
6.1.2 Long Short Term Memory	76
6.1.3 ABC algorithm for constrained optimization problems	78
6.2 Results and discussions	81
6.2.1 Analysis of the cardinality constraint	81
6.2.2 Prediction of returns and prices	83
6.2.3 Analysis of estimation error: predictive data versus a historical average	85
6.3 Conclusions	87
7. Conclusões	90
Referências	94
Apêndice A – Ativos da B3 (Bolsa de valores do Brasil) (Continua)	109
Apêndice A – Ativos da B3 (Bolsa de valores do Brasil) (Conclusão)	110
Apêndice B – Modelo de Markowitz em R	111

1. Introdução

O problema de otimização de portfólio consiste em determinar um conjunto de ativos e suas proporções de participação na carteira de modo que o binômio Retorno-Risco satisfaça a propensão do cliente para correr riscos. Markowitz (1952) propôs o modelo de Média-Variância (MV) para otimizar portfólio. É por meio dessa estratégia que o risco diversificável é reduzido. Já o risco sistemático é intrínseco do mercado, e, não é passível de redução devido à dificuldade para encontrar ativos que tenham correlação perfeitamente negativa (ASSAF NETO, 2015). Logo, o que se consegue é a minimização e não a eliminação total do risco como é mostrado na **Figura 1**.

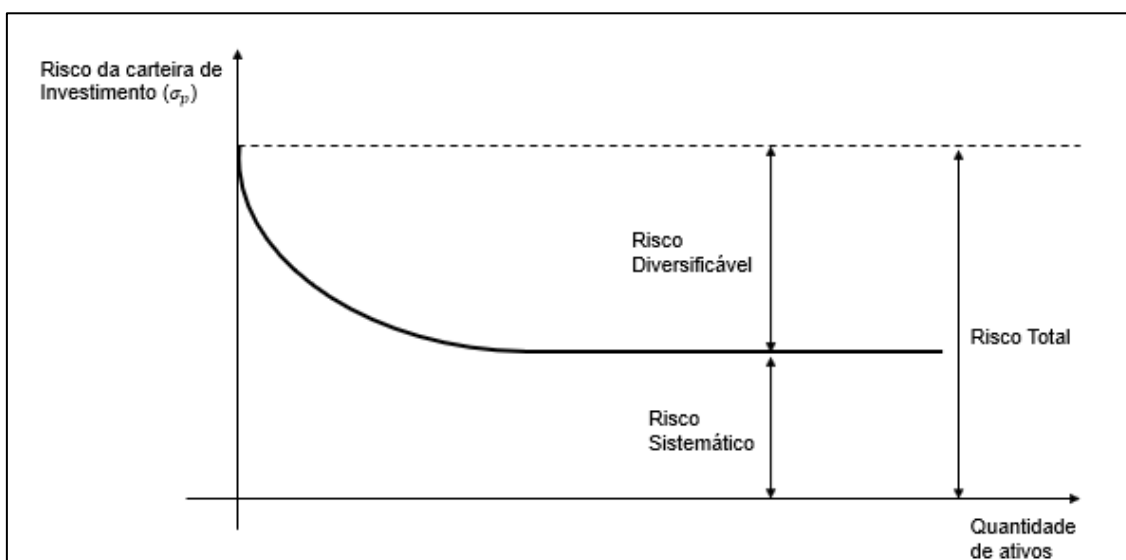


Figura 1 - Gráfico de redução de risco pela diversificação. Fonte: Assaf Neto (2015).

A seguir, tem-se as definições dos conceitos de risco diversificável e risco sistemático de acordo com Assaf Neto (2015):

- a) Risco Diversificável: pode ser eliminado ou reduzido por meio de diversificação. São os riscos dos ativos e do mercado de negociação;
- b) Risco Sistemático: não pode ser eliminado ou reduzido com a diversificação. São riscos oriundos das flutuações a que o mercado está exposto como um todo (taxa de juros, inflação, situação política, dentre outros).

No modelo MV, o retorno esperado é calculado como média dos dados históricos dos retornos das ações, e o risco é dado pela variância ou desvio padrão desses retornos. Esse modelo é classificado como problema de programação quadrática. A ideia principal do modelo MV é lidar com os retornos de ativos individuais como variáveis

aleatórias, e adotar o valor da média e variância esperados para quantificar, respectivamente, o retorno e o risco do investimento (ZHANG; LI; GUO, 2018).

Entretanto, uma das limitações da versão clássica do modelo de MV é o fato deste possuir quantidade limitada de restrições, e, o aumento do número de restrições permitem que o modelo capte mais características e use essas informações na otimização (ERTENLICE; KALAYCI, 2018). As restrições de cardinalidade e de proporção do ativo na carteira trazem um caráter mais realista para o modelo, mas, em contrapartida, o torna difícil de ser resolvido. Com a adição dessas duas restrições, a fronteira eficiente passa a ser descontínua, e o problema passa a ser classificado como problema de programação quadrática inteira mista. Para resolver problemas com esse nível de dificuldade, diversos autores têm usado algoritmos heurísticos, já que métodos exatos (também conhecido como métodos clássicos) não garantem convergência para essas situações (CHANG *et al.*, 2000; TUBA; BACANIN, 2014; BAYKASOĞLU *et al.*, 2015).

Com relação a restrição de cardinalidade, há discussões interessantes sobre o número de ativos que devem compor uma carteira eficiente. Para Evans e Archer (1968) há uma relação estável e previsível entre o número de ativos que compõem uma carteira e o nível de dispersão (risco) desse portfólio. Evans e Archer (1968) sugerem que a dispersão da carteira cai drasticamente a partir de 8º título adicionado na carteira, e, na medida em que esse número aumenta, o risco diminui, e, portanto, os analistas devem investigar com mais critério a sugestão do número 10 como valor ideal de títulos.

Para Statman (1987), um portfólio bem diversificado de ações escolhidas aleatoriamente deve incluir pelo menos 30 ações para um investidor que toma empréstimos para alavancar seus retornos e 40 ações para um investidor que não usa alavancagem. Isso contradiz a noção amplamente aceita de que os benefícios da diversificação são praticamente esgotados quando uma carteira contém aproximadamente 10 ações.

Em Tang (2004), é rebatida a ideia defendida na literatura de que são necessários de 10 a 15 ações nos portfólios para reduzir o risco não sistemático sem comprometer o retorno esperado. No artigo é mostrado analiticamente que, para uma população infinita de ações, é necessário um tamanho de carteira de 20 para eliminar 95% do risco diversificável. No entanto, é necessária uma adição de 80 ações (isto é, um tamanho de 100 ativos) para eliminar um adicional de 4% (isto é, 99% do total) de risco diversificável. Ainda segundo Tang (2004), esse resultado não depende dos horizontes de investimento, dos períodos de amostragem, ou dos mercados envolvidos. Vale ressaltar que Tang (2004) fez esses estudos com base na estratégia *Naive*

Diversification, e a contribuição do seu trabalho foi afirmar a eficiência da diversificação ingênua, que é quase deixada de fora em muitos livros didáticos de finanças/investimentos de universidade.

O uso da estratégia $1/N$ (*Naive diversification*) como parâmetro para comparação é bastante usada por dois motivos: 1º pela facilidade de implementar pois não depende de cálculos de estimativas; 2º apesar da evolução dos estudos sobre otimização, os investidores ainda usam bastante essa estratégia ($1/N$) para alocar seus recursos. DeMiguel, Garlappi e Uppal (2009a) relatam que a estratégia de otimização tem vantagens em relação ao Benchmark $1/N$ em três situações: (1) se houver uma grande quantidade de dados históricos disponíveis (preços, por exemplo); (2) se o valor de Sharpe *Ex-ante* (esperado) da carteira eficiente construída por meio do modelo MV é substancialmente maior que o valor de Sharpe da carteira $1/N$; e (3) o número de ativos for menor. As duas primeiras condições são intuitivas, e o motivo da última é que menos ativos implica menos parâmetros a serem estimados, e, portanto, menos espaço para erro de estimativa. Logo, menos ativos torna a diversificação $1/N$ menos eficaz que a diversificação ótima (DEMIGUEL; GARLAPPI; UPPAL, 2009a; PFLUG; PICHLER; WOZABAL, 2012).

Com relação aos trabalhos que abordam sobre o número ideal de ativos que devem compor uma carteira ótima, pode-se inferir, com base na literatura, que o número de ativos deve ser acima de 10, e que a perspectiva sob a qual estão sendo feitas as análises também influenciam nesse número ideal. Por exemplo, se as análises são feitas para avaliar o impacto do número de ativos sobre o risco, ou o retorno, ou custos de transação, ou sobre a taxa de Sharpe, os resultados podem variar.

Além da discussão sobre a restrição de cardinalidade, há discussões sobre o erro de estimativa, e como este impacta na otimização de portfólio. Segundo DeMiguel, Garlappi, Uppal (2009a) o modelo de Markowitz garante bons resultados dentro da amostra, mas tem desempenho ruim fora da amostra. Por isso surgem propostas mais robustas com o intuito de reduzir o erro de estimativa do modelo, e, dentre estas abordagens destacam-se: otimização robusta, estatística *bayesiana* e redes neurais.

DeMiguel, Garlappi, Uppal (2009a), Pflug, Pichler, Wozabal (2012), e Bodnar, Parolya e Schmid (2018) deram atenção para a questão do erro de estimativa, e sugerem que, embora tenha havido progresso na modelagem de otimização de portfólio, é necessário dedicar mais esforços para melhorar a estimativa dos retornos e da variância. Logo, as pesquisas sobre métodos que complementam as técnicas estatísticas clássicas, e bayesianas tradicionais, explorando as regularidades empíricas

presentes em um conjunto específico de ativos, oferecem boas oportunidades de contribuição científica.

As redes neurais têm sido bastante usadas para fazer reconhecimento de padrões, classificação e predição. Em Liu (2019), a rede *Long Short Term Memory* (LSTM) foi usada para prever a volatilidade futura de ativos, e por meio de simulações, o autor mostrou que essa rede é mais poderosa para fazer a predição de um grande volume de dados do que o modelo GARCH, por exemplo. O método de aprendizado profundo das redes LSTM pode aprender com grandes volumes de dados (brutos), e pode ser executado com muitas camadas ocultas e neurônios sob a GPU para obter uma boa previsão para dados de sequência longa (GERS; SCHMIDHUBER; CUMMINS, 1999; CHEN; ZHOU; DAI, 2015; NELSON; PEREIRA; DE OLIVEIRA, 2017; SELVIN, *et al.*, 2017; FISCHER; KRAUSS, 2018).

1.2 Justificativa e relevância da pesquisa

O uso de algoritmos Metaheurísticos, é justificado pela complexidade do problema de otimização de portfólio com restrição de cardinalidade, pois esta restrição transforma-o em problema de programação quadrática inteira mista. E métodos exatos não conseguem resolver esse tipo de problema (TUBA; BACANIN, 2014). Além disso, há duas outras características do problema de otimização de portfólio que corroboram com a necessidade de usar métodos Metaheurísticos:

- a) O modelo de Markowitz exige o cálculo de muitos elementos. Segundo Tosta de Sá (1979), como é necessário estimar a correlação entre os retornos dos vários títulos dois a dois, no caso de se estar considerando, um conjunto de 100 ativos, por exemplo, além dos 100 retornos esperados e dos 100 desvios padrão, o número de correlações estimado é igual a 4950 (o número de coeficientes de correlação a serem calculados é dado pela equação $\frac{N^2-N}{2}$, onde N é o número de ativos). Com muitas variáveis, para determinar as carteiras eficientes resultante da combinação de diferentes títulos e seus respectivos percentuais, demandaria um tempo de processamento relativamente longo se métodos determinísticos forem usados;
- b) Com uma grande quantidade de ativos a serem analisados, o espaço de busca fica muito grande (o número de dimensões de cada potencial solução é igual a $2N$ devido à restrição de cardinalidade). Com métodos determinísticos, a obtenção dessa resposta demoraria muito tempo e o

método não garante que haverá a convergência. Com métodos heurísticos é possível simular milhares de carteiras e determinar as melhores.

Além disso os autores que discutem sobre o erro de estimativa e o tamanho ideal de uma carteira (números de ativos) são autores renomados o que mostra que o tema tratado tem relevância (DEMIGUEL; GARLAPPI; UPPAL, 2009a; PFLUG; PICHLER; WOZABAL, 2012, BODNAR; PAROLYA; SCHMID 2018, STATMAN, 1987, TANG, 2004, EVANS; ARCHER, 1968).

1.3 Objetivos

Dada a justificativa e relevância do trabalho (seção 1.2), e, portanto, a elucidação do efeito da restrição de cardinalidade e do erro de estimativa para a otimização, a seguir apresenta-se os objetivos geral e específico deste trabalho.

1.3.1 Objetivo Geral

O presente trabalho tem como objetivo melhorar o modelo de otimização de portfólio calibrando a cardinalidade e reduzindo o erro de estimativa dos retornos. A calibragem ocorrerá via simulação do modelo de Markowitz estendido com a restrição de cardinalidade por meio do Algoritmo de Colônia de Abelhas Artificiais. Para tratar o erro de estimativa propõe-se o uso da rede LSTM.

1.3.2 Objetivo específico

Desdobrando o objetivo geral, obteve-se os seguintes objetivos específicos:

- a) Revisar a literatura sobre o problema de otimização de portfólio e identificar tendências sobre abordagens desse problema assim como principais autores e as técnicas usadas para resolver essa classe de problema;
- b) Identificar oportunidades de contribuir com o estado da arte sobre otimização de portfólio;
- c) Aplicar o modelo clássico MV com o intuito de entender melhor as nuances desse modelo e identificar possíveis modificações que aumentem a eficiência do modelo para otimizar portfólios;

- d) Fazer predição de preços e retornos por meio da Redes Neurais LSTM;
- e) Propor uma abordagem de construção de carteiras de ações usando otimização via o algoritmo de Colônia de Abelhas Artificiais (ABC) e realizar predição via LSTM.

1.4 Contribuições deste estudo

Duas revisões sistemática de literatura sustentam o embasamento teórico para pesquisa sobre os problemas definidos no objetivo geral. Os dois artigos de revisão sistemática de literatura contribuem com uma série de informações (técnicas de otimização, modelos matemáticos, linguagem de programação, análise técnica e fundamental de ativos na bolsa) para pesquisadores, especialistas ou investidores que desejam estudar ou usar análises quantitativas para fazer seus investimentos e consequentemente montar suas carteiras de ações.

Seguindo a linha de hibridização, foi construído um modelo híbrido composto pelo modelo MV e suavização exponencial de Holt-Winters. Essa hibridização oferece informações importantes para quem deseja usar um método estatístico para fazer predição e unir os resultados com a otimização.

A pesquisa também mostra a aplicação conjunta do algoritmo de colônia de abelhas artificiais com Redes Neurais Recorrentes LSTM para resolver o problema de otimização de portfólio com restrição de cardinalidade. Essa abordagem requer a simulação de carteiras com diferentes quantidades de ativos. O número ideal de ativos em uma carteira otimizada (com a melhor relação risco-retorno), pode variar de acordo com o número total de ativos que serão analisados, as suas respectivas correlações, e o volume de preços históricos coletados. Por isso, sugere-se o uso de simulação para gerar várias carteiras com diferentes números de ativos, e, a escolha daquela que oferece a melhor relação risco-retorno, como abordagem de apoio a tomada de decisão sobre o tamanho da carteira (número ideal de ativos).

Em resumo, as principais contribuições deste trabalho são:

1. Revisões sistemáticas de literatura sobre otimização de portfólio (ferramentas, algoritmos, autores clássicos, tipos de análises e artigos mais citados sobre o tema);
2. Comparar a eficiência de carteiras com diferentes valores para k (números de ativos da carteira);

3. Responde à pergunta: “para o conjunto de dados analisados, quantos ativos são necessários para formar um bom portfólio, de acordo com o Índice de Sharpe?”;
4. Mostra o impacto da rede LSTM na redução do erro de estimativa do modelo de otimização.

1.5 Limitações

Há algumas limitações nas revisões sistemáticas, no modelo MV com Suavização exponencial e no modelo composto por algoritmo ABC e Redes LSTM. Por mais que as revisões sistemáticas tenham sido desenvolvidas com o intuito de encontrar e condensar os melhores trabalhos sobre o tema da pesquisa, é possível que a estratégia de filtragem ou busca de artigo tenha evitado que bons trabalhos tenham sido compilados. Por exemplo, a escolha de apenas trabalhos escrito em inglês restringe a entrada de trabalhos relevantes escritos em outra língua.

No modelo de otimização de portfólio de Média-Variância com Holt-Winters, os retornos foram avaliados sem descontar despesas ou custos (emolumentos, taxa de corretagem e impostos). Além disso foram usados apenas dados de ativos com mais de 10 anos de histórico de preços, e com isso, ativos com boas oportunidades de ganhos e que tenham menos de 10 anos de histórico de preços não entraram nas análises.

Como limitação do trabalho sobre algoritmo de colônia de abelhas e redes LSTM destaca-se o fato de ter sido usado apenas dados diários de 43 ativos do mercado de ações do Brasil. Logo, se o número de ativos analisados fosse maior, é provável que encontrar-se-iam resultados melhores para as carteiras construídas além do aumento de possibilidade de fazer mais simulações com configurações diferentes. E com relação ao uso da Rede Neural para fazer previsão, acredita-se que usar um volume maior de dados (acima de 10 anos) aumentaria a capacidade da rede de aprender o comportamento da série temporal.

1.6 Estrutura da dissertação

Este trabalho é um compêndio de artigos que apresenta 4 trabalhos elaborados durante o período de pesquisa, compreendido entre 2018 e 2020. Os artigos são apresentados na **Tabela 1**.

Tabela 1 - Artigos do compêndio

Nº	Artigo	Autores	Publicação
----	--------	---------	------------

1	Avaliação de tendências na otimização de portfólio: uma revisão sistemática da literatura	Milhomem, Danilo Alcântara; Dantas, Maria José Pereira	Publicado no XXV SIMPEP 2018 – Simpósio de Engenharia de Produção
2	Modelo híbrido de média variância e suavização exponencial de Holt-Winters para otimização de Portfólio	Milhomem, Danilo Alcântara; Dantas, Maria José Pereira	Publicado no XXVI SIMPEP 2019 – Simpósio de Engenharia de Produção
3	<i>Analysis of new approaches used in portfolio optimization: A systematic literature review</i>	Milhomem, Danilo Alcântara; Dantas, Maria José Pereira	Submetido na revista <i>Production</i>
4	<i>Hybrid model of LSTM network with ABC algorithm applied to the portfolio optimization problem</i>	Milhomem, Danilo Alcântara; Dantas, Maria José Pereira; Hamberger Paula Andréa do Valle; Schneider, Adolfo Aires	Submetido na <i>Plos One</i>

Na seção 2 é demonstrado os procedimentos metodológicos da pesquisa, adotados em cada um dos quatro artigos. Na seção 3 é apresentado o primeiro artigo de revisão de literatura sobre as tendências na otimização de portfólio, e, portanto, traz uma visão generalista sobre as abordagens que têm sido feitas sobre o problema. O segundo artigo, que aborda a aplicação do modelo híbrido de Média-Variância com suavização exponencial de Holt-Winters, é apresentado na seção 4. O terceiro artigo é apresentado na seção 5, este é uma segunda revisão sistemática construída para identificar as nuances do problema de otimização, e, portanto, traz uma análise mais detalhada sobre o conjunto de ferramentas e técnicas usadas para resolver o problema de otimização. O quarto artigo, na seção 6, discute o método proposto pelos autores para resolver os problemas mencionados no objetivo geral deste estudo, levando em consideração o que foi aprendido nos três estudos anteriores (artigos 1-3).

Os artigos, por fazerem parte do mesmo estudo, tem semelhanças e redundâncias necessárias para fazer o leitor de um único artigo entender o seu contexto. Cada artigo foi transformado em um capítulo da dissertação e por isso foram necessárias algumas adaptações de formatação para adequar os artigos aos padrões exigidos pelo Programa de Mestrado em Engenharia de Produção e Sistema da PUC-Goiás.

O restante deste documento, seção 7, consiste na apresentação das conclusões, discussões e sugestões de pesquisas futuras. Nessa seção são sintetizados os principais resultados das revisões de literatura e do modelo proposto (ABC híbrido com

LSTM), e as sugestões de pesquisas futuras são sugeridas com base nos *gaps* de literatura encontrados por meio das revisões sistemáticas de literatura.

Na **Figura 2**, temos a estrutura do compêndio com a ordem cronológica dos artigos e suas respectivas abordagens. Além disso, nesta figura apresenta-se a proposta de construção de outro artigo, cujo a descrição está na caixa azul inferior.

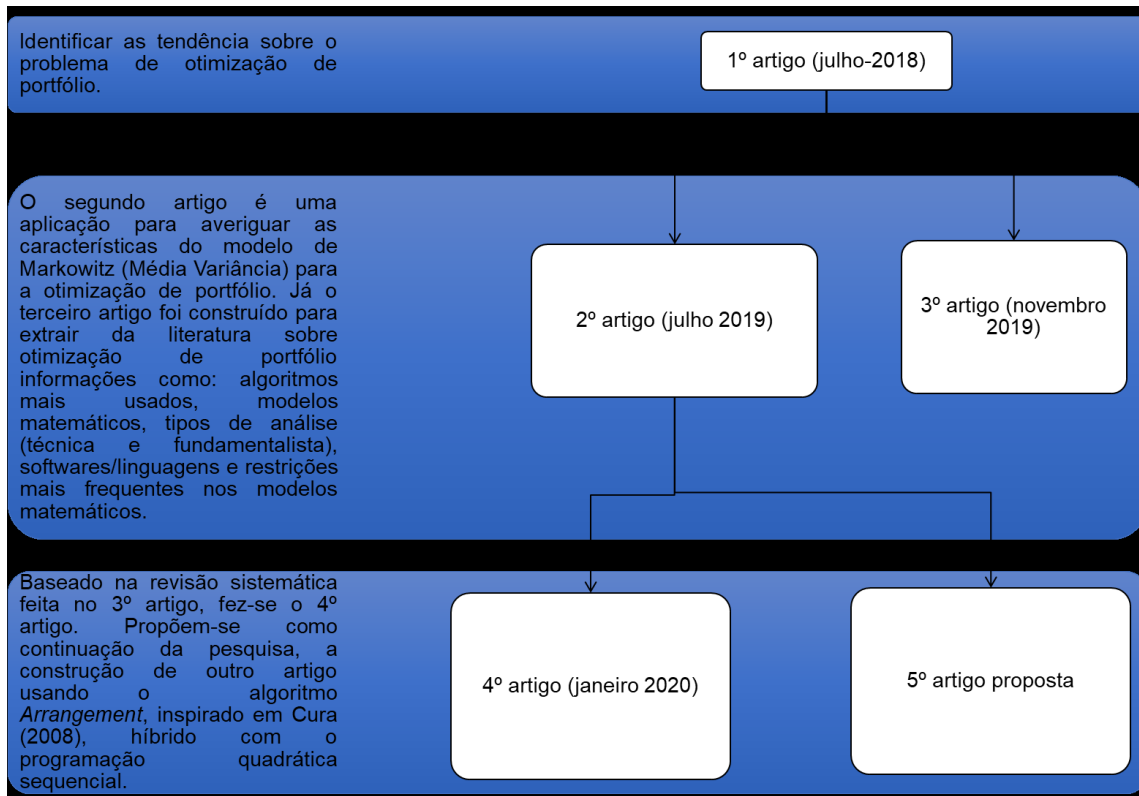


Figura 2 - Escopo do compêndio

2. Metodologia

O objetivo desse tópico é descrever de maneira generalista os procedimentos metodológicos dos artigos de revisão sistemática e de aplicação do modelo, assim como o alinhamento destes para resolver o objetivo geral da dissertação. Portanto, mais detalhes sobre a metodologia estão nos respectivos capítulos corresponde a cada artigo.

Considerando os objetivos e procedimentos, e por ter sido realizada duas revisões sistemáticas de literatura, a pesquisa é classificada como exploratória. Em relação à sua natureza, esta pesquisa é classificada como pesquisa aplicada, pois houve a preocupação com as implicações práticas dos resultados (GIL, 2010).

O método também pode ser classificado como modelagem e simulação por ser um trabalho quantitativo baseado em modelos matemáticos e simulações. Do ponto de vista da orientação do autor sobre a pesquisa, o trabalho é classificado como pesquisa axiomática quantitativa (BERTRAND; FRANSOO 2002). Esse padrão permite a construção de análises altamente racionalistas baseadas em reconstruções artificiais da realidade por meio de simulações em computadores.

Como serão apresentadas variações do Modelo MV e a hibridização de algoritmos (já conhecidos na literatura), o trabalho é classificado como pesquisa axiomática normativa, pois tem como objetivo tanto melhorar os resultados do modelo de otimização de portfólio por meio da calibragem da cardinalidade, quanto comparar o desempenho de estratégias usadas para otimizar carteiras de investimento com dados empíricos (BERTRAND; FRANSOO 2002). De maneira geral pode-se classificar o método como misto por possuir diferentes procedimentos metodológicos.

2.1 Visão geral

O primeiro passo da pesquisa foi encontrar tendências sobre o tema de otimização de portfólio por meio dos artigos mais citados que tratassem sobre este assunto. Desse processo gerou-se um artigo que foi publicado no XXV SIMPEP (XXV Simpósio de Engenharia de Produção) com o título: “Avaliação de Tendências na Otimização de Portfólio: Uma Revisão Sistemática da Literatura”. Com essa primeira revisão verificou-se que existe uma tendência à hibridização de algoritmos para resolver problemas de otimização, além disso, percebe-se que ainda é forte o uso do modelo MV para otimizar portfólios.

O segundo artigo surgiu de um experimento usando o modelo MV na versão original, e o modelo MV em conjunto com *Holt-Winters* (HW). HW é um método estatístico de predição, e permite a comprovação dos resultados por meio de estatística. Para este trabalho foi usado o software R (com o pacote *fPortfolio*) e Excel para tabular os dados. Daqui surgiu um artigo aprovado no XXVI SIMPEP com o título: “Modelo Híbrido de Média Variância e Suavização Exponencial de *Holt-Winters* para Otimização de Portfólio”.

O terceiro passo foi a Revisão Sistemática de Literatura para identificar: métodos de otimização, técnicas determinísticas e probabilísticas mais usadas, tipos de análise (fundamental e técnica), softwares/linguagem de programação e restrições. Desse processo gerou-se outro artigo (em avaliação na Revista a qual foi submetido) com o título: “*ANALYSIS OF NEW APPROACHES USED IN PORTFOLIO OPTIMIZATION: A SYSTEMATIC LITERATURE REVIEW*”.

Diante do levantamento feito sobre o problema de otimização de portfólio e os métodos de otimização, primeiro identificou-se que o ABC é um algoritmo promissor para resolver esse tipo de problema, e, posteriormente, que o erro de estimativa compromete os resultados da otimização portfólio, e, portanto, a aplicação e o desenvolvimento de técnicas que reduzem o erro de estimativa, em dados de entrada dos modelos de otimização, oferecem oportunidades para contribuição científica. Dependendo do grau do erro de estimativa desses parâmetros de entrada, os resultados da otimização podem ser inferiores aos resultados da estratégia de negociação $1/N$ (consiste na divisão em pesos iguais da aplicação do capital em ações).

Além disso, a revisão sistemática mostrou que diversos estudos discutiram sobre o número ideal de ativos que devem compor uma carteira. Diante deste problema e do erro de estimativa, surgiu o 4º artigo com o título: “*Hybrid model of LSTM network with ABC algorithm applied to the portfolio optimization problem*”. No trabalho propõe-se um modelo em que dado um conjunto de dados, é necessário fazer otimizações com diferentes quantidades de ativos para encontrar aquela que oferece a melhor relação de risco-retorno. Já as Redes Neurais LSTM são usadas para fazer predição com o intuito de reduzir os erros de estimativa.

O algoritmo ABC foi implementado em Python e testado por meio de dados históricos reais das empresas com maior liquidez, presentes no mercado de ações do Brasil (Ações que compõem o Índice Bovespa). Esses dados históricos foram fracionados em dois conjuntos: 1º conjunto composto por dados de 9 anos; 2º conjunto é composto dados de 1 ano. O primeiro conjunto é usado para treinar a Rede Neural e

o segundo para fazer testes e validar tanto a predição das Redes Neurais quanto os resultados das carteiras simuladas.

2.2 Procedimento de revisão sistemática de literatura

Com a revisão da literatura pretendeu-se identificar os principais artigos e temas desenvolvidos sobre seleção de portfólios. Para atingir esse objetivo, o método usado foi a Revisão Sistemática da Literatura por meio da qual buscou-se as principais referências bibliométricas para verificar o estado da arte sobre o tema seleção e otimização de portfólio.

Duas revisões foram realizadas com enfoques diferentes: a primeira tinha como objetivo analisar as tendências sobre o problema de otimização de portfólio identificando os autores e os periódicos importantes presentes no conjunto de artigos (selecionados para revisão) com base no número de ocorrências e contagens de citações; a segunda foi uma revisão abrangente dos métodos exatos e probabilísticos, linguagens de software/programação, restrições, e, tipos de análises (técnica e fundamental). Todos os critérios mencionados anteriormente foram analisados sob o viés da otimização do portfólio. Na **Figura 3**, tem-se o passo-a-passo da metodologia de pesquisa das revisões de literatura feitas neste trabalho.

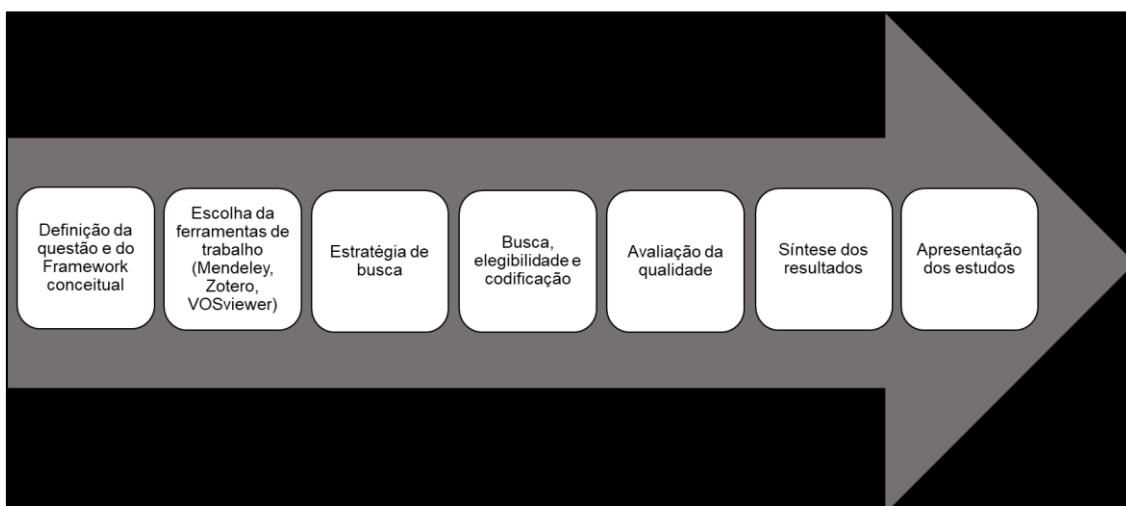


Figura 3 - Método para revisão sistemática de literatura. Fonte: **Adaptado** de Morandi e Camargo (2015).

Em ambos os artigos se usou o *software VOSviewer* para mineração de dados gerando *clusters* de artigos por: autores, tema, país, ou coocorrência de citações. Os

dados extraídos de cada artigo foram tabulados no MS Excel. As citações feitas ao longo da revisão sistemática ocorreram de maneira automática por meio do *software* Zotero.

Na **Figura 4**, são mostrados os fatores que foram considerados para iniciar o processo de otimização de portfólio. Esses fatores são produtos obtidos por meio das Revisões sistemáticas de literatura (RSL). Além disso, foi seguindo esse passo-a-passo da **Figura 4** que o 4º artigo foi construído.

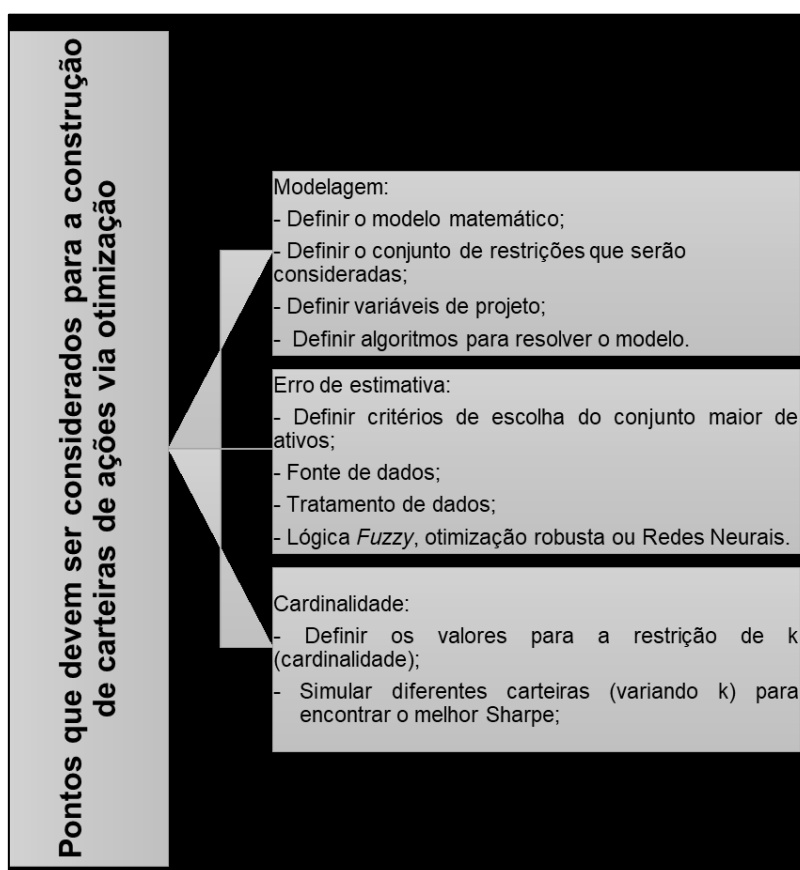


Figura 4 - RSL: pontos de atenção

Na **Figura 4** é mostrado os pontos que devem ser considerados para a construção de carteiras levando em consideração a preocupação com o número ideal de ativos e o erro de estimativa. Nesse sentido a qualidade dos dados e de suas respectivas fontes são ponto cruciais para o bom desenvolvimento e validação do modelos de otimização de predição.

2.3 Procedimento de modelagem e aplicação

Foram realizadas duas aplicações para resolver o problema de otimização de portfólio usando dados reais de ativos negociados na B3 (Bolsa de Valores do Brasil). As informações desses ativos, como o código de negociação, o nome da empresa e o

subsetor estão no Apêndice A. Na primeira aplicação foi usado o modelo MV e uma técnica de predição estatística, conhecida como suavização exponencial de Holt-Winters. Como a proposta é trabalhar com extensões do modelo MV, partiu-se do pressuposto que seria necessário conhecer bem o modelo clássico de MV, assim como a sua iteração com alguma técnica de predição. Esse primeiro contato com o problema foi importante para a proposta e desenvolvimento do 4º artigo.

O objetivo geral do 4º artigo foi simular e comparar portfólios com diferentes quantidades de ativos e usar as redes LSTM para prever retornos e preços futuros do conjunto de ativos escolhido para análise. Para atingir esse objetivo, foi implementado o algoritmo ABC com uma adaptação para problemas restritos (usa-se as regras de Deb (2000) para tratar essas restrições) e a LSTM da biblioteca Keras.

O modelo usado foi o MV com restrição de cardinalidade, e função objetivo única usando o Índice de Sharpe inspirado em Tuba e Bacanin (2014). O Índice de Sharpe (do inglês: Sharpe ratio - SR) usa as informações da média e variância de um ativo ou portfólio (TOSTA DE SÁ, 1979). Essa função objetivo é uma medida ajustada ao risco de retorno médio e pode ser descrito com a seguinte expressão :

$$SR = \frac{R_p - R_f}{StdDev(p)} \quad (1)$$

p : é o portfólio;

R_p : é o retorno médio esperado do portfólio p ;

R_f : é uma taxa de retorno disponível para teste de um ativo livre de risco;

$StdDev(p)$: é a medida de risco no portfólio (desvio padrão de R_p).

Por meio do ajuste dos pesos de cada ativo no portfólio, o Índice de Sharpe correspondente pode ser maximizado. Observando a fórmula do Índice de Sharpe, é possível notar a união de dois objetivos em uma única função, onde, para que se maximize a taxa é necessário que o desvio padrão seja o menor possível (1º objetivo) e o retorno do portfólio seja o maior dentre as possibilidades (2º objetivo).

Os testes são empíricos, e as etapas realizadas na modelagem do 4º artigo são mostradas na **Figura 5**. O 4º artigo é composto por 3 (três) etapas maiores:

- a) Etapa 1: fase de entendimento e construção do modelo matemático, e da implementação e validação do algoritmo ABC. Os parâmetros do algoritmo ABC foram configurados de acordo com Akay e Karaboga (2012);
- b) Etapa 2: fase de buscar e tratar os dados, e realizar as predições via Redes Neurais recorrentes LSTM. Essa Rede Neural foi usada por meio

da biblioteca Keras. Realizou-se duas previsões: uma com retornos logarítmicos, e outra com os preços;

- c) Etapa 3: fase de simulações, onde foram construídas carteiras com diferentes valores de k (número de ativos do portfólio) avaliadas segundo o critério do Índice de Sharpe.

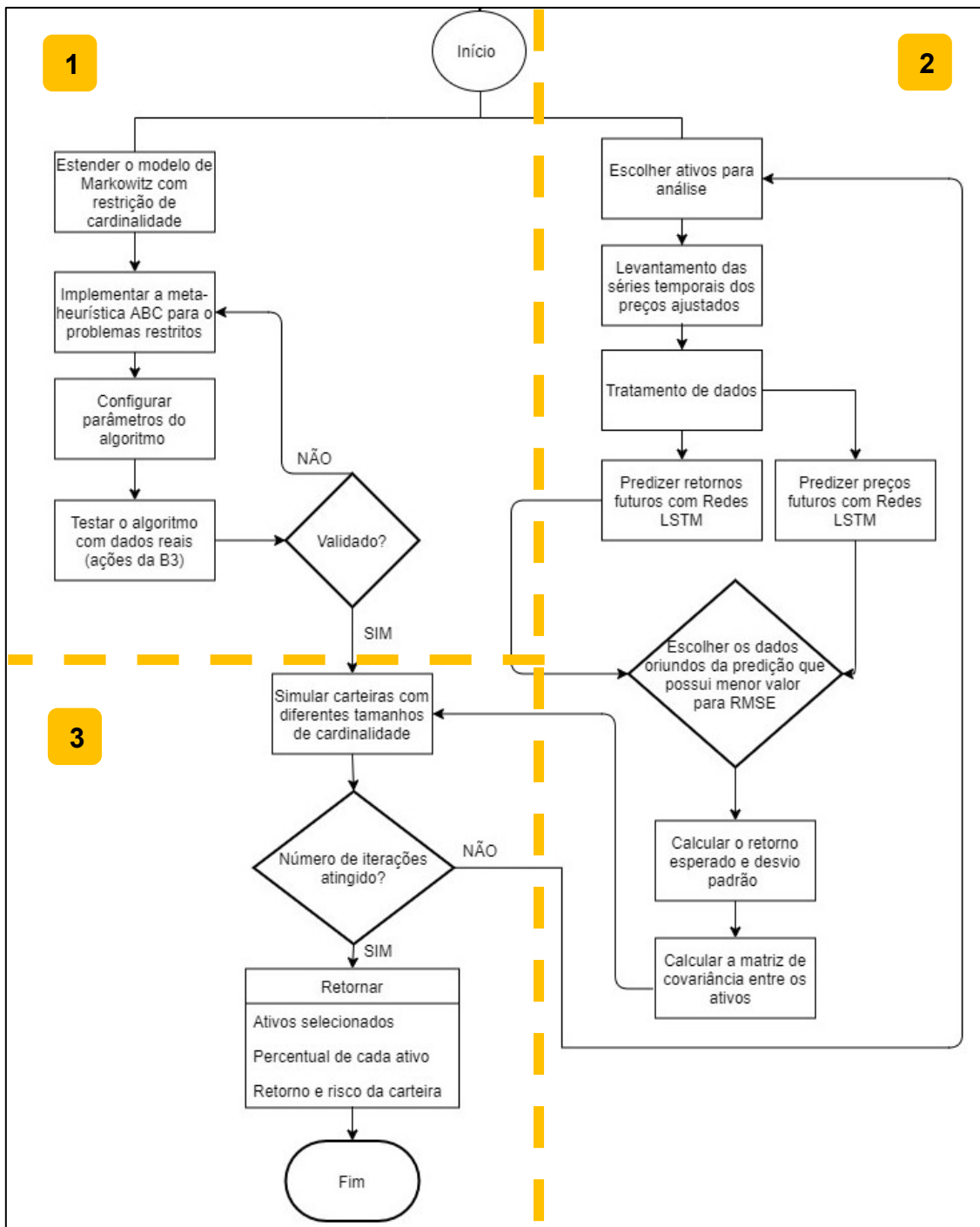


Figura 5 - Diagrama do modelo ABC com LSTM

A fonte de dados usados para os testes com os algoritmos foi a Thomson Reuters®. A medida de dispersão usada para os dados preditos pela Rede Neural foi o *Root-Mean-Square Error* (RMSE). Dois tipos de predição foram realizados, uma com os preços dos ativos e outra com os retornos dos ativos para verificar qual predição ofereceria melhores valores de RMSE.

2.3.1 Modelo de Markowitz

A aplicação do modelo de Markowitz necessita do conhecimento de três variáveis:

- a) Taxa de retorno para cada um dos ativos existentes no mercado de onde será tirado o conjunto de carteiras eficientes;
- b) Risco associado à estrutura dos retornos futuros de cada ativo quantificado por uma medida de dispersão, no caso o desvio-padrão ou a variância;
- c) Performance relativa dos retornos de cada ação em relação às demais, aos pares.

A taxa de retorno esperado da carteira é média ponderada das taxas de retorno esperado de todos os títulos que a constituem, e é dada pela equação:

$$E(r_p) = \sum_{i=1}^N x_i E(r_i) \quad (2)$$

Onde:

$E(r_p)$: é o retorno esperado da carteira;

x_i : proporção de fundos investidos no título i ;

$E(r_i)$: é o retorno esperado do título i ;

N : é o número de títulos componentes da carteira.

O cálculo do desvio-padrão da distribuição dos retornos é dado pela equação:

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N x_j x_k \rho(r_j r_k) \sigma_j \sigma_k} \quad (3)$$

Onde:

N : é o número de títulos existentes na carteira;

x_j : é a proporção dos fundos investidos no título j ;

x_k : é a proporção dos fundos investidos no título k ;

$\rho(r_j r_k)$: é a correlação estimada entre o retorno dos títulos j e k ;

σ_j : é o desvio-padrão em relação ao retorno esperado do título j ;

σ_k : é o desvio-padrão em relação ao retorno esperado do título k .

Para exemplificar a forma de aplicar o modelo de Markowitz, supõem-se que uma carteira é constituída por três títulos com as seguintes características:

1. Título 1 - $E(r_1) = 15\%$ e $\sigma_1 = 2\%$;
2. Título 2 - $E(r_2) = 25\%$ e $\sigma_2 = 5\%$;
3. Título 3 - $E(r_3) = 30\%$ e $\sigma_3 = 20\%$;

As correlações de cada ativo em relação aos demais é dada por:

$$\rho(r_1 r_2) = 0,6; \quad \rho(r_1 r_3) = 0,8; \quad \rho(r_2 r_3) = 0,9.$$

A proporção do capital investido em cada título é:

$$x_1 = 0,2 \quad x_2 = 0,3 \quad x_3 = 0,5$$

Aplicando-se a fórmula do retorno esperado:

$$E(r_p) = \sum_{i=1}^n x_i E(r_i) = 0,2 * 0,15 + 0,3 * 0,25 + 0,5 * 0,3$$

Onde:

$$E(r_p) = 0,255$$

Portanto, o retorno esperado dessa carteira é igual a 25,5%.

Para calcular o desvio padrão da carteira basta aplicar a equação (3):

$$= \sqrt{0,20^2 * 0,02^2 + 0,30^2 * 0,05^2 + 0,50^2 * 0,20^2 + 2 * 0,2 * 0,3 * 0,6 * 0,02 * 0,05 + \dots + \dots + 2 * 0,2 * 0,5 * 0,8 * 0,02 * 0,2 + 2 * 0,30 * 0,50 * 0,9 * 0,05 * 0,2}$$

Onde:

$$\sigma_p = \sqrt{0,013973} = 0,1182 = 11,82\%$$

Ou seja, o desvio-padrão da distribuição de probabilidade de retorno da carteira é igual a 11,82%. Segundo Benninga (2014), o modelo matemático que define um portfólio p eficiente, para um dado retorno r , é expresso por:

$$\text{Minimizar } \sigma_p = \sqrt{\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N x_j x_k \rho(r_j r_k) \sigma_j \sigma_k} \quad (4)$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^N x_i E(r_i) = B \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^N x_i = 1 \quad (6)$$

$$x_i \geq 0, \forall_i \in (1, 2, \dots, N) \quad (7)$$

Onde B é retorno mínimo exigido pelo cliente. A seguir são apresentadas duas situações extremas de combinação das taxas de retorno entre as ações de duas empresas. A **Figura 6** mostra o comportamento de ativos que são completamente opostos em termos de resultados. Ativos com essas características são ideias para a diversificação de carteiras de investimento.

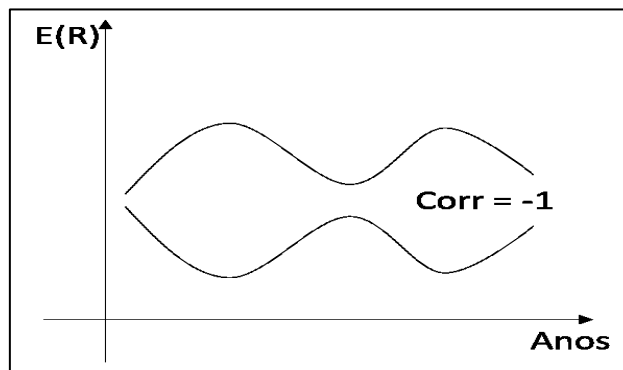


Figura 6 - Investimentos com correlação perfeitamente negativa. Fonte: Assaf Neto (2015).

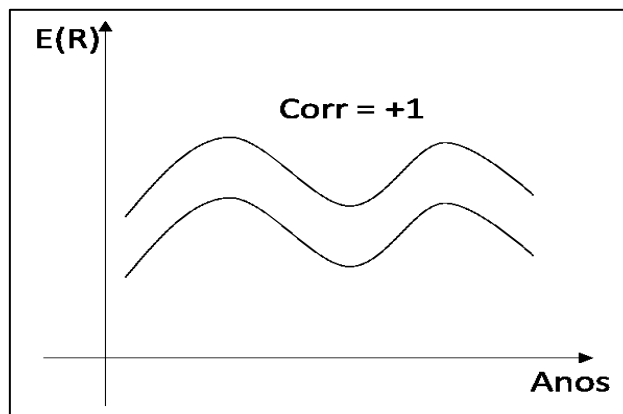


Figura 7 - Investimentos com correlação perfeitamente positiva. Fonte: Assaf Neto (2015).

Na **Figura 7** é mostrado a correlação perfeitamente positiva dos retornos de duas empresas. Investir em ativos com correlação perfeitamente positiva é mais arriscado, pois os resultados podem convergir para o mesmo ponto, assim a carteira pode gerar altos lucros ou prejuízos. Entre as duas situações extremas, de correlação perfeitamente positiva ou negativa, existem várias outras que variam de acordo com o grau em que o comportamento dos ativos seja parecido.

Quando a correlação entre os retornos de dois títulos é negativa, tudo se passa como se um dos títulos puxasse o retorno da carteira em um sentido, enquanto o outro empurrasse o retorno da carteira em sentido inverso. Por meio dessa observação empírica que Markowitz desenvolveu a sua teoria de seleção de carteiras.

3.2.5 Modelo de Markowitz com restrição de cardinalidade

Este modelo, também conhecido como modelo de Média-Variância estendido, é classificado como modelo de programação quadrática inteira mista e pode ser resolvida apenas por meio de técnicas heurísticas (TUBA; BACANIN, 2014). Esse modelo permite que seja definido o exato número de ativos que devem compor uma carteira.

O modelo usado para teste no trabalho foi retirado do trabalho de Tuba e Bacanin (2014), é o modelo de MV restrito por cardinalidade (CCMV – *cardinality constrained mean-variance model*). Tuba e Bacanin (2014) mencionam que uma das formas de construção de apenas uma função de avaliação que modela o problema de otimização de portfólio é usar o Índice de Sharpe (Sharpe ratio - SR) como função objetivo. O SR usa as informações da média e variância de um ativo. A fórmula matemática é:

$$SR = \frac{R_p - R_f}{StdDev(p)} \quad (8)$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^N x_i \leq 1 \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^N z_i = K \quad (10)$$

$$\varepsilon_i z_i \leq x_i \leq \delta_i z_i, z \in \{0,1\}, i = 1,2,3, \dots N$$

Onde:

p : é o portfólio;

R_p : é o retorno médio do portfólio p ;

R_f : é uma taxa de retorno disponível para teste de um ativo livre de risco;

$StdDev(p)$: é a medida de risco no portfólio (desvio padrão de R_p).

K : é o número desejado de ativos que serão incluídos no portfólio;

z_i : variável de decisão que controla se o ativo i será incluído no portfólio. Se seu valor for 1, o ativo é incluído, se for 0 (zero) o valor será excluído;

ε e δ : são, respectivamente, limites inferior e superior de peso do ativo incluído no portfólio, e garantem que a proporção do ativo no portfólio esteja dentro do intervalo predefinido.

Por meio do ajuste dos pesos de cada ativo no portfólio, o Índice de Sharpe do portfólio pode ser maximizado. Observando a fórmula do Índice de Sharpe, é possível notar a união de dois objetivos em uma única função: o desvio padrão deve ser o menor possível; e o retorno do portfólio seja o maior dentre as possibilidades.

2.3.2 Algoritmo de Colônia de Abelhas Artificiais

Tanto na primeira quanto na segunda revisão sistemática, um algoritmo de *Swarm Intelligence* aparece como promissor por ser simples, ter poucos parâmetros e conseguir resultados iguais ou melhores que algoritmos de última geração (*Genetic Algorithm* – GA, *Tabu Search* – TS, *Simulated Annealing* – SA, *Particle Swarm Optimization* – PSO) (ERTENLICE; KALAYCE, 2018). Autores como Tuba e Bacanin (2014), Wang, Liu e Kong (2012), Chen, Liang e Liu (2012), Bacanin, Tuba e Pelevic (2014) usaram o algoritmo ABC e o modelo MV com restrição de cardinalidade para otimização de portfólio e obtiveram bons resultados. Na **Tabela 2** é mostrado a comparação entre estes algoritmos para gerar a fronteira eficiente com dados da biblioteca *OR-library* (instância com testes de benchmark para o problema de otimização de portfólio). Os resultados do ABC são melhores.

Tabela 2 - Resultados para a fronteira eficiente com restrição de cardinalidade

Índice	Métrica de avaliação	GA	TS	SA	PSO	ABC
Hang Seng	Distância média euclidiana	0,004	0,004	0,004	0,0049	8,19E-05
	Erro de variação do retorno (%)	1,6441	1,6578	1,6628	2,2421	1,4805
	Erro do retorno médio (%)	0,6072	0,6107	0,6238	0,7427	0,5372
DAX100	Distância média euclidiana	0,0076	0,0082	0,0078	0,009	1,59E-04
	Erro de variação do retorno (%)	1,6441	1,6578	1,6628	2,2421	8,139
	Erro do retorno médio (%)	0,6072	0,6107	0,6238	0,7427	1,3511
FTSE100	Distância média euclidiana	0,002	0,0021	0,0021	0,0022	1,59E-04
	Erro de variação do retorno (%)	2,866	4,0123	3,8205	3,0596	2,7629
	Erro do retorno médio (%)	0,3277	0,3298	0,3304	0,364	0,3114
S&P100	Distância média euclidiana	0,0041	0,0041	0,0041	0,0052	8,37E-05
	Erro de variação do retorno (%)	3,4802	5,7139	5,4247	3,9136	3,2092
	Erro do retorno médio (%)	1,2258	0,7125	0,8416	1,404	0,6844

	Distância média euclidiana	0,0093	0,001	0,001	0,0019	6,84E-05
Nikkei	Erro de variação do retorno (%)	1,2056	1,2431	1,2017	2,4274	3,8087
	Erro do retorno médio (%)	5,3266	0,4207	0,4126	0,7997	0,9802

Fonte: Wang, Liu e Kong (2012)

O algoritmo de Colônia de abelhas artificiais (ABC) foi proposto por Karaboga (2005) e, portanto, as explicações a seguir sobre o algoritmo foram extraídas do artigo de Karaboga (2005). O algoritmo baseia-se no comportamento de forrageamento das abelhas, ou seja, o processo de busca de fontes de alimento. Essas fontes de alimentos são as soluções, e a qualidade dessas soluções são avaliadas em termos de *fitness*, que é o equivalente a quantidade de néctar que a solução possui (dado pela função objetivo). Logo, quanto melhor a solução, maior é o valor o valor de *fitness*. A fórmula para calcular *fitness* é dada por:

$$fit_i = \left\{ 1 + |f_i|, \text{ se } f_i < 0; \frac{1}{(1 + f_i)}, \text{ se } f_i \geq 0. \right\} \quad (11)$$

Onde:

fit_i : é o valor de *fitness* da solução na posição i ;

f_i : valor da função objetivo na posição i .

O algoritmo é dividido em três classes de abelhas: abelha empregada, abelha assistente e abelha escoteira. Essas abelhas são usadas como mecanismo de intensificação (empregadas e assistentes) e exploração (escoteiras). Dado um conjunto inicial de soluções, geradas aleatoriamente pela fórmula:

$$x_i^j = x_{min}^j + rand(0,1)(x_{max}^j - x_{min}^j) \quad (12)$$

onde:

x_i^j : é o valor da variável da solução i na posição j (dimensão);

x_{min}^j : menor valor que as variáveis projeto pode adquirir na posição j (dimensional);

x_{max}^j : maior valor que as variáveis de projeto podem adquirir na posição j (dimensional);

$rand(0, 1)$: valor aleatório entre 0 e 1.

As abelhas empregadas geram soluções vizinhas, com o intuito de melhorar as soluções já encontradas. Se a nova solução for melhor em termos da função de *fitness*, a solução antiga é substituída pela nova. As abelhas empregadas compartilham as informações sobre suas fontes de alimento na área de dança, e quanto mais intensa for a dança melhor é a solução (quantidade de néctar), e maior é a probabilidade desta fonte de alimento (solução) ser escolhida pelas abelhas assistentes. A equação que define a probabilidade de as abelhas assistentes escolherem uma determinada solução é dada pela fórmula:

$$p_i = \frac{fit_i}{\sum_{n=1}^{SN} fit_n} \quad (13)$$

Onde:

p_i : probabilidade de escolha da solução na posição i ;

fit_i : valor da função fitness da solução i ;

fit_n : valor da função fitness na posição n ;

SN : número de abelhas assistentes ou empregadas.

As abelhas assistentes, repetem o processo executado pelas empregadas na tentativa de melhorar as soluções. Após a execução do processo das abelhas assistentes, as abelhas escoteiras avaliam as soluções que atingiram o “limite”. O fluxograma do algoritmo ABC é dado pela **Figura 8**:

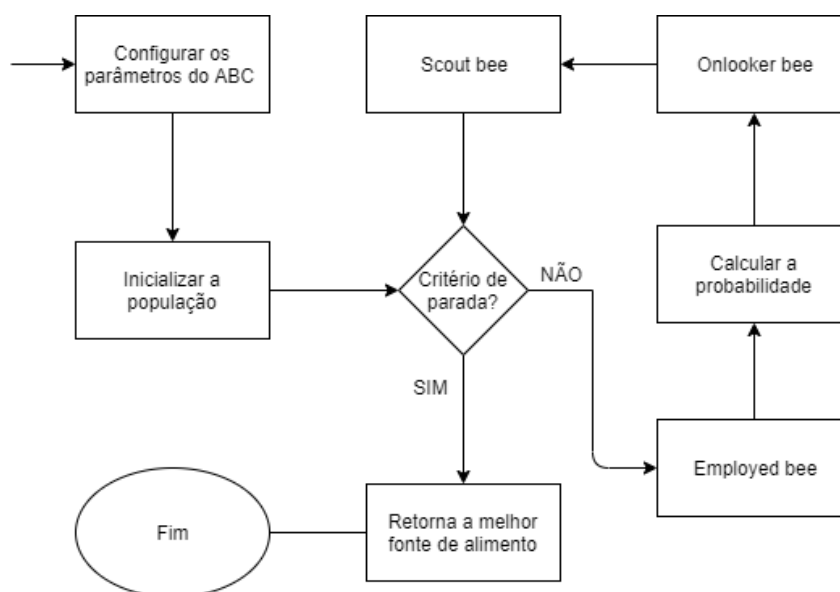


Figura 8 - Fluxograma do ABC. Fonte: Adaptado de Awadallah *et al* (2018).

O algoritmo ABC possui apenas 3 (três) parâmetros: Número de fontes de alimento (SN); *limite*; Número máximo de ciclos (MCN - Maximum Cycle Number).

Onde:

- SN é número de fontes de alimentos (igual ao número de abelhas empregadas ou assistentes);
- limite*: número máximo de tentativas para melhorar uma solução, caso seja extrapolado, a solução é substituída por outra solução gerada pelas abelhas escoteiras;
- MCN : equivale ao número de iterações do algoritmo.

O parâmetro limite funciona como um limiar aceitável do número de tentativas, consecutivas, de melhorar uma solução sem que ela melhore. Cada solução possui um contador do seu respectivo valor de limite. Uma vez que esse valor seja atingido, a solução correspondente é substituída por uma solução gerada aleatoriamente.

Além dos mecanismos de intensificação e exploração, o algoritmo ABC, possui um outro de seleção gulosa, ou seja, o algoritmo memoriza apenas a melhor solução. A boa performance de algoritmos de *Swarm Intelligence* depende da calibragem de seus respectivos parâmetros. E, tanto para calibrar quanto para usar o algoritmo, é preciso entender um pouco mais sobre a função de cada parâmetro/mecanismos. No subtópico a seguir será abordado esse tema.

2.1.1 Parâmetros do ABC

Na **Tabela 3** é apresentado as características do algoritmo ABC. Essas informações foram extraídas de Ertenlice e Kalayci (2018).

Tabela 3 - Características do algoritmo ABC

Inspiração	Área de aplicação	Mecanismo: intensificação	Mecanismo: diversificação
Comportamento de forrageamento das abelhas	Domínio contínuo	Busca por soluções na vizinhança realizada pelas abelhas <i>employed bee</i> e <i>onlooker bee</i>	Busca por soluções aleatórias realizada pela <i>scout bee</i> .

Fonte: *Adaptado de* Ertenlice e Kalayci (2018).

Segundo Karaboga e Basturk (2007), o algoritmo ABC emprega quatro processos de seleção:

- (1) um processo de seleção global feito pelas *onlooker bees* (abelhas assistentes) para descobrir regiões promissoras (aqui o autor fala sobre seleção global porque as *onlookers* selecionam as soluções em razão da probabilidade que por sua vez é maior para soluções com maiores fitness (logo, as *onlookers* auxiliam tanto busca local quanto global);
- (2) Processo de seleção local: realizado em uma região pelas *employed bees* (abelhas empregadas) e *onlookers bees*, dependendo da informação local para determinar uma fonte de alimento vizinha ao redor da fonte na memória (no caso de abelhas reais, essas informações incluem a cor, forma e fragrância das flores). As abelhas não serão capazes de identificar o tipo de fonte de néctar até que cheguem ao local certo e discriminem entre as fontes que crescem lá com base em seu perfume;

- (3) Processo de seleção local: chamado processo de seleção gulosa, é realizado pelas *onlooker* e *employed bees*. Nessa seleção se o valor de fitness da fonte candidata é melhor do que a atual, a abelha esquece a atual e memoriza a fonte candidata. Caso contrário, a abelha mantém a solução na memória;
- (4) Processo de seleção aleatória: realizado pelas *scouts bees* (abelhas escoteiras), onde elas geram soluções aleatórias e as inserem no conjunto de soluções (fontes de alimento).

No caso das abelhas, a taxa de recrutamento representa uma medida da rapidez com que a colônia de abelhas encontra e explora uma fonte de alimento recém-descoberta. O recrutamento artificial também pode representar a medida de velocidade com a qual as soluções viáveis ou as soluções de boa qualidade dos difíceis problemas de otimização podem ser descobertas. A sobrevivência e o progresso da colônia de abelhas dependem da descoberta rápida e da utilização eficiente dos melhores recursos alimentares. Da mesma forma, a solução bem-sucedida de problemas difíceis de engenharia está ligada à descoberta relativamente rápida de boas soluções, especialmente para os problemas que precisam ser resolvidos em tempo real. Em um processo de pesquisa robusto, os processos de *exploitation* (intensificação) e *exploration* (exploração) devem ser realizados juntos (KARABOGA; BASTURK, 2007).

Na versão original do ABC, proposto por Karaboga (2005), as configurações dos parâmetros são mostradas na **Tabela 4**. Com essas configurações Karaboga (2005) propõem que os testes sejam feitos com 2000 iterações (*cycles*) e repetidos 30 vezes.

Tabela 4 - Parâmetros de controle adotado pelo algoritmo ABC

Controle de parâmetros do algoritmo ABC	
<i>Swarmsize</i>	20
<i>limit</i>	<i>Number of onlooker bees</i> * Dim
<i>number of onlookers</i>	50% of the swarm
<i>number of employed bees</i>	50% of the swarm
<i>number of scouts</i>	1

Fonte: Karaboga (2005).

Em Karaboga e Basturk (2008) é proposto uma abordagem do ABC em que o critério de parada do algoritmo está em função do número de avaliações fitness. Segundo os autores, o uso do número de avaliações de fitness como critério de parada faz com que as comparações entre os algoritmos sejam justas. Os autores propõem a seguinte configuração de parâmetros do algoritmo para resolver funções *benchmark*:

- Colony size* (tamanho da população): 100;
- n_o (número de *onlooker bees*): 50% da colônia;
- n_e (número de *employed bees*): 50% da colônia;

- d) n_s (número de *scout bees*): 1;
- e) *Limit*: $n_e * D$ (número de dimensões);
- f) Número máximo de avaliações: 100000 e 500000 (dependendo da função).

Como falado anteriormente, a sobrevivência e o progresso da colônia de abelhas dependem da descoberta rápida e da utilização eficiente das melhores fontes de alimentos (KARABOGA; BASTURK, 2008). Com as configurações acima, e variando o valor da *colony size*, o gráfico da **Figura 9** ilustra o impacto do tamanho da *colony size* na convergência do algoritmo ABC:

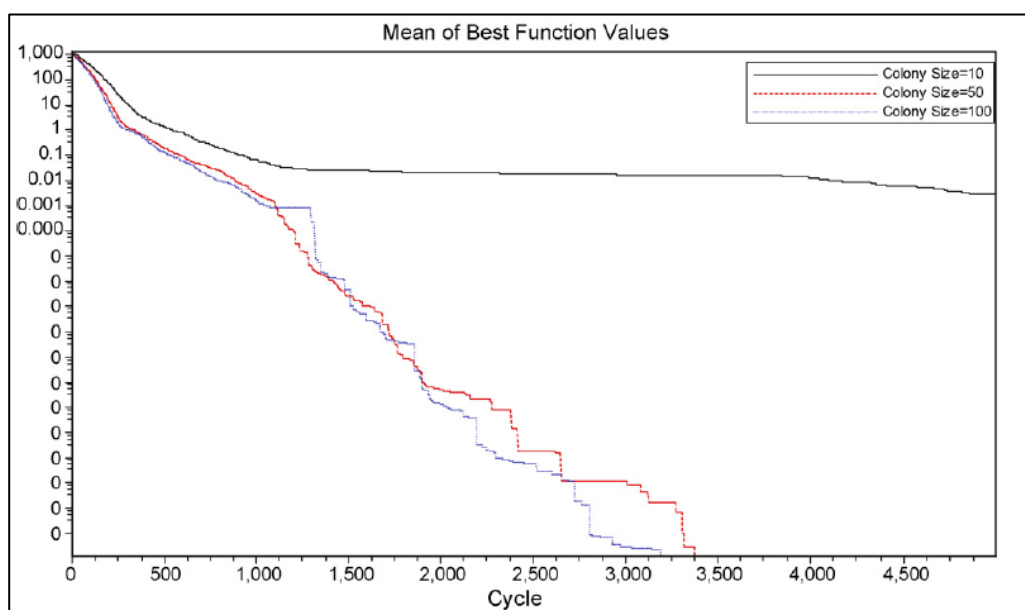


Figura 9 - Gráfico de convergência do ABC. Fonte: KARABOGA; BASTURK (2008).

Na **Figura 9** é mostrado o gráfico da evolução das soluções da função de *benchmark Griewank* em relação ao número de iterações e o tamanho da *colony size*. Karaboga e Basturk (2008) concluem que, à medida que o tamanho da população aumenta, o algoritmo produz melhores resultados. No entanto, após um dado valor para o tamanho da colônia, qualquer incremento no valor não melhora significativamente o desempenho do algoritmo ABC. Para os problemas de teste (funções de *benchmark*) realizados neste artigo de Karaboga e Basturk (2008), o tamanho da colônia de 50 a 100 fornece uma velocidade de convergência aceitável. À medida que o valor de "limite" se aproxima do infinito, o número total de abelhas escoteiras produzidas chega a zero.

Na **Tabela 5** é mostrado algumas versões do algoritmo ABC usadas para resolver variantes do problema de otimização de portfólio. Além disso, na **Tabela 5** tem-se o número de fontes de alimentos, a configuração dos parâmetros empregados, bem como contribuição exclusiva de cada estudo relacionado. O número de fontes de alimento foi definido como um valor predeterminado (GE, 2014; KALAYCI *et al.*, 2017;

HONG-MEI; ZHUO-FU; HUI-MIN, 2010) ou ajustado de acordo com a dimensão do problema (CHEN; LIANG; LIU, 2012; CHEN; LIANG; LIU, 2013; KALAYCI *et al.*, 2017; KUMAR; MISHRA, 2017). O número de abelhas empregadas (*employed bee*), observadoras (*onlooker bees*) e escoteiras (*scouts bees*) é baseado no número de fontes de alimentos, enquanto o parâmetro *limite* (parâmetro que decide o tempo exato de liberação das abelhas escoteiras para explorar novas fontes de alimentos) foi fixado (CHEN; LIANG; LIU, 2012; CHEN; LIANG; LIU, 2013; GE, 2014) ou ajustado de acordo com a dimensão do problema (KALAYCI *et al.*, 2017; KUMAR; MISHRA, 2017).

Tabela 5 - Algoritmos ABC aprimorados para resolver o problema de otimização de portfólio

Publicação	Número de fontes de alimento	Parâmetros	Contribuição
HONG-MEI; ZHUO-FU; HUI-MIN (2010)	125	EB = SN/2; OB = SN/2; SB = 1	O ABC foi aplicado ao problema de otimização de Portfólio pela primeira vez
CHEN; LIANG; LIU (2013)	N/4	EB= SN; SB= SN; limit = 50	Empregou uma codificação híbrida com variáveis inteiras e reais
GE (2014)	20	limit = 100	Procedimento <i>global best</i> inspirado no PSO para melhorar a exploração
KUMAR; MISHRA (2017)	10N	EB=SN/2;SB= SN/2; <i>limit</i> = 10N	Os princípios de covariância foram combinados com o algoritmo ABC para uma convergência rápida e precisa.
KALAYCI <i>et al.</i> (2017)	N	EB = SN; OB = SN/2 <i>limit</i> = SN*N	Um novo mecanismo de procedimentos de aplicação da lei e tolerância à viabilidade para lidar com restrições.

2.3.3 Redes Neurais Recorrentes *Long Short Term Memory*

As Redes Neurais Artificiais (RNA) são um ramo da inteligência artificial que pode ser aplicado a uma variedade de problemas: reconhecimento de características, predição de séries temporais, processamento de voz, dentre outros. As redes Neurais Recorrentes (RNR) é um tipo de RNA, que pode ser usada para predição de séries

temporais. As Redes LSTM (*Long-Short Term Memory*) são um tipo de arquitetura de RNR.

As LSTM foram apresentadas por Hochreiter e Schmidhuber (1997). A principal diferença entre a LSTM e uma RNR tradicional, é que a LSTM usa células de memória que possuem portas que permitem ajustes de peso com a capacidade de modificar (adicionar, descartar ou atualizar) as informações no tempo de modo a prever melhor os estados futuros dos dados usados como input. Assim, o modelo RNR LSTM é capaz de superar o problema da fuga de gradientes que ocorre na maioria das RNR (HOCHREITER; SCHMIDHUBER, 1997; FISCHER; KRAUSS, 2018; GERS; SCHMIDHUBER; CUMMINS, 1999; LIU, 2019).

As redes LSTM é uma arquitetura RNN desenvolvida para treinamento em longas sequências e retenção de memória. LSTM RNNs resolvem o problema do gradiente introduzindo mais algumas portas que controlam o acesso ao estado celular (GERS, SCHMIDHUBER e CUMMINS, 1999). As principais características das RNN de LSTM estão contidas nas camadas ocultas que consistem em células de memória (GERS, SCHMIDHUBER e CUMMINS, 1999; FISCHER, KRAUSS, 2018).

3. Avaliação de tendências na otimização de portfólio: uma revisão sistemática da literatura

Para Lwin, Qu e Kendall (2014), a otimização de portfólio envolve a atribuição ideal de capital limitado a diferentes ativos financeiros disponíveis para obter uma compensação razoável entre os objetivos de lucro e risco.

Para Kolm, Tütüncü e Fabozzi (2014), os conceitos sobre otimização e diversificação de portfólio têm sido instrumentais no desenvolvimento, na compreensão dos mercados financeiros e na tomada de decisões financeiras. A grande descoberta veio com a publicação da Teoria de Harry Markowitz da seleção de portfólio em 1952. A teoria, popularmente referida como moderna teoria do portfólio, forneceu uma resposta à questão fundamental: como um investidor deve alocar fundos entre as possíveis opções de investimento? Primeiro, Markowitz (1952) quantificou o retorno e o risco de um título, usando as medidas estatísticas de seu retorno esperado e desvio padrão. Em segundo lugar, sugeriu que os investidores considerassem o retorno e o risco juntos e determinassem a alocação de fundos entre as alternativas de investimento, com base no *trade-off* do risco de retorno. Antes da publicação de Markowitz (1952) sobre a teoria do portfólio, a literatura financeira tratou a interação entre o retorno e o risco de maneira generalista.

O modelo MV tem duas hipóteses básicas: (1) todos os retornos de segurança são variáveis aleatórias; (2) os investidores têm dados históricos suficientes sobre valores mobiliários que possam refletir corretamente a situação dos mercados financeiros no futuro. No entanto, é invariavelmente difícil garantir essas duas suposições. De fato, na maioria dos casos, a previsão de retornos depende dos julgamentos dos especialistas e das opiniões subjetivas dos investidores. Numerosos pesquisadores têm se dedicado a encontrar uma abordagem não probabilística para julgar as avaliações de especialistas e as opiniões subjetivas dos investidores (ZHANG; LI; GUO, 2018).

A revisão de literatura mostra que muitos métodos exatos e probabilísticos foram aplicados a este difícil problema de otimização, no entanto, existem poucas implementações de metaheurísticas de inteligência de enxame para resolver o problema de otimização de portfólio (TUBA; BACANIN, 2014). Dada a importância do tema e a abrangência dos assuntos afins, o objetivo deste trabalho foi desenvolver uma Revisão

Sistemática da Literatura, para identificar os principais artigos e temas sobre seleção de portfólios.

3.1 Método de pesquisa

Para Morandi e Camargo (2015), Revisão Sistemática da Literatura – RSL, são estudos secundários usados para mapear, encontrar, avaliar criticamente, consolidar, e agregar os resultados de estudos primários relevantes acerca de uma questão ou tópico de pesquisa específico, além de identificar as lacunas a serem preenchidas, resultando em um relatório coerente ou em uma síntese. Esse método deve ser planejado para garantir que a revisão seja isenta de viés (tendência a apresentar uma perspectiva parcial em detrimento de outras possivelmente também válidas), rigorosa, auditável, replicável, e atualizável.

No presente trabalho a revisão é classificada como configurativa por explorar o tema definido com dados qualitativos, extraídos de estudos primários mais heterogêneos, que são explorados e interpretados ao longo do estudo para gerar e explorar a teoria (MORANDI; CAMARGO, 2015). Com relação ao *framework* conceitual, dada a delimitação do assunto, foram contempladas as palavras-chave, as quais são consideradas relevantes e aderentes ao tema. As etapas da RSL que foram realizadas basearam-se em Morandi e Camargo (2015) e complementadas de acordo com Furlan e Laurindo (2017) e Yu *et al.* (2018). Desse modo, na presente pesquisa, almejou-se o estudo das principais referências bibliométricas para identificar os principais trabalhos e temas explorados sobre seleção de portfólio e otimização.

3.1.1 Termo de busca

De acordo com Morandi e Camargo (2015), o primeiro passo da RSL é definir os termos de busca, ou seja, quais as palavras-chave que serão usadas para construção das *strings* que serão usadas como entradas nas fontes de busca. Considerando o tema do trabalho como Avaliação de Tendências do Uso de Ferramentas Matemáticas na Otimização de Portfólio, os termos usados como entrada nas bases de dados são: *Optimization* e *portfolio*. Estes termos foram escritos no idioma inglês, com intuito de aumentar a rastreabilidade da busca.

3.1.2 Fontes de busca

Para que todos os artigos relevantes sejam encontrados reduzindo o viés da pesquisa, a definição das fontes de busca é uma etapa fundamental para a formulação de uma estratégia adequada. Desta forma, foram analisados os títulos, resumos e palavras-chaves dos artigos indexados pela base de dados escolhidas e que tenham sido publicados nos últimos 05 anos (2014 a 2018). Quanto ao tipo de publicação, definiu-se coletar os documentos que foram publicados na forma de artigos em periódicos (*journals*). Para a execução das buscas foi definida uma base de dados consagrada na área: *Web of Science*. Utilizou-se o operador booleano “AND” para auxiliar nas buscas e obter o resultado de acordo com o objetivo da pesquisa.

Com relação a extensão da busca a estratégia adotada é a de saturação. Para Morandi e Camargo (2015), este tipo de estratégia visa localizar os estudos primários suficientes para uma coerente configuração do tema abordado. Dessa forma, a busca por novos estudos se estende até o ponto em que eles não mais contribuam com novos conceitos para o processo de síntese (estratégia indicada para revisões configurativas).

3.1.3 Formulação das *Strings* de busca

Nesta etapa, formulou-se três *strings* de busca, de modo a estruturar a estratégia de busca dentro do escopo da pesquisa. As *strings* foram modeladas com os termos de busca juntamente com o operador (AND). Vale ressaltar que a construção das *strings* é resultado de constantes testes de busca na base de dados, procurando as combinações com as quais obtenha-se o maior número de resultados aderentes ao tema proposto.

3.1.4 Critérios de inclusão e exclusão de estudos

Com o escopo da pesquisa definido, foi possível estabelecer os critérios por meio dos quais é possível incluir ou excluir os estudos que abordam o tema do trabalho. Com o objetivo de selecionar os artigos que possuem realmente alguma relação com a temática escolhida, foram definidos alguns filtros como: período de publicação e número de citação.

3.1.5 Extração de dados

Os extratos dos dados foram oriundos da *Web of Science*. Além disso, considerou-se como saídas, o número de trabalhos repetidos e os trabalhos validados pela filtragem de títulos, resumo e leitura completa. Para facilitar o gerenciamento dos dados, foi explorado as funções de filtragem e análise de resultados da própria página da *Web of Science*.

3.2 Resultados e discussão

Usando as *strings* de buscas encontrou-se 5429 resultados no tempo estipulado entre 1945 a 2018. O primeiro filtro foi o tempo de publicação, com o objetivo de trazer os últimos trabalhos publicados sobre o assunto, filtrou-se os trabalhos publicados entre 2014 e 2018, reduzindo os resultados para 2439.

Na **Figura 10**, é mostrado as categorias sob as quais a *Web of Science* classifica a pesquisa. Observa-se que a Gestão de operações (pesquisa operacional) é a categoria com maior número de trabalhos, seguida de aplicações matemáticas e finanças empresariais.

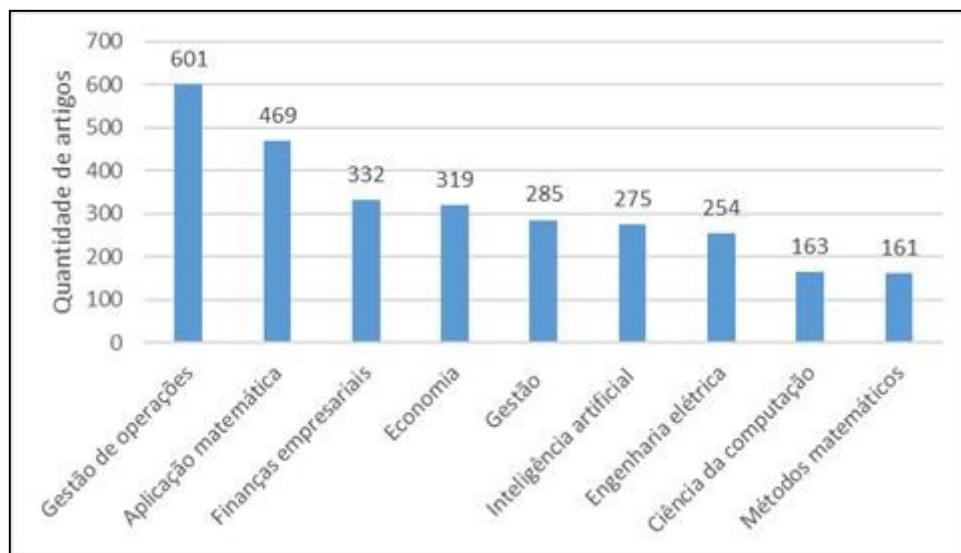


Figura 10 - Categorias da *Web of Science*

Já na **Figura 11**, é mostrado a distribuição dos trabalhos de acordo com ano de publicação, e, portanto, percebe-se, no período analisado, um crescimento do número de trabalhos publicados (com exceção do ano de 2018, pois este ainda não finalizou), o que evidencia a importância e atualidade do assunto.



Figura 11 - Ano de publicação dos artigos

A classificação dos trabalhos, ilustrada na **Figura 12**, mostra que apenas 1900 são artigos, portanto foi feito um novo filtro por meio do qual as próximas análises são feitas em cima destes trabalhos (1900 artigos).

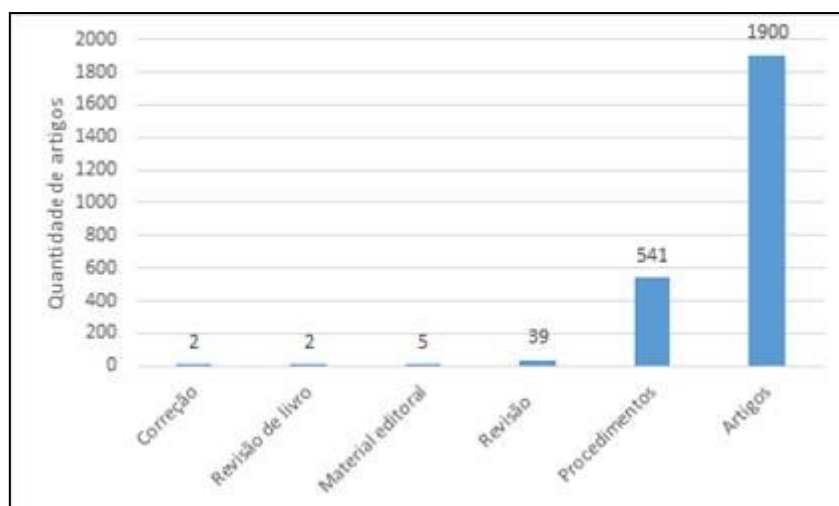


Figura 12 - Tipos de documentos

Na **Figura 13**, é mostrado o número de publicações por país ou região por meio de *cluster* gerado pela ferramenta *VOSviewer*, e, percebe-se China e Estados Unidos como os locais onde há o maior número de publicações. Vale ressaltar que é exatamente as duas potências mundiais serem o local onde o maior número de trabalhos é publicado. Além disso o número de investidores desses locais, em termos de percentual, é superior ao do Brasil, por exemplo, que também aparece na **Figura 13** (com 15 ou mais ocorrências).

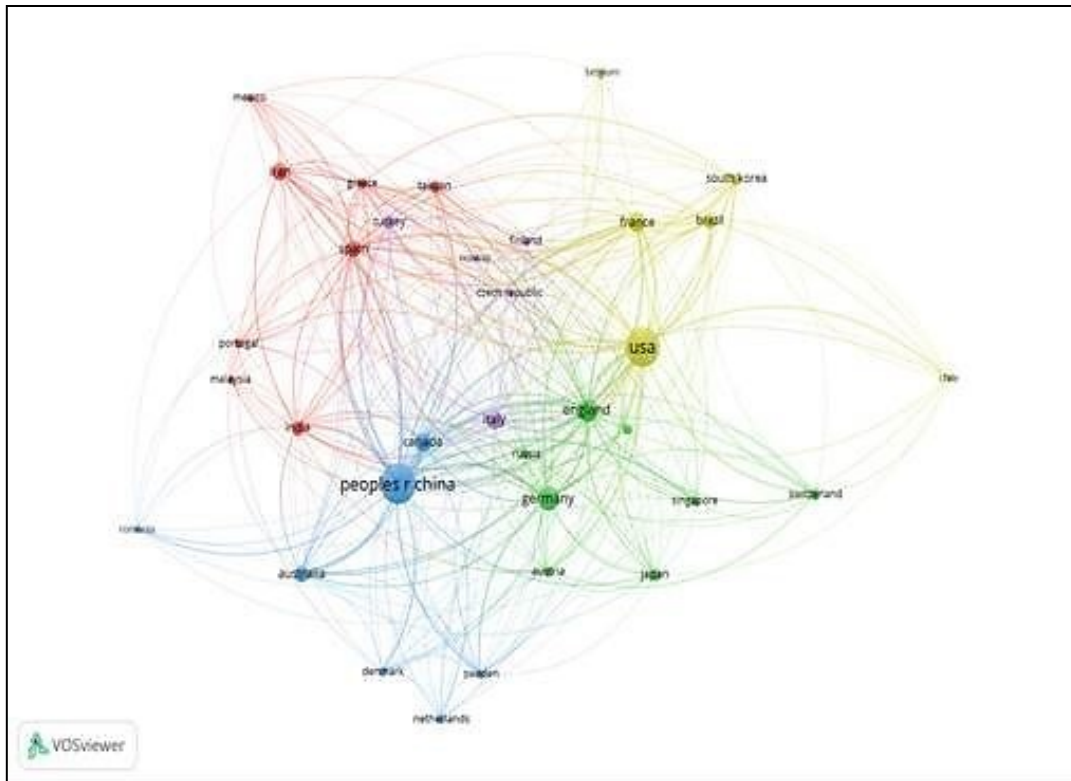


Figura 13 - País/região de publicação com 15 ocorrências ou mais

Já na **Figura 14**, gerada pela análise dos 1900 artigos selecionados em uma das fases da revisão sistemática, mostra que Markowitz (1952) é o autor mais citado.

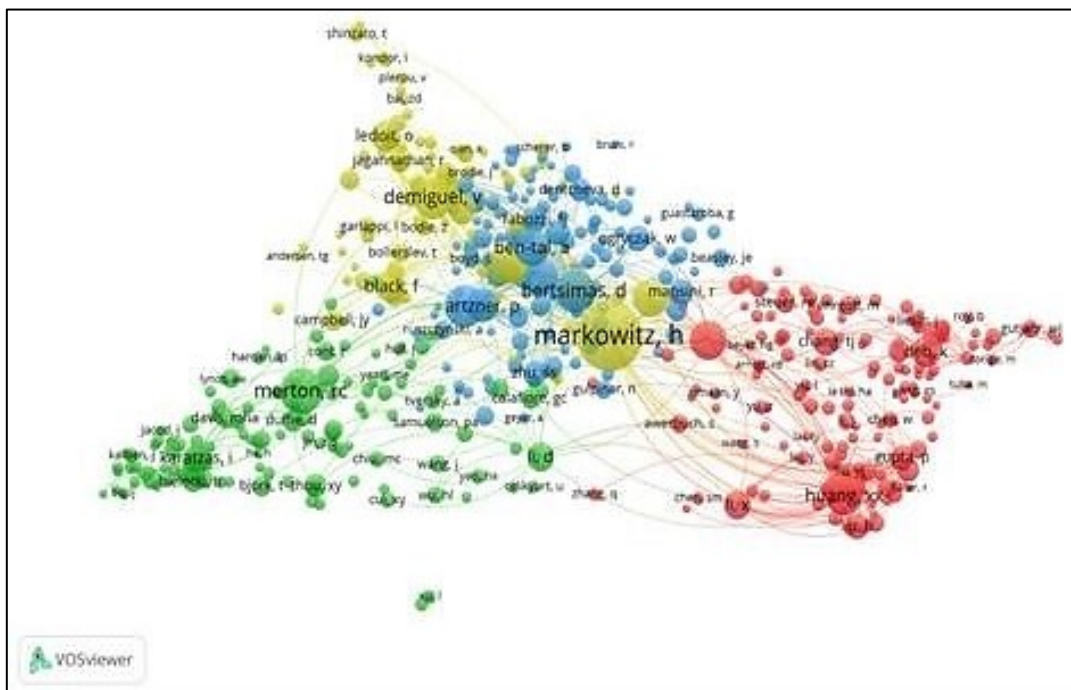


Figura 14 - Autores citados com 15 ocorrências ou mais

Na **Figura 15**, é mostrado a forte coocorrência das *strings* de buscas (*portfolio* e *optimization*), o que evidencia que os resultados encontrados estão coerentes com

os termos de buscas selecionados. O *cluster* em verde mostra a importância dos algoritmos e suas variações.

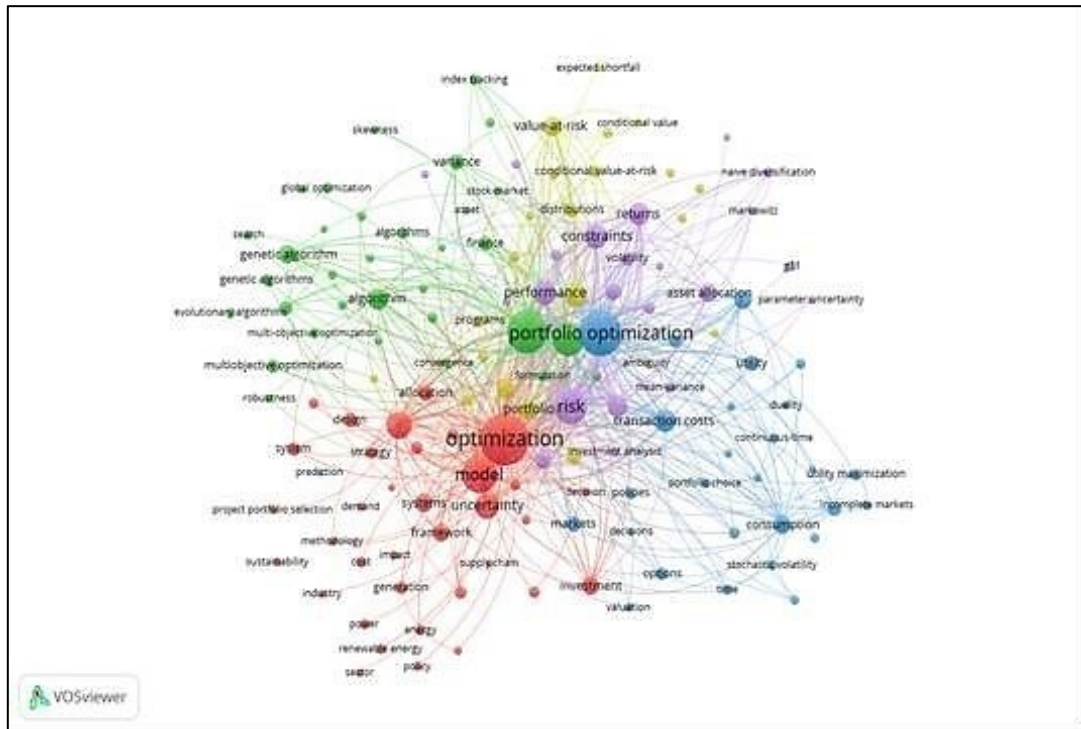


Figura 15 - Coocorrência das palavras chaves do autor e da base *Web of Science* com 15 ocorrências ou mais

A **Figura 16** apresenta o acoplamento bibliográfico (*bibliographic coupling*) considerando as fontes dos 1900 artigos avaliados.

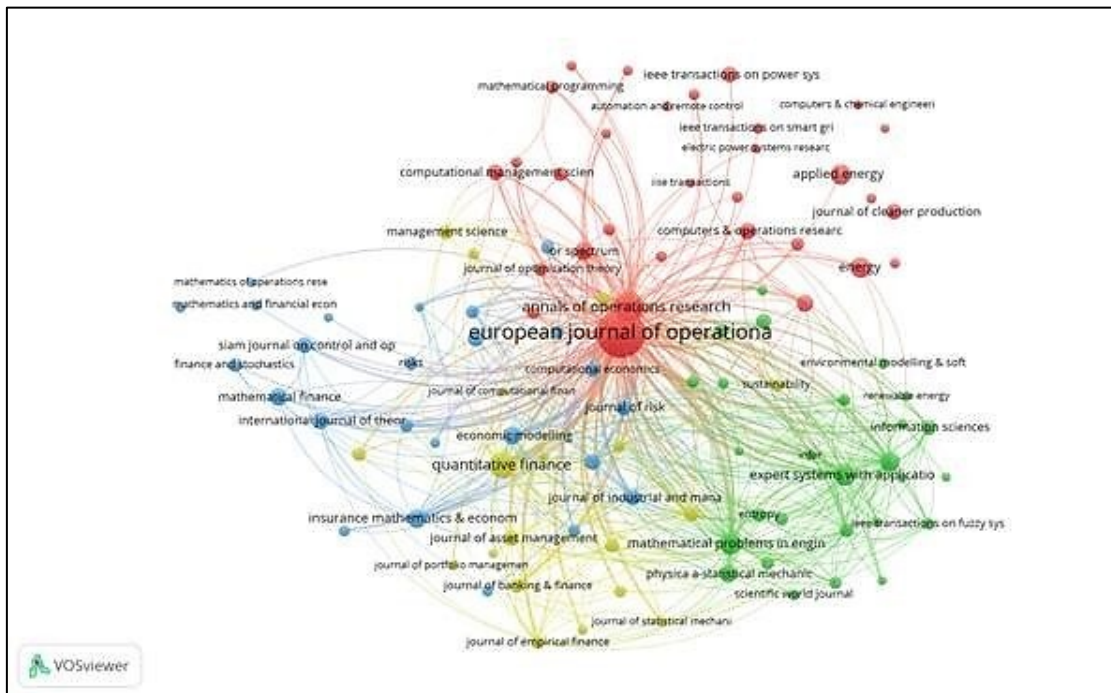


Figura 16 - *Bibliographic coupling*

É possível verificar no mapeamento as relações que existem entre as fontes. O *European Journal of Operational Research* se destaca com 125 artigos na temática de portfólio e é a fonte de 747 citações. O fator de impacto deste jornal nos últimos 5 anos foi de 3,96.

Foram selecionados 18 artigos (para serem lidos na íntegra), pelo critério do número de vezes que esses artigos foram citados nos últimos 5 anos. No **Quadro 1**, tem-se o título, os autores, ano de publicação e o número de citações de cada artigo selecionado. Todos os trabalhos apresentados no **Quadro 1**, ainda que de forma generalista, abordam sobre análise comparativa para seleção ou otimização de portfólio. No entanto, apenas com a leitura completa dos artigos foi possível selecionar os que tratam portfólio como carteira de investimento, como é mostrado no **Quadro 2**.

Quadro 1 - Artigos mais citados segundo o site da *Web of Science* (Continua)

Título	Autores	Ano	Citação
<i>Mean-variance portfolio optimization with state-dependent risk aversion</i>	(BJÖRK; MURGOI; ZHOU, 2014)	2014	79
<i>Algorithm runtime prediction: Methods & evaluation</i>	(HUTTER <i>et al.</i> , 2015)	2015	70
<i>60 Years of portfolio optimization: Practical challenges and current trends</i>	(KOLM; TÛTÛNCÛ; FABOZZI, 2014)	2014	57
<i>Joint supplier selection and scheduling of customer orders under disruption risks: Single vs. dual sourcing</i>	(SAWIK, 2014)	2014	51
<i>Beyond optimality: Multistakeholder robustness tradeoffs for regional water portfolio planning under deep uncertainty</i>	(HERMAN <i>et al.</i> , 2014)	2014	48
<i>Robust Multi-Period OPF With Storage and Renewables</i>	(JABR; KARAKI; KORBANE, 2015)	2015	46
<i>An Engineering-Economic Approach to Transmission Planning Under Market and Regulatory Uncertainties: WECC Case Study</i>	(MUNOZ <i>et al.</i> , 2014)	2014	43
<i>Twenty years of linear programming based portfolio optimization</i>	(MANSINI; OGRYCZAK; SPERANZA, 2014)	2014	41
<i>Optimal Offering Strategy of a Virtual Power Plant: A Stochastic Bi-Level Approach</i>	(KARDAKOS; SIMOGLU; BAKIRTZIS, 2016)	2016	37
<i>Using TOPSIS for assessing the sustainability of government bond funds</i>	(BILBAO-TEROL <i>et al.</i> , 2014)	2014	35
<i>Robust multiobjective optimization & applications in portfolio optimization</i>	(FLIEGE; WERNER, 2014)	2014	34

Quadro 1 - Artigos mais citados segundo o site da *Web of Science* (Conclusão)

<i>Incorporating risk measures in closed-loop supply chain network design</i>	(SOLEIMANI; SEYYED-ESFAHANI; KANNAN, 2014)	2014	34
<i>Navigating financial and supply reliability tradeoffs in regional drought management portfolios</i>	(ZEFF et al., 2014)	2014	31
<i>Artificial Bee Colony Algorithm Hybridized with Firefly Algorithm for Cardinality Constrained Mean-Variance Portfolio Selection Problem</i>	(TUBA; BACANIN, 2014)	2014	30
<i>Optimal multi-period mean-variance policy under no-shorting constraint</i>	(CUI et al., 2014)	2014	30
<i>On relations between DEA-risk models and stochastic dominance efficiency tests</i>	(BRANDA; KOPA, 2014)	2014	30
<i>Neural network for solving convex quadratic bilevel programming problems</i>	(HE et al., 2014)	2014	29
<i>A learning-guided multi-objective evolutionary algorithm for constrained portfolio optimization</i>	(LWIN; QU; KENDALL, 2014)	2014	28

Quadro 2 - Artigos selecionados após leitura (Continua)

Título	Abordagem	Ferramenta ou técnica	Problema
<i>Mean-variance portfolio optimization with state-dependent risk aversion</i> (BJÖRK; MURGOCI; ZHOU, 2014)	otimização do portfólio de média-variância em tempo contínuo.	média-variância adaptada	seleção de portfólio.
<i>60 Years of portfolio optimization: Practical challenges and current trends</i> (KOLM; TÛTÛNCÛ; FABOZZI, 2014)	Revisão bibliográfica para levantar as tendências para otimização de portfólios	Métodos de diversificação, portfólios de paridade de risco, a mistura de diferentes fontes de alfa e otimização de portfólio multi-período prático.	Seleção de portfólio
<i>Twenty years of linear programming based portfolio optimization</i> (MANSINI; OGRYCZAK; SPERANZA, 2014)	Revisão sobre o uso da programação linear para resolver problemas de seleção de portfólio.	Técnica de programação linear	Otimização de portfólio

Quadro 2- Artigos selecionados após leitura (Continua)

<p><i>Using TOPSIS for assessing the sustainability of government bond funds</i> (BILBAO-TEROL <i>et al.</i>, 2014)</p>	<p>Forneceu-se uma metodologia para avaliar a sustentabilidade dos investimentos em títulos soberanos, usando uma técnica de preferência de ordem por similaridade à solução ideal (TOPSIS)</p>	<p>Técnica TOPSIS</p>	<p>modelo de compromisso para a seleção de carteira de fundos de títulos do governo</p>
<p><i>Robust multiobjective optimization & applications in portfolio optimization</i> (FLIEGE; WERNER, 2014)</p>	<p>Forneceu-se uma caracterização da localização da fronteira robusta de Pareto em relação à fronteira de Pareto original correspondente e mostramos que técnicas padrão de otimização multiobjetivo podem ser empregadas para caracterizar essa fronteira eficiente e robusta. Ilustramos nossos resultados com base em um problema padrão de média-variância.</p>	<p>Otimização de média-variância com o conceito de contrapartida robusto de Bem-Tal e Nemirovski e generalização para o cenário multiobjetivo</p>	<p>problemas gerais de otimização multiobjetivo paramétrica convexa sob incerteza de dados</p>
<p><i>Artificial Bee Colony Algorithm Hybridized with Firefly Algorithm for Cardinality Constrained Mean-Variance Portfolio Selection Problem</i> (TUBA; BACANIN, 2014)</p>	<p>Este artigo apresenta o algoritmo de colônia artificial de abelhas (ABC) aplicado ao modelo de otimização de portfólio de média-variância (CCMV) restrito por cardinalidade</p>	<p>Colônia artificial de abelhas (ABC) com algoritmo de vagalume (<i>Algorithm Firefly - FA</i>)</p>	<p>Seleção de portfólio</p>
<p><i>Optimal multi-period mean-variance policy under no-shorting constraint</i> (CUI <i>et al.</i>, 2014)</p>	<p>Abordagem sobre média-variância de multiperíodo ideal sem restrição de curto prazo</p>	<p>Média-variância</p>	<p>Seleção de portfólio</p>
<p><i>On relations between DEA-risk models and stochastic dominance efficiency tests</i> (BRANDA; KOPA, 2014)</p>	<p>Teste de eficiência de portfólio, com base na análise envoltória de dados (DEA) ou na relação de dominância estocástica de segunda ordem (SSD)</p>	<p>Retorno variável à escala - VRS DEA (Data envelopment analysis)</p>	<p>Seleção de portfólio</p>

Quadro 2- Artigos selecionados após leitura (Conclusão)

<p><i>Neural network for solving convex quadratic bilevel programming problems</i> (HE <i>et al.</i>, 2014)</p>	<p>Construiu-se uma rede neural modelada por uma inclusão diferencial não-autônoma para resolver o problema</p>	<p>Rede Neural (modelo possui o menor número de variáveis de estado e estrutura simples)</p>	<p>problemas de programação de dois níveis convexos (CQBPPs).</p>
<p><i>A learning-guided multi-objective evolutionary algorithm for constrained portfolio optimization</i> (LWIN; QU; KENDALL, 2014)</p>	<p>Um algoritmo evolucionário híbrido multiobjectivo guiado por aprendizagem eficiente é proposto para resolver o problema de otimização de portfólio restrito na estrutura de média-variância estendida</p>	<p>MODEwAwL</p>	<p>O problema de seleção de portfólio com quatro restrições práticas que limitam o número de ativos em uma carteira</p>

Em todos os trabalhos é consenso a hibridização ou adaptação das técnicas ou algoritmos. Percebe-se o uso frequente do modelo da média-variância com algumas adaptações. O uso de algoritmos heurísticos, de acordo com a literatura ainda é pouco difundido, mas tem se mostrado bastante eficiente nos resultados encontrados. E, os trabalhos que foram desenvolvidos usando algoritmos tem obtido bons resultados.

Em Tuba e Bacanin (2014), o algoritmo ABC foi aplicado em conjunto com o FA para selecionar portfólios, de acordo com os resultados do teste e análise comparativa, concluíram que, no geral, o ABC-FA é melhor, inclusive, do que todos os algoritmos de ponta usados para fins de análise comparativa. Em Lwin, Qu e Kendall (2014), um algoritmo evolucionário híbrido multiobjetivo guiado por aprendizagem eficiente é proposto para resolver o problema de otimização de portfólio restrito na estrutura de média-variância estendida.

3.3 Conclusões

Neste trabalho, foram analisados 1900 artigos por meio das ferramentas da própria base de dados usada (*Web of Science*) e do *software VOSviewer*. A Gestão de Operações (pesquisa operacional) é a categoria com maior número de trabalhos, seguida de negócios financeiros, economia e gestão. A maior fonte de publicações no tema é o *European Journal Operational Reserch*. A pesquisa mostra que apesar do

tempo de publicação, o modelo da média-variância, desenvolvida por Markowitz (1952), ainda é bastante usada para otimização de portfólio.

De acordo com as análises feitas ao longo deste artigo, considerando os artigos mais citados, existe uma tendência para o uso de algoritmos híbridos para seleção de portfólios, além disso, percebe-se que ainda é frequente o uso do modelo de média-variância e da teoria desenvolvida por Markowitz (1952). Há também tendência para o uso de algoritmos em conjunto com as técnicas de média variância. Além disso o algoritmo ABC e suas variações apareceram como boa opção para resolver o problema de otimização de portfólio, devido o algoritmo ABC ser simples e ter poucos parâmetros.

Apesar do problema de otimização de portfólio ser um problema antigo, a sua complexidade e possibilidade de variações ainda permitem que novos trabalhos possam ser construídos sobre o tema. Além disso, apesar dos métodos heurísticos apareceram com frequência, o uso de métodos clássicos ainda está fortemente presente em trabalhos sobre otimização de portfólio. A escolha do método de otimização, dentre outros fatores, depende da complexidade da modelagem matemática, e do tempo de resposta do método escolhido. Métodos heurísticos permitem a resolução de problemas, sobre os quais não se tem muitas informações, com menor custo computacional, enquanto métodos exatos, diante desse tipo de problema, podem não conseguir convergir ou ter um custo computacional maior.

4. Modelo Híbrido de Média Variância e Suavização Exponencial de Holt-Winters para Otimização de Portfólio

O problema de otimização de portfólio consiste em determinar um conjunto de ativos e suas proporções de participação na carteira de modo que o binômio Risco-Retorno seja ajustado a propensão do cliente para correr riscos. Diante desse problema, Markowitz (1952), propôs o modelo de Média-Variância (MV).

No modelo MV, o retorno esperado é calculado como média dos dados históricos dos retornos das ações, e o risco é dado pela variância ou desvio padrão desses retornos. A ideia principal do modelo MV é lidar com os retornos de ativos individuais como variáveis aleatórias e adotar o valor da média e variância esperados para quantificar, respectivamente, o retorno e o risco do investimento (ZHANG; LI; GUO, 2018; TOSTA DE SÁ, 1979).

Uma das limitações do modelo de MV é o fato de não possuir restrições que trazem para o modelo características de um problema real, além disso o MV trabalha com a média histórica dos dados passados, sem fazer previsão (ERTENLICE; KALAYCI, 2018).

Rubio, Bermúdez e Vercher (2016), propõe o uso de métodos de séries temporais difusas ponderadas (FTS) para prever o desempenho futuro dos retornos das carteiras. Eles modelaram os parâmetros incertos dos modelos de seleção de portfólio *fuzzy* usando uma abordagem de média possibilitada pelo intervalo de tempo e aproximaram o retorno futuro incerto de um determinado portfólio por meio de um número *fuzzy* trapezoidal. Quando o modelo proposto é usado para retornos de portfólio de previsão pontuais, a precisão de um passo à frente é melhorada, também no que diz respeito aos métodos de previsão não difusa.

Zhao *et al.* (2018b), mostram que a propriedade de evolução temporal dos mercados de ações pode ser descrita por redes temporais. Os autores usaram a estrutura da rede temporal para caracterizar as redes baseadas em correlação, que evoluem no tempo, dos mercados de ações. A instabilidade do mercado pode ser detectada pela evolução da estrutura de topologia das redes financeiras. Os autores empregam a centralidade temporal como uma ferramenta de seleção de portfólio. As carteiras compostas por ações periféricas com baixo score de centralidade temporal, apresentam desempenho consistentemente melhor sob diferentes estruturas de otimização de portfólio, sugerindo que a medida de centralidade temporal pode ser

usada como nova ferramenta de otimização de portfólio e gerenciamento de risco.

Geng, Bose e Chen (2015), desenvolveram um sistema capaz de prever dificuldades financeiras de empresas chinesas listadas usando a mineração de dados. A justificativa é criar um sistema eficaz de alerta antecipado para previsão de crise financeira para uma melhor governança corporativa. Os autores usaram técnicas de mineração de dados para criar modelos de alerta de dificuldades financeiras com base em 31 indicadores financeiros e três janelas de tempo diferentes, e observaram que o desempenho das redes neurais é mais preciso do que outros classificadores, como árvores de decisão e máquinas de vetores de suporte, bem como um conjunto de múltiplos classificadores combinados usando a votação majoritária. Uma contribuição importante do trabalho foi a descoberta dos indicadores financeiros que desempenham um papel importante na previsão de deterioração da lucratividade.

Diante dos trabalhos apresentados, o tema em destaque é o uso de séries temporais, métodos de predição ou a identificação de indicadores robustos para a predição de dados. O uso de redes neurais, programação genética, lógica *Fuzzy*, estrutura de redes temporal, foram citadas como boas ferramentas que quando combinadas entre si ou com outras técnicas oferecem bons resultados.

Como a predição de dados é um tema importante no universo dos estudos sobre o mercado de ações, o objetivo desse trabalho é otimizar uma carteira de ações por meio de MV clássico e comparar com o MV com retornos médios preditos por suavização exponencial de *Holt-Winters*.

A hipótese é de que ao inserir retornos médios preditos no modelo de Média Variância os resultados serão melhores do que no caso em que as entradas do MV são retornos médios de dados históricos.

Na vida real do mercado de ações existem diversos tipos de investidores, e a maioria não usa modelos matemáticos como apoio a tomada de decisão, e quando usam alguma ferramenta, estas funcionam apenas no curto prazo. Outros investidores desenvolvem estratégias por meio de *feeling* que estes adquiriram ao longo dos anos ou por meio da leitura de livros de renomados estudiosos na área de economia. Este tipo de investidor consegue ganhar dinheiro por meio da interpretação sobre as próximas movimentações dos preços de acordo com o que acontece na política, no clima, na cultura ou governança das empresas.

São poucos os investidores que estudam o comportamento do preço de ações sobre o espectro da metodologia científica, usando lógica e estatística para encontrar propriedades morfológicas nos dados históricos e identificar os padrões que se repetem. Nesse sentido, este trabalho se faz importante por comparar diferentes abordagens do

uso do modelo de Markowitz (1952), e mostrar aplicações (que podem ser facilmente replicadas) usando pacotes da linguagem R.

4.1 Referencial teórico

4.1.1 Modelo de Markowitz

Antes de apresentar o modelo de MV é útil mostrar algumas notações básicas: cada ativo i (eles podem ser ações, títulos, imóveis dentre outros) é caracterizado por várias estatísticas: $E(r_i)$, é o retorno esperado do ativo i ; $Var(r_i)$, é a variância do retorno do ativo i ; e $Cov(r_i, r_j)$, a covariância dos retornos do ativo i e do ativo j (BENNINGA, 2014).

O problema solucionado por Markowitz (1952), consiste em determinar os percentuais x_i de cada um dos títulos na composição de uma carteira, de modo a encontrar o conjunto de ativos que para uma dada taxa de retorno esperado, apresentasse o menor nível de risco (medido pelo desvio padrão da carteira), e que para um dado nível de risco, apresentasse o maior retorno esperado dentre as possibilidades (TOSTA DE SÁ, 1979). A seguir apresenta-se duas possíveis abordagens para o modelo de MV. Se o cliente deseja fixar o risco que pretende correr e maximizar o retorno, o modelo matemático é representado por:

$$\text{Maximize } E[\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_n x_n] \quad (14)$$

Sujeito a:

$$Var[\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_n x_n] \leq \beta \quad (15)$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 \quad (16)$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n, \quad (17)$$

Onde o E representa a operação de valor esperado, Var é o operador de variância, x_i é a proporção do valor total disponível para investimento aplicado na ação i , ξ_1 representa o retorno aleatório para a i -ésima ação, e β é o nível máximo de risco que o investidor pode tolerar (ZHANG; LI; GUO, 2018). A função objetivo é dada pela Eq. (14), na Eq. (15) tem-se a restrição do risco máximo, a restrição orçamentária é dada pela Eq. (16) e indica que todo o dinheiro disponível deve ser investido, e na Eq. (17) é a restrição de não negatividade.

4.1.2 Fronteira eficiente

A teoria da seleção de carteiras surge com a finalidade de se constituir uma carteira de títulos que satisfaça ao investidor com relação à combinação do binômio risco-retorno (TOSTA DE SÁ, 1979). Os dados da **Tabela 6**, mostram retornos de ativos que são representados graficamente pela **Figura 17**:

Tabela 6 - Retornos e taxa de risco de ativos

Carteira	% Risco	% Retorno
A	7	20
B	17	20
C	17	38

Na **Figura 17**, a periferia compreendida entre os pontos A e C, representam o conjunto de carteiras eficientes. Essa periferia também é chamada de fronteira eficiente por conter as melhores combinações entre os ativos A, B e C. Abaixo desse arco da fronteira eficiente há um espaço que contém várias possibilidades de carteiras com diferentes composições dos ativos A, B e C.

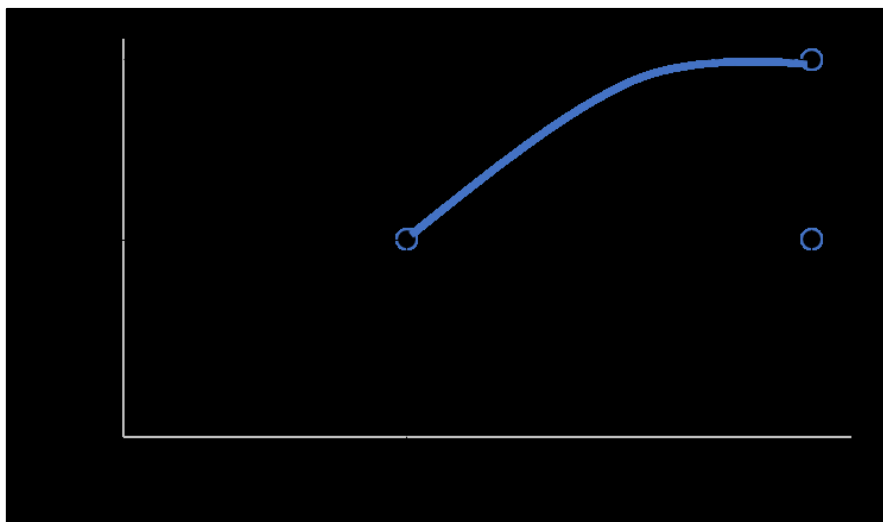


Figura 17 - Fronteira eficiente. Fonte: Adaptado de Tosta de Sá (1979).

Na **Figura 17**, a linha em azul representa a fronteira eficiente. Essa linha é análoga a fronteira de Pareto, e as carteiras que estão posicionadas em cima dela são as que possuem os melhores resultados em termos de risco e retorno.

4.1.3 Suavização exponencial de Holt-Winters

Dentre os métodos estatísticos de séries temporais encontra-se os métodos de suavização exponencial, em particular o método *Holt-Winters* (Suavização Exponencial

Tripla). Desenvolvida por Winters (1960), essa técnica é usada para aplicar em séries temporais que exibem tendência e sazonalidade. As vantagens desse método são: simplicidade, baixo custo computacional, precisão, capacidade de ajustamento automático. Diante dos desafios de analisar séries temporais levando em consideração tanto o fator sazonal quanto o nível de tendência (padrões da série que se repete em algum intervalo de tempo), a Suavização Exponencial de Tripla é uma boa opção para prever dados do mercado de ações (LIMA *et al.*, 2015; VERÍSSIMO *et al.*, 2012).

4.2 Aplicação

4.2.1 Modelo de Markowitz

Foram selecionados 43 ativos da B3 para então aplicar o modelo MV e selecionar o conjunto de ações e suas respectivas proporções para construir uma carteira de investimento otimizada. Usou-se o *software* R para resolver o problema de otimização, e devido as facilidades que o R dispõe, o pacote *fPortfolio* foi usado para desenvolver o passo a passo da otimização usando o Modelo de Média Variância e a Programação Quadrática (WÜRTZ *et al.*, 2009). O código usado encontra-se no Apêndice B.

O primeiro passo foi o cálculo das estatísticas que são as entradas no modelo de Média Variância: retornos esperados e matriz de variância-covariância. Com esses dados estatísticos calculou-se então os pesos dos ativos e o retorno do portfólio com a maior relação risco/retorno da fronteira eficiente (considera como possibilidade de negociação apenas a compra de ações: “*LongOnly*”) como é mostrado na **Figura 18**.

```

Title:
MV Tangency Portfolio
Estimator:      covEstimator
Solver:         solverquadprog
Optimize:       minRisk
Constraints:    LongOnly

Portfolio weights:
AtivoA AtivoB AtivoC AtivoD AtivoE AtivoF AtivoG AtivoH AtivoI AtivoJ AtivoK AtivoL AtivoM
0.3061 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0277 0.0000 0.0000 0.0000 0.2749 0.0000 0.0000
AtivoN AtivoO AtivoP AtivoQ AtivoR AtivoS AtivoT AtivoU AtivoV AtivoW AtivoX AtivoY AtivoZ
0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0847 0.0000
AtivoAA AtivoAB AtivoAC AtivoAD AtivoAE AtivoAF AtivoAG AtivoAH AtivoAI AtivoAJ AtivoAK AtivoAL AtivoAM
0.0962 0.0000 0.0000 0.0155 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0742 0.0087 0.0000 0.0000
AtivoNA AtivoAO AtivoAP AtivoAQ
0.0000 0.0000 0.0000 0.1121

Covariance Risk Budgets:
AtivoA AtivoB AtivoC AtivoD AtivoE AtivoF AtivoG AtivoH AtivoI AtivoJ AtivoK AtivoL AtivoM
0.3185 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0087 0.0000 0.0000 0.0000 0.2198 0.0000 0.0000
AtivoN AtivoO AtivoP AtivoQ AtivoR AtivoS AtivoT AtivoU AtivoV AtivoW AtivoX AtivoY AtivoZ
0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.1079 0.0000
AtivoAA AtivoAB AtivoAC AtivoAD AtivoAE AtivoAF AtivoAG AtivoAH AtivoAI AtivoAJ AtivoAK AtivoAL AtivoAM
0.1289 0.0000 0.0000 0.0127 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0927 0.0073 0.0000 0.0000
AtivoNA AtivoAO AtivoAP AtivoAQ
0.0000 0.0000 0.0000 0.1034

Target Returns and Risks:
mean Cov Cvar Var
0.0009 0.0096 0.0195 0.0141

```

Figura 18 - MV: Portfólio com maior relação risco/retorno.

Na **Figura 19**, é mostrado a composição do portfólio com o menor risco na fronteira eficiente.

```

Title:
MV Minimum variance Portfolio
Estimator: covEstimator
Solver: solveRquadprog
Optimize: minRisk
Constraints: Longonly

Portfolio weights:
AtivoA AtivoB AtivoC AtivoD AtivoE AtivoF AtivoG AtivoH AtivoI AtivoJ AtivoK AtivoL AtivoM
0.1974 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.1594 0.0000 0.0000 0.0000 0.2490 0.0000 0.0000
AtivoN AtivoO AtivoP AtivoQ AtivoR AtivoS AtivoT AtivoU AtivoV AtivoW AtivoX AtivoY AtivoZ
0.0000 0.0000 0.0049 0.1008 0.0000 0.0000 0.0000 0.0349 0.0000 0.0000 0.0000 0.0159 0.0000
AtivoAA AtivoAB AtivoAC AtivoAD AtivoAE AtivoAF AtivoAG AtivoAH AtivoAI AtivoAJ AtivoAK AtivoAL AtivoAM
0.0000 0.0000 0.0000 0.0653 0.0093 0.0000 0.0000 0.0000 0.0060 0.0000 0.0209 0.0112 0.0185
AtivoNA AtivoAO AtivoAP AtivoAQ
0.0000 0.0000 0.0035 0.1031

Covariance Risk Budgets:
AtivoA AtivoB AtivoC AtivoD AtivoE AtivoF AtivoG AtivoH AtivoI AtivoJ AtivoK AtivoL AtivoM
0.1974 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.1594 0.0000 0.0000 0.0000 0.2490 0.0000 0.0000
AtivoN AtivoO AtivoP AtivoQ AtivoR AtivoS AtivoT AtivoU AtivoV AtivoW AtivoX AtivoY AtivoZ
0.0000 0.0000 0.0049 0.1008 0.0000 0.0000 0.0000 0.0349 0.0000 0.0000 0.0000 0.0159 0.0000
AtivoAA AtivoAB AtivoAC AtivoAD AtivoAE AtivoAF AtivoAG AtivoAH AtivoAI AtivoAJ AtivoAK AtivoAL AtivoAM
0.0000 0.0000 0.0000 0.0653 0.0093 0.0000 0.0000 0.0000 0.0060 0.0000 0.0209 0.0112 0.0185
AtivoNA AtivoAO AtivoAP AtivoAQ
0.0000 0.0000 0.0035 0.1031

Target Returns and Risks:
mean Cov CVaR VaR
0.0007 0.0084 0.0179 0.0126

```

Figura 19 - MV: Portfólio com o menor risco da Fronteira Eficiente.

Na **Figura 20** - a), todos os pontos da cor azul são melhores (relação risco/retorno) que qualquer ponto da cor laranja pois para um mesmo risco de um portfólio da parte laranja da fronteira há portfólios na fronteira azul que oferecem um retorno maior. Por meio de simulação de Monte Carlo gera-se um conjunto de possíveis carteiras, e estas são plotadas junto ao gráfico da fronteira eficiente como é mostrado na **Figura 20** - b).

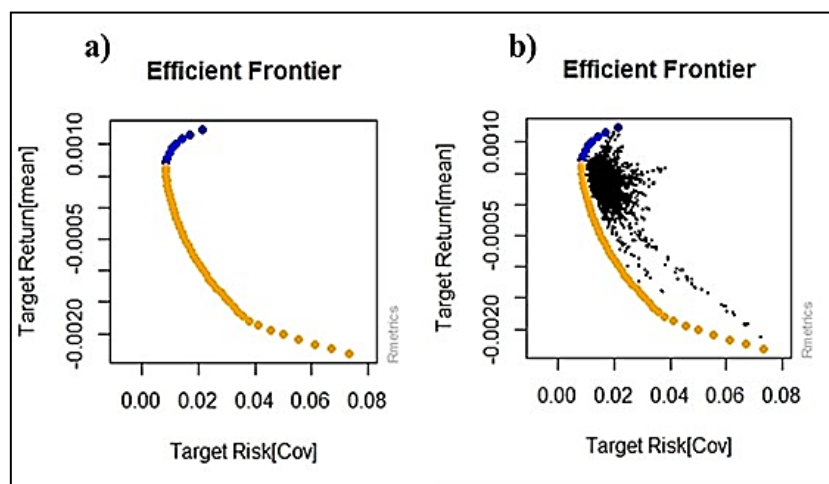


Figura 20 - a) Fronteira Eficiente; b) Simulação de Monte Carlo.

No **Figura 21** - a), o quadrado destacado em vermelho mostra a localização de uma carteira (em termos de risco/retorno) que possui ativos com o mesmo peso, também conhecida como estratégia $1/N$. A estratégia $1/N$ geralmente é usada como benchmark para comparar os resultados da otimização com uma estratégia que consiste simplesmente na divisão do capital, que será investido em cada ativo, em partes iguais.

Na **Figura 21** – b), também se demonstra o comportamento de cada ativo em termos de risco/retorno.

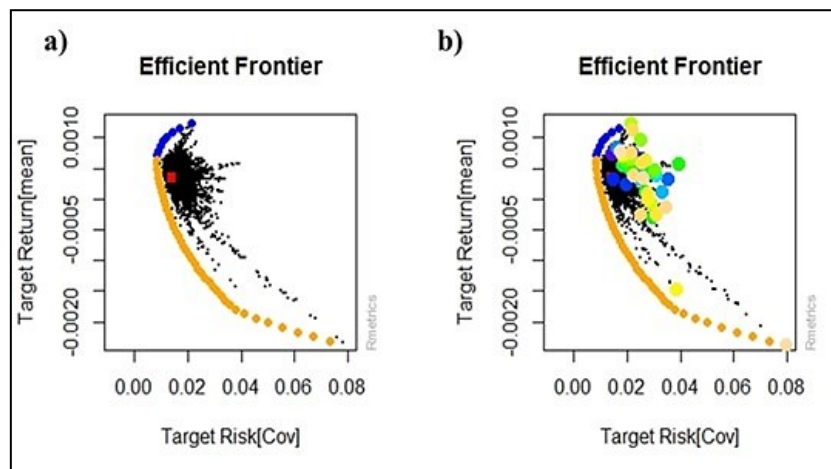


Figura 21 - a) ativo de proporções iguais; b) relação risco/retorno de cada ativo.

A **Figura 21**, em si, mostra a vantagem da diversificação no momento da construção da carteira de investimento, pois nenhum dos pontos plotados em cima do gráfico da fronteira eficiente oferecem melhores valores de risco/retorno do que os pontos azuis da fronteira.

4.2.2 Retorno esperado estimado por *Holt-Winters*

Para fazer a predição dos retornos foram usados dados das ações apresentadas no Apêndice A. Esses dados coletados são os retornos dos ativos no período de 10 anos, e utilizou-se os dados de 9 anos para prever os retornos do ano subsequente. Utilizou-se a função Planilha de Previsão do MS Excel para fazer a predição dos dados. Essa função usa a técnica de Suavização Exponencial Tripla.

O uso da Planilha de Previsão do Excel pressupõe algumas diretrizes:

- a) Os intervalos devem ser fixos (exemplo: cada 7 dias; primeiro dia do mês de cada mês, último dia de cada mês, dentre outros). No presente artigo usa-se dados diários dos retornos dos ativos;
- b) Se até 30% dos dados estiverem faltando, o Excel ainda conseguirá fazer previsões.

Na **Figura 22**, é mostrado a configuração no Excel para fazer predição. Um ano de operações na bolsa de valores brasileira corresponde em média a 251 dias, logo será essa a quantidade de inputs desejado. A sazonalidade é automática e caso haja pontos ausentes usa-se interpolação para preenchê-los (lembrando da condição da alínea c desta seção).

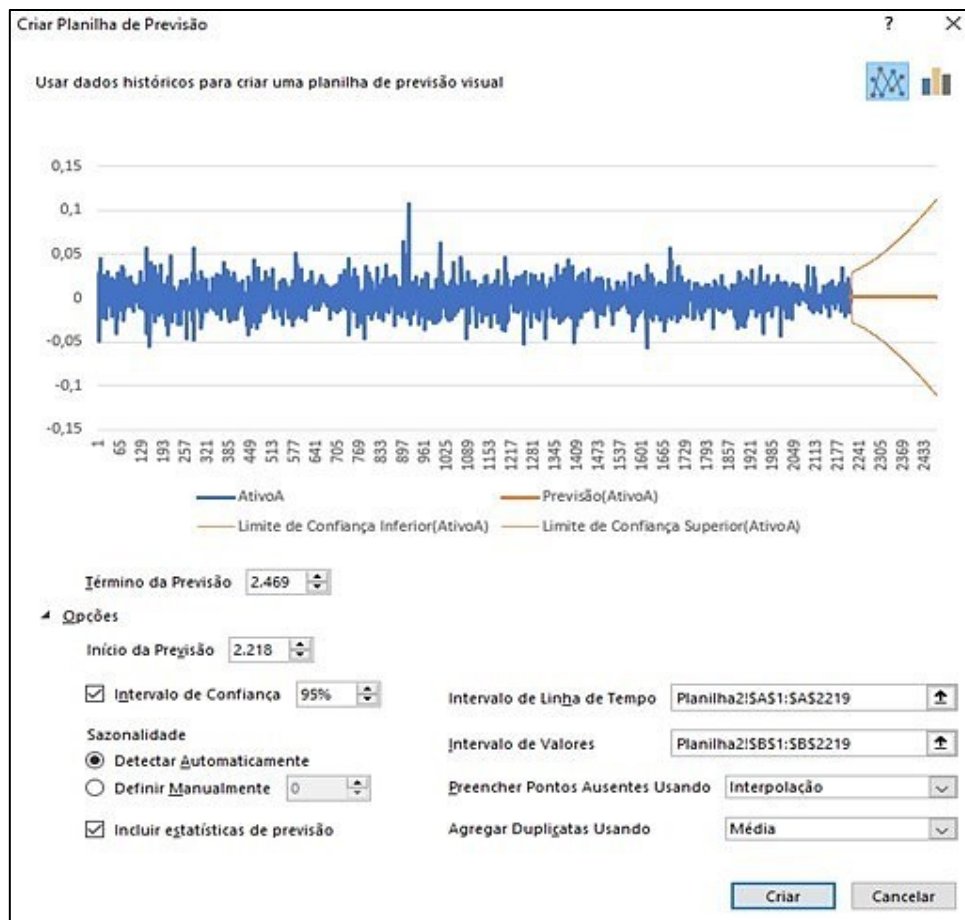


Figura 22 - Configuração da planilha de previsão.

Na **Figura 23**, é mostrado o gráfico com os dados históricos, representado pela linha azul, e os dados preditos representados pela linha da cor laranja mais grossa. Os limites de confiança são representados pelas linha da cor laranja mais finas.

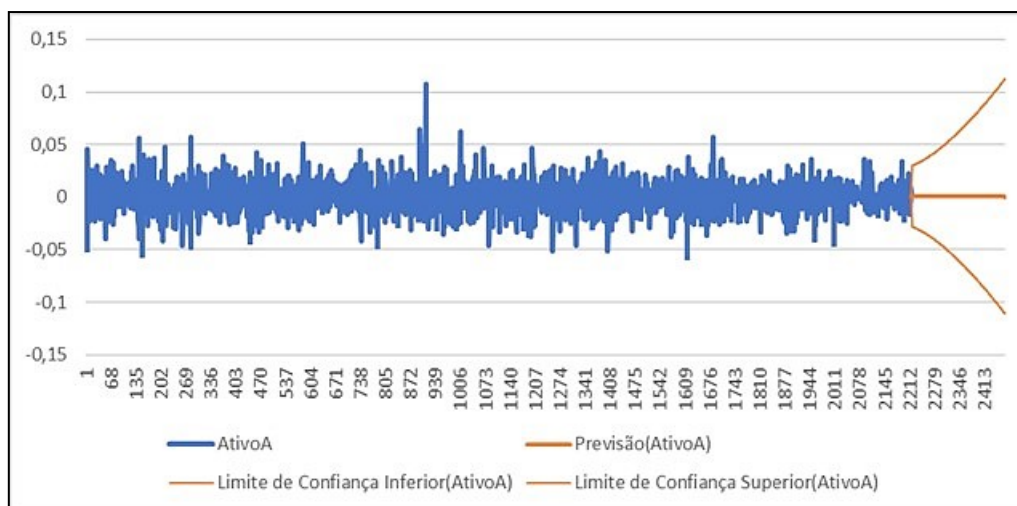


Figura 23 - Gráfico de previsão.

Na **Tabela 7**, são mostrados os dados estatísticos do modelo de previsão do AtivoA: MASE (métrica do erro com escala de média absoluta), SMAPE (métrica do erro de percentual de média absoluta simétrica), MAE (métrica do erro de percentual de

média absoluta simétrica) e RMSE (métrica do erro ao quadrado da média da raiz) são métricas de avaliação (LIMA *et al.*, 2015; VERÍSSIMO *et al.*, 2013). Além disso, na **Tabela 7**, é mostrado os valores dos parâmetros da Suavização Exponencial Tripla para a série temporal do AtivoA (*Alpha*, *Beta* e *Gamma*).

Tabela 7 - Dados estatísticos do modelo

Estadística	Valor
<i>Alpha</i>	0,10
<i>Beta</i>	0,00
<i>Gamma</i>	0,00
MASE	0,51
SMAPE	1,56
MAE	0,01
RMSE	0,01

Vale ressaltar que o parâmetro *Alpha* detecta o nível da série, o parâmetro *Beta* capta a tendência e o *Gamma* identifica a sazonalidade. Foi feito a predição para todos os demais ativos seguindo o passo a passo descrito nessa seção. Como resultados obteve-se uma planilha com dados preditos de retornos de cada ativo e as médias desses dados foram as entradas no Modelo MV.

4.2.3 Otimização com dados preditos

Usando o código em R do Apêndice B, reproduziu-se o mesmo passo a passo da otimização feita na seção 4.2.1, com o diferencial de usar retornos preditos ao invés da média dos retornos históricos. Na **Figura 24**, são mostrados os resultados por meios de gráficos.

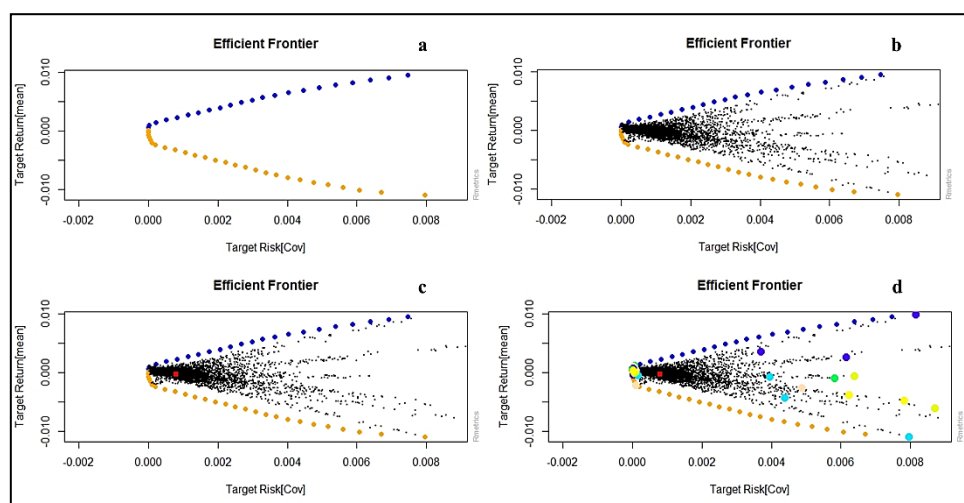


Figura 24 - Otimização com MV e Holt-Winters. a) Fronteira eficiente; b) Simulação de Monte Carlo; c) Pesos iguais; d) Ativos individuais.

A **Figura 24-a** mostra a fronteira eficiente, onde as melhores composições são representadas pelos pontos da cor azul. Na **Figura 24-b**, tem-se a simulação de 5000 mil carteiras com composições diversas entre os ativos. A **Figura 24-c**, mostra a local da carteira onde todos os ativos têm o mesmo peso, e na **Figura 24-d**, tem-se a localização de cada ativo de forma individual. Já na **Figura 25**, é mostrado a composição do portfólio que apresenta o menor risco.

```
> p2
Title:
MV Minimum Variance Portfolio
Estimator:      covEstimator
Solver:         solverQuadprog
Optimize:       minRisk
Constraints:     LongOnly

Portfolio weights:
AtivoA  AtivoB  AtivoC  AtivoD  AtivoE  AtivoF  AtivoG  AtivoH  AtivoI
0.0143  0.0000  0.0000  0.0173  0.0253  0.0000  0.0496  0.0299  0.0301
AtivoJ  AtivoK  AtivoL  AtivoM  AtivoN  AtivoO  AtivoP  AtivoQ  AtivoR
0.0279  0.0211  0.0176  0.0000  0.0252  0.0000  0.0000  0.0271  0.0411
AtivoS  AtivoT  AtivoU  AtivoV  AtivoW  AtivoX  AtivoY  AtivoZ  AtivoAA
0.0330  0.0000  0.0287  0.0314  0.0000  0.0223  0.0000  0.0000  0.0060
AtivoAB AtivoAC AtivoAD AtivoAE AtivoAF AtivoAG AtivoAH AtivoAI AtivoAJ
0.0141  0.0327  0.0200  0.0000  0.1220  0.0623  0.0000  0.0000  0.0390
AtivoAK AtivoAL AtivoAM AtivoAN AtivoAO AtivoAP AtivoAQ
0.0273  0.0253  0.0092  0.1528  0.0257  0.0215  0.0000
```

Figura 25 - Portfólio: MV com Holt-Winters.

4.3 Resultados

Os resultados obtidos na seção 4.2.1 e seção 4.2.3 mostram resultados com características diversas. A composição da carteira na **Figura 25** (27 ativos), é mais diversificada do que a composição da carteira da **Figura 19** (15 ativos). Com isso a carteira mostrada na **Figura 25** apresenta tanto o retorno esperado quanto a taxa de risco menor do que a carteira da **Figura 19**. Na **Tabela 8**, mostra-se o principal resultado da comparação. Onde a carteira otimizada com o MV apresenta um retorno esperado maior do que o retorno da carteira obtida com o modelo híbrido de MV com *Holt-Winters*. Em compensação o retorno real da carteira MV é menor que MV híbrido, e o risco (desvio padrão) de MV híbrido é menor.

Tabela 8 - Resultados Retorno diário/Riscos do MV e MV com Holt-Winters

	Retorno Esperado	Risco	Retorno Real (dia)
MV	0,0700%	11,22%	0,0178%
MV com Holt-Winters	0,0200%	1,41%	0,1728%

4.4 Considerações Finais

O objetivo desse trabalho era otimizar uma carteira de ações por meio de MV com retorno médio de dados históricos e MV com retornos médios preditos por suavização exponencial de *Holt-Winters*, e posteriormente fazer a comparação entre as duas abordagens. E a hipótese era de que ao inserir retornos médios preditos no modelo de Média Variância a precisão dos resultados seria maior do que usando os retornos médios de dados históricos. O objetivo foi cumprido e a hipótese é verdadeira para os dados reais usados nas análises.

Quando é mostrado apenas o retorno esperado, a carteira formada por MV parece ser a melhor opção, entretanto, a relação risco-retorno desta carteira, comparada com a relação risco-retorno da carteira MV híbrida, mostra que a segunda opção é a melhor. Quando se olha para retorno real e taxa de risco a carteira formada por MV híbrido também é a melhor opção. No entanto, a escolha em termos de retorno real exige que uma série de testes sejam feitos, para comprovar se realmente o modelo híbrido traz retorno real maior que o modelo clássico. Lembrando que, mesmo fazendo esses testes, o que haverá é uma probabilidade alta de que esse modelo retorne bons resultados e não uma certeza.

Para os dados usados nessa pesquisa, o MV híbrido apresentou melhores resultados diante da relação risco retorno, devido a predição conseguir captar dos retornos o efeito da evolução dos preços histórico das ações, e isso acaba trazendo para o modelo o aumento da capacidade de representar o sistema real do mercado de ações. Os resultados também mostram que as duas carteiras possuem resultados positivos, e, portanto, o investidor obteve lucro nas duas. As limitações do trabalho são:

- a) Os retornos foram avaliados sem descontar despesas ou custos (emolumentos, taxa de corretagem e impostos);
- b) Foram usados apenas dados de 10 anos dos preços dos ativos, e, usar uma quantidade maior de dados seria interessante.

Como sugestões de trabalhos futuros indica-se o uso de outros métodos de predição como *fuzzy*, Redes Neurais, *box Jenkins*, estatística *Bayesiana*, comparando os resultados para identificar os melhores métodos.

5. Analysis of new approaches used in portfolio optimization: a Systematic Literature Review

Portfolio Optimization consists of determining a set of assets, and their respective portfolio participation weights, which satisfy the investor concerning the combination of risk-return binomial. Given this problem, (MARKOWITZ, 1952), proposed the Mean-Variance (MV) model. In the model, the expected return is given by the average of the historical data of the stock's return, and the risk is calculated by the variance of these returns. The main idea of the MV model is to deal with the returns of individual assets as random variables and to adopt the value of expected return and variance in order to quantify the return and investment risk, respectively (ZHANG; LI; GUO, 2018).

If the customer wants to minimize the risk for a given value of fixed return, then the mathematical model that will select the stocks is given by (for a given level of risk, maximizing returns is also its equivalent model):

$$\text{Minimize } Var[\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_n x_n] \quad (18)$$

Subject to constraints:

$$E[\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_n x_n] \geq \alpha \quad (19)$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 \quad (20)$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (21)$$

Where E represents the operation of expected value, Var is the variance operator, and x_i is the proportion of the total amount available for investment applied in the stock i , ξ_1 represents the random return for the i th stock (ZHANG; LI; GUO, 2018). The objective function of minimizing the risk is given by equation (18), in equation (19) α represents the minimum return value that the investor can accept, the budget constraint is given by the equation (20) and indicates that all available money must be invested, and equation (21) is the non-negativity constraint and it means that selling short are not accepted (financial practice used in periods of decline because it consists in the sale of an asset that he does not possess, hoping that its price falls to then buy the asset back and profit in operation with the difference).

Merton (1971) approaches the portfolio optimization problem from the perspective of how to systematically build and analyze optimal dynamic models of continuous time under uncertainty. According to the author, the main advantage of the continuous-time model comparing to models that consider the discrete-time is the fact

that it contemplates only two types of stochastic processes: functions of Brownian movements and Poisson processes. Thus, the number of parameters in the problem is reduced, which allows taking full advantage of the huge amount of written literature about these processes.

In Uryasev (2000), Conditional-Value-at-Risk (CVaR) is proposed as a risk measure of the portfolio, and therefore optimization would be on top of that metric. The *CVaR* is derived from the weighted average of "extreme" losses in the tail of the distribution of possible returns, in addition to the cutoff point of the Value at Risk (VaR). One of the advantages of CVaR is that it can be minimized efficiently using LP (Linear Programming) techniques.

Another approach to the portfolio problem is robust optimization, which, according to Fabozzi *et al.* (2007), is the act of incorporating into the model, through mathematical techniques, the uncertainty generated by the errors of estimation of the parameters used in optimization. According to Pflug e Wozabal (2007) and Fabozzi *et al.* (2007), robust optimization offers as an advantage the fact that modifications in the mathematical model do not change the characteristics of the problem, which remains a problem of quadratic programming.

DeMiguel, Garlappi and Uppal (2009a), Pflug, Pichler and Wozabal (2012) and Behr, Guettler and Miebs (2013) report that the uniform investment strategy (Naive diversification or $1/N$) is rational the greater the degree of uncertainty about the risk/return distribution is, and this fact is supported by several experimental studies which demonstrate that this kind of strategy tends to be better in environments of extreme uncertainty, and is usually a good strategy for risk-averse investors. DeMiguel, Garlappi and Uppal (2009a) show in what situations Naive Diversification is preferred to optimization, and the results by Behr, Guettler and Miebs (2013) corroborate those of DeMiguel Garlappi and Uppal (2009a), showing that the optimization strategies are not unanimously better than the $1/N$ strategy, from the perspective of the estimation error outside the sample.

Sparse and stable optimization is an important advance for mean-variance portfolio selection. In general, DeMiguel *et al.* (2009b), Brodie *et al.* (2009), Fan, Zhang and Yu (2012), Behr, Guettler and Miebs (2013) and, Dai and Wen (2018) defends the idea of taking into account weights that can assume negative or positive values (Long and Short positions). The idea is to stabilize the weights of the assets to reduce the estimation error using the Mean-Variance model with the addition of the restriction that the norm of the portfolio weight vector is less than a certain limit. The sum of the weights can be less than or equal to 1 (1-norm). In addition, the model consists of admitting

negative values (Short), but normalization brings them to the positive side. Furthermore, the threshold of the sum of the weights can be greater than or equal to 1. This simple change brought better results in terms of Sharpe than strategies present in the literature.

Some authors reviewed the Portfolio optimization methods. For example: Hu *et al.* (2015), studied the application of evolutionary computation in the discovery of rules in algorithmic trading for shares; Ertenlice e Kalayci (2018), conducted a swarm intelligence research for portfolio optimization, discussing algorithms and applications; Zhang, Li, Guo (2018), reviewed the portfolio optimization problem with the Markowitz mean-variance structure; Mansini, Ogryczak, Speranza (2014), reexamined over 20 years of portfolio optimization based on operational research.

The contribution of this work lies in the fact that no article has been found in the literature, which broadly and jointly encompasses the items: heuristic and exact methods, realistic constraints, evaluated markets, types of stock analysis, and software/Programming language.

Given the importance of the portfolio optimization theme and the scope of related matters, this study has as purpose to identify, by means of a Systematic Literature Review (SLR), the main methods, tools and techniques of portfolio optimization, real-world constraints, and to analyze how the applications of this set were changing over the years.

This article is organized as follows: Section 5.1 presents the method through which state of the art was sought in the literature on portfolio optimization; in Section 5.2, the results are presented; in Section 5.3, the results are discussed, and the research questions are answered. Moreover, the conclusions are shown in Section 5.4.

5.1 Methodology

5.1.1 Research method

This study is categorized as a configurative review, as it explored the theme defined with qualitative data and data gathered from more heterogeneous primary studies. The RSL steps performed were based on Morandi e Camargo (2015) and complemented, according to Bastos *et al.* (2017), Furlan e Laurindo (2017), and Yu *et al.* (2018).

The scope and stages of development of the article are documented in the systematic literature review protocol (**Table 9**). In **Table 9** defines the research boundaries.

Table 9 - Protocol for Systematic Literature Review

PROTOCOL FOR SYSTEMATIC LITERATURE REVIEW: SEARCH STRATEGY

Central Theme: The Central Theme is Portfolio Optimization. This theme will be approached in an open manner with the objective of finding the greatest number of academic and scientific publications.

Conceptual Framework: Portfolio Optimization is a very important topic in the stock market area. Since the creation of the Mean-Variance Model by Markowitz (1952), several studies have been developed in order to improve the model/create more robust analysis methods through the insertion of realistic constraints in the model. This review has the purpose of identifying the studies that include the theme, the tools, and methods for optimizing Portfolio.

Background:	Diversification and optimization of an investment portfolio.
Scope:	The Search period will be between 2014 and 2018, with the intention of finding the most relevant publications published in the last five years.
Theoretical currents:	Portfolio Optimization.
Languages:	Both the search terms and the papers will be in English.
Research Questions:	<p>Question 1 - Which key methods, tools, or techniques are used in portfolio optimization?</p> <p>Question 2 - Which realistic constraints are used?</p> <p>Question 3 - What type of analysis is done regarding the stock: fundamental, technical, or mixed (fundamental and technical)?</p> <p>Question 4 - Which software/programming language are used?</p>
Review Strategy:	(X) Configurative () Aggregative
Inclusion Criteria	The papers should contain the latest discoveries about portfolio optimization models as well as realistic constraints, analysis types, and algorithms.
Exclusion Criteria	Duplicate papers
Search terms:	<p>1st search: "Optimization" AND "portfolio" AND "algorithms" AND "return" AND "risk";</p> <p>2nd search: "Optimization" AND "portfolio" AND "algorithms" AND "return" AND "risk";</p> <p>3rd search: "Portfolio Optimization" AND "stock market" AND "Markowitz";</p> <p>4th search: "stock market" AND "Portfolio selection" AND "portfolio optimization";</p> <p>5th search: "Portfolio Optimization" AND "stock market" AND "financia".</p>
Search Sources	Web of Science database.

5.1.2 Research Questions

The Research Questions in **Table 9** guided the authors on the aspects that should be observed in reading the compiled articles. Discussion/answers to Research Questions are made in Section 4.

5.1.3 Inclusion Criteria and Exclusion Criteria

The papers selected were those published in journals in the period between 2014 and 2018. Other than this criterion, **Figure 26** has the inclusion or exclusion filters for the papers. Search strings are defined in **Table 9**.

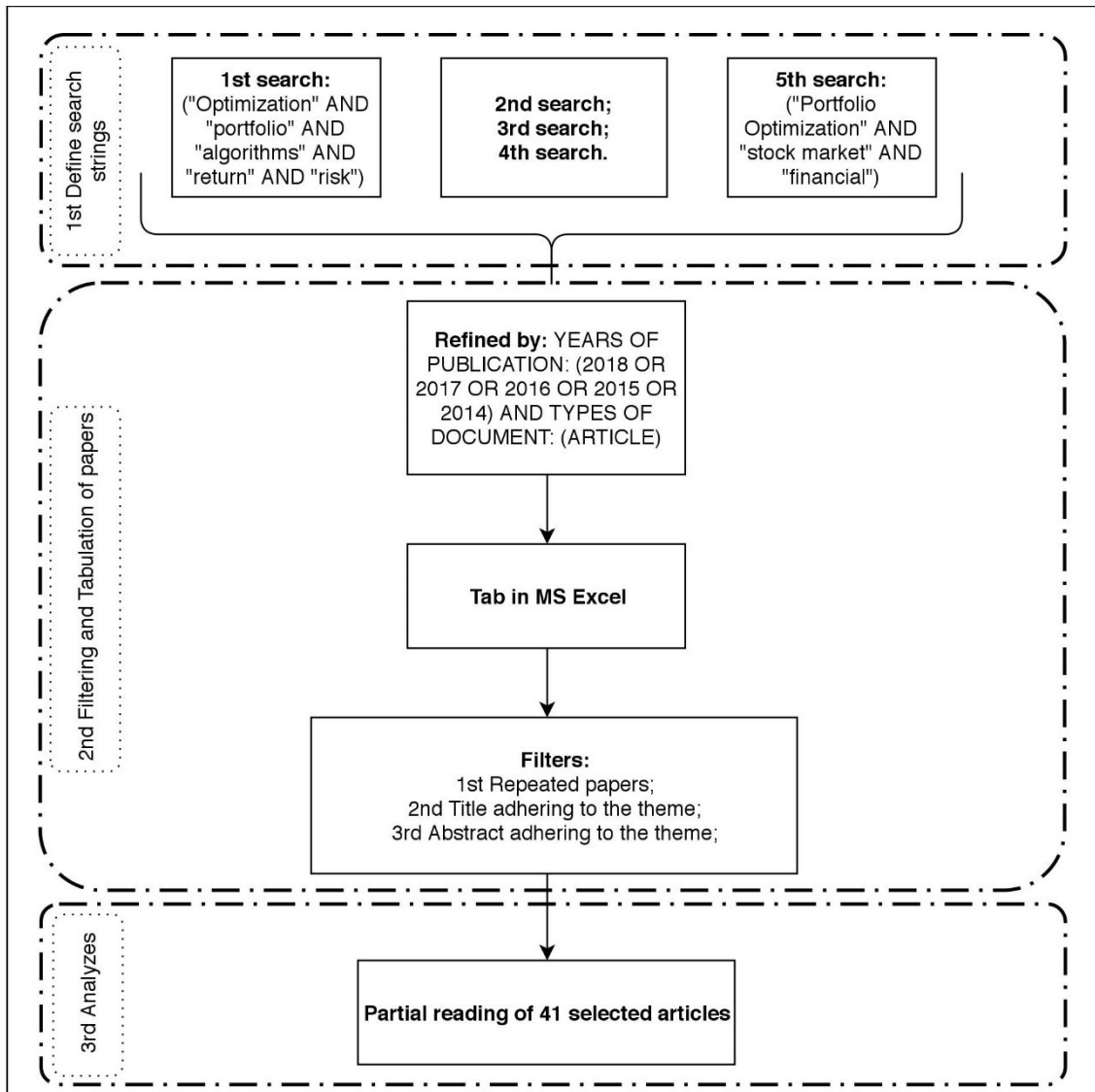


Figure 26 - Inclusion Criteria and Exclusion criteria

The papers were selected according to their approach regarding the Portfolio optimization theme and their potential relevance to solving the research questions shown in **Table 9**.

5.1.4 Deviations in the protocol

Some research steps were changed regarding what was proposed:

- a) The use of the impact factor in journal evaluations instead of the Qualis classification;

- b) Inclusion of analysis on the data used to test the algorithms or models (whether they were real or of instances);
- c) Inclusion of VOSviewer software for macro analysis of the articles found and their references to classical authors.

5.2 Results

The following is a macro view of the results of the search for papers on the portfolio optimization theme. By combining Search terms (**Table 9**) into a single set of search strings ("Optimization" AND "portfolio" OR "Portfolio Optimization" OR "Portfolio selection" AND "algorithms" AND "return" AND "risk" AND "stock market" AND "Markowitz" AND "financial"), and refinement for works written in the English language, was found 2137 papers on portfolio optimization. With these papers, some analyzes were performed with the aid of VOSviewer software. A survey of the main words used in the titles of the articles was performed, whose mapping can be seen in **Figure 27**.

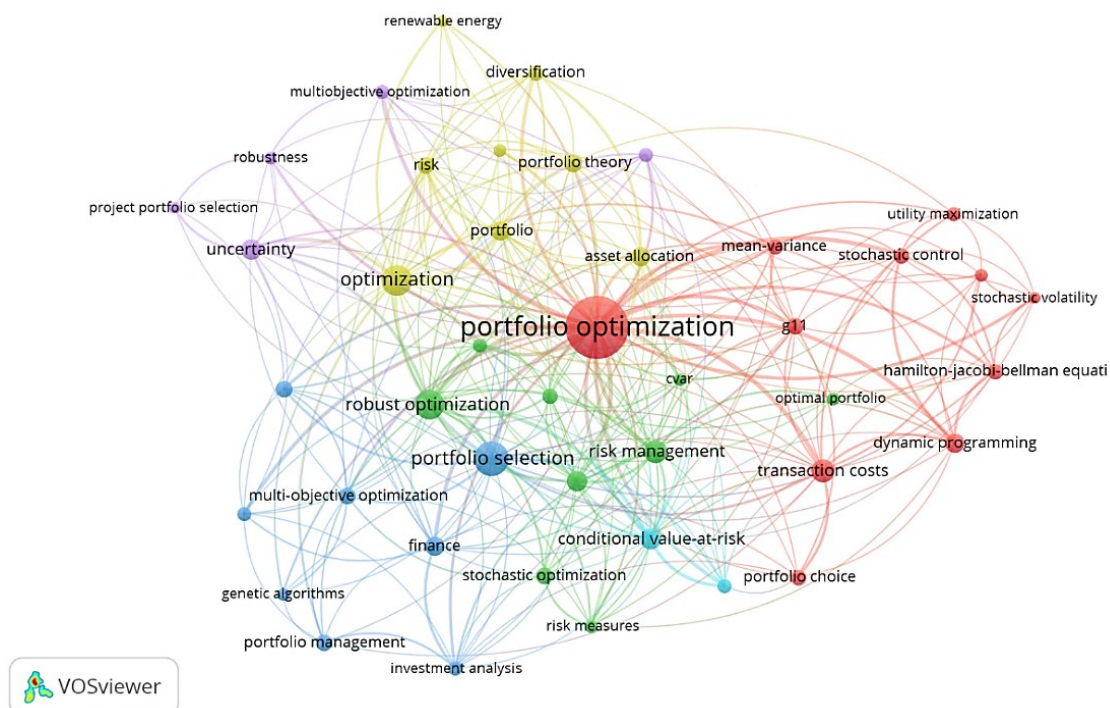


Figure 27 - Map of keywords contained in the title of the publications

Note in **Figure 27**, the presence of terms such as transaction costs, risk management, dynamic programming, and robust optimization. Besides, the terms related to portfolio optimization have also been identified: genetic algorithms, multi-objective optimization, and stochastic optimization. These terms give clues about the lines of research explored by the articles found.

In **Figure 28**, the main countries where the papers were published are shown. China and the USA appear as the two countries that publish the most on the topic under

study. Followed by Germany, France, Canada, and England. Brazil appears on the map with a considerable number of publications on the subject.

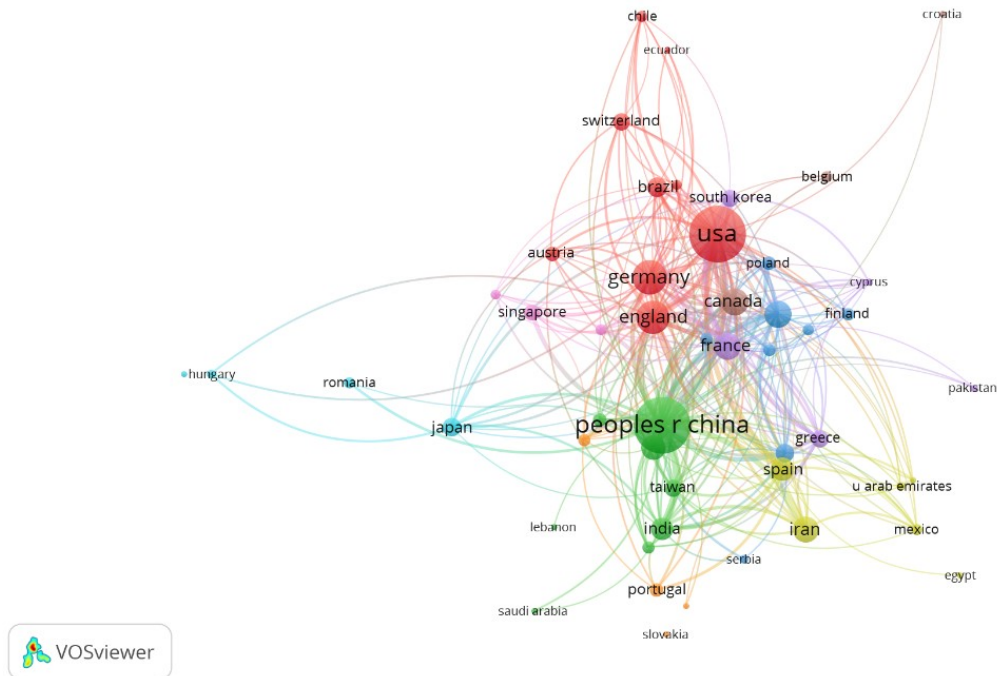


Figure 28 - Country mapping in terms of publication

In **Figure 29**, the mapping of the most cited authors in the studies researched is shown.

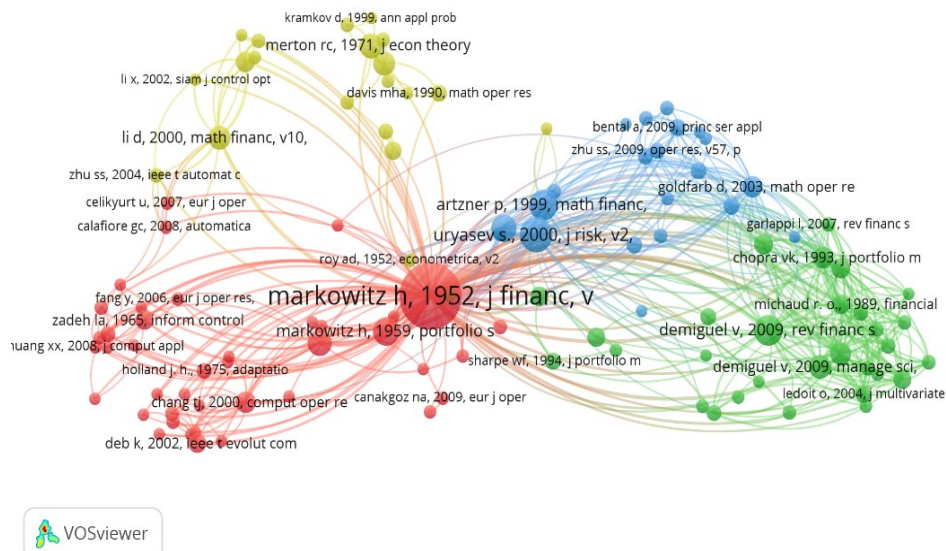


Figure 29 - Mapping of the most cited authors

In **Figure 29**, the author is identified on the map, along with the year of publication of the aforementioned work and the place of publication. Markowitz (1952) appears as the most cited author, evidencing that the Medium Variance model is still widely discussed in the financial market and the universe of portfolio optimization. In addition to

Markowitz, authors such as Zadeh (1965), DeMiguel, Garlappi e Uppal (2009a), Uryasev (2000), and Merton (1971) wrote important articles on the topic portfolio optimization, and all of these authors continue to be widely cited.

5.2.1 Research results

Table 10 shows the journals where the analyzed papers were published. This table presents two important information: The Impact factor (internationally recognized index, used to measure the journal's relevance and scope in Publications), and the number of papers per journal. **Table 10** data show that the selected papers come from excellent journals.

Table 10 - Qualification of Journals

Journal	Impact factor (5 years)	Papers
<i>IEEE TRANSACTIONS ON FUZZY SYSTEMS</i>	9.340	1
<i>MANAGEMENT SCIENCE</i>	4.927	2
<i>SWARM AND EVOLUTIONARY COMPUTATION</i>	4.607	4
<i>APPLIED SOFT COMPUTING (PRINT)</i>	4.004	2
<i>EUROPEAN JOURNAL OF OPERATIONAL RESEARCH</i>	3.960	4
<i>EXPERT SYSTEMS WITH APPLICATIONS</i>	3.711	6
<i>PLOS ONE</i>	3.352	1
<i>OPERATIONS RESEARCH</i>	3.047	1
<i>ELECTRIC POWER SYSTEMS RESEARCH</i>	2.859	1
<i>NEURAL COMPUTING & APPLICATIONS</i>	2.697	1
<i>INTERNATIONAL JOURNAL OF APPROXIMATE REASONING</i>	2.504	1
<i>JOURNAL OF STATISTICAL MECHANICS-THEORY AND EXPERIMENT</i>	2.228	1
<i>OR-SPEKTRUM</i>	2.227	1
<i>PHYSICA. A (PRINT)</i>	2.076	2
<i>ANNALS OF OPERATION RESEARCH</i>	1.943	2
<i>ECONOMIC MODELLING</i>	1.844	3
<i>INTERNATIONAL JOURNAL OF INFORMATION TECHNOLOGY & DECISION MAKING</i>	1.670	1
<i>JOURNAL OF THE OPERATIONAL RESEARCH SOCIETY</i>	1.634	1
<i>JOURNAL OF OPTIMIZATION THEORY AND APPLICATIONS</i>	1.412	1
<i>QUANTITATIVE FINANCE (PRINT)</i>	1.190	2
<i>MATHEMATICAL PROBLEMS IN ENGINEERING (PRINT)</i>	1.156	1
<i>CENTRAL EUROPEAN JOURNAL OF OPERATIONS RESEARCH</i>	0.948	1
<i>INTELLIGENT SYSTEMS IN ACCOUNTING, FINANCE & MANAGEMENT</i>	N/D	1

As a result of the search process, a total of 41 unique studies (without duplicity) were identified after the application of the searches and the inclusion and exclusion

criteria/filters. In **Table 11** and **Table 12**, there were only the papers on which the partial reading was carried out, except for the bibliographic review papers Ertenlice e Kalayci (2018), Mansini, Ogryczak e Speranza (2014), which means only 39 studies. **Table 11** presents the list of papers that used exact methods to solve the portfolio optimization problem, evidencing the strong participation of these methods for the selection of the best assets (stocks).

Table 11 - Papers that used exact methods

References	Technique: Exact
(AL JANABI, 2014)	LVaR
(AYUB; SHAH; ABBAS, 2015)	DR framework
(ACKERMANN; POHL; SCHMEDDERS, 2016)	MV
(ALI <i>et al.</i> , 2016)	MINLP
(ALGARVIO <i>et al.</i> , 2017)	MV
(BAN; KAROUJ; LIM, 2016)	PBR
(BENATI, 2015)	MedMAD
(BENSAÏDA; BOUBAKER; NGUYEN, 2018)	Markov chains
(CEREN; KÖKSALAN, 2014)	MILP
(JI; LEJEUNE; PRASAD, 2017)	MinG
(LEVY; KAPLANSKI, 2015)	SSDMN
(MARZBAN; MAHOOTCHI; KHAMSEH, 2015)	IMPRO
(REN <i>et al.</i> , 2017)	MST
(SHARMA; BANERJEE, 2015)	Mean-variance-asymmetry-kurtosis
(SUN; LIU, 2016)	DCCA
(THI; MOEINI, 2014)	MAD
(ZHAO <i>et al.</i> , 2018a)	q-dependent
(ZHAO <i>et al.</i> , 2018b)	Temporal network structure

MAD: Mean-Absolute Deviation Model; **PBR**: Performance-based Regularization-Combinatorial optimization; **MV**: Mean-Variance; **MINLP**: Mixed-integer nonlinear programming; **MedMAD**: Median Mean Absolute Deviation (MAD); **MILP**: Mixed-integer linear programming; **IMPRO**: Insured Multi-period Portfolio Robust Optimization - linear model; **MinG**: Minimal Gini model; **LVaR**: Liquidity adjusted value at risk; **DR Framework**: Extension of the Markowitz model where the proxy variance was substituted for the downside risk as asymmetric lower partial moments (ALPM); **SSDMN**: Stochastic Domain for mixed normal distributions; **DCCA**: Method for Cross-Correlation Analysis; **q-dependent**: q-dependent cross-correlation coefficient; **MST**: Dynamic portfolio Strategy based on network structures (minimum spanning tree).

Most of the studies presented in **Table 12**, which use heuristics, addressed multi-period, and multi-objective problems. Fuzzy Logic, GA, and Swarm Intelligence Algorithms (emphasis on Particle Swarm Optimization – PSO) are the methods that appear more in the studies.

Table 12 - Papers that used Heuristic methods.

References	Technique: Exact/Heuristic	Heuristic	Hybrid heuristic	Single-period	Multi-period	Single-objective	Multi-objective
------------	----------------------------	-----------	------------------	---------------	--------------	------------------	-----------------

(BABAEI; SEPEHRI; BABAEI, 2015)	MOPSO	X	X			X
(BERUTICH <i>et al.</i> , 2016)	GP	X			X	X
(CHEN; ZHOU, 2018)	MOPSO	X			X	X
(GARCÍA; GUIJARRO; OLIVER, 2018)	GA and TS	X			X	X
(KUMAR; MISHRA, 2017)	M-CABC	X	X			X
(LI; BAO, 2014)	Immunological algorithm	X	X			X
(LIU; ZHANG, 2015)	GA with Fuzzy		X		X	X
(MACEDO; GODINHO; ALVES, 2017)	NSGA II and SPEA 2	X			X	X
(MEGHWANI; THAKUR, 2018)	NSGA II; MOEA/D and GWASF-GA	X			X	X
(MISHRA; PANDA; MAJHI, 2016)	SR-MOPSO	X	X			X
(PAI, 2017)	MODE/Fuzzy and MOES/Fuzzy)		X		X	X
(PEKÁR; ČIČKOVÁ; BREZINA, 2016)	Algorithm of differential evolution	X	X		X	
(QU <i>et al.</i> , 2017)	(NMOEA / D)	X			X	X
(REVEIZ-HERAULT, 2016)	GA	X	N/D	N/D	X	
(POUYA; SOLIMANPUR; REZAEI, 2016)	IWO and PSO	X	X		X	
(RUBIO; BERMÚDEZ; VERCHER, 2016)	FTS	X				
(RUBIO; BERMÚDEZ; VERCHER, 2017)	FLR	X				
(SABORIDO <i>et al.</i> , 2016)	MDRS		X	X		X
(SILVA; NEVES; HORTA, 2015)	GA	X			X	X
(VERCHER; BERMÚDEZ, 2015)	GA with Fuzzy		X	X		X
(ZHANG; LIU, 2014)	GA with Fuzzy		X		X	X

GA: Genetic algorithm; **Fuzzy:** Fuzzy Programming; **MPSO:** Multi-purpose particle swarm optimization Algorithms; **TS:** Tabu Search; **NSGA II:** Non-dominated sorting genetic algorithm II; **SPEA 2:** strength Pareto evolutionary algorithm 2; **GP:** Genetic Programming; **NMOEA/D:** Normalized Multi-objective Evolutionary Algorithm based on Decomposition; **MODE/Fuzzy:** Multi-objective differential Evolution/Fuzzy; **MOES/Fuzzy:** Multi-Objective Evolution Strategy/Fuzzy; **GWASF-GA:** Global Weighting Achievement Scalarizing Function Genetic Algorithm; **M-CABC:** Artificial Bee Colony Algorithm based on Multi-objective covariance; **SR-MOPSO:** Self-regulating multi-objective particle swarm optimization; **IWO:** Invasive Weed Optimization; **PSO:** Particle Swarm Optimization; **FTS:** Methods of weighted diffuse time series; **FLR:** Fuzzy Logic Relation; **TE:** the difference between the tracking portfolio return and the benchmark return; **P/E** (P represents the market value of each asset, E represents the profit for each asset; **MDRS:** Mean Downside Risk-Skewness.

According to **Table 12**, among the articles that use heuristics, 23.8% address the use of hybrid algorithms, 38.09% work with a single-period, 47.61% address the multi-

period, and 71.4% work with more than one objective function (Multi-objective). **Figure 30** shows the papers' distribution according to the year of publication.

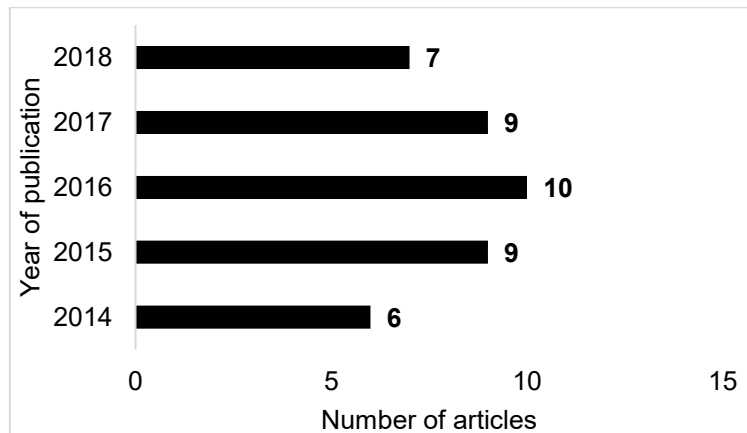


Figure 30 - Papers distribution per year of publication

5.3 Discussion

5.3.1 Which key methods, tools, or optimization techniques are used in the portfolio optimization problem?

In 18 studies, the authors use exact techniques to solve the portfolio optimization problem starting from the MV Model, or by adapting it (inserting new parameters instead of the mean and variance) what some authors call the extension of Markowitz model (ALI *et al.*, 2016; AYUB; SHAH; ABBAS, 2015; BABAEI; SEPEHRI; BABAEI, 2015; BAN; KAROUI; LIM, 2016; BENSÄIDA; BOUBAKER; NGUYEN, 2018; CEREN; KÖKSALAN, 2014; HU *et al.*, 2015; KUMAR; MISHRA, 2017; LEVY; KAPLANSKI, 2015; LIU; ZHANG, 2015; MARZBAN; MAHOOTCHI; KHAMSEH, 2015; POUYA; SOLIMANPUR; REZAAE, 2016; RUBIO; BERMÚDEZ; VERCHER, 2016; SHARMA; BANERJEE, 2015; THI; MOEINI, 2014; ZHANG; LIU, 2014; ZHAO *et al.*, 2018b).

Despite the evolution of new techniques to solve portfolio optimization problems (stochastic/heuristic), many investors and researchers prefer exact techniques due to its characteristic of finding the best global possible. Regardless of the degree of difficulty of modeling or computational spending that will be required, exact techniques always return to the optimal solution, so they are so attractive, especially for conservative investors.

The number of published studies that used heuristics to solve the portfolio optimization problem demonstrates the strong participation of these methods (BABAEI; SEPEHRI; BABAEI, 2015; BERUTICH *et al.*, 2016; CHEN; ZHOU, 2018; ERTENLICE; KALAYCI, 2018; GARCÍA; GUIJARRO; OLIVER, 2018; KUMAR; MISHRA, 2017; LI; BAO, 2014; LIU; ZHANG, 2015; MACEDO; GODINHO; ALVES, 2017; MEGHWANI; THAKUR, 2018; MISHRA; PANDA; MAJHI, 2016; PAI, 2017; PEKÁR; ČIČKOVÁ;

BREZINA, 2016; POUYA; SOLIMANPUR; REZAEI, 2016; QU *et al.*, 2017; REVEIZ-HERAULT, 2016; SABORIDO *et al.*, 2016; SILVA; NEVES; HORTA, 2015; VERCHER; BERMÚDEZ, 2015). Only one of the selected studies shows the use of Markov chains (BENSAÏDA; BOUBAKER; NGUYEN, 2018). In **Figure 31**, the distribution of the resolution techniques for the Portfolio optimization problem is shown. It is possible to notice the strong participation of heuristics solutions, although the exact techniques have an extensive presence.

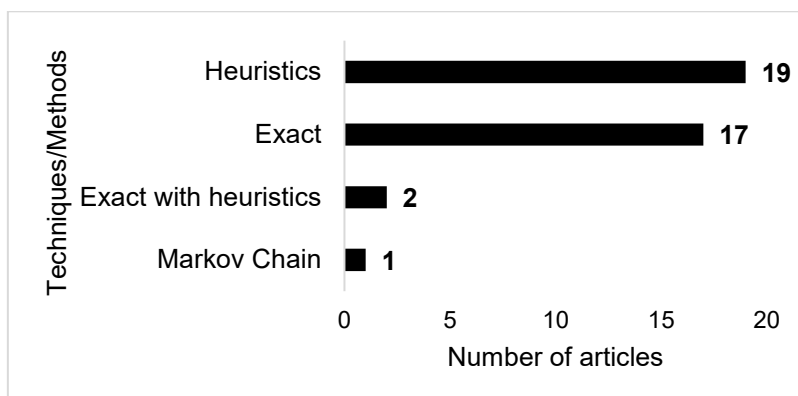


Figure 31 - Papers distribution per techniques/methods for portfolio optimization

One of the justifications for the use of metaheuristics is the fact that they find a solution closer to optimal with a lower computational expense than if it were exact methods. Furthermore, depending on the degree of complexity of the model, these techniques converge to the optimal solution faster than the exact ones. Heuristic methods are often used when restrictions make solutions via exact methods costly and sometimes impossible to find.

According to **Table 12**, about 71% of articles that address heuristics are about multi-objective portfolio optimization. Multi-objective problems are solved either by a combination that transforms them into the mono objective or taking as an objective function only one objective and turning others into constraints. These are examples of objectives: maximizing return or minimizing measures such as risk, transaction costs, degree of model uncertainty, Value-At-Risk (VaR) and Conditional Value-At-Risk (CVaR). Hybrid algorithms composed of Fuzzy, GA, MOES, and NSGA II have been widely used to solve problems with more than one objective function.

The main goal of hybridization is to unite the advantages of two or more each algorithm and to build a robust model. For example, (ZHANG; LIU, 2014), propose a hybrid model using Fuzzy and Genetic Algorithm (GA). With Fuzzy, it is possible to solve Multi-objective problems by transforming the problem single-objective. In addition, expert

knowledge can be inserted in the Portfolio Selection Model (optimization) using Fuzzy (LIU; ZHANG, 2015; RUBIO; BERMÚDEZ; VERCHER, 2016; ZHANG; LIU, 2014).

Two techniques draw attention to the development of new studies: ABC and GP. The ABC, when compared to other populations and stochastic algorithms of the same class, presents similar or better performance using fewer control parameters than other algorithms (ERTENLICE; KALAYCI, 2018; KUMAR; MISHRA, 2017). About GP, the great advantage of this model is the fact that it allows the management of a stock portfolio in an automatic way, without requiring the help of financial market specialists, without having to make constant adjustments in the model (BERUTICH *et al.*, 2016).

The choice of method to solve the optimization problem depends primarily on what the researcher wants to obtain concerning the expected results:

- a) The complexity of the model, because the difficult model is commonly solved by heuristics;
- b) The time spent to get a solution (more powerful methods like the exact ones spend more time and deliver optimal solutions, and heuristic methods spend less time but deliver an approximate solution that can be considered feasible).

Furthermore, to these approaches, the investor can choose the *backtesting* method, where he can verify the efficiency of the entire strategy in the most varied combinations between mathematical models, exact and heuristic methods, restrictions, and strategy 1/N by (DEMIGUEL; GARLAPPI; UPPAL, 2009a). Generally, the decision-making between using 1/N in the opposite of optimization is based on metrics used to assess the degree of uncertainty of the model, and if this measure is high, the 1/N strategy is preferred.

DeMiguel, Garlappi e Uppal (2009a) report that the portfolio optimization strategy has advantages over Benchmark 1/N in three situations: (1) if there is an abundance of historical data available; (2) if the Sharpe Ex-ante value (expected) of the efficient medium variance portfolio is substantially higher than the Sharpe value of the 1/N portfolio; and (3) the number of assets that will make up the portfolio is small. The first two conditions are intuitive, and the reason for the latter condition is that a smaller number of assets implies fewer parameters to be estimated and, therefore, less space for estimation error, and this makes 1/N diversification less effective than diversification by optimization.

5.3.2 Which realistic constraints are used?

Constraints make the model more complex to be solved; however, they make the portfolio optimization process much easier. **Table 13** shows the constraints, the authors who cited them, and the method used by the authors to solve the problems. The non-negativity constraints and the total value available must be fully invested, have not entered the count, because they are considered trivial in portfolio optimization models. There is an extension to comment on the databases that the authors used to test their algorithms in this section. In some studies, the *OR-Library* instance was used that allows free access to the data. The data sources are well diversified, and among the papers, only one used data from Brazil through the *Thomson-Reuters Datastream* platform (MACEDO; GODINHO; ALVES, 2017).

Table 13 - Realistic constraints (Continuation)

Author(s)	Heuristic method	Realistic constraints	Database
(BABAEI; SEPEHRI; BABAEI, 2015)	MOPSO	threshold constraints; Cardinality constraints;	S&P500
(BERUTICH <i>et al.</i> , 2016)	GP	N/D	Stock Market Espanha (Índice IBEX35)
(CHEN; ZHOU, 2018)	MOPSO, NSGA II and SPEA 2	Long-only constraint	Stock Market China
(GARCÍA; GUIJARRO; OLIVER, 2018)	GA and TS	Cardinality constraints	OR-Library
(KUMAR; MISHRA, 2017)	M-CABC	Cardinality constraints; threshold constraints; Long only constraint;	OR-Library
(LI; BAO, 2014)	Immunological algorithm	Cardinality constraints; threshold constraints; Transaction cost;	Indices: Hang Seng 33, DAX 200, FTSE 100, S & P 100 e Nikkei 225.
(LIU; ZHANG, 2015)	Ga with Fuzzy	Cardinality constraints; Transaction cost; Transaction lots;	Stock market China
(MACEDO; GODINHO; ALVES, 2017)	NSGA II and SPEA 2	Cardinality constraints; Transaction cost; Transaction lots;	Thompson-Reuters Datastream (agora Eikon)
(MEGHWANI; THAKUR, 2018)	NSGA II, MOEA/D, and GWASF-GA	Cardinality constraints; Quantity constraint; self-financing constraint; Transaction cost.	Fama and French Data Library

Table 13 - Realistic constraints (Conclusion)

(MISHRA; PANDA; MAJHI, 2016)	SR-MOPSO	Cardinality constraints; threshold constraints;	OR-Library
(PAI, 2017)	MODE/Fuzzy and MOES/Fuzzy	Long-only constraint	Índice BSE (Bombaim Stock Exchange, Índia)

(PEKÁR; ČIČKOVÁ; BREZINA, 2016)	Algorithm of differential evolution	Non-constrained problem with continuous variables	Indice Dow Jones
(POUYA; SOLIMANPUR; REZAEI, 2016)	IWO and PSO	Sector Capitalization; Transaction lots; Cardinality constraints; threshold constraints;	Tehran Stock Exchange Market in 2013
(QU <i>et al.</i> , 2017)	NMOEA/D	N/D	Stock Market China
(REVEIZ-HERAULT, 2016)	GA	Tracking Error Constraints.	Índice de títulos dos EUA
(SABORIDO <i>et al.</i> , 2016)	MDRS	Cardinality constraints	Stock Market Espanha (índice IBEX35)
(SILVA; NEVES; HORTA, 2015)	GA	Cardinality constraint; Quantity constraint; Long only constraint; Transaction costs.	S&P500
(VERCHER; BERMÚDEZ, 2015)	GA with Fuzzy	Cardinality Constraints	Stock Market Espanha (índice IBEX35)
(ZHANG; LIU, 2014)	Ga with Fuzzy	self-financing constraint; the Long only constraint	Stock market Shanghai

GA: Genetic algorithm; **Fuzzy:** Fuzzy Programming; **MPSO:** Multi-purpose particle swarm optimization Algorithms; **TS:** Tabu Search; **NSGA II:** Non-dominated sorting genetic algorithm II; **SPEA 2:** strength Pareto evolutionary algorithm 2; **GP:** Genetic Programming; **NMOEA/D:** Normalized Multi-objective Evolutionary Algorithm based on Decomposition; **MODE/Fuzzy:** Multi-objective differential Evolution/Fuzzy; **MOES/Fuzzy:** Multi-Objective Evolution Strategy/Fuzzy; **GWASF-GA:** Global Weighting Achievement Scalarizing Function Genetic Algorithm; **M-CABC:** Artificial Bee Colony Algorithm based on Multi-objective covariance; **SR-MOPSO:** Self-regulating multi-objective particle swarm optimization; **IWO:** Invasive Weed Optimization; **PSO:** Particle Swarm Optimization; **MDRS:** Mean Downside Risk-Skewness.

With several studies that succeeded in the model proposed by Markowitz (1952), some constraints were proposed, among them the cardinality constraints and minimum purchase limits constraints. These constraints provides to the model a non-convex search space, which makes the problem difficult (in terms of computational cost and response time) to be solved using exact approaches (BERUTICH *et al.*, 2016; ERTENLICE; KALAYCI, 2018; GARCÍA; GUIJARRO; OLIVER, 2018; KUMAR; MISHRA, 2017; PAI, 2017; POUYA; SOLIMANPUR; REZAEI, 2016; QU *et al.*, 2017; ZHANG; LI; GUO, 2018). Below there is the description of the meaning of each constraint of **Table 13:**

- a) *Transaction costs:* in the financial markets, there are transaction costs arising from the process of purchasing and selling bonds and investment portfolio review;
- b) *Transaction lots - rounds:* is a minimum transaction unit required to invest in an asset;
- c) *Cardinality constraint:* restricts the number of bonds that will compose the investment portfolio;

- d) *Investment threshold constraints*: these constraints define upper limits of the ratio-amount of each asset held in the portfolio;
- e) *Decision dependency constraints*: decision dependency requirements that are common in financial transactions;
- f) *Quantity constraint*: the quantity constraint is used to limit the position size by placing maximum and minimum values. The minimum limit is set to 5% of the portfolio value at the time of the transaction, and the maximum value is 20%. The lower limit avoids virtually insignificant positions for the portfolio performance, and the upper limit averts too much exposure or weight for any stock;
- g) *Long-only constraint*: means that the realization of selling short operations is not permitted, i.e., the weight invested in any stock is always positive;
- h) *Self-financing constraint*: no money is withdrawn or added during the operation.

5.3.3 What type of analysis is done regarding the stock: fundamental, technical, or mixed (fundamental and technical)?

There are few studies using fundamental analysis (ACKERMANN; POHL; SCHMEDDERS, 2016; ALGARVIO *et al.*, 2017; LIU; ZHANG, 2015; REVEIZ-HERAULT, 2016), and one of the rationales is the complexity in analyzing the companies' financial performance data (investors who use fundamental analysis are more conservative and invest in long term). The technical analysis for being simpler, since it analyzes few variables, has an advantage regarding the fundamental type in terms of the analysis speed in daily operations, for example.

Most papers use technical analysis (AL JANABI, 2014; ALI *et al.*, 2016; BAN; KAROUI; LIM, 2016; BENATI, 2015; BENSÄÏDA; BOUBAKER; NGUYEN, 2018; CEREN; KÖKSALAN, 2014; KUMAR; MISHRA, 2017; LEVY; KAPLANSKI, 2015; LI; BAO, 2014; MACEDO; GODINHO; ALVES, 2017; MARZBAN; MAHOOTCHI; KHAMSEH, 2015; MISHRA; PANDA; MAJHI, 2016; QU *et al.*, 2017; RUBIO; BERMÚDEZ; VERCHER, 2016; SHARMA; BANERJEE, 2015; SUN; LIU, 2016; THI; MOEINI, 2014; ZHANG; LIU, 2014), because this is easy to access in instances and/or stockbrokers. In addition, investors who use this data want to get rapid gains in daily, weekly, or monthly operations, identifying through simpler analyses and fewer variables, the opportunities offered by the market. In **Figure 32** presents the distribution of the types of analysis in the selected papers.

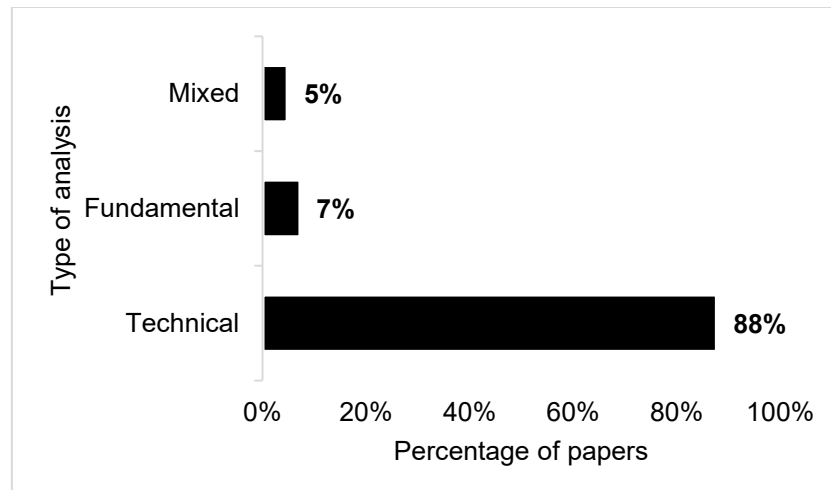


Figure 32 - Papers distribution per type of analysis

Silva, Neves e Horta (2015), propose a mixed approach of the two types of analysis, and demonstrate through simulations that the stock optimization based on financial indices (arising from fundamental analysis) can be used to choose the best companies in operational terms, obtaining returns above market average with low variations in their returns. In the points below, the financial indices that enable the company's fundamental analysis in terms of profitability, liquidity, debt, and growth are mentioned (SILVA; NEVES; HORTA, 2015):

- a) Debt Index (DR): is used to measure the company's indebtedness level;
- b) Net Return (ROE): measures financial performance in the case of generating profits using company assets;
- c) Profit Margin Index (PM): assess the company profitability by calculating the percentage of retained earnings after paying the operational, administrative and financial costs, in addition to taxes;
- d) Price-Profit Index (PER): is a valuation ratio of the current price of a company's share compared to its earnings per share, and is used to choose companies that are less valued in the market;
- e) Revenue growth percentage (GR): is an economic indicator that shows the business evolution;
- f) Positive Trend of net profit (NI): shows the increase in profits, and aims to show the companies with the highest growth;
- g) Common Shares in circulation (CSO): represents the fundamental owner of the corporation by shareholders. When the company issues share, this number is added to the previous value in the balance sheet, representing an increase in the total number of shares and distribution of the company value by a larger number of shares.

The following paragraphs are the parameters for a technical negotiation used in (SILVA; NEVES; HORTA, 2015):

- a) The global value of each stock: is a daily assessment of the quarterly financial indexes and the daily PER, which is updated using the closing price to classify the algorithm actions to make a business decision;
- b) *Stop loss and protection of capital*: are predetermined policies that reduce the portfolio exposure, leaving a losing position, not allowing one or more investments to continue to lose money and protect the remaining capital available to continue the investment activity;
- c) *Take profit*: percentage of pre-established profit, and when it is reached the stock is sold;
- d) Position Size: is the percentage of the current value of the portfolio to invest in each new stock. This defines the level of concentration or diversification in the portfolio.

5.3.4 Which software/programming language is used?

Among the explored studies, 26, did not inform the software or programming language that they used to implement the proposed model, but only the pseudocodes or the mathematical model. The ratio distribution of software or programming language is given by **Figure 33**.

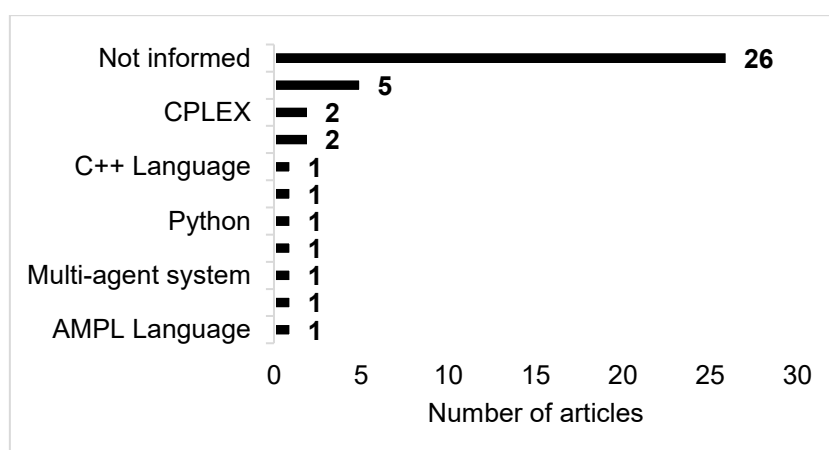


Figure 33 - Papers distribution per software/programming language

There are tools with all kinds of features: free, paid easy learning and that have libraries/packages (which can be used by researchers who want to solve a problem without necessarily learning a programming language). R software offers some

advantages such as the best learning curve, a wide variety of packages ready for optimization or Data Science, and active forums. Despite requiring certain programming knowledge, R appears as a nice option for portfolio optimization scholars for allowing a greater learning curve than other languages.

According to Karakalidis e Sifaleras (2017), AMPL is an easy-to-learn language where the researcher implements the mathematical model simply using a natural language and notations very close to those used in the writing of the model, and allows the call optimization software. Among these solvers, we can highlight CPLEX®, GUROBI Optimizer®, and KNITRO® (used for nonlinear problems). The choice of solver depends on the problem to be solved (linear programming, quadratic programming, mixed entire quadratic, nonlinear problems). The solvers are available for free in the student version, however, with limitations, since, depending on the size/complexity of the problem, it is necessary to acquire more complete versions that are paid for.

The Python language has interesting features that enable the construction of a flexible program or algorithm. In addition, object-oriented programming, materials available on the Internet, and calculation speed are other advantages of this programming language (BERUTICH *et al.*, 2016; GOODMAN; BRETTE, 2008; MCKINNEY, 2010; MITCHELL; O'SULLIVAN; DUNNING, 2011). In addition to the libraries, there is a module called Scikit-Learn, that integrates a wide range of state-of-the-art machine learning algorithms for supervised and unsupervised mid-scale issues. This package focuses on taking machine learning for non-specialists using a high-level, general-purpose language (PEDREGOSA *et al.*, 2011).

Despite some differences, Python represents, in this discussion, the category of languages composed of R, C++, and Java, as all require certain knowledge about programming regardless of having libraries/packages that facilitate the user's life and are available for free. Additionally, due to flexibility, these languages are better for researchers or investors who want to work with heuristics to solve optimization problems.

5.4 Conclusions

To provide a comprehensive systematic review, with the classification of listed articles and suggestions for future research, we reviewed 41 articles published in scientific journals that address topics related to portfolio optimization: exact and heuristic methods, realistic restrictions, markets evaluated (benchmark), stock analysis types, and programming software/languages used. Although the research has not been exhaustive,

it is believed that this review can facilitate the accumulation of knowledge and further studies in this area of research. The implications of this research include the following paragraphs.

Regardless of the method used, the use of techniques to make estimates of future returns is a trend in studies on portfolio optimization, since the error in estimating parameters of the model compromises the quality of optimization. Techniques such as robust optimization, Bayesian statistics, Neural Networks and Fuzzy Logic are used to amortize the estimation error.

Themes such as robust optimization, dynamic optimization, multi-objective problems, and hybrid algorithms often appear in portfolio optimization jobs. In addition to showing how diverse methods to solve the Portfolio Optimization problem are, these approaches offer a range of possibilities for combinations with each other, which can be used to increase their ability to address the problem of portfolio optimization.

The databases used to test the algorithms/tools are important for the functional analyses of the methods used. Data to test the optimization model or algorithm can be obtained on paid platforms such as Thomson Reuters or instances such as OR-Library and Fame-French that make the data available for free.

About programming language, there is the possibility of using ready-made optimization software or programming using programming languages. AMPL is a good option for the researcher who does not want to deepen his knowledge about programming and prefers to use optimization software to solve problems. Languages such as Python, R, C++, and Java require certain knowledge about programming from the user, but in return, they offer advantages such as calculation speed, flexibility in model building, active communities/forums, and free availability for users.

The gaps identified in the literature and the suggestions for future research on the theme portfolio optimization are as follows: Develop robust predictors for the risk-return binomial, aiming to increase the capacity of the model to optimize an investment portfolio; Studying the addition of constraints based on fundamental analysis of shares, that is, within this type of analysis what would be the constraints that, when added, make the mathematical model more efficient for portfolio optimization; Which constraint could be added to prevent the model from seeking shares highly influenced by market volatility (and consequently by the emotions of those people who invest); The computational complexity of the Portfolio Optimization Problem, along with the practical importance of portfolio management, triggers researchers' motivation to design efficient algorithms. Therefore, improvements related to computational efficiency (parameter calibration,

hybridization, among others) to deal with methodologies of algorithms, heuristic and accurate, are always welcome.

Although the filters and search strategies have been defined to choose the best and most current studies on the topic under discussion, it is believed that at some point, these strategies/filters may have prevented finding more relevant studies. The non-English publications filter may have deleted relevant works written in other languages. However, we are convinced that we have compiled the main work to support the discussion proposed in the Systematic Review Protocol (**Table 9**).

6. Hybrid model of LSTM network with ABC algorithm applied to the portfolio optimization problem

The Portfolio Optimization problem consists of determining a set of assets and their participation proportions in the portfolio so that the Return-Risk binomial is balanced according to the client's suitability for taking risks. Markowitz (1952) proposed the Mean-Variance model (MV) to optimize the portfolio.

In the MV model, the expected return is calculated as the average of the historical data of the stock's return, and the risk is given by the variance or the standard deviation of these returns. This model is classified as a quadratic programming problem. The main idea of the MV model is to deal with the returns of individual assets as random variables and to adopt the value of expected return and variance to quantify the return and investment risk, respectively (ZHANG; LI; GUO, 2018).

The general objective of this paper is to improve the optimization model by calibrating the cardinality and reducing the estimation error of returns. The calibration will occur via the Markowitz model extended with the restriction of cardinality through the Colony Algorithm of artificial Bees. The use of the LSTM network is proposed to treat the estimation error. The computational complexity of the Portfolio Optimization Problem, along with the practical importance of portfolio management, triggers researchers' motivation regarding this problem. This research will have 3 contributions:

1. Compare the efficiency of portfolios with different values for N (asset numbers);
2. Answer the following question: "for the data set used, how many assets are needed to form a good portfolio according to the Sharpe rate?";
3. Show the impact of the LSTM network on reducing the optimization model estimation error.

The research is structured as follows: in section 6.1, the methodology and the techniques used are explained; in section 6.2, the results and discussions are shown; and in section 6.3, the conclusions are presented.

6.1 Methodology

Given the objective of this study, it was necessary to perform some empirical tests. The data used to make these experiments are the adjusted prices (adjusted close

price: adjusted for Both dividends and splits) of 43 assets in the Brazilian stock market. The data collected are daily quotes of the adjusted price of each asset in the period between 2009 and 2019. Data were extracted from the Thomson Reuters Eikon™ Platform. The research was developed following the step-by-step described in the following paragraphs:

- a) Review of literature on portfolio optimization and the authors of the renowned discussion have had on the subject, on the impacts of estimation errors, optimization algorithms, and portfolio cardinality;
- b) Simulate 16 portfolios by varying the number of assets in 1 unit from 5 to 20 using the ABC algorithm;
- c) Predict future prices of 251 trading days on the stock exchange using LSTM;
- d) Predict future returns of 251 trading days on the stock exchange using LSTM;
- e) Select the best portfolio of the set tested in paragraph b) (according to the objective function), and use the number of assets in that portfolio as a cardinality parameter for the portfolios that will be constructed from the data foretold;
- f) Build a portfolio with the 1/N strategy, and use it as a benchmark;
- g) Discuss the results.

The range of cardinality chosen in paragraph b) was defined based on the discussions on cardinality in the introduction to that chapter. Generally speaking, according to the raised literature, there is a consensus that the ideal number of assets is between 10 and 20. Given this value, we chose to simulate values between 5 and 20 assets by observing the Sharpe ratio, the expected return, the risk and the violation of the restriction (because in the mathematical model, there are restrictions and how we will use heuristics to solve the model, it is acceptable small violations of restriction) of the built portfolios.

To simulate and optimize investment portfolios, we implemented the artificial bee colony algorithm for restricted problems, proposed by Akay e Karaboga (2012), where the treatment of constraints was done according to Deb rules. The ABC algorithm has the advantage of having a small number of parameters and offering better results (for unrestricted and restricted problems) or equal to those obtained by stochastic algorithms such as Genetic Algorithm, Simulated annealing, Tabu Search, Particle Swarm Optimization. Besides, the ABC of Karaboga (2005), or a hybrid with the Firefly algorithm,

has also obtained excellent results in solving the portfolio optimization problem (AKAY; KARABOGA, 2012; ERTENLICE; KALAYCI, 2018; TUBA; BACANIN, 2014).

Python was the language used to do the tests. We use the LSTM network available in the Keras library (High-level neural network API, written in Python, and able to run on top of TensorFlow – a popular framework for deep learning). The metric used to measure prediction error is the Root Mean Square Error (RMSE) (WILLMOTT, 1981). RMSE is obtained by the formula:

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (O_i - P_i)^2}{n}} \quad (22)$$

Where:

n : is the number of observed values;

O_i : Value observed at position i , $\forall_i = \{1, 2, 3 \dots, n\}$;

P_i : value predicted at position i , $\forall_i = \{1, 2, 3 \dots, n\}$;

To calculate the returns, we use the natural log to get continuous returns. The use of continuous returns assumes that $P_t = P_{t-1}e^{r_t}$, where r_t is the rate of return during the period $(t - 1, t)$. Assuming that r_1, r_2, \dots, r_n are returns for n periods (a period can be a day, a week, a month, or a year) then the price of the shares at the end of the n periods will be:

$$P_n = P_0 e^{r_1 + r_2 + \dots + r_n} \quad (23)$$

Where P_n is the price in the period n . This representation of prices and returns allows us to assume that the average periodic return is $r = (r_1 + r_2 + \dots + r_n)/n$. According to Benninga (2014), if we wish to assume that the return data for the n periods represent the distribution of returns for the next period, the continuous return is the appropriate return measure, not the discrete return $r_t = (P_{A,t} - P_{A,t-1})/P_{A,t-1}$. The continuous return will always be smaller than the discrete return, but the difference is usually not great (BENNINGA, 2014).

In the following subtopics, a brief description will be made about the methods used in the experiments of this study. We will talk about the mathematical model used for the tests, the algorithm for optimization, and the LSTM neural network.

6.1.1 Markowitz model with cardinality constraint

This model, also known as the Constrained Mean-Variance Model (CCMV), is classified as a mixed-integer quadratic programming model and can be solved only by heuristic techniques (TUBA; BACANIN, 2014). The CCMV is an extension of the

standard Markowitz model (so it is also known as the Mean-variance model extended). Cardinality is the extension of portfolio diversification (number of assets). Therefore, the cardinality constraint of the model allows the construction of a portfolio with exactly the number of assets that the investor wants, respecting the other constraints, and the objective function (maximize or minimize a function). The mathematical equation of the CCMV is:

$$SR = \frac{R_p - R_f}{\sigma_p} \quad (24)$$

Subject to the following:

$$\sum_{i=1}^N x_i \leq 1 \quad (25)$$

$$\sum_{i=1}^N z_i = K \quad (26)$$

$$\varepsilon_i z_i \leq x_i \leq \delta_i z_i, z \in \{0,1\}, i = 1,2,3, \dots N$$

Where:

p : is the portfolio;

R_p : is the average return on the portfolio p ;

R_f : is the rate of return on a risk-free asset;

σ_p : is the risk measure in the portfolio (standard deviation of R_p);

x_i and x_j : weights of the variables i and j respectively;

μ_i : is the return on the i th asset;

K : is the desired number of assets that will be included in the portfolio;

z_i : decision variable that controls whether the asset i will be included in the portfolio. If its value is 1, the asset is included, if it is 0 (zero) the value will be excluded;

ε and δ : are respectively lower limit and upper limit of the variable x_i (weight of asset included in the portfolio) and ensure that the proportion of assets in the portfolio is within the default range.

By adjusting the weights of each asset in the portfolio, the Sharpe Ratio (SR) of the portfolio can be maximized. Observing the formula of the Sharpe Ratio, it is possible to notice the union of two objectives in a single function, where, to maximize the rate it is necessary that the standard deviation is the lowest possible (minimize the risk of the portfolio) and the return on the portfolio is the highest (maximize the expected return on the portfolio).

6.1.2 Long Short Term Memory

It is common in the Brazilian stock market that investors who use econometrics to analyze and assemble their portfolio defend the use of recent historical data (1 year, for example) under the justification that the high volatility of the Brazilian market compromises the use of large volumes of historical data, either to calculate the average returns or, to calculate the covariance matrix. However, for situations where there is a large amount of data, there are heuristics that “learn” well from this information and that can be used to predict future returns. One of them is Neural Networks.

For (LIU, 2019), volatility is related to financial risk, and its prediction is significant in portfolio optimization. Also, according to the author, to date, a large amount of literature suggests v-SVM (Support Vector Machines) as the best algorithm for financial data regression. However, Liu (2019) made prediction tests and discovers that a new deep learning network, known as Long Short Term Memory Recurrent Neural Networks (LSTM RNNs), overcame the SVM for classification problems.

A Recurrent Neural Networks (RNN) belong to the class of artificial neural networks in which the connections between units form a targeted cycle. This allows RNNs to retain essential data from previous entries and use this information to modify the current output. That means that this network has memory, and this feature makes it smarter.

Long Short Term Memory is one of the most successful RNNs architectures. The LSTM presents the memory cell, a calculation unit that replaces the traditional artificial neurons in the hidden layer of a network (see **Figure 34**). With these memory cells, the LSTM can effectively associate memories and remote time inputs (adapting them to the data structure dynamically over time) with high predictive capabilities (CHEN; ZHOU; DAI, 2015).

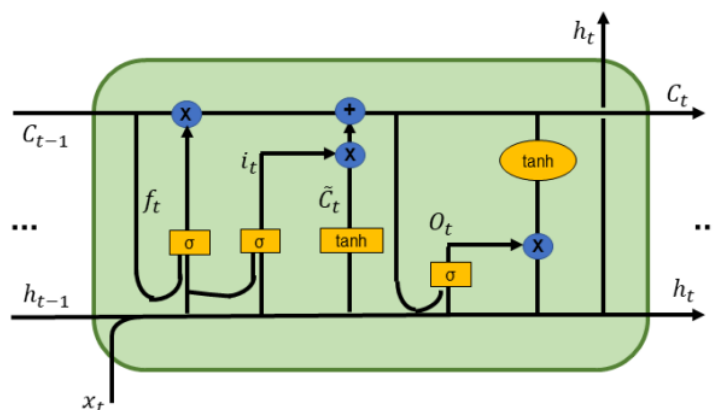


Figure 34 - Structure of the LSTM network. Source: Liu, (2019), Olah (2015).

LSTM RNNs solve the gradient problem by introducing a few more ports that control access to the cellular state. The main features of LSTM RNNs are contained in the hidden layers consisting of memory cells (FISCHER; KRAUSS, 2018; GERS; SCHMIDHUBER; CUMMINS, 1999). In Liu (2019), the results showed that LSTM RNNs could provide a better forecast for substantial time intervals than the GARCH model (for example, the Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity Model). The LSTM RNNs deep learning method can learn from big data (raw) and can be run with many hidden layers and neurons under the GPU to get the right prediction for long sequence data.

The equations used for the calculations, eq. (27) - (32), are shown below:

$$f_t = \sigma(W_f * [C_{t-1}, h_{t-1}, x_t]) + b_f \quad (27)$$

$$i_t = \sigma(W_i * [C_{t-1}, h_{t-1}, x_t]) + b_i \quad (28)$$

$$o_t = \sigma(W_o * [C_t, h_{t-1}, x_t]) + b_o \quad (29)$$

$$C_t = f_t * C_{t-1} + i_t * \tilde{C}_t \quad (30)$$

$$\tilde{C}_t = \tanh(W_c * [h_{t-1} + b_c]) \quad (31)$$

$$h_t = o_t * \tanh(C_t) \quad (32)$$

Where:

x_t : is the input vector;

h_t : is the state of the output units;

C_t : is the vector of the cell-state;

W and b are matrices of parameters and vector;

f_t : forget gate;

i_t : input gate;

o_t : output gate;

σ : is the sigmoid function; and

\tanh : is a logistic sigmoid function of new scale between -1 and 1.

The LSTM used to test for this article is a sequential template implemented through the Keras library in Python. The code detail is given in **Figure 35**.

- The used error measure is the RMSE.

- Simplified architecture:

- 1 input layer
- 1 hidden layer
- 1 output layer

Detailed architecture:

LSTM (Long term short memory)

- units (dimensionality of the output space): 4
- inputs shape = (1, look_back)
- 4 nodes

Dense (Keras definition: Just your regular densely-connected NN layer), it is used after the LSTM to avoid overfitting

- units (dimensionality of the output space): 1
- No customized activation function, the default is $F(x) = x$
- No custom value for bias
- 1 nodes

Code:

```

model = Sequential()
model.add (LSTM(4, input_shape = (1, look_back)))
model.add(Dense(1))

```

Figure 35 - Detailing Long Short Term Memory.

6.1.3 ABC algorithm for constrained optimization problems

The constrained optimization problem is formulated as follows: find x for:

$$\text{minimize } f(x), x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$$

Where $x \in F \subseteq S$, being F the feasible region and S the search space contained in R^n (domains of variables defined by their lower and upper limits, respectively: $l(i) \leq x(i) \leq u(i)$, $\forall i = 1 \leq i \leq n$).

The feasible region ($F \subseteq S$) is defined by a set of additional constraints m ($m \geq 0$: means that there may be zero, 1 or more constraints). The constraints are given by:

$$g_j(x) \leq 0, \text{ for } j = 1, \dots, q, \text{ for inequality constraint;}$$

$$h_j(x) = 0, \text{ for } j = q + 1, \dots, m, \text{ for equality constraint.}$$

At any point $x \in F$, the constraints g_k which meet $g_k(x) = 0$ are called active constraints on x , as shown in **Figure 36** (Feasible region and infeasible region). By extension, the constraints h_j are also called active at all points S .

Algorithms are usually developed to minimize the objective function (FO). Therefore, the lower the value of the FO , the best will be the solution. These rules are valid for algorithm built for minimization. The other way to rank the solutions is to change only the form of comparison. That is, instead of minimizing, we can maximize the value of the objective function.

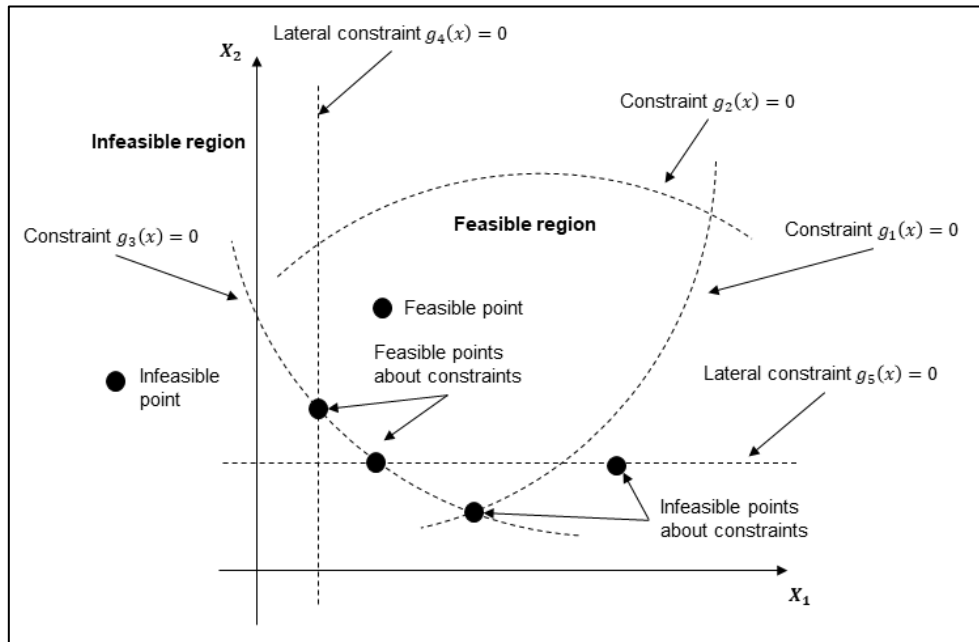


Figure 36 - The feasible region and the infeasible region. Source: adapted from (RAO, 2019).

To solve constrained optimization problems, (AKAY; KARABOGA, 2012) proposed ABC with some adjustments. For example, to produce adjacent solutions, the adapted ABC uses eq. (33).

$$v_j = \begin{cases} x_{ij} + \phi_{ij}(x_{ij} - x_{kj}) & , \text{ if } R_j < MR \\ x_{ij} & , \text{ otherwise} \end{cases} \quad (33)$$

Where $k \in \{1, 2, \dots, D\}$ is the randomly chosen index ($k \neq i$); R_j is the real number chosen randomly from the range $[0, 1]$; $j \in \{1, 2, \dots, D\}$ where D is the number of dimensions; MR : is the modification rate (a parameter that controls whether the parameter x_{ij} will be modified or not).

In this proposed version of ABC for constrained problems, Deb's rules are used instead of greedy selection. The selection criterion proposed by Goldberg; Deb (1991) is considered a simple and low computational cost. In the Deb method, two solutions are compared each time following the following criteria:

1. Any feasible solution is preferable to any infeasible solution;
2. Between two feasible solutions, the one with the best objective function is preferred (to be better depends on the objective: to minimize or to maximize);
3. Among two infeasible solutions, the one with the lowest constraint violation is preferred.

ABC does not consider the set of initial solutions as feasible, as the process to produce feasible solutions would take a long time. The scout bee stage ensures diversity in the set of solutions (feasible and infeasible). The pseudocode for the ABC proposed for the problem with constraint is shown in **Figure 37**:

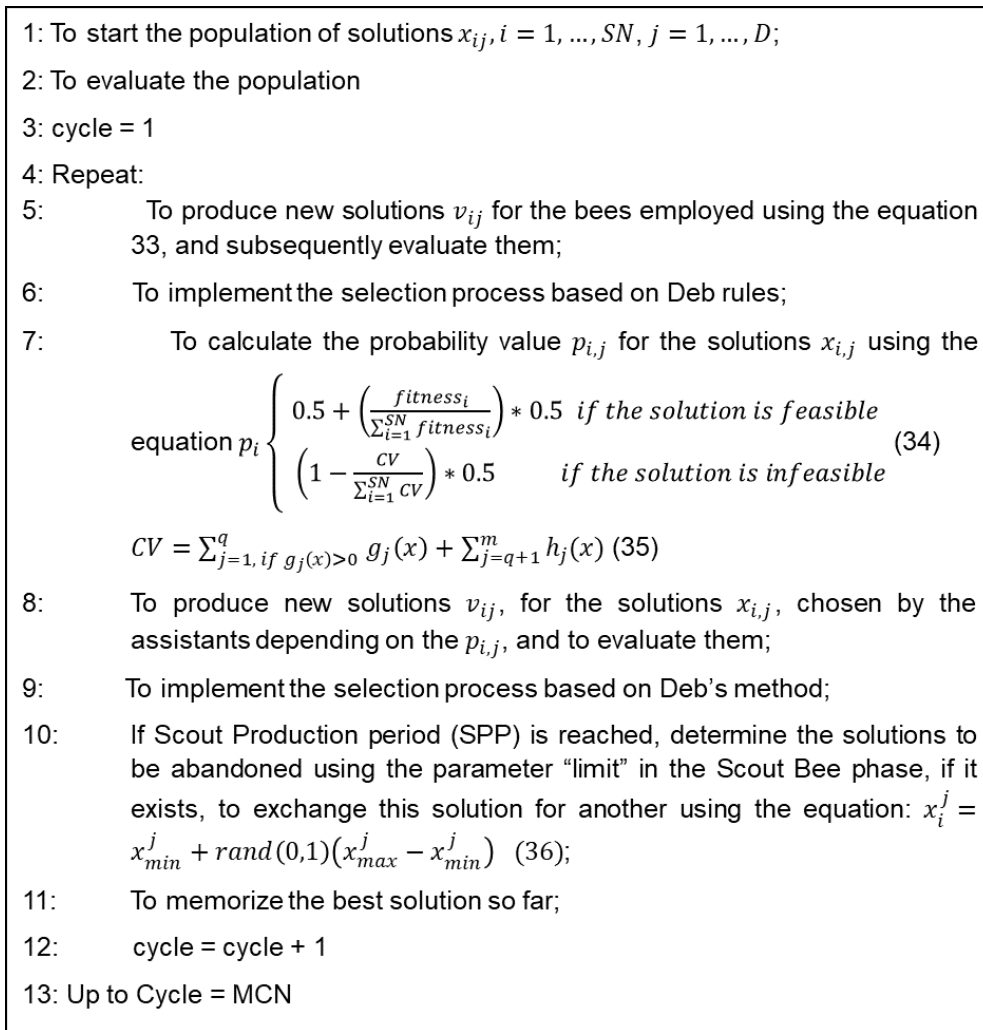


Figure 37 - Pseudocode of the modified ABC. Source: (AKAY; KARABOGA, 2012).

In ABC adapted artificial bees are produced in a predetermined period of cycles for the random discovery of new food sources. This period is another control parameter called Scout Production Period (SPP).

In step 10 of the pseudocode, when a solution cannot be improved by a predetermined number of cycles, then this source is abandoned, and a new random solution is generated. The expression in the production of a candidate solution in ABC is given by equation (33), where MR is a parameter that controls whether the variable $x_{i,j}$ will be modified or not. The settings of the Adapted ABC are: $MR = 0.9$; Colony size (CS_{abc}) = $30 (2 * SN)$; $MCN = 6000$; $limit = CS_{abc} * D * 0.5$; $SPP = 400$. With these settings, the total number of evaluations of the objective function is 180,000.

6.2 Results and discussions

In this section, the results of the applications of the LSTM Network and the optimization via the Markowitz model with cardinality constraint will be presented. In section 6.2.1, the impact of the number of assets on the results of the portfolio will be discussed. In section 6.2.2, the discussions on the results obtained with the prediction of returns and prices are presented. In section 6.2.3, 4 portfolios will be built with 6 assets, and the results of these will be confronted with aspects such as estimation error of expected return, objective function value, and portfolio risk.

6.2.1 Analysis of the cardinality constraint

In **Figure 38**, we present the performance of portfolios varying the number of assets. Concerning the objective function (**Figure 38-a**), the portfolio that has the best relationship between risk and return is composed of 6 assets. According to **Figure 38-b**, for cardinality between 5 and 11 assets, there was no violation of the constraints of the extended Markowitz model. For cardinalities between 12 and 18, there was a violation of constraints (violation ranging between $3.3745E-20$ and $9.1666E-07$). And, in **Figure 38-b**, for cardinality greater than 18 assets, the violation of constraints begins to increase significantly.

Bringing for analysis the discussions made in (EVANS; ARCHER, 1968), (STATMAN, 1987), and (TANG, 2004), where these authors discuss cardinality under the risk reduction perspective, according to **Figure 38-d**, the best portfolio would be with 9 assets, because this one offers the lowest risk (with standard deviation equal to 19.05% and return equal to 19.85%). Also, it is observed that for the mathematical model and the set of assets used, the relationship between the size of the cardinality and the risk of the portfolio is not linear. In other words, for the data analyzed, the increase in the

number of assets does not necessarily imply the reduction of non-systematic risk (see Figure 38-d).

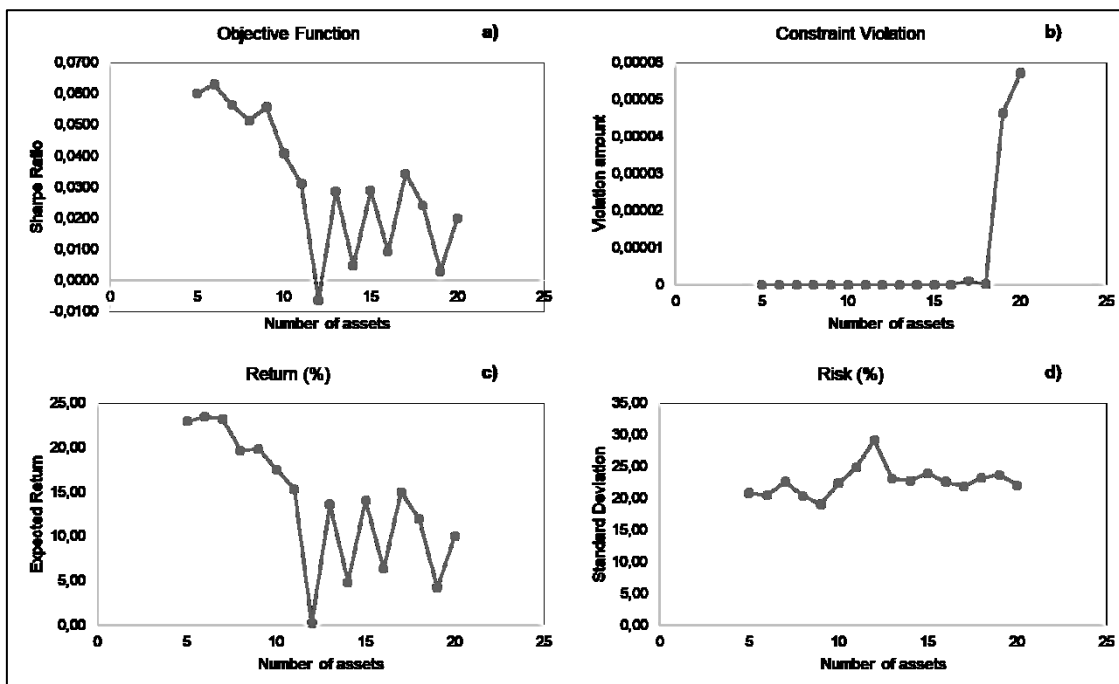


Figure 38 - Effect of the variation of cardinality on the portfolio. a) Objective function; b) Constraint Violation; c) Return; d) Risk.

To move on to the next stage of testing (Section 3.2), we use as a criterion of choosing the best number of assets in a portfolio, the one that offers the best relationship between risk and returns. As the objective function is calculated by the Sharpe Ratio, presented in section 2.1, the best portfolio to consider was the one with the highest value of the objective function. The portfolio that meets this valuation criterion is the one that has 6 assets. This portfolio has an expected return equal to 23.4622% and a standard deviation equal to 20.4594% with investment in the following proportions (**Table 14**):

Table 14 - Portfolio of 6 assets

ASSET	PROPORTION
BRML3	5.04%
CCRO3	5.97%
CGAS5	39.99%
CMIG4	5.00%
LREN3	33.49%
RENT3	8.79%
Sum	98.2%

The risk value of the portfolio in **Table 14** can be attributed to characteristics of the Brazilian market, which, by being a relatively small market if compared with North

American Securities Dealers Automated quotation System (NASDAQ) and New York Stock Exchange (NYSE) from the USA, and Shanghai Stock Exchange (SSE) from China, has a few companies and high volatility. We will use the portfolio of **Table 14** as benchmarking for the portfolios formed using return values and predicted prices through the LSTM network.

6.2.2 Prediction of returns and prices

The second stage of the research was the performance of the price and return predictions separately to verify which offers the best results (lower RMSE value). In **Figure 39**, the Score of the prediction of the return is compared with the Score of the prediction of the asset prices (RMSE Normalized). We normalize the RMSE by dividing its value by the respective average value of the predicted return and the predicted price so that the comparison between predictions is fair.

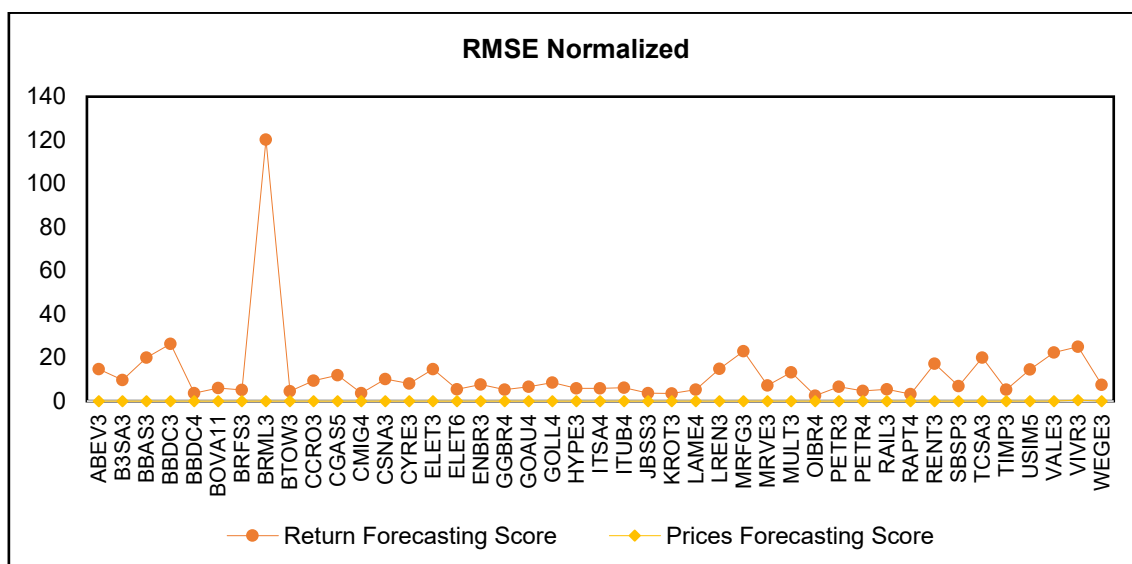


Figure 39 - Score of the price prediction versus Score of the prediction of the return.

In general, prediction using asset prices obtained proportionally lower scores. That is, the LSTM Network performed better when input data were asset prices. **Figure 40** shows an example of the graphic representation of the prediction of the return, and **Figure 41** presents the results of the price prediction of the same asset represented in **Figure 40**. The demonstration of these results is only to show the graphical behavior of LSTM results for prediction using prices and prediction using ELET6 asset returns.

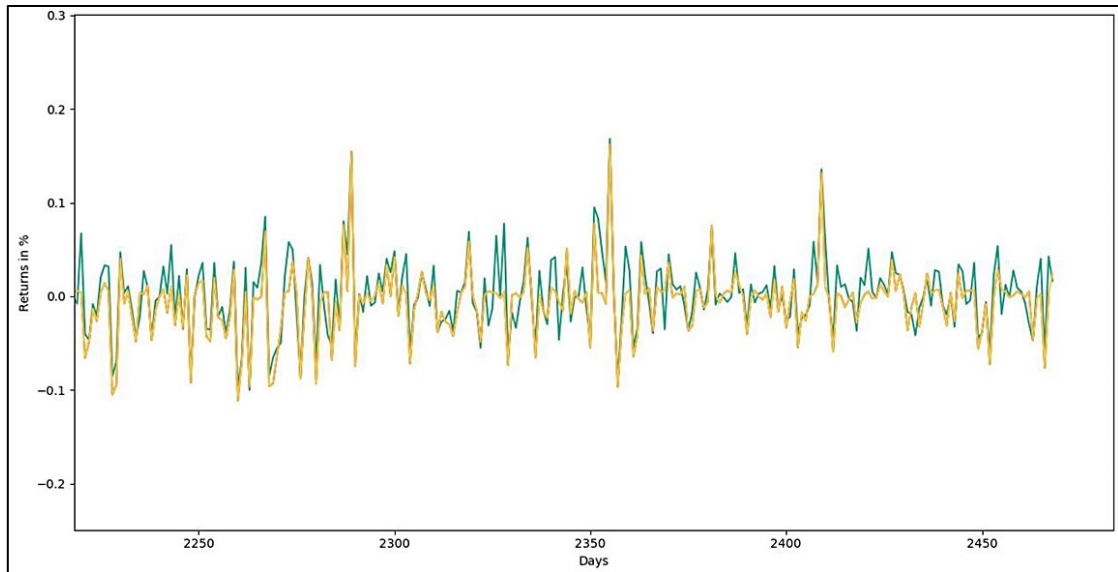


Figure 40 - Observed return versus predictive return of the ELET6 asset. Legend: green line: observed; yellow line: prediction.

Figure 40 and **Figure 41** show the subtlety between the different forms of prediction (with returns and prices, respectively). Besides, they show that regardless of the input data, LSTM was able to follow the movement of prices and returns well.

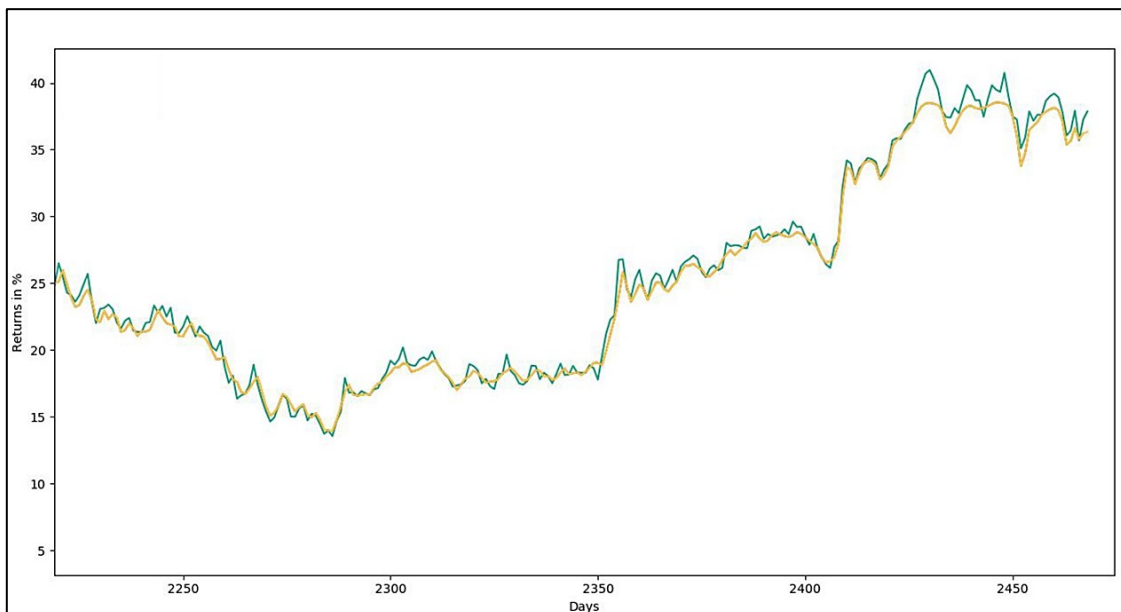


Figure 41 - Observed price versus predictive price of ELET6 asset. Legend: green line: observed; yellow line: prediction.

For the data set analyzed in the present study, using RMSE as the assessment metric, the prediction using historical prices as inputs in the LSTM network was better than the predictions using historical returns as input. The RMSEs were obtained by running the LSTM network with the same configuration for the prediction of the return and the price prediction.

6.2.3 Analysis of estimation error: predictive data versus a historical average

At this stage, 4 portfolios were built with different methods. The objective here is to compare, which will have the lowest estimation error concerning the expected return versus the actual return. Before the chosen cardinality in section 6.2.1 (6 assets) and the predicted values, the next step was to assemble the following portfolios:

- a) Portfolio 1: expected returns calculated using the historical average of asset returns (it is the same portfolio as **Table 14**);
- b) Portfolio 2: returns obtained utilizing the returns predicted by the LSTM;
- c) Portfolio 3: average returns calculated from the prices predicted by LSTM;
- d) Portfolio 4: portfolio constructed from the 1/N strategy and is therefore composed of 43 assets with an equal percentage share in the portfolio.

The portfolios mentioned in points a), b) and c) were built with cardinality equal to 6 assets and are shown in **Table 15**. It is common to choose a portfolio of a larger set based on two criteria: the customer chooses the one that satisfies their ability to take risks or chooses the one that offers the best return risk relationship (Sharpe Ratio point at the efficient border). Looking at the value of the Portfolios' Sharpe Ratio in **Table 15**, Portfolio 2 would be best. Another characteristic that would justify the choice of Portfolio 2 is a low risk (3.86%) and a high return (93.29%).

Table 15 - Performance of the portfolios built.

	Objective function (Sharpe Ratio)	Risk (%)	Expected return (%)	Real return (%)
Portfolio 1	0.0630	20.46	23.46	31.40
Portfolio 2	1.4771	3.86	93.29	31.04
Portfolio 3	0.1669	12.09	35.01	35.87
Portfolio 4	0.0173	21.91	9.14	8.87

All the tests made so far were performed with the data selected for training. To calculate the values of column "Real return" of **Table 15**, we calculate the portfolio return after one year to verify the return the investor would get if he had invested his money in this portfolio (we do not consider transaction costs as the goal is to compare portfolios with their respective returns).

The results of portfolio 2 and 3 are empirical and show, among other things, the difficulty of the Neural Network in predicting returns and in return its efficiency in predicting asset prices. In addition, the use of continuous returns, assumes that prices

follow a lognormal distribution, therefore, the logarithms of these values would follow a normal distribution, however, the probability distribution of each asset may vary.

The result of the real return of Portfolios 1-3 was very similar, with Portfolio 3 is the one that got the most significant return. As the focus of the study is to show the application of procedures that reduce the estimation error, the method to generate the Portfolio 3 was what provided the smallest estimation error. The expected return on Portfolio 3 has an error of 2.41% concerning real return, against 25.28% in Portfolio 1, 200.58% in Portfolio 2, and 3.00% in Portfolio 4. **Table 16** shows the composition of Portfolio 3. It is observed that the sum of the weights is slightly lower than 100%. However, this difference is acceptable for results obtained via probabilistic algorithms such as ABC.

Table 16 - Composition of Portfolio 3

ASSET	PROPORTION
BBDC3	5.03%
BOVA11	5.31%
CGAS5	43.74%
CSNA3	13.61%
LREN3	27.05%
RENT3	5.01%
Sum	97.75%
Expected return	35.01%
Standard deviation	12.09%

Portfolio 4, from the Naive Diversification strategy, obtained a small error concerning the expected return and the real return confirming the theory defended in (DEMIGUEL; GARLAPPI; UPPAL, 2009a) that this 1/N strategy best deals with the estimation error. However, the expected return on Portfolio 4 was lower than all 3 portfolios obtained via optimization. DeMiguel Galappi and Uppal (2009a) report that to have a good estimate of a portfolio composed of 25 assets, it takes 3,000 months and 5,000 months to estimate a portfolio of 50 assets. The results obtained in this article show that for the analyzed data set, optimization responded well to the use of 2,500 daily price data of each of the 43 assets. We also highlight the fact that the LSTM network has considerably reduced the estimation error when used to make a prediction, using as

input the prices of the assets. The combination of the LSTM network and the ABC optimization algorithm proved to be a potential tool to solve both the estimation error and the portfolio optimization problem.

6.3 Conclusions

The study aimed to improve the Markowitz optimization model by calibrating the k parameter of the cardinality constraint and by reducing the estimation error of the expected return of the portfolio using the *Long Short Term Memory* (LSTM).

The study was developed through the application of different approaches to the construction of portfolios, to identify the one that provided the smallest error of estimation. With this, the method that generated the best portfolio was the one used to generate Portfolio 3. This portfolio was built through simulations using the ABC algorithm and the Markowitz model, to find the best cardinality, and, with LSTM, predictions of future prices were made to reduce the estimation error of asset returns. Therefore, the combination of the LSTM network and the ABC optimization algorithm proved to be a potential tool to solve both the estimation error and the portfolio optimization problem.

And by varying the size of the cardinality, it is possible to notice that this constraint has a substantial impact on the return and risk of the portfolio and that the definition of the ideal number is dependent on the broader set of assets under analysis, where you want to extract the assets that will make up the optimal portfolio.

The results obtained in this article show that from the analyzed data set, optimization responded well to the use of 2,500 daily price data of the 43 assets analyzed. We also highlight the fact that the LSTM network has considerably reduced the estimation error when used to make predictions of the future prices of the assets.

By comparing the efficiency of portfolios with different values for asset numbers, we perceived that there is no linear relationship between the number of assets and the return on the portfolio, risk, and objective function. In other words, the increase in the number of assets does not ensure the risk reduction for the portfolios constructed with the analyzed data set. Therefore, for this set, we find the best portfolio through the objective function, and it is composed of 6 assets. However, for a new data set, with another size of the time interval, we will likely find, and the best portfolio with a different number of assets than 6, and the cause of this may be the new matrix of variance-covariance.

Regarding the estimation error, the LSTM neural network brought predictive values very close to reality, reducing the portfolio estimation error, as demonstrated by

the Portfolio 3 in **Table 15**. Thus, the LSTM Network's hybrid technique with ABC proved to be promising to solve the portfolio optimization problem with a lower estimation error for the expected return of the portfolio.

About the Naive Diversification strategy, if we look only at the actual performance of the portfolio (real return), all portfolios generated through optimization performed better. However, if we look at the estimation error perspective, only Portfolio 3 was better than Portfolio 4 (as shown in **Table 15**). If the analyst wishes to build portfolios with low estimation error, then the strategies used to build portfolios 3 and 4 must be considered. Although Portfolios 1 and 2 have good results in terms of real returns, their respective estimation errors compromise results. Even in situations like Portfolio 1, where the real return was higher than the expected return, the analyst must be thorough, because, as well as the error was positive, the opposite can also occur, and the portfolio return is negative.

This study brings a combination of tools that allow extracting more information from the portfolio analysis process; besides, it allows diagnosing portfolios from different perspectives. Moreover, we are not stating that the increase in the number of assets in a portfolio does not diminish the risk of this, we just draw attention to the importance of using simulations and experimentation to find new results, and, for the dataset and the period analyzed, the method to generate Portfolio 3 brought excellent results for both the expected return and the real return.

The main conclusions are: the impact of cardinality on the objective, risk and return function is non-linear, and therefore these values fluctuate downwards and upwards with the variation in the number of assets in the portfolio; the LSTM network proved to be a good option to reduce the estimation error, which is one of the biggest problems of the portfolio optimization models; the implications for theory and practice are that the ideal number of assets that should make up the portfolio varies according to the data set analyzed, therefore, given a data set, it is necessary to simulate several portfolios with different numbers of assets to verify the one that offers the best risk-return ratio.

As a limitation of the study, the fact of having been used only daily data of 43 assets in the Brazilian stock market is highlighted. Therefore, if the number of assets analyzed was higher, it is likely that we would find better results for the portfolios built.

As a proposal for future studies, we suggest:

1. Continue research on ways to improve our model and its predictions by studying changes in neural network architecture and different approaches to preprocess input data;

2. Test with fixed k value (cardinality constraint) and varying the size of the assets set;
3. Make tests to identify the performance of a portfolio with k assets over time to see the effect of the historical period on cardinality.

7. Conclusões

O trabalho tinha como objetivo geral melhorar o modelo de otimização de portfólio calibrando a cardinalidade e reduzindo o erro de estimativa dos retornos por meio do modelo híbrido com o algoritmo de Colônia de Abelhas Artificiais e Redes Neurais Recorrentes *Long Short Term Memory*. A proposta era que o modelo proporcionasse tanto a redução do erro de estimativa do retorno esperado do portfólio, quanto a obtenção do número ideal de ativos que este deve compor, dado um conjunto maior de ativos para serem analisados.

Antes da definição do objetivo geral, o que existia era a ideia de pesquisa sobre o problema de otimização de portfólio. Mas o refinamento dos problemas sobre os quais a pesquisa foi desenvolvida, só ocorreu após as duas revisões sistemáticas de literatura.

A primeira revisão de literatura mostra que apesar do tempo de publicação, a teoria do portfólio, desenvolvida por Markowitz, ainda é bastante usada para fazer otimização de carteiras de ações e análises comparativas. De acordo com as análises feitas ao longo deste artigo, considerando os artigos mais citados, existe uma tendência para o uso de algoritmos híbridos para seleção de portfólios.

Já o artigo de revisão da seção 5, surgiu para fornecer uma revisão sistemática abrangente, com a classificação dos artigos listados e sugestões para pesquisas futuras. Para isso revisou-se 41 artigos publicados em revistas científicas que abordam tópicos relacionados à otimização de portfólio: métodos exatos e probabilísticos, restrições, mercados avaliados (*benchmark*), tipos de análise e *software*/linguagens de programação usados. As implicações encontradas na revisão de literatura da seção 5 incluem o seguinte: Independentemente do método usado, a aplicação de técnicas para fazer estimativas de retornos futuros é uma tendência nos estudos sobre otimização de portfólio, uma vez que o erro na estimativa de parâmetros do modelo compromete a qualidade da otimização. Técnicas como otimização robusta e Lógica *Fuzzy* são usadas para amortizar o erro de estimativa. Além disso, estatísticas Bayesianas e Redes Neurais, híbridas ou não com *Fuzzy*, também são usadas para reduzir erros de estimativa ou fazer previsões.

O artigo mostrado na seção 4 compara os resultados da otimização com os retornos esperados calculados pela média histórica e por predição. A técnica de *Holt-Winters* não respondeu bem a redução do erro de estimativa. No entanto, a otimização com o *Holt-Winters* permitiu um retorno real maior. E o modelo MV usando a média histórica dos retornos teve o menor erro de estimativa.

O quarto artigo (seção 6) foi desenvolvido por meio da aplicação de diferentes abordagens para a construção de carteiras de ações, com o intuito de identificar aquela que proporcionasse o menor erro de estimativa. Para isso várias carteiras foram geradas por meio de simulações usando o algoritmo ABC e o modelo MV com restrição de cardinalidade, para encontrar o melhor tamanho para a carteira em termos da Taxa de Sharpe, e, com isso chegou-se à cardinalidade de tamanho 6 (seis).

Variando o tamanho da cardinalidade é possível notar que essa restrição tem forte impacto no retorno e risco da carteira, e que a definição do número ideal é dependente do conjunto maior de ativos em análise, de onde se deseja extrair os ativos que irão compor a carteira ótima. Ao comparar a eficiência de carteiras com diferentes valores para números de ativos, percebe-se que não há uma relação linear entre o número de ativos e o retorno da carteira, o risco, e a função objetivo. Em outras palavras, o aumento do número de ativos não garante a redução do risco para as carteiras construídas com o conjunto de dados analisados. Entretanto, para um novo conjunto de dados, com outro intervalo de tempo e diferentes ativos, é possível que outros resultados sejam encontrados, e a melhor carteira seja composta por um número de ativos diferente de 6 (seis). A causa disso pode ser tanto a nova configuração para matriz de covariância quanto para os retornos esperados dos ativos.

Com relação ao erro de estimativa, a Rede Neural LSTM trouxe valores preditos muito próximos da realidade, reduzindo o erro de estimativa do modelo MV com restrição de cardinalidade. Além disso, nos testes, foi constatado que a predição usando como dados de entrada os preços históricos dos ativos foi melhor, em termos de RMSE, que a predição usando os retornos históricos. Uma das possíveis explicações para os resultados é que o uso de retornos contínuos, pressupõe-se que os preços seguem uma distribuição lognormal (logo, os logaritmos desses valores seguiriam uma distribuição normal). No entanto, a análise do retorno dos dados reflete que nenhum retorno da série temporal pode ser considerado gaussiano (devido à alta curtose, às vezes, muito alta).

Com relação a estratégia *Naive Diversification* ($1/N$), observando apenas a performance real da carteira (retorno real), todas as carteiras geradas por meio da otimização foram melhores do que a carteira $1/N$. Entretanto, sob a perspectiva do erro de estimativa, apenas a Carteira com 6 ativos foi melhor que a Carteira com a estratégia $1/N$. Se o analista deseja construir carteiras com baixo erro de estimativa, então as estratégias usadas para construir as carteiras 3 e 4 (seção 6) devem ser levadas em consideração. Embora as Carteiras 1 e 2 (seção 6) tenham bons resultados em termos de retornos real, seus respectivos erros de estimativa comprometem os resultados. Para

o conjunto de dados e o período analisado, o método para gerar a Carteira 3 (seção 6) trouxe os melhores resultados tanto para o retorno esperado quanto para o retorno real.

Esse trabalho traz uma combinação do uso de ferramentas que permitem extrair mais informações do processo de análise das carteiras, além de permitir diagnosticar portfólios sob diversas perspectivas. Além disso, o objetivo não é afirmar que o aumento do número de ativos em uma carteira de fato não diminua o risco desta, apenas chama-se a atenção para a importância do uso de simulações e da experimentação de forma que os resultados sejam analisados sob a perspectiva da Taxa de Sharpe, e, portanto, que as carteiras sejam comparadas em função da relação risco-retorno.

Os resultados obtidos nesse artigo mostram que, para o conjunto de dados analisados, a otimização respondeu bem ao uso de 2500 dados de preços diários dos 43 ativos analisados. Também se destaca o fato de a rede LSTM ter reduzido, de forma considerável, o erro de estimativa quando usada para fazer previsão dos preços futuros dos ativos. Logo, a técnica híbrida da Rede LSTM com ABC se mostrou como promissora para resolver o problema de otimização de portfólio com menor erro de estimativa para o retorno esperado da carteira.

Como limitação do trabalho destaca-se o fato de ter sido usado apenas dados diários de 43 ativos do mercado de ações do Brasil. Logo, se o número de ativos analisados fosse maior é provável que encontrar-se-iam resultados melhores para as carteiras construídas.

Como proposta de trabalhos futuros, sugere-se:

1. Continuar à investigação de maneiras de como melhorar o modelo proposto neste artigo estudando mudanças na arquitetura da rede neural e diferentes abordagens para pré-processar os dados de entrada;
2. Fazer teste com o valor de k (da restrição de cardinalidade) fixo e variando o tamanho do conjunto de ativos;
3. Fazer testes para identificar a performance de uma carteira com k ativos ao longo do tempo com o objetivo de verificar qual o efeito do tempo sobre a cardinalidade;
4. Estudar a adição de restrições com base em análises fundamentais de ações, ou seja, dentro desse tipo de análise, quais seriam as restrições que, adicionadas, tornam o modelo matemático mais eficiente para a otimização do portfólio;
5. A complexidade computacional do Problema de Otimização de Portfólio, juntamente com a importância prática do gerenciamento de carteiras de ações, desencadeia a motivação dos pesquisadores para projetar

algoritmos eficientes. Portanto, sempre são bem-vindas melhorias relacionadas à eficiência computacional (calibração de parâmetros, hibridização, entre outras) para lidar com metodologias de algoritmos, heurísticas e exatas.

Referências

ACKERMANN, F.; POHL, W.; SCHMEDDERS, K. Optimal and Naive Diversification in Currency Markets. **Management Science**, v. 63, p. 3347–3360, 2016. DOI: <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2184336>. Disponível em: <https://pubsonline.informs.org/doi/pdf/10.1287/mnsc.2016.2497>. Acesso em: 14 nov. 2018.

AKAY, B.; KARABOGA, D. Artificial bee colony algorithm for large-scale problems and engineering design optimization. **Journal of intelligent manufacturing**, v. 23, n. 4, p. 1001–1014, 2012. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10845-010-0393-4> Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/s10845-010-0393-4>. Acesso em: 14 nov. 2018

AL JANABI, M. A. M. Optimal and investable portfolios: An empirical analysis with scenario optimization algorithms under crisis market prospects. **Economic Modelling**, v. 40, p. 369–381, 2014. DOI: <https://dx.doi.org/10.1016/j.econmod.2013.11.021>. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0264999313005208?via%3Dihub>. Acesso em: 14 nov. 2018.

ALGARVIO, H.; LOPES, F.; SOUSA, J.; LAGARTO, J.. Multi-agent electricity markets: Retailer portfolio optimization using Markowitz theory. **Electric Power Systems Research**, v. 148, p. 282–294, 2017. DOI: <https://dx.doi.org/10.1016/j.epsr.2017.02.031>. Disponível em: bit.ly/2VHG9Kh. Acesso em: 14 nov. 2018.

ALI, Ö. G.; AKÇAY, Y.; SAYMAN, S.; YILMAZ, E.; ÖZÇELİK, M. H.. Cross-Selling Investment Products with a Win-Win Perspective in Portfolio Optimization. **Operations Research**, v. 65, n. 1, p. 1–19, 2016. DOI: <https://dx.doi.org/10.1287/opre.1556>. Disponível em: bit.ly/3a00Gxo. Acesso em: 14 nov. 2018.

ASSAF NETO, Alexandre. **Mercado Financeiro**, 13a edição. São Paulo, Editora Atlas SA, 2015.

AWADALLAH, M. A.; AL-BETAR, M. A.; BOLAJI, A. L. A.; ALSUKHNI, E. M.; AL-ZOUBI, H.. Natural selection methods for artificial bee colony with new versions of onlooker bee. **Soft Computing**, v. 23, n. 15, p. 6455-6494, 2018. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/s00500-018-3299-2>. Acesso em: 14 nov. 2018.

AYUB, U.; SHAH, S. Z. A.; ABBAS, Q. Robust analysis for downside risk in portfolio management for a volatile stock market. **Economic Modelling**, v. 44, p. 86–96, 2015. DOI: <https://dx.doi.org/10.1016/j.econmod.2014.10.001>. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437115009243?via%3Dihub>. Acesso em: 14 nov. 2018.

BABAEI, S.; SEPEHRI, M. M.; BABAEI, E. Multi-objective portfolio optimization considering the dependence structure of asset returns. **European Journal of Operational Research**, v. 244, n. 2, p. 525–539, 2015. DOI: <https://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2015.05.041>.

org/10.1016/j.ejor.2015.01.025. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221715000454?via%3Dihub> Acesso em: 14 nov. 2018.

BACANIN, Nebojsa; TUBA, Milan; PELEVIC, Branislav. Constrained portfolio selection using artificial bee colony (ABC) algorithm. **INTERNATIONAL JOURNAL OF MATHEMATICAL MODELS AND METHODS IN APPLIED SCIENCES**, v. 17, p. 18, 2014. Disponível em: encurtador.com.br/iES68. Acesso em: 14 nov. 2018.

BAN, Gah-Yi; EL KAROUI, Noureddine; LIM, Andrew EB. Machine Learning and Portfolio Optimization. **Management Science**, v. 64, n. 3, p. 1136–1154, 2016. DOI: <https://dx.doi.org/10.1287/mnsc.2016.2644>. Disponível em: <https://pubsonline.informs.org/doi/pdf/10.1287/mnsc.2016.2644>. Acesso em: 14 nov. 2018.

BASTOS, L. D. S. L.; MENDES, M. L.; NUNES, D. R. D. L.; MELO, A. C. S., & CARNEIRO, M. P.. A systematic literature review on the joint replenishment problem solutions: 2006-2015. **Production**, v. 27, 2017. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S0103-65132017000100309&script=sciarttext>. Acesso em: 14 nov. 2018.

BAYKASOĞLU, A.; YUNUSOĞLU, M. G.; ÖZSOYDAN, F. B. A GRASP based solution approach to solve cardinality constrained portfolio optimization problems. **Computers & Industrial Engineering**, v. 90, p. 339–351, 2015. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cie.2015.10.009>. Disponível em: bit.ly/34rPRmr. Acesso em: 14 nov. 2018

BEHR, Patrick; GUETTLER, Andre; MIEBS, Felix. On portfolio optimization: Imposing the right constraints. **Journal of Banking & Finance**, v. 37, n. 4, p. 1232-1242, 2013. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jbankfin.2012.11.020>

BENATI, S. Using medians in portfolio optimization. **Journal of the Operational Research Society**, v. 66, n. 5, p. 720–731, 2015. DOI: <https://dx.doi.org/10.1057/jors.2014.57>. Disponível em: <https://orsociety.tandfonline.com/doi/pdf/10.1057/jors.2014.57?needAccess=true>. Acesso em: 14 nov. 2018.

BENNINGA, Simon. **Financial modeling**. MIT press, 2014.

BENSAÏDA, A.; BOUBAKER, S.; NGUYEN, D. K. The shifting dependence dynamics between the G7 stock markets. **Quantitative Finance**, v. 18, n. 5, p. 801–812, 2018. DOI: <https://dx.doi.org/10.1080/14697688.2017.1419628>. Disponível em: <https://www.tandfonline.com/doi/pdf/10.1080/14697688.2017.1419628?needAccess=true>. Acesso em: 14 nov. 2018.

BERTRAND, J. Will M.; FRANSOO, Jan C. Operations management research methodologies using quantitative modeling. **International Journal of Operations &**

Production Management, 2002. Disponível em: bit.ly/3cc4kWz. Acesso em: 10 jun. 2018.

BERUTICH, J. M.; LÓPEZ, F.; LUNA, F.; QUINTANA, D. Robust technical trading strategies using GP for algorithmic portfolio selection. **Expert Systems with Applications**, v. 46, p. 307–315, 2016. DOI: <https://dx.doi.org/10.1016/j.eswa.2015.10.040>. Disponível em: <https://www.science-direct.com/science/article/pii/S0957417415007447>. Acesso em: 14 nov. 2018.

BILBAO-TEROL, A.; ARENAS-PARRA, M.; CAÑAL-FERNÁNDEZ, V.; ANATOMIL-IBIAS, J. Using TOPSIS for assessing the sustainability of government bond funds. **Omega (United Kingdom)**, v. 49, p. 1–17, 2014. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0305048314000528>. Acesso em: 14 nov. 2019

BJÖRK, T.; MURGOCI, A.; ZHOU, X. Y. Mean-variance portfolio optimization with state-dependent risk aversion. **Mathematical Finance**, v. 24, n. 1, p. 1–24, 2014. DOI: <https://doi.org/10.1111/j.1467-9965.2011.00515.x>. Disponível em: bit.ly/34sNRKT. Acesso em: 10 jun 2018.

BODNAR, T.; PAROLYA, N.; SCHMID, W. Estimation of the global minimum variance portfolio in high dimensions. **European Journal of Operational Research**, v. 266, n. 1, p. 371–390, 2018. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2017.09.028>. Disponível em: bit.ly/39ZjRHE. Acesso em: 18 nov. 2018

BRANDA, M.; KOPA, M. On relations between DEA-risk models and stochastic dominance efficiency tests. **Central European Journal of Operations Research**, v. 22, n. 1, p. 13–35, 2014. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10100-012-0283-2>. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/s10100-012-0283-2>. Acesso em: 14 nov. 2018

BRODIE, J., Daubechies, I., De Mol, C., Giannone, D., & Loris, I. Sparse and stable Markowitz portfolios. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, v. 106, n. 30, p. 12267-12272, 2009. DOI: <https://doi.org/10.1073/pnas.0904287106>

CEREN, T. Ş.; KÖKSALAN, M. Effects of Multiple Criteria on Portfolio Optimization. **International Journal of Information Technology & Decision Making**, v. 13, n. 01, p. 77–99, 2014. DOI: <https://dx.doi.org/10.1142/S0219622014500047>. Disponível em: <https://www.worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/S0219622014500047>. Acesso em: 14 nov. 2018.

CHANG, T. J.; MEADE, N.; BEASLEY, J. E.; SHARAIHA, Y. M. Heuristics for cardinality constrained portfolio optimisation. **Computers & Operations Research**, v. 27, n. 13, p. 1271–1302, 2000. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0305-0548\(99\)00074-X](https://doi.org/10.1016/S0305-0548(99)00074-X). Disponível em: bit.ly/2x92Uxb. Acesso em: nov. 2018.

CHEN, Angela HL; LIANG, Yun-Chia; LIU, Chia-Chien. An artificial bee colony algorithm for the cardinality-constrained portfolio optimization problems. In: **2012 IEEE Congress on Evolutionary Computation**. IEEE, 2012. p. 1-8. DOI: 10.1109/CEC.2012.6252920. Disponível em: <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/6252920>. Acesso em: 16 jun 2018.

CHEN, Angela HL; LIANG, Yun-Chia; LIU, Chia-Chien. Portfolio optimization using improved artificial bee colony approach. In: **2013 IEEE Conference on Computational Intelligence for Financial Engineering & Economics (CIFER)**. IEEE, 2013. p. 60-67. DOI: 10.1109/CIFER.2013.6611698. Disponível em: bit.ly/2XxxrQ5. Acesso em: 16 jun 2018.

CHEN, C.; ZHOU, Y. SHA. Robust multiobjective portfolio with higher moments. **Expert Systems with Applications**, v. 100, p. 165–181, 2018. DOI: <https://dx.doi.org/10.1016/j.eswa.2018.02.004>. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0957417418300745?via%3Dihub>. Acesso em: 14 nov. 2018.

CHEN, K.; ZHOU, Y.; DAI, F. **A LSTM-based method for stock returns prediction: A case study of China stock market**. 2015 IEEE International Conference on Big Data (Big Data). Anais...IEEE, 2015. DOI: 10.1109/BigData.2015.7364089. Disponível em: <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/7364089>. Acesso em: 14 nov. 2018

CUI, X.; GAO, J.; LI, X.; LI, D. Optimal multi-period mean-variance policy under no-shorting constraint. **European Journal of Operational Research**, v. 234, n. 2, p. 459–468, 2014. Disponível em: bit.ly/3a366aS. Acesso em: 14 nov. 2018.

DAI, Zhifeng; WEN, Fenghua. Some improved sparse and stable portfolio optimization problems. **Finance Research Letters**, v. 27, p. 46-52, 2018. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.frl.2018.02.026>

DEB, Kalyanmoy. An efficient constraint handling method for genetic algorithms. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, v. 186, n. 2-4, p. 311-338, 2000. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(99\)00389-8](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(99)00389-8). Disponível: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782599003898>. Acesso em: 14 nov. 2018.

DEMIGUEL, V.; GARLAPPI, L.; UPPAL, R. How Inefficient Is the 1/N Portfolio Strategy? **Review of Financial Studies**, v. 22, n. 5, p. 1915–1953, 2009a. DOI: <https://doi.org/10.1093/rfs/hhm075>. Disponível em: bit.ly/34vhBqn. Acesso em: 14 nov 2018.

DEMIGUEL, V., GARLAPPI, L., NOGALES, F. J., & UPPAL, R. A generalized approach to portfolio optimization: Improving performance by constraining portfolio norms. **Management science**, v. 55, n. 5, p. 798-812, 2009. Doi: 10.1287/mnsc.1080.0986

ERTENLICE, O.; KALAYCI, C. B. A survey of swarm intelligence for portfolio optimization: Algorithms and applications. **Swarm and evolutionary computation**, v. 39, p. 36–52, 2018. DOI: <https://dx.doi.org/10.1016/j.swevo.2018.01.009>. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S221065021730353X?via%3Dihub>. Acesso em: 14 nov. 2018.

EVANS, J. L.; ARCHER, S. H. Diversification and the reduction of dispersion: an empirical analysis. **The Journal of Finance**, v. 23, n. 5, p. 761–767, 1968. <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1968.tb00315.x>. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.1540-6261.1968.tb00315.x>. Acesso em: 14 de nov. 2018.

FABOZZI, F. J.; KOLM, P. N.; PACHAMANOVA, D. A.; FOCARDI, S. M. Robust portfolio optimization. **The Journal of portfolio management**, v. 33(3), p. 46–54, 2007. DOI: <https://doi.org/10.3905/jpm.2007.684751>. Disponível em: bit.ly/2VmK4uv. Acesso em: 14 nov. 2018.

FAN, Jianqing; ZHANG, Jingjin; YU, Ke. Vast portfolio selection with gross-exposure constraints. **Journal of the American Statistical Association**, v. 107, n. 498, p. 592–606, 2012. DOI: [10.1080/01621459.2012.682825](https://doi.org/10.1080/01621459.2012.682825)

FISCHER, T.; KRAUSS, C. Deep learning with long short-term memory networks for financial market predictions. **European Journal of Operational Research**, v. 270, n. 2, p. 654–669, 2018. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2017.11.054>. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0377221717310652>. Acesso em: 10 ago. 2019.

FLIEGE, J.; WERNER, R. Robust multiobjective optimization & applications in portfolio optimization. **European Journal of Operational Research**, v. 234, n. 2, p. 422–433, 2014. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2013.10.028>. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0377221713008515>. Acesso em: 14 nov. 2018

FURLAN, P. K.; LAURINDO, F. J. B. Agrupamentos epistemológicos de artigos publicados sobre big data analytics. **Transinformação**, v. 29, n. 1, p. 91–100, abr. 2017. DOI: <http://dx.doi.org/10.1590/2318-08892017000100009>. Disponível em: bit.ly/2VhPzKN. Acesso em: 15 nov 2018.

GARCÍA, F.; GUIJARRO, F.; OLIVER, J. Index tracking optimization with cardinality constraint: a performance comparison of genetic algorithms and tabu search heuristics. **Neural Computing and Applications**, v. 30, n. 8, p. 2625–2641, 17 out. 2018. DOI: <https://dx.doi.org/10.1007/s00521-017-2882-2>. Disponível em: bit.ly/2JTUEUe. Acesso em: 14 nov. 2018.

GE, Mengyao. Artificial bee colony algorithm for portfolio optimization. In: **Fifth International Conference on Intelligent Control and Information Processing**. IEEE,

2014. p. 449-453. DOI: 10.1109/ICICIP.2014.7010297. Disponível em: [bit.ly/ 2RoyA8w](http://bit.ly/2RoyA8w). Acesso em: 10 jun 2018.

GENG, R.; BOSE, I.; CHEN, X. Prediction of financial distress: An empirical study of listed Chinese companies using data mining. **European Journal of Operational Research**, v. 241, n. 1, p. 236–247, 2015. DOI:<https://doi.org/10.1016/j.ejor.2014.08.016> Disponível em: bit.ly/2yU2Emh. Acesso em: 14 nov. 2018.

GERS, F. A.; SCHMIDHUBER, J.; CUMMINS, F. Learning to forget: Continual prediction with LSTM.(1999). **9th International Conference on Artificial Neural Networks: ICANN '99**, p. 850 – 855, 1999. DOI: 10.1049/cp:19991218. Disponível em: https://digital-library.theiet.org/content/conferences/10.1049/cp_19991218. Acesso em: 10 ago. 2019.

GIL, Antonio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6. ed. Editora Atlas SA, 2008.

GOLDBERG, David E.; DEB, Kalyanmoy. A comparative analysis of selection schemes used in genetic algorithms. In: **Foundations of genetic algorithms**. Elsevier, 1991. p. 69-93. DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-0-08-050684-5.50008-2>. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780080506845500082>. Acesso em: 14 ago. 2019.

GOODMAN, D.; BRETTE, R. Brian: a simulator for spiking neural networks in Python. **Frontiers in Neuroinformatics**, v. 2, n. November, p. 1–10, 2008. DOI: <https://doi.org/10.3389/neuro.11.005.2008>. Disponível em: <https://www.frontiersin.org/articles/10.3389/neuro.11.005.2008/full>. Acesso em: 14 nov. 2018.

HE, X.; LI, C.; HUANG, T.; LI, C. Neural network for solving convex quadratic bilevel programming problems. **Neural Networks**, v. 51, p. 17–25, 2014. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.neunet.2013.11.015>. Disponível em: bit.ly/3aZETY7. Acesso em: 14 nov. 2018.

HERMAN, J. D.; ZEFF, H. B.; REED, P. M.; CHARACKLIS, G. W. Beyond optimality: Multistakeholder robustness tradeoffs for regional water portfolio planning under deep uncertainty. **Water Resources** ..., p. 1–22, 2014. DOI: <https://doi.org/10.1002/2014WR015338>. Disponível em: bit.ly/39Yel2G. Acesso em: 14 nov. 2018.

HOCHREITER, S.; SCHMIDHUBER, J. LSTM solve hard long-time lag problems. **Advances in Neural Information Processing Systems**, p. 473-479, 1997. Disponível em: [bit.ly/ 2Rsr4K2](http://bit.ly/2Rsr4K2). Acesso em: 28 set 2019.

HONG-MEI, Liu; ZHUO-FU, Wang; HUI-MIN, Li. Artificial bee colony algorithm for real estate portfolio optimization based on risk preference coefficient. In: **2010 International**

Conference on Management Science & Engineering 17th Annual Conference Proceedings. IEEE, 2010. p. 1682-1687.

HU, Y.; LIU, K.; ZHANG, X.; SU, L.; NGAI, E. W. T.; LIU, M. Application of evolutionary computation for rule discovery in stock algorithmic trading: A literature review. **Applied Soft Computing Journal**, v. 36, p. 534–551, 2015. DOI: <https://dx.doi.org/10.1016/j.asoc.2015.07.008>. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S156849461500438X?via%3Dihub>. Acesso em: 14 nov. 2018.

HUTTER, F.; XU, L.; HOOS, H. H.; LEYTON-BROWN, K. Algorithm runtime prediction: Methods & evaluation. **IJCAI International Joint Conference on Artificial Intelligence**, v. 2015- Jan, p. 4197–4201, 2015. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.artint.2013.10.003>. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0004370213001082>. Acesso em: 14 nov. 2018.

JABR, R. A.; KARAKI, S.; KORBANE, J. A. Robust Multi-Period OPF with Storage and Renewables. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 30, n. 5, p. 2790–2799, 2015. DOI: 10.1109/TPWRS.2014.2365835. Disponível em: <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/6948280>. Acesso em: 14 nov. 2018

JI, R.; LEJEUNE, M. A.; PRASAD, S. Y. Properties, formulations, and algorithms for portfolio optimization using Mean-Gini criteria. **Annals of Operations Research**, v. 248, n. 1–2, p. 305–343, 26 jan. 2017. DOI: <https://dx.doi.org/10.1007/s10479-016-2230-4>. Disponível em: <https://rd.springer.com/article/10.1007%2Fs10479-016-2230-4>. Acesso em: 14 nov. 2018.

KARABOGA, D. **An idea based on honey bee swarm for numerical optimization.** [s.l.] Technical report-tr06, Erciyes university, engineering faculty, computer ..., 2005. Disponível em: bit.ly/2RsZ3lp. Acesso em: 10 jun 2018.

KARABOGA, Dervis; BASTURK, Bahriye. Artificial bee colony (ABC) optimization algorithm for solving constrained optimization problems. In: **International fuzzy systems association world congress**. Springer, Berlin, Heidelberg, 2007. p. 789-798. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-540-72950-1_77. Disponível em: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-540-72950-1_77. Acesso em: 10 nov. 2018.

KARABOGA, Dervis; BASTURK, Bahriye. On the performance of artificial bee colony (ABC) algorithm. **Applied soft computing**, v. 8, n. 1, p. 687-697, 2008. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2007.05.007>. Disponível em: bit.ly/3e8IUeN. Acesso em: 15 dez. 2018.

KARAKALIDIS, A.; SIFALERAS, A. Solving Portfolio Optimization Problems using AMPL. **Operational Research in Business and Economics**, p. 167–184, 2017. DOI:

https://doi.org/10.1007/978-3-319-33003-7_8. Disponível em: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-33003-7_8. Acesso em: 14 nov. 2018

KALAYCI, C. B.; ERTENLICE, O.; AKYER, H.; AYGOREN, H. An artificial bee colony algorithm with feasibility enforcement and infeasibility toleration procedures for cardinality constrained portfolio optimization. **Expert Systems with Applications**, v. 85, p. 61-75, 2017. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2017.05.018>. Disponível em: bit.ly/2xmXdM7. Acesso em: 15 jun 2018.

KARDAKOS, E. G.; SIMOGLU, C. K.; BAKIRTZIS, A. G. Optimal Offering Strategy of a Virtual Power Plant: A Stochastic Bi-Level Approach. **IEEE Transactions on Smart Grid**, v. 7, n. 2, p. 794–806, 2016. DOI: 10.1109/TSG.2015.2419714. Disponível em: <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/7095586>. Acesso em: 14 nov. 2018

KOLM, P. N.; TÜTÜNCÜ, R.; FABOZZI, F. J. 60 Years of portfolio optimization: Practical challenges and current trends. **European Journal of Operational Research**, v. 234, n. 2, p. 356–371, 2014. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2013.10.060>. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0377221713008898>. Acesso em: 14 nov. 2018.

KUMAR, D.; MISHRA, K. K. Portfolio optimization using novel co-variance guided Artificial Bee Colony algorithm. **Swarm and Evolutionary Computation**, v. 34, n. 2, p. 119–130, 2017. DOI: <https://dx.doi.org/10.1016/j.swevo.2016.11.003>. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2210650216304059?via%3Dihub>. Acesso em: 14 nov. 2018.

LEVY, M.; KAPLANSKI, G. Portfolio selection in a two-regime world. **European Journal of Operational Research**, v. 242, n. 2, p. 514–524, abr. 2015. DOI: <https://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2014.10.012>. Disponível em: bit.ly/2RvbL2W. Acesso em: 14 nov. 2018.

LI, Q.; BAO, L. Enhanced index tracking with multiple time-scale analysis. **Economic Modelling**, v. 39, p. 282–292, 2014. DOI: <https://dx.doi.org/10.1016/j.econmod.2014.03.009>. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0264999314000959?via%3Dihub>. Acesso em: 14 nov. 2018.

LIMA, M. B. S. P.; SANTOS, W. B.; DROGUETT, E. L.; DINIZ, H. H. L.; SANTOS, R. de C. B. **APLICAÇÃO DO MODELO DE PREVISÃO DE DEMANDA HOLT- WINTERS EM UMA REGIONAL DE CORTE E DOBRA DE AÇO**. XXXV Encontro Nacional de Engenharia da Produção. Anais...Fortaleza-CE: 2015. Disponível em: bit.ly/2JR5U3Q. Acesso em: 23 mai 2019.

LIU, Y. Novel volatility forecasting using deep learning–Long Short Term Memory Recurrent Neural Networks. **Expert Systems with Applications**, v. 132, p. 99–109, 2019. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2019.04.038>. Disponível em:

<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0957417419302635>. Acesso em: 10 ago. 2019.

LIU, Y.-J.; ZHANG, W.-G. A multi-period fuzzy portfolio optimization model with minimum transaction lots. **European Journal of Operational Research**, v. 10, n. 2, p. 933–941, 2015. DOI: <https://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2014.10.061>. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037722171400900X>. Acesso em: 14 nov. 2018.

LWIN, K.; QU, R.; KENDALL, G. A learning-guided multi-objective evolutionary algorithm for constrained portfolio optimization. **Applied Soft Computing Journal**, v. 24, p. 757–772, 2014. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2014.08.026> Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1568494614003913>. Acesso em: 14 nov. 2018.

MACEDO, L. L.; GODINHO, P.; ALVES, M. J. Mean-semivariance portfolio optimization with multiobjective evolutionary algorithms and technical analysis rules. **Expert Systems with Applications**, v. 79, p. 33–43, 2017. DOI: <https://dx.doi.org/10.1016/j.eswa.2017.02.033>. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0957417417301252?via%3Dihub>. Acesso em: 14 nov. 2018.

MANSINI, R.; OGRYCZAK, W.; SPERANZA, M. G. Twenty years of linear programming-based portfolio optimization. **European Journal of Operational Research**, v. 234, n. 2, p. 518–535, 2014. DOI: <https://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2013.08.035>. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221713007194?via%3Dihub>. Acesso em: 14 nov. 2018.

MARKOWITZ, H. Portfolio Selection. **The Journal of Finance**, v. 7, n. 1, p. 77–91, 1952. DOI: <https://dx.doi.org/10.1111/j.1540-6261.1952.tb01525.x>. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/full/10.1111/j.1540-6261.1952.tb01525.x>. Acesso em: 14 nov. 2018.

MARZBAN, S.; MAHOOTCHI, M.; KHAMSEH, A. A. Developing a multi-period robust optimization model considering American style options. **Annals of Operations Research**, v. 233, n. 1, p. 305–320, 2015. DOI: <https://dx.doi.org/10.1007/s10479-013-1461-x>. Disponível em: <https://rd.springer.com/article/10.1007%2Fs10479-013-1461-x>. Acesso em: 14 nov. 2018.

MCKINNEY, W. Data Structures for Statistical Computing in Python. **Proceedings of the 9th Python in Science Conference**, v. 445, n. Scipy, p. 51–56, 2010. Disponível em: Acesso em: <https://pdfs.semanticscholar.org/f6da/c1c52d3b07c993fe52513b8964f86e8fe381.pdf> 18 nov. 2018

MEGHWANI, S. S.; THAKUR, M. Multi-objective heuristic algorithms for practical portfolio optimization and rebalancing with transaction cost. **Applied Soft Computing**, v. 67, p. 865–894, 2018. DOI: <https://dx.doi.org/10.1016/j.asoc.2017.09.025>. Disponível

em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1568494617305641?via%3Dihub>. Acesso em: 14 nov. 2018.

MERTON, R. C. Optimum Consumption and Portfolio Rules in a continuous-Time Model. **Journal of Economic Theory**, v. 46, n. 2, p. 395–401, 1971. DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-780850-5.50052-6>. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780127808505500526>. Acesso em: 14 nov. 2018.

MISHRA, S. K.; PANDA, G.; MAJHI, B. Prediction based mean-variance model for constrained portfolio assets selection using multiobjective evolutionary algorithms. **Swarm and Evolutionary Computation**, v. 28, p. 117–130, 2016. DOI: <https://dx.doi.org/10.1016/j.swevo.2016.01.007>. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2210650216000171?via%3Dihub>. Acesso em: 14 nov. 2018.

MITCHELL, S.; O’SULLIVAN, M.; DUNNING, I. PuLP: A Linear Programming Toolkit for Python. **The University of Auckland, Auckland**, New Zealand, 2011. Disponível em: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.416.4985&rep=rep1&type=pdf>. Acesso em: 18 nov. 2018.

MORANDI, M. I. W. M.; CAMARGO, L. F. R. Revisão sistemática da literatura. In: DRESCH, Aline; LACERDA, Daniel Pacheco; ANTUNES JÚNIOR, José Antonio Valle. **Design science research: método de pesquisa para avanço da ciência e tecnologia**. Porto Alegre: Bookman, p. 141-172. 2015.

MUNOZ, F. D.; HOBBS, B. F.; HO, J. L.; KASINA, S. An engineering-economic approach to transmission planning under market and regulatory uncertainties: WECC case study. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 29, n. 1, p. 307–317, 2014. DOI: 10.1109/TPWRS.2013.2279654. Disponível em: <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/6599010>. Acesso em: 14 nov. 2018.

NELSON, D. M.; PEREIRA, A. C.; DE OLIVEIRA, R. A. **Stock market’s price movement prediction with LSTM neural networks**. 2017 International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN). Anais...IEEE, 2017. DOI: 10.1109/IJCNN.2017.7966019. Disponível em: bit.ly/3e9s1jX. Acesso em: 15 nov. 2019.

OLAH, C. **Understanding LSTM Networks**. Disponível em: <https://research.google/pubs/pub45500/>. Acesso em: 26 dez. 2019.

PAI, G. A. V. Fuzzy Decision Theory Based Metaheuristic Portfolio Optimization and Active Rebalancing Using Interval Type-2 Fuzzy Sets. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, v. 25, n. 2, p. 377–391, 2017. DOI: <http://dx.doi.org/10.1109/TFUZZ.2016.2633972>. Disponível em: <https://ieeexplore.ieee.org/document/7775067>. Acesso em: 14 nov. 2018.

PEDREGOSA, F.; VAROQUAUX, G.; GRAMFORT, A.; MICHEL, V.; THIRION, B.; GRISEL, O.; ...; VANDERPLAS, J. Scikit-learn: Machine Learning in Python. **Journal of machine learning research**, v. 12, n. 1, p. 2825–2830, 2011. Disponível em: bit.ly/2VbYxZW. Acesso em: 17 nov 2019.

PEKÁR, J.; ČIČKOVÁ, Z.; BREZINA, I. Portfolio performance measurement using differential evolution. **Central European Journal of Operations Research**, v. 24, n. 2, p. 421–433, 2016. DOI: <https://dx.doi.org/10.1007/s10100-015-0393-8>. Disponível em: <https://rd.springer.com/article/10.1007%2Fs10100-015-0393-8>. Acesso em: 14 nov. 2018.

PFLUG, G. C.; PICHLER, A.; WOZABAL, D. The 1/N investment strategy is optimal under high model ambiguity. **Journal of Banking & Finance**, v. 36, n. 2, p. 410–417, 2012. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jbankfin.2011.07.018> Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0378426611002299>. Acesso em: 14 nov. 2018

PFLUG, G.; WOZABAL, D. Ambiguity in portfolio selection. **Quantitative Finance**, v. 7, n. 4, p. 435–442, 2007. DOI: <https://doi.org/10.1080/14697680701455410>. Disponível em: https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/14697680701455410?casatoken=S9WTynuSODUAAAAA%3AmnS6okBOZ3XS4VOHnQM8t35WzPTrIII0TXId9AEL3gOieSeCQdkb8yy1Vqjx_jD2liazjzsovOW. Acesso em: 14 nov. 2018.

POUYA, A. R.; SOLIMANPUR, M.; REZAEI, M. J. Solving multi-objective portfolio optimization problem using invasive weed optimization. **Swarm and Evolutionary Computation**, v. 28, p. 42–57, 2016. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.swevo.2016.01.001> Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S22106502160002X>. Acesso em: 14 nov. 2018

QU, B. Y.; ZHOU, Q.; XIAO, J. M.; LIANG, J. J.; SUGANTHAN, P. N. Large-Scale Portfolio Optimization Using Multiobjective Evolutionary Algorithms and Preselection Methods. **Mathematical Problems in Engineering**, v. 2017, p. 14, 2017. DOI: <https://dx.doi.org/10.1155/2017/4197914>. Disponível em: bit.ly/2yGUaP8. Acesso em: 14 nov. 2018.

RAO, S. S. **Engineering optimization: theory and practice**. [s.l.] John Wiley & Sons, 2019.

REN, F.; LU, Y. N.; LI, S. P.; JIANG, X. F.; ZHONG, L. X.; QIU, T. Dynamic portfolio strategy using clustering approach. **PLoS ONE**, v. 12, n. 1, p. 1–23, 2017. DOI: <https://dx.doi.org/10.1371/journal.pone.0169299>. Disponível em: <https://journals.plos.org/plosone/article?id=10.1371/journal.pone.0169299>. Acesso em: 14 nov. 2018.

REVEIZ-HERAULT, A. An Active Asset Management Investment Process for Drawdown-Averse Investors. **INTELLIGENT SYSTEMS IN ACCOUNTING, FINANCE**

AND MANAGEMENT, v. 23, n. September 2015, p. 85–96, 2016. DOI: <https://dx.doi.org/10.1002/isaf.1375>. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/full/10.1002/isaf.1375>. Acesso em: 14 nov. 2018.

REZAEI POUYA, A.; SOLIMANPUR, M.; JAHANGOSHAI REZAEI, M. Solving multi-objective portfolio optimization problem using invasive weed optimization. **Swarm and Evolutionary Computation**, v. 28, p. 42–57, 2016. DOI: <https://dx.doi.org/10.1016/j.swevo.2016.01.001>. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S221065021600002X?via%3Dihub>. Acesso em: 14 nov. 2018.

RUBIO, A.; BERMÚDEZ, J. D.; VERCHER, E. Forecasting portfolio returns using weighted fuzzy time series methods. **International Journal of Approximate Reasoning**, v. 75, p. 1–12, 2016. DOI: <https://dx.doi.org/10.1016/j.ijar.2016.03.007>. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888613X16300408?via%3Dihub>. Acesso em: 14 nov. 2018.

RUBIO, A.; BERMÚDEZ, J. D.; VERCHER, E. Improving stock index forecasts by using a new weighted fuzzy-trend time series method. **Expert Systems with Applications**, v. 76, p. 12–20, 2017. DOI: <https://dx.doi.org/10.1016/j.eswa.2017.01.049>. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0957417417300647?via%3Dihub>. Acesso em: 14 nov. 2018.

SABORIDO, R.; RUIZ, A. B.; BERMÚDEZ, J. D.; VERCHER, E.; LUQUE, M. Evolutionary multi-objective optimization algorithms for fuzzy portfolio selection. **Applied Soft Computing**, v. 39, p. 48–63, 2016. DOI: <https://dx.doi.org/10.1016/j.asoc.2015.11.005>. Disponível em: bit.ly/3aF7eSq. Acesso em: 14 nov. 2018.

SAWIK, T. Joint supplier selection and scheduling of customer orders under disruption risks: Single vs. dual sourcing. **Omega (United Kingdom)**, v. 43, p. 83–95, 2014. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.omega.2013.06.007>. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0305048313000686>. Acesso em: 14 nov. 2018.

SELVIN, S.; VINAYAKUMAR, R.; GOPALAKRISHNAN, E. A.; MENON, V. K.; SOMAN, K. P. Stock price prediction using LSTM, RNN and CNN-sliding window model. In: **2017 International Conference on Advances in Computing, Communications and Informatics (ICACCI)**. Anais...IEEE, 2017. DOI: 10.1109/ICACCI.2017.8126078. Disponível em: <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/8126078>. Acesso em: 14 nov. 2018.

SHARMA, C.; BANERJEE, K. A study of correlations in the stock market. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 432, p. 321–330, 2015. DOI: <https://dx.doi.org/10.1016/j.physa.2015.03.061>. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437115003234?via%3Dihub>. Acesso em: 14 nov. 2018.

SILVA, A.; NEVES, R.; HORTA, N. A hybrid approach to portfolio composition based on fundamental and technical indicators. **Expert Systems with Applications**, v. 42, n. 4, p. 2036–2048, 2015. DOI: <https://dx.doi.org/10.1016/j.eswa.2014.09.050>. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0957417414006113?via%3Dihub>. Acesso em: 14 nov. 2018.

SOLEIMANI, H.; SEYYED-ESFAHANI, M.; KANNAN, G. Incorporating risk measures in closed-loop supply chain network design. **International Journal of Production Research**, v. 52, n. 6, p. 1843–1867, 2014. DOI: <https://doi.org/10.1080/00207543.2013.849823>. Disponível em: https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/00207543.2013.849823?casa_token=DdPUFn_Au1UAAAAA%3A6kVEhn4hA-DC91uladB1LfJFY6hWZiKxzbw1rwERtHsFdxMahSpngw3A_6vaoTq7idKcy9GTSdOk. Acesso em: 14 nov. 2018.

STATMAN, M. How many stocks make a diversified portfolio? **Journal of financial and quantitative analysis**, v. 22, n. 3, p. 353–363, 1987. DOI: <https://doi.org/10.2307/2330969>. Disponível em: <https://www.cambridge.org/core/journals/journal-of-financial-and-quantitative-analysis/article/how-many-stocks-make-a-diversified-portfolio/CE5CDF2C7225FC1E0EDE3E700A3C66A7>. Acesso em: 14 nov. 2018.

SUN, X.; LIU, Z. Optimal portfolio strategy with cross-correlation matrix composed by DCCA coefficients: Evidence from the Chinese stock market. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 444, p. 667–679, 2016. DOI: <https://dx.doi.org/10.1016/j.physa.2015.10.065>. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437115009243?via%3Dihub>. Acesso em: 14 nov. 2018.

TANG, G. Y. How efficient is naive portfolio diversification? An educational note. **Omega**, v. 32, n. 2, p. 155–160, 2004. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.omega.2003.10.002>. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0305048303001336>. Acesso em: 14 nov. 2018.

THI, H. A. LE; MOEINI, M. Long-Short Portfolio Optimization Under Cardinality Constraints by Difference of Convex Functions Algorithm. **Journal of Optimization Theory and Applications**, v. 161, n. 1, p. 199–224, 2014. DOI: <https://dx.doi.org/10.1007/s10957-012-0197-0>. Disponível em: <https://rd.springer.com/article/10.1007%2Fs10957-012-0197-0>. Acesso em: 14 nov. 2018.

TOSTA DE SÁ, Geraldo. **Investimentos no mercado de capitais**. Co. ed. Rio de Janeiro, 1979.

TUBA, M.; BACANIN, N. Artificial bee colony algorithm hybridized with firefly algorithm for cardinality constrained mean-variance portfolio selection problem. **Applied Mathematics & Information Sciences**, v. 8, n. 6, p. 2831, 2014. DOI: <http://dx.doi.org/10.12785/amis/080619>. Disponível em: <http://www.naturalspublising.com/Article.asp?ArtclD=6816>. Acesso em: 10 nov. 2018.

URYASEV, S. Conditional Value-at-Risk: Optimization Algorithms and Applications. **Proceedings of the IEEE/IAFE/INFORMS 2000 Conference on Computational Intelligence for Financial Engineering (CIFER)(Cat. No. 00TH8520)**, p. 49–57, 2000. DOI: 10.1109/CIFER.2000.844598. Disponível em: <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/844598>. Acesso em: 14 nov. 2018.

VERCHER, E.; BERMÚDEZ, J. D. Portfolio optimization using a credibility mean-absolute semi-deviation model. **Expert Systems with Applications**, v. 42, n. 20, p. 7121–7131, 2015. DOI: <https://dx.doi.org/10.1016/j.eswa.2015.05.020>. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0957417415003486?via%3Dihub>. Acesso em: 14 nov. 2018.

VERÍSSIMO, A. J.; ALVES, C. DA C.; HENNING, E.; AMARAL, C. E. do. Métodos Estatísticos De Suavização Exponencial Holt-Winters Para Previsão De Demanda Em Uma Empresa Do Setor Metal Mecânico. **Revista Gestão Industrial**, v. 8, n. 4, p. 154–171, 2012. Disponível em: bit.ly/2RpjDmv. Acesso em: 15 mai 2019.

WANG, Zhen; LIU, Sanyang; KONG, Xiangyu. Artificial bee colony algorithm for portfolio optimization problems. **International Journal of Advancements in Computing Technology**, v. 4, n. 4, p. 8-16, 2012. DOI: 10.4156/ijact.vol4.issue4.2 Disponível em: <https://pdfs.semanticscholar.org/3891/f7cd4a4d7a0a2030171b72042c1b3deac261.pdf> Acesso em: 14 nov. 2018

WILLMOTT, C. J. On the validation of models. **Physical geography**, v. 2, n. 2, p. 184–194, 1981. DOI: <https://doi.org/10.1080/02723646.1981.10642213>. Disponível em: <https://pdfs.semanticscholar.org/3891/f7cd4a4d7a0a2030171b72042c1b3deac261.pdf> Acesso em: 14 nov. 2018

WINTERS, P. R. Forecasting Sales by Exponentially Weighted Moving Averages. **Management Science**, v. 6, n. 3, p. 324–342, 1960. DOI: <https://doi.org/10.1287/mnsc.6.3.324>. Disponível em: <https://pubsonline.informs.org/doi/abs/10.1287/mnsc.6.3.324>. Acesso em: 14 nov. 2018.

WÜRTZ, D.; SETZ, T.; CHALABI, Y.; CHEN, W.; ELLIS, A. **Portfolio Optimization with R_Rmetrics**. [s.l: s.n.], 2009.

YU, D.; WANG, W.; ZHANG, W.; ZHANG, S. A bibliometric analysis of research on multiple criteria decision making. **Current Science**, v. 114, n. 4, p. 747–758, 2018. DOI: <https://dx.doi.org/10.18520/cs/v114/i04/747-758>. Disponível em: <https://www.currentscience.ac.in/Volumes/114/04/0747.pdf>. Acesso em: 14 nov. 2018.

ZADEH, L. A. Fuzzy Sets. **Information and Control**, v. 8, n. 3, p. 338–353, 1965. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0019-9958\(65\)90241-X](https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X). Disponível em: <https://www.ScienceDirect.com/science/article/pii/S001999586590241X>. Acesso em: 14 nov. 2018.

ZEFF, H. B.; KASPRZYK, J. R.; HERMAN, J. D.; REED, P. M.; CHARACKLIS, G. W. Navigating financial and supply reliability tradeoffs in regional droughtmanagement portfolios. **Water Resources Research**, v. 50, p. 4906–4923, 2014. DOI: <https://doi.org/10.1002/2013WR015126>. Disponível em: <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/full/10.1002/2013WR015126>. Acesso em: 14 nov. 2018.

ZHANG, W. G.; LIU, Y. J. Credibilitic mean-variance model for multi-period portfolio selection problem with risk control. **OR Spectrum**, v. 36, n. 1, p. 113–132, 2014. DOI: <https://dx.doi.org/10.1007/s00291-013-0335-6>. Disponível em: <https://rd.springer.com/article/10.1007%2Fs00291-013-0335-6>. Acesso em: 14 nov. 2018.

ZHANG, Y.; LI, X.; GUO, S. Portfolio selection problems with Markowitz's mean-variance framework: a review of literature. **Fuzzy Optimization and Decision Making**, v. 17, n. 2, p. 125–158, 1 jun. 2018. DOI: <https://dx.doi.org/10.1007/s10700-017-9266-z>. Disponível em: <https://rd.springer.com/article/10.1007%2Fs10700-017-9266-z>. Acesso em: 14 nov. 2018.

ZHAO, L.; WANG, G. J.; WANG, M.; BAO, W.; LI, W.; STANLEY, H. E. Stock market as temporal network. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 506, p. 1104–1112, 2018b. DOI: <https://dx.doi.org/10.1016/j.physa.2018.05.039>. Disponível em: bit.ly/2Y7KRT8. Acesso em: 14 nov. 2018.

ZHAO, L.; LI, W.; FENU, A.; PODOBNIK, B.; WANG, Y.; STANLEY, H. E. The q-dependent detrended cross-correlation analysis of stock market. **Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment**, v. 2018, p. 1–28, 2018. DOI: <https://dx.doi.org/10.1088/1742-5468/aa9db0>. Disponível em: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-5468/aa9db0/meta>. Acesso em: 14 nov. 2018.

Apêndice A – Ativos da B3 (Bolsa de valores do Brasil) (Continua)

Código	Nome da Empresa	Setor	Subsetor
ABEV3	AMBEV S/A	Consumo Não-cíclico	Bebidas
B3SA3	B3	Financeiro	Serviços financeiros diversos
BBAS3	Banco do Brasil	Financeiro	Intermediários Financeiros
BBDC3	Banco Bradesco	Financeiro	Intermediários Financeiros
BBDC4	Banco Bradesco (preferencial)	Financeiro	Intermediários Financeiros
BOVA11	ETF (exchange- traded fund)	Financeiro	Intermediários Financeiros
BRFS3	BRF SA	Consumo Não-cíclico	Alimentos processados
BRML3	BR MALLS PAR	Financeiro	Exploração de Imóveis
BTOW3	B2W DIGITAL	Consumo cíclico	Comércio
CCRO3	CCR SA	Bens Industriais	Transporte
CGAS5	COMGAS	Utilidade Pública	Gás
CMIG4	CEMIG	Utilidade Pública	Energia elétrica
CSNA3	SID NACIONAL	Materiais básicos	Siderurgia e Metalurgia
CYRE3	CYRELA REALT	Consumo cíclico	Construção civil
ELET3	Centrais Elétricas Brasileiras	Utilidade Pública	Energia elétrica
ELET6	Centrais Elétricas Brasileiras (preferencial)	Utilidade Pública	Energia elétrica
ENBR3	ENERGIAS BR	Utilidade Pública	Energia elétrica
GGBR4	GERDAU	Materiais básicos	Siderurgia e Metalurgia
GOAU4	GERDAU MET	Materiais básicos	Siderurgia e Metalurgia
GOLL4	Gol	Bens Industriais	Transporte
HYPE3	HYPERA	Saúde	Comércio e distribuição
ITSA4	ITAUSA	Financeiro	Intermediários Financeiros
ITUB4	ITAUUNIBANCO	Financeiro	Intermediários Financeiros
JBSS3	JBS	Consumo Não-cíclico	Alimentos processados
KROT3	KROTON	Consumo cíclico	Diversos
LAME4	LOJAS AMERIC	Consumo cíclico	comércio
LREN3	LOJAS RENNER	Consumo cíclico	comércio
MRFG3	MARFRIG	Consumo Não-cíclico	Alimentos processados
MRVE3	MRV	Consumo cíclico	Construção civil
MULT3	MULTIPLAN	Financeiro	Exploração de Imóveis
OIBR4	OI	Telecomunicações	Telecomunicações

Apêndice A – Ativos da B3 (Bolsa de valores do Brasil) (Conclusão)

PETR3	Petróleo Brasileiro SA Petrobras	Petróleo, Gás e Biocombustíveis	Petróleo, Gás e Biocombustíveis
PETR4	Petróleo Brasileiro SA Petrobras (preferencial)	Petróleo, Gás e Biocombustíveis	Petróleo, Gás e Biocombustíveis
RAIL3	RUMO S.A.	Bens Industriais	Transporte
RAPT4	RANDON PART	Bens Industriais	Material de transporte
RENT3	LOCALIZA	Consumo cíclico	Diversos
SBSP3	SABESP	Utilidade Pública	Água e saneamento
TCSA3	TECNISA	Consumo cíclico	Construção civil
TIMP3	TIM PART S/A	Telecomunicações	Telecomunicações
USIM5	USIMINAS	Materiais básicos	Siderurgia e Metalurgia
VALE3	VALE	Materiais básicos	Mineração
VIVR3	VIVER	Consumo cíclico	Construção civil
WEGE3	WEG	Máquinas e equipamentos	Motores, Compressores e Outros

Apêndice B – Modelo de Markowitz em R

```

###lendo os arquivos que contém os preços
dados = read.table("dados.txt", header =
TRUE)
###INSTALAR E CARREGAR PS PACOTES
#install.packages("fPortfolio")
library(fPortfolio)
##conversão no tipo de dados "timeSeries"
dados ← as.timeSeries(dados)
#####ESTATÍSTICAS DOS DADOS
#####RETORNOS ESPERADOS
ret.esperados = colMeans(dados)
ret.esperados
#MATRIZ DE COVARIÂNCIAS
mat.cov = cov(dados)
mat.cov

##### OTIMIZAÇÃO
#####

##pesos dos ativos

##retorna o portfólio com a maior relação
retorno/risco na fronteira eficiente

p1 = tangencyPortfolio(dados, spec =
portfolioSpec(), constraints = "LongOnly")

##retorna o portfólio com o risco mínimo a
fronteira eficiente

p2 = minvariancePortfolio(dados, spec =
portfolioSpec(), constraints = "LongOnly")

##Cálculos para obtenção da fronteira
eficiente

Frontier = portfolioFrontier(dados)

##Plotagem da fronteira eficiente no gráfico

frontierPlot(Frontier, col = c("blue", "orange"),
pch = 19)

##adicionando informações ao gráfico

##pontos associados a possíveis carteiras

p3 = monteCarloPoints(Frontier, mcSteps =
5000, cex = 0.25, pch = 19)

##NULL

##mostrando o local da carteira (no gráfico)
com proporções iguais em cada ativo

equalWeightsPoints(Frontier, pch = 15, col =
"red")

##mostrando os pontos relativos a cada ativo
individualmente

singleAssetPoints(Frontier, pch = 19, cex =
1.5, col = topo.colors(6))

```