PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE GOIÁS
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO *STRICTO SENSU* EM EDUCAÇÃO

SIMONE ARIOMAR DE SOUZA

ENSINO DO CONCEITO DE FUNÇÃO POR MEIO DE PROBLEMAS:

CONTRIBUIÇÕES DE DAVYDOV E DE MAJMUTOV

GOIÂNIA
2015

SIMONE ARIOMAR DE SOUZA

ENSINO DO CONCEITO DE FUNÇÃO POR MEIO DE PROBLEMAS: CONTRIBUIÇÕES DE DAVYDOV E DE MAJMUTOV

Tese apresentada à Banca Examinadora de Defesa do Programa de Pós-Graduação em Educação da Pontifícia Universidade Católica de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Doutora em Educação, sob a orientação da Prof.ª Dr.ª Raquel Aparecida Marra da Madeira Freitas.

Linha de Pesquisa: Teorias da Educação e Processos Pedagógicos.

Área de Concentração: Educação e Sociedade.

GOIÂNIA
2015

Dados Internacionais de Catalogação da Publicação (CIP)
(Sistema de Bibliotecas PUC Goiás)

Souza, Simone Ariomar de.
S729e Ensino do conceito de função por meio de problemas [manuscrito] : contribuições de Davydov e de Majmutov / Simone Ariomar de Souza– Goiânia, 2015.
171 f. : il. ; 30 cm.

Tese (doutorado) – Pontifícia Universidade Católica de Goiás, Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Educação, 2015.
"Orientadora: Profa. Dra. Raquel Aparecida Marra da Madeira Freitas".
Bibliografia.

1. Didática. 2. Matemática – Estudo e ensino. I. Título.

CDU 37:51(043)

ENSINO DO CONCEITO DE FUNÇÃO POR MEIO DE PROBLEMAS: CONTRIBUIÇÕES DE DAVYDOV E DE MAJMUTOV

Tese de Doutorado aprovada em 07 de agosto de 2015, no curso de Doutorado em Educação do Programa de Pós-Graduação em Educação da Pontifícia Universidade Católica de Goiás para a obtenção do grau de Doutor em Educação.

BANCA EXAMINADORA

Dra. Raquel Aparecida Marra da Madeira Freitas / PUC Goiás (Presidente)

Dra. Beatriz Aparecida Zanatta (membro/PUC Goiás)

Dr. Duelci Aparecido de Freitas Vaz (membro /PUC Goiás)

Dr. Orlando Fernandez Aquino (membro externo /Uniube)

Dra. Dra. Sandra Valéria Limonta Rosa (membro externo /UFG)

Dr. José Carlos Libâneo (suplente interno / PUC Goiás)

Dr. Wellington Lima Cedro (suplente externo / UFG)

À Trindade Santa, Una e Trina:
Deus Pai, que sempre me amou e me ama incondicionalmente, Deus filho, que sempre me acompanhou e acompanha em todos os meus caminhos, realizando inclusive o impossível em minha vida, Deus Espírito Santo, que sempre me iluminou e me ilumina, proporcionando abundantemente, saúde, paz, alegria e felicidades, mesmo em meio às contradições da vida.

AGRADECIMENTOS

Ao nosso Deus que delineia o meu caminho com amor, sabedoria, luz e paz, me privilegiando, sobretudo ao me presentear com verdadeiros anjos, amigos e colegas especiais.

A minha querida mãezinha do céu, fiel intercessora, sempre presente e atuante.

Ao meu Anjo da Guarda, que tem trabalhado com muita eficácia para me proteger e iluminar.

Aos meus queridos pais, Arlindo e Delfina, pelo amor, presença, dedicação, orações e luta diária. São meus maiores e melhores tesouros.

A minha avó e madrinha Alice, pelo amor, presença, dedicação e orações.

A minha irmã Sigreice e ao meu cunhado Ricardo, pelo amor, lazer e presença em todos os momentos de minha vida.

Aos meus familiares, em especial aos meus primos Leidyane e André, pelo amor, presença e motivação.

Aos meus amigos, sobretudo aqueles que apesar da insistência em me mostrar outros caminhos, suavizaram a minha árdua jornada e souberam respeitar as minhas ausências.

A minha amiga e colega de pesquisa Arianny Grasielly Baião Malaquias, pelas valiosas contribuições.

A minha orientadora professora Drª. Raquel Aparecida Marra da Madeira Freitas, por acreditar em nossa parceira, por compartilhar valiosos conhecimentos e experiências e, ainda, por ter sido o meu maior e melhor exemplo de educadora e pesquisadora, extremamente profissional e competente, sem se esquivar da simpatia, do otimismo e da humanidade na relação com o outro. Reitero minha admiração, reconhecimento, carinho e amizade.

Aos professores integrantes da banca examinadora: Drª. Beatriz Aparecida Zanatta, Dr. Duelci Aparecido de Freitas Vaz, Dr. Orlando Fernández Aquino e Drª. Sandra Valéria Limonta Rosa, pela disponibilidade, pela leitura atenta e pelas valiosas contribuições.

Ao professor Dr. José Carlos Libâneo, pelos ensinamentos que muito contribuíam em minha trajetória acadêmica, profissional e pessoal.

Aos professores Dr. José Ternes e Drª. Elianda Figueiredo Tiballi, por terem me acolhido na condição de aluna extraordinária com confiança, respeito e simpatia, estimulando o meu desejo e determinação rumo ao doutorado.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação da Pontifícia Universidade Católica de Goiás, pelo empenho e responsabilidade com a minha trajetória acadêmica.

Aos amigos e colegas do Programa de Pós-Graduação da Pontifícia Universidade Católica de Goiás, especialmente Márcio Leite de Bessa, Maria Aparecida Candine e Renata Luiza da Costa pela amizade, carinho, alegrias e angústias compartilhadas.

Ao professor Dr. Wellington Lima Cedro, pela acolhida calorosa no grupo GEMAT[1], pela amizade e valiosos ensinamentos compartilhados.

Aos colegas do Grupo GEMAT, especialmente à Maria Marta da Silva e Daniela Cristina de Oliveira, pela amizade, carinho e experiências compartilhadas.

Aos sujeitos da pesquisa, que me acolheram com carinho e disponibilidade e sem os quais não seria possível a realização desta pesquisa.

Ao Instituto Federal de Goiás, pela licença e investimento financeiro (PIQS[2]) durante parte do meu doutorado, além do espaço concedido para realização do experimento didático formativo.

A todos que torceram pela realização exitosa deste trabalho e constantemente torcem por mim, pelos pensamentos positivos, carinho e orações. Embora muitos não estejam nominalmente listados, estão guardados em meu coração.

---

[1] Grupo de Estudos e Pesquisas sobre a Atividade Matemática
[2] Programa Institucional de Bolsas de Qualificação de Servidores

Por que dizer-te, então ó Jacó, por que repetir, ó Israel: escapa meu destino ao Senhor, passa o meu direito despercebido a meu Deus? Não o sabes? Não o aprendeste? O Senhor é um Deus eterno, Ele cria os confins da terra, sem jamais fatigar-se nem aborrecer-se; ninguém pode sondar a sua sabedoria. Dá forças ao homem acabrunhado, redobra a energia do fraco. Até os adolescentes podem esgotar-se, e jovens robustos podem cambalear. Mas aqueles que contam com o Senhor renovam suas forças, ele dá-lhes asas de águia. Correm sem se cansar, vão para frente sem se fatigar. (Isaías 40, 27-31)

RESUMO

Situada na didática, esta pesquisa tem como tema central o ensino-aprendizagem do conceito matemático de função. A literatura científica brasileira, no âmbito da educação matemática, evidencia que as dificuldades de aprendizagem do conceito de função estão relacionadas às metodologias de ensino. O ensino por meio de resolução de problemas é uma alternativa, mas, em geral, não são apontados teorias ou métodos de ensino por problemas com potencial para a promoção de mudanças. Privilegiando o enfoque histórico-cultural, buscou-se esclarecer a questão: como estruturar o ensino aproximando as teorias do Ensino Desenvolvimental de Davydov e do Ensino Problêmico de Majmutov para que o aluno aprenda o conceito de função? Além da análise do ensino-aprendizagem do conceito de função com fundamento na teoria histórico-cultural, a pesquisa objetivou: elucidar o aspecto nuclear do conceito de função como base para seu ensino; analisar as teorias de ensino de Davydov e de Majmutov discutindo suas aproximações e diferenças; apontar os proveitos e as limitações do ensino de função fundamentado nessas teorias. Para o ensino do conceito de função, considera-se a abordagem de Bourbaki, a qual aponta como elemento nuclear, indispensável à compreensão desse conceito, a especificidade da relação entre os elementos dos conjuntos envolvidos. Os procedimentos metodológicos foram pesquisa bibliográfica e pesquisa de campo, sendo que esta última consistiu em um experimento didático formativo no 1° ano do Ensino Técnico Integrado ao Ensino Médio de um *câmpus* do Instituto Federal de Goiás. Os instrumentos de recolha de dados foram observação, entrevistas semiestruturadas e instrumentos de diagnóstico da aprendizagem dos alunos. A análise buscou confrontar a situação inicial de aprendizagem dos alunos com aquela identificada após o ensino por problemas no experimento didático formativo. Os resultados apontaram que as teorias de ensino privilegiadas se complementam e se aproximam em alguns aspectos: 1) O ensino deve estar voltado ao desenvolvimento do pensamento teórico dos alunos; 2) Os alunos devem aprender a partir de processos investigativos e não de conclusões prontas; 3) O processo ensino-aprendizagem deve proporcionar a apropriação ativa e criativa do conhecimento pelo aluno; 4) As tarefas dos alunos devem ter caráter de problemas a serem resolvidos mediante investigação, contemplando-se as contradições existentes nos objetos de conhecimento. Além disso, as mudanças qualitativas nas relações dos alunos com o conceito função mostram indícios de desenvolvimento do pensamento teórico, como defende Davydov e de independência cognoscitiva, como defende Majmutov. As contradições e limitações estiveram relacionadas à baixa carga horária de aulas de matemática, com pouco espaço para a reflexão, e à dificuldade em demover os alunos do hábito do estudo individual, transmissivo e passivo em favor do estudo coletivo, reflexivo e ativo. Conclui-se que o ensino estruturado por meio de problemas, com fundamentos nas teorias de Davydov e de Majmutov, apresenta possibilidades efetivas de aprendizagem dos conceitos matemáticos, particularmente do conceito de função.

Palavras-chave: didática; ensino desenvolvimental; ensino por problemas; ensino de matemática; função.

ABSTRACT

Situated in the didactic, this research is focused on teaching and learning of the mathematical concept of function. The Brazilian scientific literature within the mathematics education shows that the learning difficulties related with the concept of function, are associated with teaching methodologies. Teaching through problem solving is an alternative, but in general, are not singled out theories or teaching methods by problems with potential to promote change. Emphasizing the historical-cultural approach, it sought to clarify the issue: how to structure the teaching approaching the theories Davydov's developmental teaching and Majmutov's problem-based teaching for what the student to learn the concept of function? Besides the analysis of the teaching-learning of concept of function on the basis of historical-cultural theory, the research aimed to: clarify the nuclear aspect of the concept of function as the basis for it's teaching; analyze the teaching theories of Davydov and Majmutov discussing their similarities and differences; point out the benefits and limitations of the teaching of function based on these theories. For teaching the concept of function, it is considered the Bourbaki's approach, which points as nuclear element, essential to the understanding of this concept, the specificity of the relationship between the elements of the sets involved. The methodological procedures were literature and field research, and the latter consisted of a formative didactic experiment in 1st year Teaching Integrated Technical High School of an area of the Instituto Federal de Goiás. The tools to collect the data were observation, semi-structured interviews and diagnostic tools of student learning. The analysis sought to confront the initial learning situation of students with one identified after teaching by problems in the formative didactic experiment. The results showed that the privileged teaching theories complement each other and are close in some respects: 1) Teaching must be focused on the development of theoretical thinking of students; 2) Students should learn from research processes and not ready conclusions; 3) The teaching and learning must provide active and creative appropriation of knowledge by the student; 4) The tasks of the students must contain problems to be solved through investigation, contemplating the existent contradictions in the objects of knowledge. In addition, the qualitative changes in the relations of the students with the concept of function have shown signs of development of theoretical thinking, as advocated by Davydov and cognitive independence as advocates Majmutov. The contradictions and limitations were related to low workload of math classes, with little time for reflection, and the difficulty to dissuade students from individual study habit, transmissive and passive, in favor of collective study, reflective and active. It is concluded that the teaching structured with problems based in theory Davydov and on theory Majmutov, presents possibilities for effective learning of mathematical concepts, particularly of concept of function.

Keywords: didactics; developmental teaching; teaching by problems; mathematics education; function.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

> *Em última instância, todo conhecimento surgiu e sempre surge de alguma exigência ou necessidade prática e, se no processo de desenvolvimento ele se afasta das tarefas práticas que lhe deram origem, nos pontos finais de seu desenvolvimento ele volta a se dirigir para a prática e encontra nesta sua mais alta justificação, confirmação e verificação. (VIGOTSKI, 2003, p. 194)*

Escolhi essa epígrafe para iniciar a apresentação desta tese porque me orientou e muito tem me orientado na condição de pessoa, educadora e pesquisadora compromissada, sobretudo com a qualidade do processo de ensino-aprendizagem em matemática. Essa orientação e esse compromisso estão na origem de minha motivação para realizar a pesquisa de doutorado descrita neste texto, tendo como objeto o ensino-aprendizagem do conceito de função por meio de problemas.

Com títulos de bacharel e de mestre em Matemática pela Universidade Federal de Goiás, atuei como docente entre os anos de 2002 a 2012, no nível superior, em universidades públicas e particulares do estado de Goiás e, também, nos níveis básico, técnico, tecnológico e superior no Instituto Federal de Goiás. Todavia, em todas essas circunstâncias, sem nenhuma formação pedagógica.

Ao ministrar aulas, percebia que não me bastava o domínio do conteúdo matemático para promover a aprendizagem significativa e o desenvolvimento dos alunos. Embora os conhecimentos específicos adquiridos na graduação e no mestrado em Matemática fossem indispensáveis ao exercício da minha profissão, faltava-me outra parte essencial, a formação pedagógica, o que redundou em várias lacunas, mas também no desejo de preenchê-las.

Estimulada pelo fato de que, na ocasião, encontrava-me no Instituto Federal de Goiás como professora efetiva, em condições de pleitear uma licença para fins de estudos, decididamente ingressei-me no doutorado na área de educação, o que me inseriu em uma nova rede de conhecimentos, bastante distintos dos que desenvolvi durante o mestrado em matemática. Oportunamente tive contato com as obras de Vigotski[3] e suas leituras

[3] Embora o sobrenome desse autor esteja grafado em seus originais, de diferentes formas, optamos por empregá-lo, no decorrer do trabalho, de um único modo, como “Vigotski”. Entretanto, nas referências e nas citações são mantidas as formas da escrita conforme publicadas nas obras.

culminaram no meu projeto preliminar de doutorado, cujo propósito era analisar o processo de formação de conceitos em matemática, tendo por base a teoria histórico-cultural. No decorrer do curso, aprofundei o estudo dessa teoria e tive contato com outros autores, seguidores de Vigotski. Entre esses autores estão Vasili Vasilievich Davydov[4] e Mirza I. Majmutov, cujas teorias fundamentam os princípios teóricos desta tese.

Problema e Justificativa da pesquisa

No âmbito da educação matemática, encontra-se uma considerável literatura sobre o ensino-aprendizagem do conceito de função (ANNES, 2006; ROSSINI, 2006; TOGNI, 2007; PANOSSIAN, 2008, 2014; ROCHA, 2008; BARRETO, 2009; ROSA, 2009; GUIMARÃES, 2010; FONSECA, 2011; MACIEL, 2011; SILVA, S. T. T., 2014). Tais estudos representam os esforços de compreensão das dificuldades de apropriação de tal conceito pelos alunos e os impasses de ensino vivenciados pelos professores.

Em geral, tais investigações partem do pressuposto de que as dificuldades de aprendizagem do conceito de função estão intrinsecamente relacionadas com as metodologias adotadas. Assim, além de defenderem a necessidade de uma formação mais sólida do professor de matemática (teórica e pedagógica), os pesquisadores apontam recursos e metodologias alternativas (modelagem matemática, história da matemática, resolução de problemas e uso de *softwares*), que empiricamente apresentaram avanços na qualidade das aprendizagens dos alunos.

O interesse pela investigação do ensino-aprendizagem do conceito de função teve origem em minhas inquietações quando fui constatando, ao longo de minha prática docente, que os alunos apresentavam ora dificuldades extremas de aprendizagem, ora compreensões fragmentadas, e até mesmo equivocadas, de um dos conceitos basilares da matemática: o conceito de função[5].

Lamentavelmente, as dificuldades de aprendizagem observadas entre meus alunos não se tratavam de algo isolado e pontual, num contexto escolar e disciplinar específico, mas de um sinal da grave realidade da escola brasileira, apontada nas avaliações oficiais, como o

[4] Embora o sobrenome desse autor esteja grafado em seus originais, de diferentes formas, optei por empregá-lo, no decorrer do trabalho, de um único modo, como "Davydov". Entretanto, nas referências e nas citações mantive as formas da escrita conforme publicadas nas obras.

[5] Como esta tese não é uma pesquisa específica de matemática não tive a pretensão de apresentar uma análise completa e exaustiva do conceito de função, seja pelo recorte do tema da pesquisa e seus objetivos, seja pela complexidade do conceito de função, que está entrelaçado com vários outros conceitos. O que se buscou nessa pesquisa foi analisar o conceito de função do ponto de vista da definição de um aspecto nuclear possível para dele decorrer a organização do ensino.

Exame Nacional do Ensino Médio e o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes. Neste último, em 2012, o Brasil apresentou avanço em matemática, porém insuficiente para sair da posição entre os de mais baixo desempenho, ficando na 58° posição.

Como atuo nos níveis de ensino médio e ensino superior, optei por realizar a pesquisa envolvendo o ensino médio. Essa escolha foi motivada por se tratar de uma etapa em que a maioria dos alunos está na adolescência, período de desenvolvimento em que sua atividade humana já se amplia mais para a vida em sociedade e por terem já alcançado a última etapa do desenvolvimento dos conceitos científicos. Neste estágio da vida escolar, a raiz de muitos dos problemas de insucesso escolar, inclusive relacionados à disciplina de matemática, são mais evidentes e ainda passíveis de intervenção por parte do professor.

Refletindo sobre isso, me perguntava: quantos alunos não desistiriam de aprender matemática se percebessem nela a beleza teórica presente na gênese dos conceitos, bem como a sua íntima conexão com problemas do cotidiano social? E, quantos alunos não deixariam de abandonar seus estudos se, no ensino médio, encontrassem nos conceitos aprendidos verdadeiros motivos para continuarem estudando?

Em busca de estudos e pesquisas em educação matemática com foco na superação dos problemas relacionados ao ensino-aprendizagem dos alunos, verifiquei que estes enfocam desde os aspectos históricos desse problema, passando por aspectos do cotidiano social, até aspectos pedagógicos e didáticos do ensino-aprendizagem de matemática no contexto da escola (BRITO, 1996; CORREA; MACLEAN, 1999; MIGUEL et al, 2004). Também têm sido realizadas pesquisas, utilizando o referencial histórico-cultural, que tratam de questões do ensino-aprendizagem de matemática (MOYSÉS, 2006; CEDRO, 2008; MORAIS E MOURA, 2009; DAMAZIO, 2011; ROSA, 2012; MADEIRA, 2012; LEMES, 2012; SILVA, R. S., 2013; SILVA, M. M., 2014; OLIVEIRA, 2014; SOUSA, PANOSSIAN; CEDRO, 2014).

Nos diversos níveis do sistema de ensino, é comum na prática dos professores o ensino por meio da resolução de problemas como um procedimento para que o aluno aprenda melhor. Na área de educação matemática, vários autores evidenciam em suas pesquisas a importância do ensino por problemas (DANTE, 1989; ONUCHIC, 1999; POLYA, 1995; POZO, 1998) como forma alternativa de ensino-aprendizagem da disciplina de matemática. Na teoria histórico-cultural, o ensino por problemas também é privilegiado e, de acordo com Freitas (2012), esta abordagem é mais promissora para o desenvolvimento do aluno em relação às formas de ensino por problemas mais comuns em nosso meio, como a Metodologia da Problematização e o Problem Basead Learning (PBL), porque possibilita mudanças qualitativas no processo de pensar e não só a descoberta da solução de um problema.

A Metodologia de Problematização e o PBL são metodologias ativas do ensino-aprendizagem por meio de problemas que, embora avancem em relação ao ensino tradicional, focalizam mais a resolução do problema em detrimento das ações mentais indispensáveis no processo de busca da solução. Em tais metodologias, o aluno não alcança o pensamento teórico. De outra forma, permanecendo no nível empírico, corre o risco de se tornar apenas um bom solucionador de problemas (FREITAS, 2012). A autora desenvolve uma análise dessas três abordagens e constata que o ensino por problemas fundamentado na teoria de Davydov apresenta-se mais promissor para promover o desenvolvimento do aluno.

A partir dessa constatação, busquei aprofundar o estudo da teoria do Ensino Desenvolvimental de Davydov tendo em vista investigar o ensino por meio de problemas em matemática. Essa teoria defende que o ensino escolar, para promover efetivamente o desenvolvimento dos alunos, deve ter como foco o processo de formação de conceitos.

Vigotski (2010) compreende o conceito como forma superior de atividade mental e aponta como principal característica do processo de formação de conceitos a passagem do pensamento por meio de operações imediatas ao pensamento por meio de operações mediadas por leis. Essas leis explicativas das formas de relações e conexões internas dos fenômenos e objetos na realidade estão refletidas nos conceitos.

Davydov (1988) explica que o conceito teórico tem como seu conteúdo o objeto real mediado, refletido no pensamento humano. Trata-se de um processo de transpor ao pensamento algo que tem sua origem na atividade objetal-prática. Por meio do trabalho prático, o ser humano realiza experimentações de caráter cognoscitivo com os objetos, mas passa a realizá-los mentalmente. O conceito, explica Davydov, é a forma da atividade mental pela qual o ser humano reproduz, idealmente, um objeto e seu sistema de relações, sistema esse que reflete a essência do próprio objeto. Portanto, o conceito é, ao mesmo tempo, uma forma de reprodução mental de um objeto material e o meio, ou método de pensamento, pelo qual é possível essa reprodução mental. Afirma o autor: “ter um conceito sobre um objeto significa saber reproduzir mentalmente seu conteúdo, construí-lo. A ação mental de construção e transformação do objeto constitui o ato de sua compreensão e explicação, a descoberta de sua essência” (DAVÍDOV, 1988, p. 126, tradução nossa). Há uma conexão essencial entre o conteúdo de um conceito e o procedimento mental pelo qual ele é construído. Assim, entender algo significa expressar a essência desse algo na forma de conceito. Para exemplificar, Davydov cita Kant:

> O fato de que pensar significa atuar foi indicado por Kant, que escreveu: "Não podemos imaginar uma linha sem traçá-la mentalmente, não podemos imaginar um círculo sem descrevê-lo, não podemos representar as três dimensões do espaço sem traçar, a partir de um ponto, três linhas perpendiculares entre si..." mas, o "traçado", a "descrição" mental, etc. não é outra coisa senão a reprodução, a construção do objeto no plano ideal. (DAVÍDOV, 1988, p. 126, destaques do autor, tradução nossa)

No aprofundamento do estudo de autores da teoria histórico-cultural, descobri a teoria do Ensino Problêmico de Majmutov, também situada nessa abordagem. Apropriar-me dessa teoria despertou em mim a curiosidade intelectual por investigar as contribuições de ambas as teorias para melhorar o ensino-aprendizagem de matemática. Dessa forma, a pesquisa tem como fundamento, ambas as teorias e, ao mesmo tempo, elas fazem parte também do objeto investigado, uma vez que se busca elucidar suas contribuições.

A natureza do problema e do objeto está situada, de forma bastante concreta, no campo da didática, enquanto que o referencial teórico passou a requerer, para tornar concreta a investigação, a escolha de um conceito específico. Como se sabe, no campo da matemática, o conceito de função é basilar e extremamente relevante para o desenvolvimento matemático do aluno porque, por meio dele, se desenvolve a capacidade de analisar e interpretar interdependências entre grandezas, o que torna o aluno capaz de produzir generalizações a respeito de fenômenos nelas envolvidos e de resolver problemas da vida social concreta. Este conceito é importante, também, por apresentar aplicações nas diversas áreas do conhecimento, sendo requerido do aluno desde o ensino fundamental ao superior.

A partir do exposto, foi delineado o problema tratado nessa pesquisa: como estruturar o ensino aproximando as teorias do Ensino Desenvolvimental de Davydov e do Ensino Problêmico de Majmutov para que o aluno aprenda o conceito de função? Pode-se detalhar o problema de pesquisa por meio das seguintes questões: quais as aproximações e diferenças entre as teorias do Ensino Desenvolvimental de Davydov e do Ensino Problêmico de Majmutov? Considerando-se estas teorias, qual aspecto pode ser indicado como nuclear do conceito de função a ser apreendido pelo aluno? De que forma organizar o ensino do conceito de função a partir dessas teorias? Que contribuições e que limitações podem ser encontradas no ensino do conceito de função por meio de problemas, fundamentado nas teorias de Davydov e de Majmutov?

Ao realizar a revisão da literatura, tendo em vista respaldar a justificativa de realização da pesquisa, busquei identificar estudos, trabalhos e pesquisas que tratassem do ensino-aprendizagem de matemática com fundamento nessas teorias para, então, reafirmar a pertinência da pesquisa proposta. Sabendo que a utilização da teoria de Davydov e, sobretudo, de Majmutov é recente entre os pesquisadores brasileiros e que tem sido utilizada principalmente em Programas de Pós-Graduação, optei por iniciar a busca em teses e dissertações, considerando a possibilidade de encontrar aí trabalhos acadêmicos ainda não disponíveis em outras formas de publicação. Em relação à organização do ensino de matemática com fundamentos em Majmutov, não foi encontrado nenhum trabalho no banco de teses e dissertações da CAPES, utilizando como descritor o “Ensino Problêmico”. Com esse descritor, foi encontrado um único trabalho, na forma de dissertação, versando sobre o ensino de química, de autoria de Pinheiro (2012). O trabalho enfoca o ensino do conteúdo químico “estrutura atômica” por meio de problemas, todavia, como não chega a implementar uma proposta didática de ensino-aprendizagem, não se pode extrair dele nenhuma contribuição para a presente pesquisa.

A teoria de Davydov para a educação é direcionada para o ensino-aprendizagem das disciplinas em quaisquer áreas de conhecimento. Além disso, a realização do experimento didático formativo tem se mostrado promissora em todas as áreas do saber investigadas, inclusive em matemática.

Nacionalmente, há estudos realizados com foco na organização do ensino de matemática, fundamentados na Teoria Desenvolvimental de Davydov e com a realização do experimento didático formativo. Foram encontrados estudos como os de Soares (2007), Rosa (2009), Peres (2010), Peres e Freitas (2013) e Silva (2010), que apontam notáveis contribuições para o processo de ensino-aprendizagem em matemática.

Soares (2007) organizou o ensino para uma turma do ensino fundamental, cujo conteúdo foi “divisão de números naturais”, por meio da teoria do Ensino Desenvolvimental de Davydov e posterior acompanhamento e realização de um experimento didático. A autora obteve como resultado a aprendizagem da quase totalidade dos alunos. E, embora apontasse contradições no desenvolvimento desse ensino, ela ressaltou que tais dificuldades estariam relacionadas ao baixo nível de aprendizagem e de desenvolvimento cognitivo dos alunos em outros conteúdos, tais como: leitura, escrita, interpretação de textos e também conteúdos específicos da própria matemática.

Nessa direção, Rosa (2009) mostrou que é possível que os alunos aprendam de modo mais específico um conteúdo de álgebra, particularmente da equação do segundo grau completa, por meio da organização de ensino e do posterior acompanhamento de um experimento didático formativo, realizado na perspectiva de Davydov. Contudo, a autora defendeu que o professor deve ficar atento às contradições que envolvem a realização desse tipo de ensino.

Peres (2010) e Peres e Freitas (2013), ao apresentarem o experimento didático formativo do ensino de volume de sólidos geométricos para estudantes do ensino médio, mostram o ensino desenvolvimental como uma alternativa para a superação dos tipos de ensino de matemática que não privilegiam o desenvolvimento do aluno. Relatam que, embora tenham encontrado dificuldades e contradições relacionadas a fatores socioculturais e históricos envolvendo os alunos e o processo de escolarização, o ensino desenvolvimental é promissor para a aquisição de novas formações mentais em matemática pelos alunos.

Silva (2010) fundamentando-se na abordagem histórico-cultural realizou um experimento didático formativo com foco na formação de conceitos matemáticos na educação infantil. Os resultados apontaram que as crianças conseguiram num nível satisfatório se apropriar do conceito de número.

Todas essas pesquisas evidenciam contribuições da teoria de Davydov e, nesse sentido, são relevantes para a investigação aqui apresentada no que diz respeito à promoção de melhor ensino-aprendizagem de matemática e desenvolvimento dos alunos. Por outro lado, não abrangem o ensino por meio de problemas.

Com respeito à teoria de Majmutov, não foi determinada uma base de dados específica por se considerar mais rara a sua utilização em pesquisas de estudiosos brasileiros. Assim, buscando de forma ampla estudos sobre educação matemática, encontrei o trabalho de Bolívar (2009), que pesquisou sobre a eficácia do Ensino Problêmico na aprendizagem do conceito integral[6] por estudantes do ensino superior. Bolívar (2009) concluiu que a estratégia do Ensino Problêmico produz processos de pensamentos que permitem relacionar o conhecimento matemático e o conhecimento cotidiano, desenvolvendo as habilidades de análise, modelação, interpretação/aplicação e síntese, indispensáveis na aquisição de conceitos; a estratégia Ensino Problêmico permite em maior medida a aquisição do conceito de integral, em comparação com o método tradicional; a aprendizagem do conceito de integral, mediante a Estratégia de Ensino Problêmico, teve efeitos positivos na atitude geral

[6] Integral é um conceito matemático contemplado no ensino superior dos cursos da área de exatas e em parte das graduações da área de biológicas.

em relação ao Cálculo, permitindo aos estudantes participantes mais segurança e sucesso na aprendizagem do conceito de integral.

Tal escassez de estudos e pesquisas sobre o ensino por problemas com fundamento nas teorias de Davydov e de Majmutov permitiu-me firmar a justificativa da importância e das contribuições da presente pesquisa, que representa uma novidade em sua forma de abordar e investigar o problema do ensino de matemática por meio de problemas.

Considero que o aspecto original e inédito dessa pesquisa se situa no esforço teórico, ainda que humilde, de extrair das teorias Ensino Desenvolvimental, de Davydov, e Ensino Problêmico, de Majmutov, contribuições para o ensino por problemas que, neste caso, teve como foco o conceito matemático de função.

Objetivos

Geral

Analisar o ensino-aprendizagem do conceito de função por meio de problemas, tendo como fundamento teórico-metodológico as teorias de Davydov e de Majmutov.

Objetivos Específicos:

- Realizar a análise lógico-histórica do conceito de função, elucidando o seu aspecto nuclear como base para seu ensino.
- Analisar as teorias do Ensino Desenvolvimental de Davydov e do Ensino Problêmico de Majmutov, discutindo suas aproximações, suas diferenças e as contribuições para o ensino-aprendizagem do conceito de função por meio de problemas.
- Apontar os proveitos e as limitações que podem ser encontrados no ensino do conceito de função por meio de problemas, fundamentado nas teorias de Davydov e de Majmutov.

Fundamentação Teórica

A pesquisa proposta foi desenvolvida na perspectiva histórico-cultural, com fundamentos, sobretudo, nas teorias do Ensino Desenvolvimental de Davydov (1982; 1988; 1999) e Ensino Problêmico de Majmutov (1983), acrescida das contribuições de autores da área de matemática (SPIVAK, 1996; IEZZI et al, 2013) e de educação matemática e história da matemática[7] (CARAÇA, 1951; KARLSON 1961; RÍBNIKOV, 1987; BELL, 1985; BOYER, 1993; ALEKSANDROV et al, 1994; BRAGA, 2006; EVES, 2011; ROQUE, 2012).

---

[7] Tendo em vista que as áreas de educação matemática e história da matemática estão intrinsecamente relacionadas, optamos por não distinguir os teóricos.

Majmutov e Davydov pertencem à terceira geração de pesquisadores russos que deram continuidade aos estudos de Vigotski. Tais autores comungam, sobretudo, a ideia de que a forma de organização do ensino pelo professor influencia no desenvolvimento intelectual dos estudantes.

Fundamentado na teoria marxista leninista do conhecimento e com base nas investigações da pedagogia e áreas afins, Majmutov (1983, p.266) conceitua o ensino por problemas (enseñanza problémica) como a atividade do professor dirigida à criação de um sistema de situações com problemas, visando à exposição, explicação e direção da atividade dos alunos na aprendizagem de conhecimentos novos para eles:

> O ensino problêmico é um tipo de ensino que tende ao desenvolvimento, donde se combinam a atividade sistemática independente da busca dos alunos, com a assimilação das conclusões já preparadas pela ciência e o sistema de métodos se estrutura tomando em consideração a suposição do objetivo e o princípio de problemicidade [...]. (MAJMUTOV, 1983, p. 265, tradução nossa)

Para o teórico: “a essência do conceito problema como categoria da lógica dialética, consiste em que, na investigação científica, esta reflita a existência de uma contradição dialética no objeto a conhecer” (MAJMUTOV, 1983, p. 59, tradução nossa).

Na organização didática do Ensino Problêmico, a atividade intelectual do aluno é substancialmente modificada e intensificada no processo de assimilação de conhecimentos. Isso porque o professor não comunica diretamente os resultados dos conhecimentos científicos, mas cria possibilidades, por meio dos problemas propostos, para que o aluno busque, de forma independente e criativa, a via ou o método de obtenção das ideias:

> O objetivo do ensino problêmico é mais amplo: assimilação não somente dos resultados do conhecimento científico, mas também da via do processo de obtenção dos ditos resultados, inclusive, também, da formação da independência cognitiva do aluno e do desenvolvimento de suas capacidades criativas. (MAJMUTOV, 1983, p. 261, tradução nossa)

Conforme Majmutov (1983), o Ensino Problêmico não se reduz ao exercício de ações mentais por meio de tarefas padronizadas, no qual o professor simplesmente aponta o caminho a ser seguido para a resolução dos exercícios e, de outro lado, o aluno, ainda que participe ativamente da busca científica, o faz de forma incompleta, tão somente coletando material empírico, sem resolver problemas e, consequentemente, sem avançar em sua atividade cognoscitiva independente e criativa:

> Se o mestre indica aos alunos um exercício e aponta como se deve realizar, então inclusive a busca independente não será a solução de um problema. Os alunos podem participar ativamente em um trabalho de investigação científica coletando

> material empírico, mas sem resolver problemas. (MAJMUTOV 1983, p.256, tradução nossa)

Para o teórico, nem toda busca mental caracteriza uma organização problêmica, mas tão somente aquela busca em que o aluno, devidamente orientado pelo professor, tenha a oportunidade de aprender de forma independente e criativa, algo novo cuja aquisição exija uma ação mental, não revelada nos conhecimentos anteriores. Segundo Fouché (1969, apud MAJMUTOV, 1983, p. 263, tradução nossa), "no Ensino Problêmico, antes de aprender se exige compreender; tudo adquire um caráter de descoberta; o próprio aluno deve buscar e encontrar teoremas, interpretar regras de maneira crítica".

De acordo com a teoria de Majmutov (1983), o aluno será conduzido a realizar a busca mental, mediante as situações problêmicas organizadas intencionalmente pelo professor. Ressalta-se, ainda, que as situações problêmicas se apresentam em forma de contradições, algumas percebidas imediatamente e outras reveladas no desenvolvimento do pensamento, quando o aluno está realizando a análise mental do material apresentado. Cabe ressaltar que "problêmicas são as perguntas cujas respostas não estão contidas nos conhecimentos anteriores, nem na informação que se dá, e provocam uma dificuldade intelectual nos alunos" (Majmutov 1983, p.227, tradução nossa).

Portanto, a essência do ensino por problemas consiste nas diferentes formas pelas quais o aluno, orientado pelo professor, torna-se capaz de compreender os problemas da realidade objetiva; introduzir-se no processo de sua investigação e solução e, como resultado, adquirir conhecimentos a serem empregados de forma independente na solução de novos problemas:

> [...] a ideia fundamental do ensino problêmico: os conhecimentos em uma parte considerável, não se transmitem aos alunos em uma forma preparada, mas se adquirem durante o processo da atividade cognoscitiva independente, nas condições de uma situação problêmica. (MAJMUTOV, 1983, p.28, tradução nossa)

Para isso, é indispensável que o aluno vivencie a necessidade pelo o conhecimento investigado e, consequentemente, se direcione intelectualmente na busca pela compreensão e solução da contradição que surge entre o conhecido e o desconhecido, e que se caracteriza por meio de uma situação problêmica.

Majmutov (1983, p.28, tradução nossa) ressalta que a contradição "surge quando os alunos 'colidem' com a dificuldade de compreender e interpretar os fatos ou conceitos novos, e se caracteriza pela existência de uma situação problêmica". Para ele, a contradição é a fonte e o motor do desenvolvimento do ensino por problemas. Encontrar a solução para um problema é solucionar a contradição que nele se manifesta. E essa contradição tanto se apresenta na dificuldade que deve ser superada (do desconhecido ao conhecido), como reflete e projeta o caminho da solução e, com ele, a própria superação dialética do problema.

No estudo do conceito de função, uma contradição se encontra no fato de que todos os elementos estão entrelaçados no mundo objetivo, porém, conforme questiona Caraça (1951, p.111), “se tudo depende de tudo, como fixar a nossa atenção num objeto particular de estudo? Temos que estudar tudo ao mesmo tempo? Mas qual o cérebro que poderá fazê-lo?”.

É importante ressaltar que o ensino por problemas, na perspectiva de Majmutov, se difere substancialmente dos demais tipos de ensino por problemas, que geralmente se restringem a um problema proposto com a finalidade de levar o aluno a pensar ativamente para encontrar seu resultado, mas sem maiores ligações com as ações mentais necessárias ao processo de investigação ou descoberta. Para Majmutov (1983, p. 256, tradução nossa), “o pensamento pode ser ativo, mas não independente e muito menos criativo”. Portanto, no ensino por problemas, na perspectiva desse autor, não basta que o ponto de partida seja um problema, com o objetivo de ativar o pensamento. Mais que isso, é necessário que o professor organize situações problêmicas, incluindo contradições não explícitas, mas que se revelem para o aluno quando ele realiza a busca, independente da solução. Dessa forma, poderá ocorrer uma aquisição criativa dos conhecimentos:

> O objetivo da ativação dos alunos mediante o ensino problêmico consiste em elevar o nível de atividade mental do aluno e ensiná-lo não operações isoladas em uma ordem casual e espontânea, mas ao contrário, um sistema de ações mentais que seja característico da solução de tarefas não estereotipadas, que exijam a aplicação de uma atividade mental criativa. (MAJMUTOV, 1983, p.256, tradução nossa)

A teoria do Ensino Desenvolvimental formulada por Davydov (1988) enfatiza, também, o ensino ativo e investigativo, para que o aluno se desenvolva intelectualmente ao aprender conceitos científicos, formando novas ações mentais que lhe permitirão utilizar esses conceitos em sua vida real e de forma independente. Embora não tenha como foco central de sua teoria a estruturação do ensino por problemas, ele o destaca como uma forma importante de ensino para o desenvolvimento da experiência criativa do aluno. Davydov (1988, p.170) menciona que o professor deve propor aos alunos tarefas cognitivas com caráter de problemas que, para serem resolvidos, exijam dos alunos a aquisição da experiência da atividade criadora de cientistas e pesquisadores na formulação dos conhecimentos científicos.

Nessa teoria, o foco principal da tarefa é a formação de novas ações mentais pelos alunos quando estão em busca do conhecimento. O problema, sendo secundário, está contido nas ações mentais que o aluno realiza com caráter de investigação do objeto a ser aprendido. Portanto, o caráter de problema se relaciona com o método de pesquisa no ensino:

> [...] Sua essência consiste em que o mestre não somente comunica às crianças as conclusões finais da ciência, mas que, em certo grau, reproduz o caminho de seu descobrimento (“a embriologia da verdade”). Aqui o mestre “demonstra aos alunos o mesmo caminho do pensamento científico, os obriga a seguir o movimento dialético do pensamento para a verdade, tornando-os, de certo modo, coparticipantes da busca científica”. A exposição de caráter problemático está intimamente ligada à aplicação do método de pesquisa no ensino (DAVYDOV, 1988, p.169, destaques do autor, tradução nossa)

O ensino por problemas só tem sentido se o aspecto principal do método de solução das tarefas cognitivas for à apreensão da atividade criadora. Para Freitas (2012, p.14), “o ensino por problemas, na perspectiva da teoria histórico-cultural, privilegia a formação de conceitos como processo básico que influencia na formação de novas estruturas de pensamento”.

No Ensino Desenvolvimental, o problema é sempre um problema de natureza cognitiva, que exige atividade mental com o objeto, mas em conexão com esse mesmo objeto na realidade social. Na primeira ação (Transformação dos dados da tarefa a fim de revelar a relação universal do objeto estudado), o problema aparece na busca da relação universal do objeto, como um conhecimento que o aluno não tem e precisa formar. Na segunda ação (Modelação da relação diferenciada em forma objetivada, gráfica ou por meio de letras), o aluno é confrontado com um problema criativo, ou seja, ele precisará utilizar sua criatividade para elaborar um modelo do núcleo do objeto, de suas relações nucleares. Na terceira ação (Transformação do modelo da relação para estudar suas propriedades em “forma pura”), o problema toma a forma de análise mental das consequências de se introduzir mudanças no modelo, explicando-as de modo fundamentado. A quarta ação, (solução de tarefas particulares que podem ser resolvidas pelo procedimento geral, o conceito), envolve diferentes problemas com o objeto, em distintas situações, na forma de tarefas para serem resolvidas por meio da utilização do conceito. Já a quinta ação (Controle das ações anteriores) representa um exame consciente do aluno sobre suas próprias ações durante todas as tarefas (autoavaliação), enquanto que a sexta ação (Avaliação da assimilação do procedimento geral como resultado da solução da tarefa de aprendizagem) corresponde novamente a um problema, mas desta vez para ser resolvido na forma da avaliação individual da aprendizagem pelo professor (DAVÍDOV, 1988; FREITAS, 2012).

Tal ensino parece promover melhor o desenvolvimento mental e integral do estudante, uma vez que ele não apenas aprende, mas adquire as ferramentas mentais para lidar com o objeto de conhecimento em sua atividade real, individual e também coletiva. Ao investigar uma determinada situação, surgem novas perguntas, os conceitos anteriormente internalizados estabelecem conexões com os demais para a formação de outros novos (FREITAS, 2012).

Metodologia

Tendo me apropriado do referencial teórico, compreendi que uma pesquisa, para esclarecer o problema da forma como foi proposto, demandava a realização de um experimento didático formativo fundamentado nas teorias de Davydov e Majmutov. Foi o que se buscou nesta pesquisa, do ponto de vista do método e da metodologia, e sua descrição aprofundada será objeto do capítulo III, apresentando-se, aqui na introdução, apenas uma visão geral.

Foram adotados os procedimentos de pesquisa bibliográfica e de pesquisa de campo. A pesquisa bibliográfica abrangeu, principalmente, artigos publicados no período compreendido entre o ano 2004 até 2014, em periódicos científicos nacionais, das áreas de educação e de educação matemática, avaliados pela Capes e disponíveis em bases de dados que permitam acesso ao texto integral. Também foram incluídas teses e dissertações disponíveis no banco de teses da Capes, defendidas no período mencionado.

A pesquisa de campo consistiu num experimento didático formativo fundamentado nas teorias do Ensino Desenvolvimental de Davydov (1982; 1988; 1999) e do Ensino Problêmico de Majmutov (1983). O foco do experimento foi o ensino-aprendizagem do conceito de função.

Os sujeitos da pesquisa foram os alunos e professora do Ensino Técnico Integrado ao Ensino Médio de um *câmpus* do Instituto Federal de Goiás. O primeiro critério de seleção dos sujeitos foi o baixo desempenho dos alunos em matemática. O segundo critério de seleção foi a aceitação da instituição, da professora e dos alunos e seus responsáveis em participar da pesquisa. O terceiro critério foi a disponibilidade da professora para atuar como colaboradora da pesquisa.

Para a coleta de dados, foram utilizados: a observação direta não participante com gravação em vídeo, antes e durante o experimento didático; entrevistas semiestruturadas com os alunos e com a professora colaboradora, com gravação simultânea em áudio; a análise documental de materiais relacionados à atividade de aprendizagem dos alunos como tarefas, avaliações e outros (pré-testes e pós-testes).

A análise qualitativa enfocou o processo de formação de conceitos e os elementos intervenientes nesse processo a partir da atividade de ensino-aprendizagem por problemas. Para análise, foram consideradas, principalmente, as seguintes categorias teóricas: atividade de ensino, atividade de estudo, mediação, zona de desenvolvimento proximal, aprendizagem e formação de conceitos, aprendizagem e desenvolvimento, pensamento teórico etc. A análise também buscou evidenciar os fatores socioculturais e a contextualização do conhecimento pelos alunos, a partir dos problemas apresentados na tarefa a ser solucionada com a utilização do conceito de função.

Organização da Tese

Além das observações no contexto escolar e das entrevistas com os sujeitos, será desenvolvido um experimento didático formativo nas perspectivas contempladas e, posteriormente, será feita a análise dos instrumentos avaliativos aplicados antes e após a execução do experimento. Todos esses procedimentos foram criteriosamente organizados no intuito de fornecer subsídios à questão levantada. Em síntese, a presente tese, pautada na teoria histórico-cultural, está organizada para conter, além da introdução e das considerações finais, três capítulos, a seguir discriminados.

No primeiro capítulo, ao discutir o processo de ensino-aprendizagem do conceito de função, enfatizo a importância científica e social de tal conceito, realizo seu estudo lógico-histórico e, por fim, caracterizo o panorama atual de ensino desse conceito.

No segundo capítulo, discorro sobre as categorias teóricas presentes nas teorias de Davydov e Majmutov, que foram privilegiadas na análise de dados empíricos. Tais categorias teóricas são compreendidas como elementos chaves, os quais movimentaram a presente pesquisa rumo a real concretização dos objetivos propostos.

Em seguida, busco explicitar as bases teóricas e metodológicas, particularmente em Davydov (1982; 1988; 1999) e Majmutov (1983), autores privilegiados na orientação de ensino-aprendizagem do conceito de função. Além disso, defendo a consonância das teorias de Davydov e Majmutov no sentido de potencializar o processo de ensino-aprendizagem do conceito de função.

No terceiro capítulo, apresento os dados coletados e realizo a análise de todo material empírico. Enfim, nas considerações finais, procuro sintetizar os resultados mais significativos e discorro sobre as limitações e sobre as possibilidades advindas dessa experiência.

1 O MOVIMENTO LÓGICO-HISTÓRICO DO CONCEITO DE FUNÇÃO

O processo de ensino-aprendizagem do conceito de função pode, à primeira vista, parecer uma tarefa simples, sobretudo para os professores que não tiveram acesso a uma formação mais consistente[8]. Entretanto, desenvolver esse processo de ensino do referido conceito somente não representa maiores dificuldades para quem a realiza de forma incompleta, estática, fragmentada da realidade e desconexa do seu surgimento e desenvolvimento histórico.

O conceito de função surgiu da necessidade humana de relacionar grandezas e avaliar suas variabilidades, fatores indispensáveis, inclusive, para a compreensão dos fenômenos naturais. Todavia, a definição formal, que conhecemos por meio dos livros didáticos atuais, embora seja o resultado de inúmeras contribuições de estudiosos, realizadas durante milênios, ao longo do seu processo evolutivo, não revela explicitamente tal fato e, além disso, omite aspectos importantes ligados a sua gênese e ao seu desenvolvimento.

Para a produção deste capítulo, foram consideradas como apoio as obras de autores da matemática (SPIVAK, 1996; IEZZI et al, 2013), da educação matemática e da história da matemática (CARAÇA, 1951; KARLSON 1961; RÍBNIKOV, 1987; BELL, 1985; BOYER, 1993; ALEKSANDROV et al, 1994; BRAGA, 2006; EVES, 2011; ROQUE, 2012). Também foram utilizadas dissertações, teses e publicações (OLIVEIRA, 1997; ZUFFI; PACCA, 1999; BRAGA, 2003; SOUSA, 2004; BUENO, 2009; GUIMARÃES, 2010; PANOSSIAN, 2008, 2014, 2015).

Em primeiro lugar, é interessante enfatizar a importância teórica e social do conceito de função, bem como as suas dificuldades de ensino-aprendizagem, justificando a escolha por tal conceito. Posteriormente, será apresentado, de forma objetiva, o estudo lógico-histórico do conceito de função, privilegiando as etapas de seu surgimento e desenvolvimento, bem como o seu reflexo em forma teórica. É necessário ressaltar que tal estudo é uma entre as exigências do ensino a que este trabalho se propõe organizar e acompanhar, por meio do experimento didático formativo.

---

[8] Em virtude do baixo quantitativo de professores de matemática que se encontram atuando, como consequência, sobretudo, da desvalorização salarial e de condições desfavoráveis de trabalho, muitos entre os professores não possuem graduação específica em matemática. Isso, sem mencionar as mazelas existentes nas próprias licenciaturas de matemática. Por vezes, somente por meio de cursos de formação continuada (especialização, mestrado, doutorado, entre outros), os professores adquirem uma formação mais consistente (teórica e pedagógica).

Por fim, será apresentado o panorama atual do ensino do conceito de função e suas consequências no processo de ensino-aprendizagem para o desenvolvimento dos alunos.

1.1 A IMPORTÂNCIA DO CONCEITO DE FUNÇÃO

Para a realização desta pesquisa, dentre os conteúdos de matemática, foi eleito o conceito de função e, para isso, buscou-se apoio em uma multiplicidade de fatores de ordem teórica e prática, em especial por se tratar de um conceito fundamental, unificador, relevante e abrangente, que apresenta inúmeras aplicações em diversas áreas do conhecimento.

Spivak (1996, p.49) afirma ser o conceito de função o mais importante na ciência matemática, tendo em vista a sua grande potencialidade e abrangência na matemática moderna: "O conceito mais importante de todas as matemáticas é, sem dúvida, o de função: em quase todos os ramos da matemática moderna, a investigação se centra no estudo de funções" (SPIVAK, 1996, p.49, tradução nossa).

Legitimando e contemplando tal argumentação, os Parâmetros Nacionais Curriculares para o Ensino Médio – PCNEM (BRASIL, 2000) apontam para a relevância do conceito de função e defendem que o ensino de matemática deve garantir ao aluno certa flexibilidade para lidar com tal conceito, por meio de uma variedade de situações problema:

> Além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas de conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática. (BRASIL, 2000, p. 43 e 44)

Além disso, é oportuno ressaltar que as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Profissional Técnica de Nível Médio – DCNEPTNM (BRASIL, 2013, p. 245), embora não especifiquem os conteúdos matemáticos, contêm recomendações gerais para que a escola elabore seus currículos com elementos essenciais para a formação e para o desenvolvimento profissional:

> [...] os conhecimentos e as habilidades nas áreas de linguagens e códigos, ciências humanas, matemática e ciências da natureza, vinculados à Educação Básica deverão permear o currículo dos cursos técnicos de nível médio, de acordo com as especificidades dos mesmos, como elementos essenciais para a formação e o desenvolvimento profissional do cidadão. (BRASIL, 2013, p. 247)

Para além dessa recomendação, Braga (2006) afirma que o avanço do educando no conhecimento do conceito de função fornece-lhe ferramentas úteis para o exercício de sua cidadania, uma vez que permite melhor reconhecimento e estabelecimento de relações entre as variáveis:

> [...] o avanço de um educando em direção a um conhecimento maior do conceito de função deverá levá-lo a uma compreensão melhor de seu dia a dia, disponibilizando-lhe ferramentas úteis ao exercício de sua cidadania como, por exemplo, o reconhecimento de variáveis em situações do cotidiano e o estabelecimento de relações entre elas. Esse alcance confere ao referido conteúdo um relevância incontestável na matemática escolar. (BRAGA, 2006, p.17)

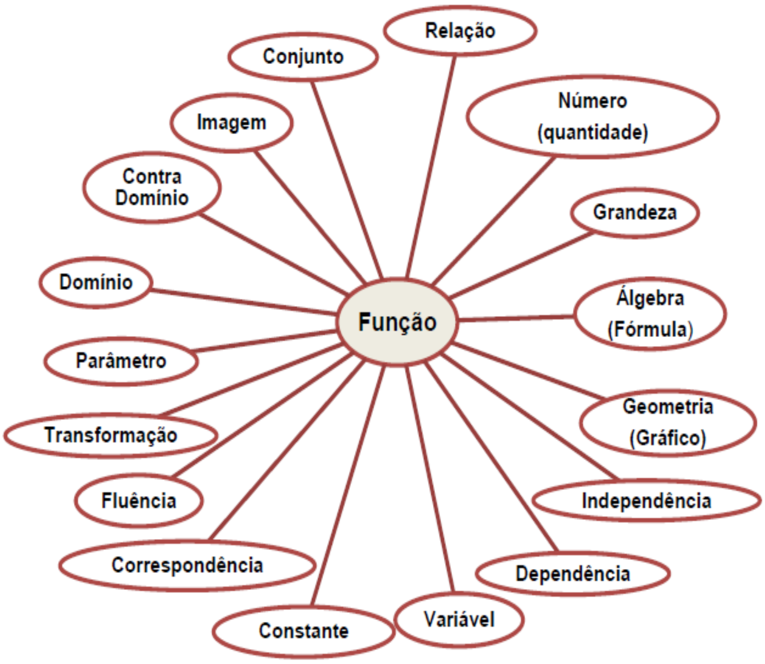
Karlson (1961, p. 376) argumenta a respeito da importância do conteúdo de função na matemática. O autor justifica que tal conteúdo ocupa "o centro de toda a moderna maneira de pensar, a partir, mais ou menos, da era heroica dos Descartes, Leibniz e Newton", e se apresenta como primeira necessidade, assim como o ar para respirar ou o pão de cada dia:

> Se existisse uma taquigrafia especial para os matemáticos, onde as palavras mais frequentes estivessem representadas por símbolos particulares, deveríamos começar por uma palavra e somente uma: a palavra "Função". Encontramo-la a cada passo – não de maneira como se encontra a erva daninha, em toda parte, mas como se encontra o ar para respirar ou o pão de cada dia: como primeira necessidade, como conditio *sine qua non* da matemática hodierna. (KARLSON, 1961, p.376)

Eves (2011, p.661) acrescenta que o estudo do conceito função é fundamental para a formação matemática, uma vez que "esse conceito parece representar um guia natural e efetivo para a seleção e desenvolvimento do material de textos matemáticos". Além disso, o autor defende que o quanto mais rápido o aluno tiver acesso ao conhecimento de função, tanto melhor para sua formação matemática (EVES, 2011).

Outro aspecto que confere importância ao conceito de função, em termos de ensino e pesquisa, é o fato de que tal conceito está entrelaçado a outros conceitos essencialmente importantes na evolução da própria ciência matemática. A Figura 1, a seguir, ilustra alguns entre os principais conceitos interligados ao conceito de função:

Figura 1 – Conceitos interligados ao conceito de função



Fonte: elaborado pela autora

Analisando a figura 1, reporta-se a Kopnin (1978, p.211) ao afirmar que, "os conceitos estão em indissolúvel inter-relação; a diferença entre conceitos isolados é relativa, sobre determinadas condições um conceito se converte em outro, mas mesmo assim essa diferença existe, reflete a estabilidade relativa [...]".

Ferreira (2009) compreende cada conceito como uma generalização, tanto particular como no contexto de suas relações com os demais conceitos. Para a autora, tais relações expressam, ao mesmo tempo, "seu grau de abstração e de concretude, à medida que nele se encontra implícita a conexão dialética entre o singular, o particular e o geral" (FERREIRA, 2009, p. 97- 98).

O conceito de função surgiu da necessidade do homem em relacionar grandezas. Todavia, com o passar do tempo, as necessidades foram se transformando e o conceito de função foi reelaborado, de forma que não é imediato identificar a prática social desencadeadora e vinculá-la a tal conceito. Por exemplo, os conceitos de variável e dependência funcional foram fundamentais no desenvolvimento do conhecimento de análise infinitesimal, um ramo com alto nível de aprofundamento e abstração e, portanto, obrigatório na formação superior de matemática. Todavia, não é uma tarefa simples identificar a prática por detrás desses conceitos tão refinados. Ríbnikov (1987) destaca:

> Essencialmente a dificuldade mais importante no desenvolvimento da análise infinitesimal era a necessidade de uma ideia de dependências funcionais que permite aplicar-lhes as operações do novo cálculo. Por isso, era cada vez mais necessário, investigar o significado do conceito de função, classificar as funções conhecidas e encontrar os meios de operar com elas. O problema da criação da teoria das funções se converteu no primeiro problema ou problema preliminar da análise infinitesimal. Euler escreveu que toda a análise infinitesimal gira ao redor das grandezas variáveis e suas funções. (RÍBNIKOV, 1987, p. 219)

O conceito de função também tem estreitas relações com conceitos mais básicos, como os conceitos de número e constante. Além disso, sua compreensão constitui um instrumento indispensável para o prosseguimento exitoso dos estudos em matemática, sobretudo no nível médio, no qual o aluno lida com diferentes tipos de funções.

Desse modo, temos que o conceito de função é um pré-requisito basilar para melhor compreensão da matemática e estabelece, inclusive, um elo com os conceitos básicos indiscutivelmente importantes. Portanto, os altos índices de reprovação na disciplina de matemática sinalizam que o processo de ensino-aprendizagem de matemática, sobretudo do conceito de função, não tem sido suficientemente satisfatório e ele precisa ser repensado urgentemente.

Eisenberg (1991, apud BARONI; OTERO-GARCIA, 2013, p.22) afirma que o conceito de função é um entre os conceitos mais difíceis de ser ensinado e aprendido, tendo em vista os graus de complexidade e as numerosas noções subjacentes articuladas ao conceito. Por isso, ainda que parte dos professores não perceba inicialmente as dificuldades no ensino-aprendizagem do conceito de função, os problemas se tornam evidentes à medida que os alunos avançam nos conteúdos sem os requisitos indispensáveis para o seu prosseguimento. Tal fato resulta em níveis históricos de aversão e reprovação em matemática e, posteriormente, quando o aluno opta por um curso superior da área de exatas, o insucesso permanece, sobretudo, nas disciplinas de cálculo Diferencial e Integral, geometria analítica e análise.

Dessa forma, as dificuldades de ensino-aprendizagem em matemática estão intimamente ligadas à aprendizagem insatisfatória dos conceitos matemáticos basilares e, portanto em particular, do conceito de função.

1.2 A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE FUNÇÃO NA PERSPECTIVA LÓGICO-HISTÓRICA

Não se tem a pretensão de apresentar detalhadamente, no presente trabalho, a história da gênese e evolução do conceito de função. O que se almeja é a compreensão dos fatos centrais no processo de investigação, realizado pelos principais teóricos que contribuíram efetivamente para a consolidação universal desse conceito. A busca é pela compreensão de tais fatos, tanto do ponto de vista epistemológico, como do ponto de vista didático, tendo em vista que a matemática, por si só, não tem a responsabilidade de ocupar-se com esses aspectos relativos à interdependência entre a estrutura da ciência matemática e sua organização para efeitos de ensino-aprendizagem dos alunos.

Ao tratar dos diversos tipos de generalização no ensino, Davydov (1982) aponta algumas rupturas existentes entre o ensino escolar dos conceitos e sua procedência. Há rupturas entre o pensamento teórico que se quer ensinar e sua procedência, sua gênese, sua história, constituída pela humanidade, formalmente quando se ignora o processo lógico-histórico do conteúdo. A construção lógico histórica implica situar o objeto, indagar sobre suas origens, identificar os elementos que o construíram, compreendê-lo no percurso de sua constituição para fazer avançar o conhecimento que se tem dele. Significa compreender a sua gênese, o contexto e as formas de racionalidade que constituíram os diferentes momentos de sua construção (movimento histórico que produziu o conceito).

Nessa direção, se pode questionar: considerando a história da humanidade, de que forma surgiram o desejo e a necessidade de relacionar episódios, objetos ou quaisquer partes distintas? Considerando a história da matemática, qual a necessidade desencadeadora do estudo de funções? É importante destacar que o conceito de função percorreu aproximadamente 4000 anos para se consolidar cientificamente no início do século XX, tal como o conhecemos hoje, por meio dos livros de matemática atuais.

Isso propicia a reflexão sobre o tempo necessário e suficiente para o amadurecimento e para a formação do conceito pelo aluno em face de suas possibilidades e limitações. Não se pode esperar, por exemplo, que o aluno de imediato apreenda e assimile o conceito, de modo que possa inter-relacioná-lo com demais conceitos, sobretudo se não forem dados motivos e tampouco existir o desejo para aprendizagem. Ao contrário, é preciso que o aluno conheça e comungue da necessidade desencadeadora do estudo do conteúdo de função. Para isso, se faz indispensável a investigação acerca da gênese do conceito considerado.

Para Caraça (1951), o conceito de função surgiu como instrumento necessário para o estudo das leis naturais: “[...] Esse conceito não teve sempre a generalidade que lhe damos hoje. Surgido, lentamente, da necessidade de estudar leis naturais, ele achou-se a breve trecho, identificado com a relação analítica que define a correspondência das duas variáveis” (CARAÇA, 1951, p.209).

Cabe destacar que a elaboração do conceito de função não foi uma conquista individual e repentina, mas coletiva e gradual, que percorreu vários séculos e pode ainda, inclusive nos dias atuais, sofrer contribuições. Como destaca Aleksandrov et al (1994):

> Os conceitos de variável e função não surgiram em sua forma definitiva nem na mente de Galileu, Descartes ou Newton, nem na de qualquer outro matemático específico. Inferiram muitos matemáticos (por exemplo, Neper em conexão com os logaritmos) e gradualmente tomou uma forma mais ou menos definida, enquanto não definida, em Newton e Leibniz, fazendo-se ainda mais precisos e gerais no subsequente desenvolvimento da análise. A definição atual veio somente no século XIX, mas não é totalmente rigorosa nem seguramente a última. O desenvolvimento do conceito de função continua inclusive no momento atual. (ALEKSANDROV et al 1994, p.68, tradução nossa)

Vários estudiosos, ao longo da história da matemática, podem ser citados por suas contribuições para a construção e desenvolvimento do conceito de função, entre eles: Nicole Oresme (1323-1382), Galileu Galilei (1564-1642), James Gregory (1638-1675), René Descartes (1596-1650), Isaac Newton (1642-1727), Leibniz (1646-1716), Bernoulli (1667-1748), Euler (1707-1793), Lagrange (1736-1813), D'Alembert (1717-1783), Fourier (1768-1830), Cauchy (1789-1857), Bolzano (1781-1848), Dirichlet (1805-1859), Dedekind (1831-1916), Riemann (1826-1866) e Bourbaki[9] (1935).

Não há consenso entre os pesquisadores sobre o momento preciso da origem do conceito de função. Alguns acreditam que a noção intuitiva de função teve sua origem no período da matemática antiga (2000 A. C.), tendo em vista a existência de antigas tabelas babilônicas e egípcias, que relacionavam números e resultados de operações envolvendo esses números.

Embora nesse período a componente "variação" não se revelasse explicitamente, realmente há fortes indícios de que o instinto de funcionalidade já se fazia presente naquela época.

Em contrapartida, alguns estudiosos não consideram a existência desse instinto de funcionalidade percebido em épocas remotas. Klein citado por Ugalde (2013), por exemplo, atribui a Galileu Galilei (1564-1642) a introdução do conceito de função: "Do estudo matemático dos movimentos deriva um conceito fundamental, que será central para praticamente todo trabalho dos duzentos anos seguintes – o conceito de função ou uma relação entre variáveis – Galileu expressou essas relações funcionais em palavras e em linguagem de proposição" (KLEIN, 1972 apud UGALDE, 2013, p.4).

---

[9] Bourbaki é o pseudônimo utilizado por um grupo de matemáticos na Europa, que a partir do século XX, objetivavam maior formalidade e generalidade no ensino através da fundamentação da matemática na teoria dos conjuntos.

Oliveira (1997, p.17) destaca que Galileu Galilei (1564-1642) “lidou de forma funcional com as causas e efeitos”, e lembra que “esta necessidade é essencial à concepção de variável dependente”.

Roque (2012, p. 371) afirma que “o estudo da variação por meio de leis matemáticas se deve em grande parte ao desenvolvimento da física pós-galileu”. Nessa época, se compreendia função como uma associação entre duas grandezas que variam, como, por exemplo, a relação entre o espaço e o tempo.

O fato é que, na idade média, por meio de sua teoria de latitudes e longitudes das formas, que se baseia no esboço de uma figura através de segmentos que representam a variação da intensidade de determinada característica de um objeto de estudo, o Bispo Nicolau de Oresme (1323-1382) abriu caminhos para que Galileu Galilei (1564-1642), apoiado na experimentação e por meio dos instrumentos de medida, introduzisse o quantitativo nas representações gráficas de certo movimento físico e contribuísse para a evolução do conceito de função. Todavia, não foi Galileu Galilei quem introduziu as noções de variáveis e constantes.

Bell (1985) relata que, ainda no século XVII, Descartes (1596-1650) desenvolveu um método algébrico aplicado à geometria, baseado em uma ideia intuitiva dos conceitos “variável” e “função”, demonstrando, inclusive, que sabia diferenciar variáveis e constantes. Mais especificamente, conforme afirma Yuoschkevitch, citado por Bueno (2009):

> Pela primeira vez e de forma clara, é sustentado que uma equação em x e y é um meio para introduzir uma dependência entre quantidades variáveis de uma maneira que é possível calcular a partir do valor de uma delas o valor correspondente da outra. (YUOSCHKEVITCH, 1979, p.52 apud BUENO 2009, p. 20)

Para Aleksandrov et al (1994, p. 68-69, tradução nossa), “o primeiro passo definido rumo à matemática das grandezas variáveis foi o aparecimento, em 1637, da ‘geometria’ de Descartes, onde se estabeleciam as bases da chamada geometria analítica”. Todavia, conforme Zuffi (1999), foi somente a partir dos trabalhos de Newton (1642-1727) e Leibniz (1646-1716) que as primeiras contribuições efetivas para a construção do conceito de função foram propostas.

Newton (1642-1727), um entre os precursores do cálculo diferencial e integral e da análise infinitesimal, introduziu o chamado método dos fluxos, contribuindo para uma melhor compreensão das relações entre variáveis dependentes e independentes. Em tal método, o estudioso, pressupondo que uma curva fosse gerada pelo movimento contínuo de um ponto, avaliava a questão da variabilidade. Mais especificamente:

> Para Newton, nesse trabalho, uma curva era gerada pelo movimento continuo de um ponto. Feita essa suposição, a abscissa e a ordenada de um ponto gerador passam a serem, em geral, quantidades variáveis. A uma quantidade variável ele dava o nome de fluente (uma quantidade que flui) e a sua taxa de variação dava o nome de fluxo do fluente. Se um fluente, como a ordenada do ponto gerador, indicada por y, então o fluxo desse fluente era denotado por $\dot{y}$. (EVES, 2011, p. 439)

E embora esse célebre teórico não tenha utilizado o termo “função”, podemos notar, por meio de seus trabalhos, a existência de relações entre variáveis dependentes e independentes.

O termo “função” foi introduzido pelo matemático Leibniz (1646-1716), grande gênio universal, também precursor do cálculo diferencial e integral e da análise infinitesimal. Ele utilizou o conceito de função para descrever quantidades relacionadas a uma curva. Conforme Ríbnikov (1987):

> Leibniz expressou a ideia geral de dependência funcional, introduzindo o termo “função” e o símbolo correspondente para todos os segmentos relacionados com a curva e tais que sua longitude depende da posição do ponto sobre a curva (ordenadas, segmentos de tangentes, subtangentes, normais, subnormais). (RÍBNIKOV, 1987, p. 220)

Outro estudioso ímpar que muito contribuiu com o desenvolvimento da matemática, é o suíço Euler (1707-1793), também precursor do cálculo infinitesimal; ele é responsável por várias notações atualmente utilizadas na matemática, inclusive a notação $f(x)$, empregada para representar funções.

No século XIX, especificamente em 1837, Dirichlet (1805-1859), matemático alemão que também muito contribuiu para o desenvolvimento da matemática, elaborou uma definição mais ampla do conceito de função: “[...] se duas variáveis numéricas x e y estão relacionadas de maneira que, sempre que se atribui um valor a x, corresponde automaticamente, por alguma lei ou regra, um valor a y, então se diz que y é uma função (unívoca) de x” (DIRICHLET apud EVES, 2011, p. 661).

Segundo Braga (2006), por volta das últimas décadas do século XIX, a definição de função, elaborada por Dirichlet, já não conseguia atender às demandas de desenvolvimento da matemática, implicando na necessidade de ampliação do conceito para além dos conjuntos numéricos.

Em prosseguimento a evolução matemática, no século XX, por volta de 1930, Bourbaki utilizando-se da teoria de conjuntos, conseguiu generalizar a definição de função dada por Dirichlet, reconstruindo-a na seguinte forma: dados dois conjuntos não vazios A e B, diremos que f é uma função de A em B (isto é, a relação $f: A \rightarrow B$ é uma função), se para cada elemento do conjunto A, existe um único elemento correspondente do conjunto B.

Essa nova definição foi adotada em 1960 e, ainda hoje, é a versão mais atualizada do conceito de função.

De acordo com Caraça (1975, p.209), "o conceito ganhou assim em generalidade porque se libertou da eventual forma de estabelecer a correspondência das variáveis, mas essa mesma generalidade o obrigou a afastar-se das condições de que nasceu".

Há a consciência de que o conceito de função é bastante complexo para ser apreendido e construindo de um único modo, sintetizado em um único problema cognitivo, uma vez que a própria história de sua gênese e evolução é longa e conturbada.

Se, por um lado, a gênese do conceito de função enfatiza a relação de variação e dependência entre as grandezas, por outro, a última versão do conceito dada por Bourbaki aponta como elemento nuclear a particularidade da relação entre os elementos de dois conjuntos não vazios. Todavia, conforme Grugnetti (2000, apud BARONI; OTERO-GARCIA, 2013, p.22), "enquanto dois séculos atrás funções eram pensadas como fórmulas que descreviam relações entre duas variáveis envolvendo expressões algébricas (na visão de Euler), a definição moderna de função não é tão limitada".

De fato, considerando a abordagem do conceito de função contemplada por Bourbaki, presente na maior parte dos livros de matemática da atualidade, o nuclear do conceito se encontra na especificidade da relação entre os elementos de dois conjuntos não vazios. Essa particularidade, presente nas relações funcionais, reside na forma como os elementos dos conjuntos considerados se relacionam. O fato é que se não há compreensão, nessa forma específica como os elementos dos conjuntos considerados se relacionam, não há dúvida de que o conceito elaborado não foi apreendido pelo aluno. É preciso lembrar que toda função define uma relação entre dois conjuntos não vazios, mas nem toda relação entre dois conjuntos não vazios define uma função.

Cabe a pergunta: que tipo de particularidade seria esta, indispensável para que uma relação f entre os elementos de dois conjuntos A e B, não vazios, seja considerada função? De outra forma, como os elementos de dois conjuntos A e B não vazios, devem estar relacionados para construirmos uma função?

Na verdade, ainda que o aluno compreenda os conceitos de relação e conjunto, ele necessita identificar a particularidade que permite distinguir as relações funcionais das relações não funcionais.

Considerando a hierarquia dos conteúdos de matemática nos livros didáticos da atualidade, os conceitos conjuntos e relações devem ser apropriados antes que o conceito de função. Então, primeiramente, é preciso considerar dois conjuntos não vazios e, em seguida, estabelecermos uma relação bastante específica entre eles. Ora, vamos formalizar matematicamente na abordagem de Bourbaki: sob a hipótese inicial de dois conjuntos não vazios A e B, estabelecemos uma relação f entre os elementos do conjunto A e os elementos do conjunto B. Diremos que f define uma relação funcional de A em B (isto é, a relação $f: A \to B$ é uma função), se para cada elemento do conjunto A, existe um único elemento correspondente do conjunto B. Embora de forma bastante formal e objetiva, acabamos de esbarrar na particularidade nuclear que o aluno precisa compreender para se apropriar do conceito de função na abordagem de Bourbaki.

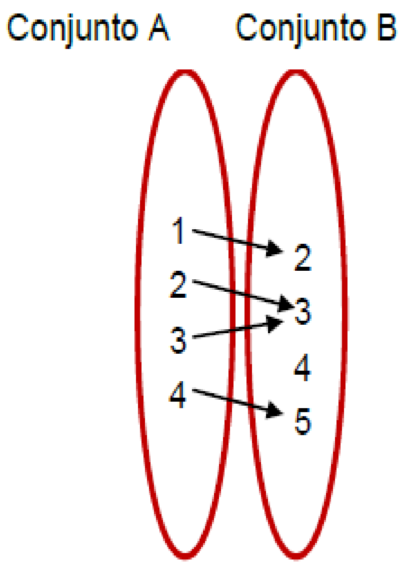
Essa particularidade se revela na relação entre os elementos dos conjuntos não vazios A e B. De fato, todo elemento do conjunto A deverá ter necessariamente um único elemento correspondente no conjunto B. Em outras palavras, não há elementos do conjunto A que não se relacionem de forma única com elementos do conjunto B. Portanto, a condição necessária e suficiente para que se tenha uma função é que todos os elementos do conjunto A tenham correspondente obrigatoriamente único no conjunto B.

Embora dois ou mais elementos distintos do conjunto A possam se relacionar com o mesmo elemento do conjunto B, dois ou mais elementos distintos do conjunto B não podem ter o mesmo elemento correspondente no conjunto A. Observe que no conjunto B podem existir elementos que não possuem correspondentes no conjunto A. Todavia, todos os elementos de A devem ter correspondentes únicos no conjunto B.

A seguir, para melhor justificar a discussão, optou-se por um exemplo de função $f: A \to B$ que revela a essência do conceito que o aluno deve se apropriar no caso da abordagem de Bourbaki:

Dados os conjuntos $A = \{1,2,3,4\}$ e $B = \{2,3,4,5\}$, a relação $f: A \to B$ definida por $f(x) = \begin{cases} x+1, \text{se } x \in A \text{ e } x \neq 3 \\ 3, \text{se } x = 3 \end{cases}$ onde $x \in A$ e $y = f(x) \in B$, é uma função de A em B, tendo em vista, que para cada $x \in A$ existe um único $y \in B$ tal que $y = f(x)$. Construindo o diagrama de Venn[10] (Figura 2) obtemos:

Figura 2 – Diagrama de Venn: exemplo 1



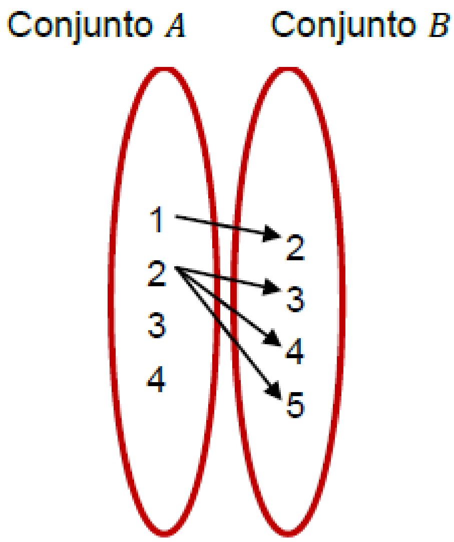
Pois, $f(1) = 2$, $f(2) = f(3) = 3$ e $f(4) = 5$.

Fonte: elaborado pela autora

Na sequência, aborda-se um exemplo de uma relação que não define uma função. Sejam os conjuntos $A = \{1,2,3,4\}$ e $B = \{2,3,4,5\}$. Observemos que a relação $f: A \to B$ estruturada conforme o diagrama a seguir (Figura 3) não define uma função:

[10] Diagrama de Venn é um esquema matemático criado para representar relações entre os elementos de conjuntos numéricos.

Figura 3 – Diagrama de Venn: exemplo 2



Fonte: elaborado pela autora

De fato, há dois motivos que impossibilitam a existência de função. Primeiro, os elementos "3" e "4" do conjunto A não possuem correspondentes no conjunto B e depois, em segundo lugar, o elemento "2" do conjunto A corresponde simultaneamente com os elementos "3", "4" e "5" do conjunto B, o que contradiz as condições exigidas para estabelecermos uma função.

1.3 O PANORAMA ATUAL DO ENSINO DO CONCEITO DE FUNÇÃO

Ugalde (2013, p. 2) afirma que, ao estabelecer uma relação entre objetos quaisquer e os dedos das mãos, é possível observar três ocorrências associadas ao conceito de função: 1) o conceito de função está intimamente ligado aos conceitos de conjunto, relação e variável; 2) o conceito de função está ligado ao desenvolvimento do conceito de quantidade e, mais especificamente, ao conceito de número; 3) o conceito de função nasceu do interesse da humanidade para entender o mundo ao seu redor.

Também é fato que nas atividades humanas cotidianas, embora não se perceba, utiliza-se frequentemente e de forma intuitiva a noção de função. Desde um simples leigo até um conceituado pesquisador, no exercício de suas atividades diárias, necessita relacionar grandezas, analisar variações e interpretar situações. Dentre inúmeros exemplos, se pode citar alguns:

- Para fabricar um concreto segundo as condições mínimas de qualidade e segurança, um pedreiro precisa dosar a quantidade de água em função da quantidade de cimento utilizado, avaliando a variação de tais ingredientes.
- Ao realizar compras, uma dona de casa obrigatoriamente estabelece uma relação entre a quantidade de dinheiro disponível e o valor dos itens que pretende adquirir e, simultaneamente, analisa a variação entre tais grandezas.
- Um pesquisador, por vezes, seleciona os conteúdos que necessita estudar de acordo com o grau de relevância e o tempo disponível para fazê-lo.

Na verdade, tais situações apontam para a compreensão do conceito de função e até são contempladas inicialmente no ensino atual desse conceito, entretanto, posteriormente são camufladas e bruscamente substituídas pela formalização do conceito na abordagem de Bourbaki.

Panossian (2015, p. 8) afirma que no ensino atual, embora sejam enfatizadas as características das distintas funções, em geral, as funções são tratadas como objetos com fim em si mesmos e, além disso, o "significado de uma função como instrumento para compreender a realidade não é destacado, e o relacionamento das diferentes grandezas e suas relações se toma como um conhecimento em segundo plano".

Na verdade, articular o conceito de função na abordagem de Bourbaki com a sua gênese ou com as condições que, de fato, desencadearam o surgimento desse conceito, é um grande desafio. Isto porque a elaboração de tal conceito percorreu séculos de evolução e, embora surgisse das necessidades práticas, é fruto de uma refinada abstração e do entrelaçamento de vários estudos, tal qual parte significativa dos objetos matemáticos:

> [...] as relações quantitativas e as formas espaciais do mundo real constituem o objeto da investigação matemática. Estes objetos das matemáticas não representam diretamente a realidade dada. Eles são frutos da abstração. Para investigar os recursos matemáticos de qualquer objeto ou fenômeno, é necessário abstrair-se de todas suas qualidades particulares, exceto daquelas que caracterizam diretamente a quantidade ou forma. (RÍBNIKOV, 1987, p.11)

É interessante observar que se o aluno não conhece a história do conceito e não comunga de sua necessidade de apropriação, dificilmente atribui sentido a ele, e sua compreensão tende a ser incompleta e acrítica.

Na atualidade, geralmente os professores apresentam a ideia intuitiva de função, ligada a sua gênese e, em seguida, sem nenhuma justificativa histórica, prosseguem apresentando a versão formal do conceito atual. Devido a distância entre o conceito e a realidade, acrescidos do desconhecimento da história, os alunos ficam com a sensação de que a matemática nada mais é que algo definitivo e acabado, fato esse que influencia no aprendizado e, sem dúvida, no desenvolvimento da própria ciência matemática:

> O abstrato do objeto das matemáticas em ocasiões percebe-se como elemento inicial e independente de seu conteúdo. Em tais casos, os elementos dos conjuntos que são investigados, em geral, são representados separados dos objetos do mundo real, e os sistemas são introduzidos arbitrariamente. "Isso leva a diferentes formas de equívocos idealistas, que influem negativamente no desenvolvimento das matemáticas". (RÍBNIKOV, 1987, p.11, destaques do autor)

Ao passar do ensino da definição intuitiva de função para o ensino da definição na abordagem de Bourbaki, o professor deveria, no mínimo, oportunizar ao aluno a consciência histórica que desencadeou tal fato. E, para isso, não é necessário estudar detalhadamente toda a história da matemática, embora, se isso fosse possível em termos de tempo, os benefícios seriam essencialmente incalculáveis, uma vez que os objetos matemáticos iriam adquirir novos significados e novos sentidos para o aluno. Todavia, de acordo com Davydov (1988), o mais importante é que o aluno apreenda não toda a história de um conceito, mas o aspecto lógico de seu desenvolvimento, compreendendo-o como um método de pensar e analisar o objeto real a partir de sua relação geral básica, onde se situa seu aspecto nuclear.

Neste trabalho, o ensino do conceito de função, primeiramente, está organizado de modo a privilegiar o contexto da evolução de tal conceito e, posteriormente, também o estruturando na abordagem de Bourbaki, por meio das teorias de Davydov e Majmutov. Tais teorias serão objeto de estudo do próximo capítulo.

2 TEORIA HISTÓRICO-CULTURAL, TEORIA DE DAVYDOV, TEORIA DE MAJMUTOV E AS CATEGORIAS ORIENTADORAS DA PESQUISA

Este capítulo tem por objetivo apresentar as teorias do ensino desenvolvimental de Davydov e do ensino problêmico de Majmutov. Ambas são altamente elaboradas e ricas em conceitos e premissas, de modo que tratá-las integralmente foge ao escopo desta pesquisa. Desse modo, foram eleitas as principais categorias necessárias à construção do objeto e ao alcance dos objetivos da pesquisa, as quais são apresentadas e discutidas neste capítulo. Outro objetivo que se busca cumprir aqui é apresentar a análise das teorias do Ensino Desenvolvimental de Davydov e do Ensino Problêmico de Majmutov, discutindo suas aproximações e diferenças e as contribuições de ambas para o ensino-aprendizagem do conceito de função por meio de problemas.

Diante das análises dos princípios que regem tais teorias de forma individualizada, defende-se que a aproximação de ambas no processo de ensino-aprendizagem dos conceitos, de forma particular, do conceito de função, poderá potencializá-lo, sobretudo no desenvolvimento do pensamento teórico, indispensável à formação intelectual, moral e afetiva dos alunos. Este capítulo se justifica no contexto desta tese, por revelar as bases teóricas e metodológicas que são contempladas no processo de ensino-aprendizagem do conceito de "função".

2.1 O LÓGICO E O HISTÓRICO

Entre as principais categorias contempladas na análise do movimento do pensamento dos educandos em direção à aquisição do conceito de função, se destaca a intervenção do lógico-histórico no processo de reconstrução do objeto de conhecimento:

> As categorias do histórico e do lógico são de grande importância para compreender a essência do conhecimento, para captar o processo o conhecimento da realidade e para abordar, em toda sua profundidade, alguns problemas lógicos do método marxista de investigação. (ROSENTAL; STRAKS, 1960, p. 324, tradução nossa)

Os conhecimentos são compreendidos aqui como resultados do processo de trabalho, da ação do homem sobre a natureza, uma vez que as necessidades se modificam de acordo com as exigências da sociedade:

> Os conceitos não nascem arbitrariamente da menta humana. Como destaca Marx, os homens não começam em uma relação teórica com a realidade. Ao contrário, a relação prática que guardam com ela constitui o ponto de partida e o fundamento da atividade teórica. Os conceitos nascem da prática e resumem, sintetizam o que previamente tem-se dado na vida real, na prática. E desde que a prática desenvolve-se historicamente, os conceitos surgem como "nos", que se fixam na consciência humana uma determinada fase histórica alcançada pela prática social. (ROSENTAL; STRAKS, 1960, p. 328 e 329, destaques do autor, tradução nossa)

O percurso geral do objeto é o histórico, desde o seu surgimento até o seu processo de evolução ao longo do espaço e do tempo:

> [...] Por histórico subentende-se o processo de mudança do objeto, as etapas de seu surgimento e desenvolvimento. O histórico atua como objeto do pensamento, o reflexo do histórico, como conteúdo. O pensamento visa à reprodução do processo histórico real em toda a sua objetividade, complexidade e contrariedade. (KOPNIN, 1978, p.183)

É importante ressaltar que método histórico não é uma simples descrição empírica de fatos e registro de acontecimentos desarticulados da compreensão de suas relações e necessidades desencadeadoras, mas de outra forma, se preocupa com a explicação e compreensão aprofundada de todo o contexto histórico e suas mútuas relações entre os fatos:

> A essência do método histórico de investigação não se reduz, portanto, a descrever simplesmente os acontecimentos e os fatos históricos concretos, nem a atividade das personalidades históricas concretas, mas consiste em descrever e explicar o caráter destes acontecimentos e desta atividade, produzidos por força da lei; consiste, portanto em compreender a necessidade que permanece oculta por trás dos fatos casuais e, mostrar e esclarecer a ação das massas populares, que constituem a força fundamental e decisiva da história. (ROSENTAL; STRAKS, 1960, p. 349, tradução nossa)

Está na gênese do conceito a base sólida para compreensão de sua própria essência e, embora o passado não permita o retorno sob as mesmas condições vivenciadas, é relevante reproduzir objetivamente o processo histórico do objeto. Nessa direção, surge o lógico, como movimento do pensamento: "O "lógico" é uma forma de conhecimento, o reflexo da realidade, da copia intelectual ou imagem dela, é, também, uma determinada forma de movimento do pensamento até o objeto" (ROSENTAL; STRAKS, 1960, p.325, tradução nossa).

Segundo Rosental e Straks (1960, p.341), "Engels denominava reflexo 'corrigido' ao reflexo lógico do desenvolvimento histórico"; assumindo que tal "reflexo não segue passivamente o curso histórico do desenvolvimento dos fenômenos, mas que esclarece a necessidade deste desenvolvimento, captando o mais importante e essencial nele".

Desse modo, é importante indagar: de que forma se pode reproduzir o processo histórico real em toda a sua objetividade, complexidade e contrariedade? E, na busca de respostas, é com o lógico que se depara. Kopnin argumenta que o lógico é o meio pelo qual o pensamento reproduz o processo histórico real e, portanto, recria a própria essência do objeto em um sistema de abstrações:

> [...] O lógico é o meio através do qual pensamento realiza essa tarefa (reprodução do processo histórico real), mas é o reflexo do histórico em forma teórica, vale dizer, é a reprodução da essência do objeto e da histórica do seu desenvolvimento no sistema de abstrações. O histórico é primário em relação ao lógico, a lógica reflete os principais períodos da história. O pensamento não deve simplesmente fotografar o processo histórico real com todas as suas causalidades, ziguezagues e desvios. O pensamento não é obrigado a seguir cegamente o movimento do objeto em toda a parte. Por isso o lógico é o histórico libertado das causalidades que o perturbam. (KOPNIN, 1978, p.183 e p.184)

Segundo Kopnin (1978, p.184), a compreensão da essência de um objeto de conhecimento exige o conhecimento da história desse objeto. Todavia, o autor também reconhece que a história do objeto só pode ser compreendida por meio do conhecimento da essência desse objeto: “Para revelar a essência do objeto, é necessário reproduzir o processo histórico real de seu desenvolvimento, mas este é possível somente se conhecermos a essência do objeto”. (KOPNIN, 1978, p.184)

Surge a indagação: de que forma a dupla, história e essência de um objeto de conhecimento podem ser desvendadas simultaneamente, uma vez que são intrinsecamente interdependentes, isto é, cada qual é pré-requisito da outra para iniciar o processo da descoberta? De outra forma, se o conhecimento da essência exige o conhecimento da história e o conhecimento da história não dispensa o conhecimento da essência, o que fazer?

Seria um problema sem solução, caso esse círculo não pudesse ser rompido pela lógica dialética, através da unidade do histórico e do lógico, de forma a definir o início do conhecimento e a trajetória do seu desenvolvimento:

> A dialética materialista rompe esse círculo à base da unidade do histórico e do lógico, define o início do conhecimento e o sucessivo caminho de seu movimento. O estudioso deve começar o estudo do objeto pelo fim, a partir da sua forma mais madura, do estádio de desenvolvimento em que aspectos essenciais estão suficientemente desenvolvidos e não estão disfarçados por causalidades que não têm relação direta com ele. À base do estudo da fase superior, madura de desenvolvimento do objeto fazem-se as definições primárias de sua essência. Essas definições tem caráter abstrato, são insuficientemente profundas mais indispensáveis como linha no estudo do processo histórico de desenvolvimento do objeto; elas atuam como ponto de partia no estudo do objeto, porquanto refletem em certa medida o processo de afirmação e desenvolvimento do objeto estudado. (KOPNIN, 1978, p.184-185)

No método dialético, o conhecimento deve ser buscado a partir da análise dos aspectos externos dos objetos em sua forma mais amadurecida, visando, em uma etapa posterior, mergulhar na essência de tais objetos e melhor compreender a sua história:

> O desenvolvimento procedente não somente nos permite compreender melhor seu resultado, mas, por sua vez, este resultado, isto é, o grau superior do desenvolvimento, permite observar e compreender profundamente o passado, ver em sua forma já acabada, madura, o que antes se apresentava em germe e, com frequência, em forma nebulosa e obscura, pois "é mais fácil estudar o organismo desenvolvido do que a simples célula". Nisto reside a força poderosa do método lógico de investigação. (ROSENTAL; STRAKS, 1960, p. 343-344, destaques dos autores, tradução nossa)

Embora a teoria de um objeto seja sua própria história e, portanto, a reprodução de sua essência, é indispensável o estudo da sua história para atingir um grau mais avançado no conhecimento do objeto:

> [...] embora a teoria do objeto se manifeste ao mesmo tempo como sua história, a reprodução, no pensamento, da essência e do conteúdo de qualquer fenômeno não torna desnecessário o estudo de sua história; ao contrário, para atingir-se um degrau mais elevado no conhecimento do objeto, é necessário recorrer justamente à sua história. (KOPNIN, 1978, p.185)

Se por um lado, a teoria mais desenvolvida permite, de forma criativa, o acesso ao estudo da história, por outro, o estudo da história resultará em uma teoria mais desenvolvida:

> Uma teoria mais desenvolvida permite abordar a história, de um modo diferente, novo, descobrir nesta, aspectos e momentos que não poderiam ser descobertos no estudo anterior. Por outro lado, um conhecimento mais rico da história levará a uma teoria mais desenvolvida e, deste modo, à base da inter-relação do lógico e do histórico o nosso conhecimento se aprofunda na essência do objeto e em sua história. (KOPNIN, 1978, p.186)

2.2 PENSAMENTO EMPÍRICO E PENSAMENTO TEÓRICO

A fim de contribuir com o percurso da apreensão dos conhecimentos científicos pelos alunos, prioritariamente se faz indispensável, refletir sobre algumas questões apresentadas: qual o ponto de partida para adquirir conhecimentos? O que caracteriza o pensamento empírico? O que caracteriza o pensamento teórico? Qual a categoria teórica que estabelece a diferença entre tais pensamentos? Seria o pensamento empírico um degrau necessário para o desenvolvimento do pensamento teórico?

A trajetória geral do conhecimento humano parte das sensações e percepções, até as abstrações e generalizações, uma vez que "dificilmente a sensação entra no conhecimento propriamente dito, embora seja o seu necessário ponto de partida" (LEFEBVRE, 1991, p.106). De fato: "A trajetória de nosso conhecimento a partir das sensações, percepções e representações, ate as abstrações nas quais são refletidos os aspectos mais essenciais do objeto, constitui a trajetória geral de todo conhecimento humano" (ROSENTAL; STRAKS, 1960, p. 308, tradução nossa).

Kopnin (1978, p.150) defende que o sensorial e o racional “não são dois degraus do conhecimento, mas dois momentos que o penetram em todas as formas e, em todas as etapas do desenvolvimento”. Em seguida, o autor afirma que não há supremacia entre tais momentos, uma vez que ambos fazem parte do nosso conhecimento: “A unidade entre o sensorial e o racional no processo de conhecimento não significa que um sucede o outro, mas que ambos participam necessariamente do nosso conhecimento” (KOPNIN, 1978, p. 150).

É importante ressaltar que, não se pode identificar o sensorial com o empírico e o racional com o teórico, como se o empírico fosse possível sem o racional e o racional desconsiderasse o sensorial. Kopnin (1978) argumenta:

> Seria incorreto identificar o sensorial com o empírico, o racional com o teórico. Tanto o empírico como o teórico são níveis do movimento do pensamento. Difere um do outro pela maneira e pelo aspecto em que neles é dado o objeto, pelo modo como é conseguido o conteúdo básico do conhecimento, o que serve como forma lógica de expressão deste e, por último, pela sua importância prática e teórica. (KOPNIN, 1978, p. 152)

Ainda que o conteúdo do pensamento empírico seja obtido diretamente por meio de sensações e percepções, ele passa por abstração e generalização primárias, de modo que os elementos externos são separados e classificados. Toma-se por essência o visível externo, em detrimento dos nexos internos que não são desvendados:

> Sua principal função (referindo-se ao pensamento empírico) consiste na classificação dos objetos, na construção de um firme esquema de “determinantes”. Este tipo de pensamento pressupõem duas vias [...] a via de “de baixo para cima” e a via “de cima para baixo”. Na primeira construímos a abstração (conceito) na formalização geral, a qual por sua essência não pode expressar em forma mental o conteúdo especificamente concreto do objeto. No caminho de “de cima para baixo” esta abstração é saturada de imagens visuais concretas do objeto correspondente, torna-se “rica” e com “conteúdo”, mas não como construção mental, senão como combinação das descrições e exemplos concretos que a ilustram. (DAVÍDOV, 1988, p. 107-108, destaques do autor, tradução nossa)

Portanto, embora extremamente relevante para o processo de ensino-aprendizagem, o pensamento empírico apresenta uma série de limitações no que ser refere à formação da imagem cognoscitiva do objeto estudado. Por meio de sensações e percepções, os elementos são visualizados e captados, todavia não passam por uma abstração e generalização substantivas. De outra forma, tais elementos, por meio da abstração e generalização primárias, revelam apenas os aspectos externos, isolados e desconexos dos processos investigativos dos objetos e, embora assentados racionalmente, confundem a essência com as propriedades externas:

> Na generalização conceitual empírica não se separam justamente, as particularidades essenciais do objeto, a conexão interna de seus aspectos. Dita generalização não assegura no conhecimento, a separação dos fenômenos e da essência. As propriedades externas dos objetos, sua aparência toma-se por essência. (DAVÍDOV, 1988, p.104 e 105, tradução nossa)

Isso significa que a imagem cognitiva, formada por meio de abstrações e generalizações primárias, não passa por uma autêntica transformação, que seja capaz de levar ao reconhecimento dos aspectos internos do objeto contemplado e à compreensão de suas relações com a realidade. De outra forma, "o pensamento que se realiza com a ajuda de abstrações e generalizações de caráter lógico formal somente leva a formação dos chamados conceitos empíricos" (DAVÍDOV, 1988, p. 104, tradução nossa).

Compreende-se o pensamento empírico como uma maneira de pensar baseada, sobretudo, nas características exteriores dos objetos, dadas na contemplação viva, isto é, na dimensão visível e aparente das coisas. Em tal pensamento, após as primeiras sensações e percepções possíveis, ocorrem as abstrações e generalizações primárias que, como já foi mencionado, consistem em separar os traços externos essenciais e secundários dos objetos, destacando neles o aspecto invariante, para, numa etapa posterior, classificá-los:

> O conhecimento empírico tem a ver com diferenças e semelhanças entre os fenômenos; surge por meio da observação e comparação de fenômenos; pode ser ordenado hierarquicamente com base nas características formais; e a palavra ou um termo limitado é o meio pelo qual ele é comunicado. Por meio do procedimento epistemológico empírico, o objeto individual é captado quando é isolado de sua conexão espacial e cronológica, de modo a poder ser observado, comparado, categorizado e relembrado. (HEDEGAARD, 2002, p.205)

A limitação considerável do pensamento empírico reside na qualidade inferior das abstrações e generalizações que não conseguem abarcar o fenômeno em seus nexos internos e essenciais. Já que o concreto pensado não é dado imediatamente, mas se encontra muito além das abstrações e generalizações vazias:

> A formação de conceitos empíricos, por serem constituídos diante do esquema lógico-formal, percepção-representação-conceito, identifica os traços essenciais externos dos objetos. A abstração e a generalização decorrentes desse processo não ultrapassam os limites sensoriais de apreensão da realidade objetiva. Não expressam a especificidade dos conceitos científicos manifestos teoricamente. (BERNADES, 2012, p.172)

Frequentemente, depara-se com professores que organizam o ensino visando apenas o desenvolvimento do pensamento empírico de forma a comprometer, ainda que inconscientemente, o desenvolvimento integral dos seus alunos. Todavia, embora o pensamento teórico seja um avanço na tentativa de superação do pensamento empírico no contexto escolar, Davydov não menospreza a importância do pensamento empírico. Tal fato pode ser constatado, quando o estudioso afirma que o pensamento teórico não exclui a necessidade do pensamento empírico:

> O pensamento teórico ajuda os alunos a se orientarem entre as relações gerais e permite-lhes derivar dessas relações várias consequências específicas. Tal pensamento não exclui a necessidade do pensamento empírico – este tipo de pensamento deveria ser visto como um tipo de pensamento dirigido a outros tipos de tarefas. (DAVYDOV, 1999, p.10)

Isso permite concluir que o pensamento empírico pode ser considerado como degrau ao conhecimento teórico. Hedegaard (2002, p.206) salienta que "os alunos já aprenderam o procedimento epistemológico empírico em suas atividades práticas diárias; eles ainda precisam adquirir os procedimentos epistemológicos teóricos". Conforme Davydov (1999, p.10):

> O pensamento teórico não se origina e não se desenvolve na vida cotidiana das pessoas. Ele se desenvolve em um tipo de ensino que utiliza um currículo baseado em conceitos dialéticos do pensamento. É este tipo de ensino que tem efeito desenvolvimental. (DAVYDOV, 1999, p.10)

Portanto, é extremamente importante para o educador, comprometido com o desenvolvimento integral dos alunos, possibilitar e estimular a formação do pensamento teórico por meio de situações desencadeadoras e atividades organizadas para tal.

Nesse momento, cabe uma reflexão aprofundada sobre o pensamento teórico e suas contribuições para o processo do ensino-aprendizagem. Portanto, é oportuno indagar: em que consiste o pensamento teórico e qual a sua relevância para o processo de ensino-aprendizagem?

O pensamento teórico é o resultado de um ensino organizado, que privilegie os princípios que originaram o objeto de estudo, tais como a necessidade desencadeadora pelo conhecimento específico e, sobretudo, os procedimentos lógicos investigativos empregados na construção do conhecimento:

> O pensamento teórico tem origem no processo investigativo que deu origem ao objeto científico [...] o aluno aprende realmente um objeto, quando aprende também as ações ligadas ao objeto, os modos mentais de proceder com esse objeto, de agir com ele por procedimentos lógicos de pensamento. (FREITAS, 2011, p.73)

Não se trata de utilizar diretamente o método investigativo, mas de reproduzir mentalmente de forma objetiva o caminho que o cientista, precursor do conhecimento analisado, percorreu. Segundo Freitas (2011, p.73),"O procedimento de ensino há de assemelhar-se ao procedimento de exposição dos conceitos científicos, tal qual a exposição realizada pelo pesquisador no processo de criação que originou os conceitos".

Libâneo (2010, p. 9) ao destacar que o pensamento teórico vai se constituindo por princípios lógicos que reorganizam os dados da percepção sensível, defende que "se colocado nesse caminho, o aluno adquire um método teórico geral, isto é, o conceito, cuja internalização possibilita a resolução de problemas concretos e práticos". Isso se justifica porque o aluno descobre a base da construção do conhecimento ou, ainda, o alicerce sob o qual se ancora o objeto. Tendo em vista que "O método teórico geral de cada ciência está expresso nos princípios lógicos investigativos que lhe dão suporte, os quais, por sua vez, indicam o caminho didático para formação de conceitos pelos alunos" (LIBÂNEO, 2010, p.10).

A internalização do processo de reconstrução do objeto ou o conhecimento conceitual é simultaneamente o caminho e o resultado da compreensão do conhecimento. Conforme Davídov (1988, p. 126), "O conceito atua, simultaneamente, como forma de reflexo do objeto material e como meio de sua representação mental, de sua estruturação, isto é, como ação mental especial".

Ao internalizar o princípio investigativo, o aluno se apropria não apenas do conhecimento de um caso específico, mas de todas as demais manifestações gerais do conhecimento. Portanto, na perspectiva do ensino desenvolvimental, o aluno não somente aprende, mas se desenvolve no conhecimento:

> Na produção espiritual, como na material, existem meios próprios para reproduzir o objeto. Além disso, o homem utiliza um "esquema": descobre e recria as propriedades dos objetos através de suas relações e elos mútuos. Uma coisa se converte em meio para encarnar as propriedades de outras coisas, atuando como seu padrão e medida. (DAVÍDOV, 1988, p.127, destaque do autor, tradução nossa)

Conforme R. Nevanlinna (1966, p. 21, apud Davídov, 1988, p. 126), o caminho para a compreensão do objeto é a internalização do seu processo investigativo, considerando que existe uma relação entre o conteúdo do conceito e o procedimento de sua construção. Além disso, o resultado dessa compreensão do objeto é a internalização do seu processo investigativo.

O quadro 1, a seguir, foi organizado para fins didáticos. Ele contém as principais diferenças entre os pensamentos empírico e teórico, apontados e discutidos por Davydov (1988, p.154- 155) em sua obra La Enseñanza Escolar y El Desarollo Psiquico:

Quadro 1 – Diferenças entre os pensamentos empírico e teórico.

Pensamento Empírico	**Pensamento Teórico**
Por meio do processo de comparação dos objetos e suas representações, os conhecimentos empíricos são construídos, o que permite separar as propriedades comuns.	Os pensamentos teóricos são construídos no processo de análise do papel e da função de uma relação específica no interior do sistema integral que também, serve de base genética inicial de todas as manifestações.
Os objetos são classificados de acordo a propriedade geral do conjunto dos objetos, previamente separada no processo de comparação.	O processo de análise permite descobrir a relação geneticamente inicial do sistema integral como sua base universal ou essência.
Os conhecimentos empíricos refletem as propriedades externas dos objetos tendo em vista que sua base é formada pelas observações.	A base dos conhecimentos teóricos é a transformação mental dos objetos por isso ultrapassam as representações e refletem as relações e conexões internas.
A propriedade geral é separada como algo pertencente à mesma ordem que as propriedades particulares e singulares dos objetos.	Nos conhecimentos teóricos é fixado o elo da relação universal, do sistema integral com suas diferentes manifestações, o elo entre o universal com o singular.
O processo de concretização dos conhecimentos empíricos consiste em selecionar ilustrações, exemplos, que entram na correspondente classe de objetos.	A concretização dos conhecimentos teóricos consiste na dedução e explicação das manifestações particulares e singulares do sistema integral a partir de seu fundamento universal.
As palavras são o meio indispensável para fixar os conhecimentos empíricos.	Os conhecimentos teóricos são expressos, primeiramente, nos procedimentos da atividade mental e logo com auxílio de diferentes meios simbólicos e semióticos, em particular das linguagens natural e artificial.

Fonte: elaborado a partir de Davydov (1982; 1988; 1999) e adaptado de Bernardes (2012).

2.3 MEDIAÇÃO

Entre as categorias teóricas privilegiadas nesta pesquisa, a mediação ocupa lugar especial, tendo em vista que, por meio dela, o legado cultural acumulado pelas gerações antecedentes é transmitido e reformulado, de acordo com as novas necessidades sociais.

Oliveira (2004, p.27) afirma que, persuadido de que a relação do homem com o mundo não é uma relação direta, mas mediada, Vigotski caracterizou dois tipos de elementos mediadores: os instrumentos e os signos. Os instrumentos são elementos interpostos na relação do homem com os objetos, com a função de possibilitar e potencializar a realização de determinada ação do meio externo.

Os signos, tais como os instrumentos, são mediadores com a função de potencializar e orientar determinada ação. Entretanto, diferentemente da ação voltada para o meio externo inerente aos instrumentos, a atividade relativa ao signo é voltada exclusivamente para o plano interno, isto é, o plano psicológico.

Oliveira (2004, p.30) ressalta que, “na sua forma mais elementar, o signo é uma marca externa, que auxilia o homem em tarefas que exigem memória e atenção”. Nessa direção, conforme a autora, a utilização de varetas ou pedras para registro e controle, da quantidade de gados, nos remete a um exemplo de signo, tendo em vista que as varetas representam a quantidade de gados:

> É nesse sentido que as varetas são signos: são interpretáveis como representação da realidade e podem referir-se a elementos ausentes no espaço e do tempo presentes. A memória mediada por signos é, pois mais poderosa que a memória não mediada. (OLIVEIRA, 2004; p.37)

O fato é que entre as principais categorias teóricas na teoria histórico-cultural, a mediação realizada por meio de instrumentos e signos, com vistas a constituir e ampliar as possibilidades da relação entre a realidade e ser humano, ocupa lugar de destaque na formação e no desenvolvimento das chamadas funções psicológicas superiores, representadas, sobretudo, pelo pensamento, pela atenção voluntária, pelas ações intencionais e pela memorização. De fato: “[...] o uso de signos conduz os seres humanos a uma estrutura específica de comportamento que se destaca do desenvolvimento biológico e cria novas formas de processos psicológicos enraizados na cultura” (VIGOTSKI, 2002; p.54).

Vigotski (2013, p.70) afirma que “todas as funções psíquicas são processos mediados, e os signos constituem o meio básico para dominá-las e dirigi-las”. A linguagem é o signo mais enfatizado por Vigotski, pois os significados culturais são transmitidos e internalizados na interação entre pessoas, por meio da comunicação, pela linguagem.

Vigotski reconhece na linguagem um instrumento para solução de problemas, ressaltando que primeiramente a fala surge como necessidade de comunicação entre crianças e adultos e, posteriormente, quando a fala social é internalizada, aparece como organizadora da ação da criança, visando à realização de determinada atividade:

> A maior mudança na capacidade das crianças para usar a linguagem como um instrumento para solução de problemas acontece um pouco mais tarde no seu desenvolvimento, no momento em que a fala socializada (que foi previamente utilizada para dirigir-se a um adulto) é internalizada. Ao invés de apelar para o adulto, as crianças passam a apelar para si mesmas; a linguagem passa, assim, a adquirir uma função intrapessoal além do seu uso interpessoal. (VIGOTSKI, 2002; p.37)

Após a aquisição da fala, as crianças apresentam um grande avanço intelectual, o que é perceptível, uma vez que elas controlam e planejam suas ações antes da realização, providenciando, inclusive, os instrumentos de que necessitam, conforme os estudos de Vigotski (2002). Por exemplo, em determinadas fases do desenvolvimento humano, as crianças conversam consigo mesmas em voz alta, apontando a solução para os seus próprios problemas. Vigotski ressalta que:

> [...] a capacitação especificamente humana para a linguagem habilita as crianças a providenciarem instrumentos auxiliares na solução de tarefas difíceis, a superar a ação impulsiva, a planejar uma solução para um problema antes de sua execução e a controlar seu próprio comportamento. Signos e palavras constituem para as crianças, primeiro e acima de tudo, um meio de contato social com outras pessoas. (VIGOTSKI, 2002; p.38)

Na área de educação, um exemplo relevante de mediação é a intervenção do professor visando possibilitar e potencializar a internalização e a apropriação do objeto de conhecimento pelos seus alunos. Por meio de conhecimentos apropriados, o professor, busca organizar o ensino, para que os alunos entrem em atividade e também se apropriem, não somente do objeto de ensino, mas, principalmente, dos processos investigativos que sustentam o objeto de conhecimento contemplado. Portanto, o professor é o mediador por excelência da relação existente entre alunos e objeto de conhecimento, tendo em vista que a apropriação de tal objeto pelos alunos está intrinsecamente ligada à qualidade dessa mediação. Para Ferreira (2009, p.27), “a formação e o desenvolvimento de conceitos dos alunos se efetivam quando a mediação do professor se constitui uma atividade orientada e planejada sistematicamente, concretizada na atividade de ensino”.

Todavia, quanto à mediação que compete ao professor, é importante destacar que, embora a atividade docente seja indispensável na organização e na concretização do ensino para que o aprendizado promova o desenvolvimento, ao desempenhar sua função, o educador deve repensar a sua mediação, no sentido de não se precipitar e substituir a atividade dos alunos pelas suas ações individuais ou respostas imediatas. Isto significa que o professor deve criar oportunidades e favorecer o desenvolvimento da independência cognoscitiva e criativa dos seus alunos, conforme já foi ressaltado neste estudo. A esse respeito, Vigotski afirma que:

> Até agora, o aluno sempre descansava no esforço do professor. Olhava tudo com seus olhos e julgava com sua mente. Está na hora de ele usar seus próprios pés e compreender que o professor pode ensinar muito poucos conhecimentos ao aluno, assim como não é possível uma criança aprender a caminhar por meio das aulas, nem com a mais cuidadosa demonstração de marcha artística de um professor. Deve-se impulsionar a própria criança a andar e cair, sofrer a dor dos machucados e escolher a direção. E o que é verdade com relação ao caminhar – que só pode aprender com as próprias pernas e com as próprias quedas – também pode ser aplicado a todos os aspectos da educação. (VIGOTSKI, 2003, p.298 e 299)

2.4 ZONA DE DESENVOLVIMENTO PROXIMAL

Zona de Desenvolvimento Proximal é um conceito basilar na teoria histórico-cultural de Vigotski (2002, p.110). Apresenta importância pedagógica e didática, de natureza, ao mesmo tempo, teórica e prática, uma vez que contempla as diferenças entre o aprendizado pré-escolar e o escolar.

Segundo Vigotski, além da diferenciação entre o aprendizado pré-escolar e o aprendizado escolar, no que se refere à sistematização do aprendizado escolar em oposição a não sistematização do aprendizado pré-escolar, "o aprendizado escolar produz algo fundamentalmente novo no desenvolvimento da criança" (VIGOTSKI, 2002, p.110). Essa novidade foi denominada por ele de Zona de Desenvolvimento Proximal e definida da seguinte forma:

> [...] é a distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da solução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da solução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com companheiros mais capazes. (VIGOTSKI, 2002, p.112)

Assim, mais que uma simples elaboração de Vigotski, a zona de desenvolvimento proximal é um prospectivo indicativo de desenvolvimento, já que "define aquelas funções que ainda não amadureceram, mas que estão em processo de maturação, funções que amadurecerão e, que estão presentes em estado embrionário" (VIGOTSKI, 2002, p. 113). Portanto, a zona de desenvolvimento proximal é um poderoso recurso que permite captar o movimento do pensamento e prever o curso prospectivo do desenvolvimento mental:

> [...] a zona de desenvolvimento proximal permite-nos delinear o futuro imediato da criança e seu estado dinâmico de desenvolvimento, propiciando o acesso não

> somente ao que foi atingido através do desenvolvimento, como também aquilo que está em processo de maturação. (VIGOTSKI, 2002, p.113)

É inquestionável que com a introdução do conceito zona de desenvolvimento proximal se acentuou ainda mais o papel da escola no sentido de impulsionar os alunos "para desenvolver neles o que está intrinsecamente faltando no seu próprio desenvolvimento" (VIGOTSKI, 2002, p. 116).

Outro aspecto relevante que Vigotski constatou, em suas investigações, é que zona de desenvolvimento proximal atual de uma pessoa coincide com o seu futuro nível de seu desenvolvimento real. Isto significa que, o que a criança realiza com assistência hoje, será capaz de fazê-lo de forma independente mais a frente. Para esse autor, "[...] aquilo que é a zona de desenvolvimento proximal hoje, será o nível de desenvolvimento real amanhã – ou seja, aquilo que uma criança pode fazer com assistência hoje, ela será capaz de fazer sozinha amanha" (VIGOTSKI, 2002, p.113).

Assim, o aprendizado deve se orientar para o nível de desenvolvimento que ainda não ocorreu, mas que está prestes a ocorrer, tendo em vista que "o 'bom aprendizado' é somente aquele que se adianta ao desenvolvimento" (VIGOTSKI, 2002, p. 117). Além disso:

> [...] um aspecto essencial do aprendizado é o fato de ele criar a zona de desenvolvimento proximal; ou seja, o aprendizado desperta vários processos internos do desenvolvimento, que são capazes de operar somente quando a criança interage com as pessoas em seu ambiente e quando em cooperação com seus companheiros. (VIGOTSKI, 2002, p.117)

A importância da zona de desenvolvimento proximal também reside no fato que a compreensão de tal conceito "pode aumentar de forma acentuada a eficiência e a utilidade da aplicação de métodos diagnósticos do desenvolvimento mental a problemas educacionais" (VIGOTSKI, 2002, p.114).

De fato, é inegável que a formulação da zona de desenvolvimento proximal é, por excelência, uma entre as principais contribuições de Vigotski para o ensino-aprendizagem dos conceitos. Tendo em vista que, ao mensurar as zonas de desenvolvimento proximal dos alunos, o professor adquire um parâmetro que lhe possibilita organizar o ensino de forma a promover prospectivamente o desenvolvimento, para além daqueles conhecimentos já existentes. É nesse sentido que Vigotski afirma ser o bom ensino aquele que se adianta ao desenvolvimento. Para o teórico, "[...] o único tipo positivo de aprendizado é aquele que caminha à frente do desenvolvimento, servindo-lhe de guia; deve voltar-se não tanto para as funções já maduras, mas principalmente para as funções em amadurecimento" (VIGOTSKI, 2013, p.130).

2.5 INDEPENDÊNCIA COGNOSCITIVA E CAPACIDADES CRIATIVAS

Majmutov (1983, p. 347) afirma que “a maioria dos cientistas reconhece que o desenvolvimento das capacidades criativas dos escolares e a formação de sua independência cognoscitiva são impossíveis sem o ensino problêmico”. Isso vem ao encontro do fato de que a formação e o desenvolvimento da independência cognoscitiva e das capacidades criativas, nos alunos, se configuram entre os principais objetivos do ensino problêmico de Majmutov e do ensino desenvolvimental de Davydov.

Majmutov (1983) compreende a independência cognoscitiva como uma qualidade da personalidade do aluno, estreitamente relacionada às capacidades criativas. Para ele “a escola deve formar outra qualidade da personalidade do aluno que se relaciona estreitamente com as capacidades criativas, isto é, sua independência cognoscitiva” (MAJMUTOV, 1983, p. 23, tradução nossa).

A partir de uma orientação do professor ou mesmo de um colega mais experiente, ou ainda através de conhecimentos anteriormente assimilados de forma crítica e consciente, o aluno é introduzido em um processo investigativo de busca pelo conhecimento do objeto. Nesse caminho, quanto maior a independência cognoscitiva do aluno, maior serão as suas possibilidades de aquisição de novos conhecimentos.

Uma manifestação da independência cognoscitiva é a capacidade intelectual de internalização de novos conhecimentos. De outra forma, por meio da abstração e da generalização, o aluno independente cognoscitivamente é capaz de estabelecer a separação entre os traços essenciais e secundários, de forma a descobrir a essência de conceitos novos:

> Por independência cognoscitiva entende-se a existência de uma capacidade intelectual no aluno e o desenvolvimento de habilidades para separar os traços essenciais e os secundários dos objetos, fenômenos e processos da realidade, e mediante a abstração e a generalização revelar a essência de conceitos novos. (MAJMUTOV, 1983, p. 23, tradução nossa)

Os alunos não se limitam às informações e orientações dadas pelo professor, mas buscam livremente e autenticamente justificativas mais detalhadas e aprofundadas aos seus questionamentos, de forma a reconstruir teoricamente a sua compreensão a cerca do objeto privilegiado no processo de ensino-aprendizagem.

Majmutov (1983, p.24) aponta os indicadores da existência de independência cognoscitiva, os condicionando, em primeira instância, à presença de um elevado nível de necessidade cognoscitiva e de interesse pelo conhecimento, além da presença de motivos para aprendizagem. Tais indicadores são:

> a) a habilidade do aluno de alcançar, de forma independente, novos conhecimentos de diferentes fontes e de adquirir novas habilidades e hábitos, tanto mediante a memorização, como através da investigação independente e das “descobertas”; b) a habilidade de empregar os conhecimentos, habilidades e hábitos adquiridos para a autossuperação ulterior. c) a habilidade de empregá-los em sua atividade prática para resolver qualquer tipo de problema exposto pela vida. (MAJMUTOV, 1983, p.24, tradução nossa)

É importante esclarecer que a criatividade abordada neste contexto, não se trata especificamente da criação de algo original, mas, sobretudo, da capacidade de investigação e recriação da realidade de forma autêntica e consciente:

> [...] a manifestação da capacidade criativa do aluno deve ser em sua disposição e capacidade para uma atividade intelectual independente, em contraposição com a imitação, da cópia, a atividade por padrão, por um modelo, por um algoritmo. (MAJMUTOV, 1983, p.24, tradução nossa)

Para formar e estimular a independência cognoscitiva e a criatividade dos seus alunos, o professor deve oferecer na medida exata, somente o apoio mínimo necessário ao desempenho da atividade estabelecida, oportunizando, assim, que o aluno realize com maior autonomia as ações indispensáveis à aquisição dos conhecimentos. Caso contrário, o professor pode, inclusive, vir a prejudicar o processo de desenvolvimento de seus próprios alunos:

> [...] oferecer ajuda não é substituir a ação do aluno, mas fazer que o aluno utilize o mínimo apoio necessário para que com seu esforço individual alcance o êxito. [...] É muito importante que o mestre não antecipe a ajuda e não substitua o seu trabalho independente, que lhe permita adquirir o procedimento, chegar ao conhecimento, aplicá-lo. Do contrário pode estimular não o desenvolvimento, mas a tendência a encontrar uma resposta, a repetir, entre outros. (ORAMAS; TORUNCHA, 2002, p.39, tradução nossa).

2.6 O PROCESSO DE FORMAÇÃO DE CONCEITOS NA PERSPECTIVA DE VIGOTSKI

Um ensino que ignore o processo de formação de conceitos é bastante insuficiente e limitado. O que se almeja é uma didática que contribua, de fato, para o desenvolvimento integral do aluno. Desse modo, ainda que sucintamente, é necessário refletir sobre a categoria “formação de conceitos na perspectiva de Vigotski”.

Com o propósito de compreender o processo de interiorização das operações psicológicas construídas, inicialmente, nas relações interpessoais e reconstruídas no plano intrapessoal, Vigotski (2013) estruturou a trajetória para a formação de conceitos, em três fases básicas, quais sejam: agregação desorganizada ou amontoado sincrético, pensamento por complexos e, por fim, surgimento dos conceitos potenciais até a formação de conceitos propriamente ditos.

Vigotski (2013, p.74) ilustra a fase da agregação desorganizada ou amontoado sincrético, exemplificando que no caso da criança pequena, o passo inicial para a formação do conceito ocorre quando ela, a fim de solucionar um problema que geralmente resolveríamos por formação de um novo conceito, agrupa objetos numa agregação desorganizada, aleatória e sem nexos, numa espécie de amontoado:

> A criança pequena dá seu primeiro passo para a formação de conceitos quando agrupa alguns objetos numa agregação desorganizada, ou "amontoado", para solucionar um problema que nós, adultos, normalmente resolveríamos com a formação de um novo conceito. (VIGOTSKI, 2013, p.74, destaques do autor)

Tal fase é subdividida em três estágios, a saber: estágio da tentativa e erro no desenvolvimento do pensamento, estágio da organização do campo visual puramente sincrético e, por fim, estágio da formação da imagem sincrética, baseada na subjetividade individual.

É importante salientar que, melhor do que caracterizar particularmente cada um dos três estágios, por meio de exemplos concretos, é a compreensão de que o elemento basilar no amontoado sincrético reside no agrupamento dos objetos sem nenhuma sistematização, mas a partir de nexos desconexos ou de uma coerência incoerente:

> O amontoado, constituído por objetos desiguais, agrupados sem qualquer fundamento, revela uma extensão difusa e não direcionada do significado do signo (palavra artificial) a objetos naturalmente não relacionados entre si e ocasionalmente relacionados na percepção da criança. (VIGOTSKI, 2013, p.74)

A segunda fase do processo de formação de conceitos é denominada fase do pensamento complexo. Tal fase é destacada por Vigotski (2013) como a fase mais importante do processo de desenvolvimento dos conceitos, tendo em vista que "um complexo já carrega a semente que fará germinar um conceito" (VIGOTSKI, 2013, p.85).

O pensamento por complexo, embora seja substancialmente diferente do pensamento conceitual, é capaz de agregar elementos isolados de forma coerente e objetiva, não somente baseado em impressões subjetivas, mas respaldado em relações reais existentes entre esses objetos. Entretanto, tais relações objetivas não são refletidas intelectualmente da mesma forma como ocorre na fase do pensamento conceitual. Conforme Vigotski (2013, p.76), "O pensamento por complexos já constitui um pensamento coerente e objetivo, embora não reflita as relações objetivas do mesmo modo que o pensamento conceitual".

No pensamento por complexos, as relações são refletidas mentalmente na ausência de uma abstração teórica, profunda e lógica dos elementos. De outra forma, as ligações são concretas e factuais, sendo descobertas por meio da experiência imediata. Portanto, de acordo com Vigotski (2013, p.77), "qualquer conexão factualmente presente pode levar à inclusão de um determinado elemento em um complexo", o que constitui a principal diferença entre um complexo e um conceito.

Os complexos são subdivididos em cinco tipos: complexo do tipo associativo, complexo do tipo coleções, complexo em cadeia, complexo difuso e, por fim, complexo pseudoconceito. Embora o desenvolvimento de todos os tipos de complexos seja importante para a compreensão do processo de formação de conceitos, neste trabalho, o recorte será feito de modo a destacar somente o pseudoconceito. Isto porque, na perspectiva de Vigotski, o pseudoconceito caracteriza a ponte entre os complexos e o estágio mais elevado do desenvolvimento da formação de conceitos.

Para exemplificar a formação de um pseudoconceito, Vigotski (2013, p.83) se utilizou de um experimento no qual uma criança recebeu um triângulo amarelo pertencente a um amontoado de objetos disponíveis. Em seguida, ao ser solicitada a formação de um grupo com o triângulo recebido a partir dos objetos disponibilizados, a criança agrupou o triângulo amarelo recebido com todos os demais triângulos pertencentes ao amontoado de objetos disponíveis.

Segundo Vigotski, embora houvesse indícios de que a criança tenha se orientado, de fato, pelo conceito geral do triângulo, a análise experimental revelou que a criança foi orientada somente pela semelhança concreta visível dos triângulos.

Desse modo, em relação à análise experimental não poderia ser diferente, tendo em vista que, para formar o conceito de triângulo, uma criança necessita de conhecimentos sobre os ângulos, não sendo suficiente apenas reconhecer a figura geométrica dentro de um amontoado. Vigotski mostrou, portanto que, embora os resultados da tarefa fossem idênticos nas fases do pseudoconceito e do conceito propriamente dito, os processos de obtenção desses resultados são distintos.

Sucintamente, pode-se afirmar que as investigações de Vigotski mostraram que respostas corretas na realização de tarefas não garantem a formação de conceitos, todavia podem revelar a formação de um complexo do tipo pseudoconceito, comumente confundido com o conceito. Conforme Vigotski (2013, p.85), "a semelhança externa entre o pseudoconceito e o conceito real, que torna muito difícil "desmascarar" esse tipo de complexo, é um dos maiores obstáculos para análise genética do pensamento".

Na perspectiva de Vigotski, é importante ressaltar que a categoria teórica que diferencia pseudoconceitos e conceitos está intrinsecamente ligada à qualidade do processo pelo qual o objeto é assimilado e, também por isso, a organização do ensino por parte do professor se faz indispensável.

Por fim, o terceiro estágio marcado pelo maior avanço na formação conceitual é representado pelo surgimento dos conceitos potenciais até a formação de conceitos propriamente ditos. Os conceitos potenciais são novas formações obtidas por meio da abstração de um único atributo específico do objeto. Por exemplo, em um amontoado de objetos, a criança pode separar (abstrair) os objetos tendo como único parâmetro a sua cor, ainda que eles sejam distintos.

Todavia, Vigotski (2013, p.95) ressalta que a fase de surgimento dos conceitos potenciais, embora pertença ao terceiro estágio da formação de conceitos, não acontece necessariamente após o término da fase do pensamento por complexos, mas pode ocorrer de forma rudimentar muito antes de a criança pensar por pseudoconceitos:

> [...] as novas formações não aparecem, necessariamente, só depois que o pensamento por complexos completou o curso do seu desenvolvimento. De forma rudimentar, podem ser observadas muito antes de a criança começar a pensar por pseudoconceitos. Essencialmente, entretanto, pertencem à terceira divisão do nosso esquema de formação de conceitos. (VIGOTSKI, 2013, p.95)

Vigotski (2013) argumenta que, embora a abstração também ocorra na formação de complexos, ela se manifesta como um processo instável e inferior, se comparada ao processo de formação de conceitos potenciais:

> [...] mas enquanto o pensamento por complexos predomina, o traço abstraído é instável, não ocupa uma posição privilegiada e facilmente cede o seu domínio temporário a outros traços. Nos conceitos potenciais propriamente ditos, um traço abstraído não se perde facilmente entre os outros traços. (VIGOTSKI, 2013, p. 98)

No processo de formação conceitual, as operações de análise[11] e síntese[12] desempenham um papel fundamental, tendo em vista que para formar um conceito "é igualmente necessário unir e separar: a síntese deve combinar-se com a análise" (VIGOTSKI, 2013, p.95). Além disso, "um conceito só aparece quando os traços abstraídos são sintetizados

---

[11] É uma operação mental que decompõe o todo em partes menores.

[12] É uma operação mental que recompõe o todo por meio de suas partes, no sentido inverso da análise. Em outras palavras, é uma recomposição do todo decomposto pela análise.

novamente, e a síntese abstrata daí resultante torna-se o principal instrumento do pensamento" (VIGOTSKI, 2013, p.98).

2.7 TEORIA DO ENSINO DESENVOLVIMENTAL DE DAVYDOV

Vasili Vasilievich Davydov nasceu na Rússia, em 31 de agosto de 1930, e faleceu em 19 de março de 1998. Graduou-se em psicologia e filosofia pela Universidade Estadual de Moscou e, posteriormente, concluiu o doutorado em psicologia. Tornando-se professor universitário, assumiu várias atividades acadêmicas, entre elas, a de membro da Academia de Ciências Pedagógicas e diretor do Instituto de Psicologia da Rússia. Sofreu pressões políticas, sendo expulso do cargo de diretor do Instituto de Psicologia da Rússia e reintegrado alguns anos depois. Destacou-se, entre os estudiosos pertencentes à terceira geração da escola de Vigotski, por formular a Teoria do Ensino Desenvolvimental, prosseguindo os estudos de Vigotski e Leontiev (LIBÂNEO; FREITAS, 2013).

Na verdade, tal teoria reflete o esforço de uma equipe de estudiosos liderada por Davydov e Elkonin que, ao longo de quase 25 anos, realizou investigações psicopedagógicas, consolidadas e reconhecidas somente após os resultados promissores de um experimento na perspectiva do desenvolvimento integral, realizado na Escola Experimental N.91 de Moscou O objetivo desse experimento foi o de contribuir com a política educacional de reformas nas escolas soviéticas, no sentido de aprimorar a qualidade do ensino, tendo como fim último a elevação da qualidade de aprendizagem pelos alunos (LIBÂNEO; FREITAS, 2013).

Ao procurar formas efetivas de contribuição com as exigências da sociedade moderna, Davydov compreende ser indispensável uma análise crítica da escola tradicional, bem como a verificação, por meio de experimentos, dos novos pressupostos sistematizados na teoria do ensino desenvolvimental.

Ao analisar criticamente o ensino tradicional, Davydov vislumbrava uma teoria de ensino que pudesse superá-lo no tocante a formação do pensamento desejável para o desenvolvimento integral dos escolares. Para ele, o ensino tradicional apresenta-se insuficiente, inclusive porque fora moldado de forma a satisfazer aos interesses do sistema capitalista:

> [...] inculcar à maioria dos filhos dos trabalhadores somente aqueles conhecimentos e habilidades mínimas, sem os quais é impossível obter uma profissão mais ou menos significativa na produção industrial e na vida social (saber escrever, contar, ler, ter ideias elementares sobre o meio). (DAVIDOV; MÁRKOVA, 1987, p.143)

Para Davydov, o ensino promissor para o desenvolvimento integral do aluno deve estar orientado de forma que, ao ingressar na escola, após o período pré-escolar, a criança perceba o caráter novo e a peculiaridade dos conceitos doravante abordados. Nessa direção, o autor destaca que os conceitos científicos devem ser tratados com procedimento diferenciado em relação aos conceitos cotidianos: "Trata-se de conceitos científicos e devemos tratá-los com um procedimento distinto e inesperado em comparação como o pequeno tratava os significados das palavras, casa, rua, etc." (DAVIDOV; MÁRKOVA, 1987, p.150).

Davidov e Márkova (1987, p. 146) ressaltam que na escola tradicional, além dos conceitos científicos serem tratados sem distinção dos conceitos cotidianos, "não analisam de maneira detalhada as mudanças internas do conteúdo e da forma de ensino", mesmo em séries mais avançadas, em que o conteúdo abordado é mais extenso e aprofundado.

Quanto a essa fundamentação lógica tradicional, a principal crítica de Davydov (1988, p.105) refere-se ao fato que os conhecimentos são apreendidos pela via empírica, por meio da comparação dos dados sensoriais, que visam à sistematização para a futura inclusão do objeto em uma ou outra classe.

Para esse autor, tal ensino se limita apenas a desenvolver o pensamento empírico, importante, mas insuficiente para a formação dos conceitos, da autonomia e para o desenvolvimento integral. Em relação ao pensamento empírico, Davydov (1987) destaca que:

> [...] tem um caráter classificador, catalisador e assegura a orientação da pessoa no sistema de conhecimentos já acumulados sobre as particularidades e traços externos de objetos e fenômenos isolados da natureza e da sociedade. Tal orientação é indispensável para os afazeres cotidianos, durante o cumprimento de ações laborais rotineiras, porém é absolutamente insuficiente para assimilar o espírito autêntico da ciência contemporânea e dos princípios de uma relação criativa, ativa e de profundo conteúdo em face da realidade (assinalamos que tal relação supõe a compreensão das contradições internas das coisas, ignoradas precisamente pelo raciocínio empírico). (DAVYDOV; MÁRKOVA 1987, p. 144 e 145, tradução nossa)

Por meio da exposição tradicional dos conteúdos científicos, os alunos geralmente não conseguem se apropriar da essência dos fenômenos e objetos, em suas relações gerais e conexões internas. De outra forma, a mera transmissão dos conhecimentos prontos, preparados através de explicações livrescas e repetitivas, não somente são insuficientes para o aprendizado, mas também limitam o processo de formação dos conceitos. Alguns alunos chegam a não apresentar nenhum avanço cognitivo, outros se apropriam apenas das propriedades empíricas ou superficiais dos objetos, todavia insuficientes para a formação de conceitos. Segundo Vigotski:

> A experiência prática mostra também que o ensino direto de conceitos é impossível e infrutífero. Um professor que tenta fazer isso geralmente não obtém qualquer resultado, exceto o verbalismo vazio, uma repetição de palavras pela criança, semelhante à de um papagaio, que simula um conhecimento dos conceitos correspondentes, mas que na realidade oculta um vácuo. (VIGOTSKI, 2013, p. 104)

Isso se justifica porque, na organização do ensino tradicional, o aluno é guiado ao conhecimento por meio de explicações, descrições isoladas e comparações que, sobretudo na ausência de uma base geral de análise, impossibilita-o de separar a essência do objeto dentre as partes secundárias. Geralmente, em tal ensino, parte-se dos fenômenos concretos diferentes e chega-se apenas nas características superficiais do objeto de conhecimento em detrimento das suas especificidades internas. Conforme Lompscher (1999):

> A instrução tradicional muito frequentemente começa com os fenômenos concretos diferentes e tenta transmitir aos alunos o que é essencial nestes fenômenos, mas os alunos ainda não têm uma ideia dessa essência e não podem alcançá-la, porque não têm nenhum meio de conseguir esse objetivo. Ao comparar fenômenos concretos sem tal ferramenta cognitiva, os alunos verão predominantemente os traços e relações superficiais e não irão além deles, porque não podem diferenciar entre os traços gerais e os essenciais [...] As explanações verbais do professor podem ser aceitas, mas não compreendidas pelos alunos. Assim, têm que ter em mente muitos fenômenos concretos e fatos isolados que sobrecarregam as suas memórias em vez de subordiná-los a uma abstração apropriada que contém os traços e relações essenciais de uma classe inteira de objetos, eventos ou processos. (LOMPSCHER 1999, tradução nossa)

Nesse direcionamento, o aluno não elabora ativamente o conhecimento, mas, de forma passiva, recebe informações prontas e definitivas que, ao invés da análise e reflexão, exigem memorização e compreensão superficial. Tal organização de ensino dificulta o processo de formação de conceitos e favorece apenas o desenvolvimento do pensamento empírico, descritivo e classificatório que, embora relevante, não é suficiente para compreensão aprofundada do objeto ensinado.

Davydov defende que é função da escola assegurar o desenvolvimento das capacidades criativas e da independência cognoscitiva. Para isso, é preciso interferir não somente no conteúdo, mas inclusive na qualidade dos métodos de ensino e de educação. O autor também propõe uma organização de ensino com foco principal na formação do pensamento teórico, o qual “busca as relações gerais do fenômeno, as contradições, das relações e conexões entre os fenômenos, para captar a sua essência, de modo a ultrapassar os limites da experiência sensorial imediata” (LIBÂNEO, 2010, p. 9).

Davydov (1988, p.125, tradução nossa) esclarece que “o pensamento teórico é o processo de idealização de um dos aspectos da atividade objetal-prática, a reprodução, nela, das formas universais das coisas”. Em outros termos, o pensamento teórico é o produto da atividade intelectual resultante dos seguintes procedimentos metodológicos:

> Ao iniciar a assimilação de qualquer disciplina científica, os alunos, com a ajuda do mestre, analisam o conteúdo do material didático, separam nele alguma relação geral inicial, descobrindo simultaneamente o que se manifesta em muitas outras relações

> particulares existentes no material dado. Registrando, por meio de signos, a relação geral inicial separada, os escolares constroem, com ela, a abstração substantiva do objeto estudado. Continuando a análise do material, descobrem a vinculação regular dessa relação inicial com suas diferentes manifestações e assim obtém a generalização substantiva do objeto estudado. Logo as crianças utilizam a abstração e a generalização substantivas para dedução sucessiva (também com a ajuda do mestre) de outras abstrações mais particulares e para uni-las no objeto integral (concreto) estudado. Quando os escolares começam a utilizar a abstração e a generalização iniciais como meios para deduzir e unir outras abstrações, elas convertem as estruturas mentais iniciais em conceito que registra certa "célula" do objeto estudado. Este "célula" serve, posteriormente, às crianças como um princípio geral pelo qual elas podem se orientar em toda a diversidade do material fatual, que deve assimilar em forma conceitual por via da ascensão do abstrato ao concreto. (DAVÍDOV, 1988, p.175, tradução nossa)

Davydov (1988) defende que as formas de organização do ensino interferem na maneira pela qual os alunos se relacionam com o objeto em sua atividade de apreensão dos conhecimentos científicos. Para o autor, aprender não significa memorizar fórmulas, propriedades, regras, métodos resolutivos ou definições pré-fixadas e aplicá-las sem nenhuma consciência e domínio do seu processo investigativo. Tampouco a aprendizagem resulta da comunicação direta de conhecimentos pelo professor ou pela repetição de procedimentos contidos nos livros e apostilas. Para além disso, o ato de aprender envolve uma intensa atividade intelectual do aluno, a qual depende da forma como o ensino é organizado pelo professor. É um movimento em mão dupla, em que aluno e professor estabelecem uma relação de ajuda mútua no processo de desmistificação e reelaboração do conhecimento (HEDEGAARD, 2005).

Inserida na tradição histórico-cultural, a Teoria do Ensino Desenvolvimental vem ao encontro das dificuldades didáticas, propondo uma organização de ensino capaz de desencadear um processo de formação de ações mentais indispensáveis na aquisição dos conhecimentos científicos.

Para além do aprendizado do conteúdo específico, esse tipo de ensino objetiva desencadear e proporcionar as ações mentais para lidar com o objeto de conhecimento mediante um tipo de pensamento (pensamento teórico) que parte do abstrato (geral) para o concreto (particular), conferindo potencialidade para o reconhecimento do objeto em situações diversificadas. Libâneo (2004) destaca que:

> Não se trata de pensar apenas abstratamente com um conjunto de proposições fixas, mas de uma instrumentalidade, mediante a qual se desenvolve uma relação primária geral que caracteriza o assunto e se descobre como essa relação aparece em muitos problemas específicos. Isto é, de uma relação geral subjacente ao assunto ou problema se deduzem relações mais particulares. (LIBÂNEO 2004, p.125)

Para formar conceitos, o aluno precisa superar a aparência e ascender à essência dos objetos ensinados. A essência do conhecimento é a alma do objeto ensinado, o núcleo indispensável para que o conceito seja identificado como tal. Todavia, a essência não é imediata e exige que o aluno atravesse a superfície das aparências. Conforme Lefebvre (1991, p.219), "nem todos os fatos se situam no mesmo plano; e a essência, a lei, encontra-se abaixo da superfície, na parte calma e profunda do rio. A questão consiste em atravessar a superfície a fim de imergir nas águas profundas".

A assimilação dos conceitos científicos depende de uma intensa atividade intelectual por parte do aluno, resultante, sobretudo, da organização de um ensino atrelado ao contexto sociocultural e com foco no desenvolvimento do pensamento teórico.

Portanto, não restam dúvidas de que o papel desempenhado pelo professor é singular, tendo em vista que é o responsável por organizar as atividades coletivas e individuais, que contemplem o desejo do aluno e revelem a necessidade histórica pelo objeto ensinado. O que não significa desconsiderar a participação ativa e criativa do aluno no processo de ensino-aprendizagem, pois, ao realizar tais atividades, ele reproduz mentalmente o objeto, internalizando os procedimentos investigativos relativos à gênese do objeto de estudo, indispensáveis a sua compreensão e, consequentemente, desvelando a essência do conceito:

> Não é possível compreender imediatamente a estrutura da coisa ou a coisa em si mediante a contemplação ou a mera reflexão, mas sim mediante determinada *atividade*. Não é possível penetrar na "coisa em si" responder à pergunta – que coisa é a "coisa em si"? – sem a análise da atividade mediante a qual ela é compreendida; ao mesmo tempo, esta análise deve incluir também o problema da criação da atividade que estabelece o acesso à "coisa em si". (KOSIK 2002, p. 28, itálico e destaques do autor)

Cabe ressaltar que o aprendizado impulsiona o desenvolvimento e que o desafio advindo de uma necessidade percebida contribui para o processo de formação de conceitos. Dessa forma, muito além do que apresentar um problema que exige a formação de conceitos, o mestre deve organizar o ensino de tal modo que o aluno seja desafiado em seu próprio contexto sociocultural:

> A presença de um problema que exige a formação de conceitos não pode, por si só, ser considerada a causa do processo, muito embora as tarefas com que o jovem se depara ao ingressar no mundo cultural, profissional e cívico dos adultos sejam, sem dúvida, um fator importante para o surgimento do pensamento conceitual. Se o meio ambiente não apresenta nenhuma dessas tarefas ao adolescente, não lhe faz novas exigências e não estimula o seu intelecto, proporcionando-lhe uma série de novos objetos, o seu raciocínio não conseguirá atingir os estágios mais elevados, ou só os alcançará com grande atraso. (VIGOTSKI, 2013, p. 73)

É oportuno destacar que o grau do desafio, presente no problema a ser socializado com os alunos, deve se situar necessariamente na zona de desenvolvimento proximal. Isto significa que, embora a solução do problema deva exigir e proporcionar a formação de conceitos, simultaneamente, tal problema, deve ser acessível, de forma que o aluno compreenda o desafio e não se sinta desmotivado em prosseguir com a investigação.

Além de ter como parâmetro a zona de desenvolvimento proximal, as atividades organizadas pelo professor devem encaminhar o aluno à apreensão do objeto ensinado, por meio do método de ascensão do abstrato ao concreto, tendo em vista que o movimento proposto por tal método direciona-se na perspectiva da formação de conceitos:

> O método de ascensão do abstrato ao concreto é o método do pensamento; em outras palavras, é um movimento que atua nos conceitos, no elemento da abstração. A ascensão do abstrato ao concreto não é uma passagem de um plano (sensível) para outro plano (racional); é um movimento no pensamento e do pensamento. (KOSIK, 2002, p.36)

Antes de elucidar o método de ascensão do abstrato ao concreto ou método dialético, isto é, o método privilegiado por Davydov na apreensão dos objetos do conhecimento, faz-se necessário compreender o significado dos termos “concreto” e “abstrato” na concepção de Marx.

Em Marx, o abstrato é a parte geral do conhecimento, a mais simples e unilateral por não revelar toda riqueza das particularidades do objeto, ao passo que o concreto representa a parte mais aprofundada e completa, portanto multilateral:

> O conhecimento mediato é abstrativo. É preciso passar pelas etapas intermediárias a fim de ir da ignorância ao conhecimento. E o intermediário, o meio, nada mais é que o nosso poder de abstração. Mas o conteúdo concreto do abstrato – sua verdade relativa – só aparece e é restabelecido numa etapa subsequente, no grau superior. Assim, *a verdade do abstrato reside no concreto*. Para a razão dialética, *o verdadeiro* é o concreto; e o abstrato não pode ser mais que um grau na penetração desse concreto; um momento do movimento, uma etapa, um meio para captar, analisar e determinar o concreto. (LEFEBVRE, 1991, p.113, itálico do autor)

Conforme Daniels (2002, p.184), “o núcleo da teoria de Davydov é método de ascensão do abstrato para o concreto”. Tal método consiste em partir do concreto empírico e, por meio de análise do objeto envolvendo as sensações e percepções, tendo por base o geral, realizar abstrações e generalizações teóricas, para finalmente chegar ao concreto pensado.

Todavia, tal movimento não é linear, ao contrário, ele se apresenta de forma complexa e contraditoriamente eficaz para o conhecimento da realidade:

> O progresso da abstratividade à concreticidade é, por conseguinte, em geral movimento da parte para o todo e do todo para a parte; do fenômeno para essência e da essência para o fenômeno; da totalidade para a contradição e da contradição para

> a totalidade; do objeto para o sujeito e do sujeito para o objeto. O processo do abstrato ao concreto, como método materialista do conhecimento da realidade, é a dialética da totalidade concreta, na qual se reproduz idealmente a realidade *em todos os seus planos e dimensões.* (KOSIK, 20002, p.37, itálico do autor)

Faz-se necessário destacar que, embora no método dialético, o concreto seja ponto de partida e chegada, há uma distinção substancial entre o concreto empírico inicial e o concreto pensado final:

> O ponto de partida do exame deve ser formalmente idêntico ao resultado. Este ponto de partida deve manter a identidade durante todo o curso do raciocínio visto que ele constitui a única garantia de que o pensamento não se perderá no seu caminho. Mas o sentido do exame está no fato de que no seu movimento em espiral ele chega a um resultado não era conhecido no ponto de partida e que, portanto, dada a identidade formal do ponto de partida e do resultado, o pensamento ao concluir o movimento, chega a algo diverso – pelo seu conteúdo – daquilo que tinha partido. (KOSIK, 2002, p.36)

Embora o concreto empírico contenha o núcleo do objeto ensinado, sua análise primeira revela somente a realidade aparente, captada por meio de sensações e percepções, sem as conexões internas da totalidade:

> A questão começa a se esclarecer quando se observa que o verdadeiro concreto não reside no sensível, no imediato. O sensível é, num certo sentido, a primeira abstração. Sensação e percepção separam do objeto um dos seus aspectos: sua relação conosco, o lado que nos importa e nos toca neste instante. (LEFEBVRE 1991, p.111)

Por meio de abstrações e generalizações, o concreto empírico é reproduzido mentalmente, se convertendo em concreto pensado. Esse fato justifica o nome do método "ascensão do abstrato para o concreto":

> Para que o pensamento possa progredir do abstrato ao concreto, tem de mover-se no seu próprio elemento, isto é, no plano abstrato, que é a negação da imediatidade, da evidência e da concretude sensível. A ascensão do abstrato ao concreto é um movimento para o qual todo início é abstrato e cuja dialética consiste na superação desta abstratividade. (KOSIK, 2002, p.36 e 37)

Kopnin (1978, p.127) compreende que "o desenvolvimento do pensamento leva à substituição de uma imagem cognitiva por outra, à transição do desconhecido ao conhecimento, do conhecimento superficial e unilateral do objeto ao conhecimento profundo e multilateral".

Ao formar conceitos, o aluno não apenas se apropria do objeto ensinado, mas adquire a ferramenta mental para lidar com o objeto. Esse processo de formação de conceitos ocorre a partir de uma busca orientada que nos a leva à reconstrução do concreto (concreto pensado). Para Davydov (1988, p.146), "a essência da coisa pode ser revelada só no exame do processo de desenvolvimento de tal coisa. A essência existe só passando por uns e outros fenômenos".

Para se apropriar de um conceito científico, é preciso enxergar além da aparência imediata, visto que a análise superficial pode nos afastar da realidade. Não se pode, por exemplo, mensurar a potência de um telefone celular moderno pelo seu tamanho. Atualmente, há celulares menores bem mais potentes que celulares maiores. Todavia, o senso comum equivocadamente nos diria o contrário, que o tamanho do equipamento está ligado as suas capacidades, de forma que quanto maior, mais potente.

O método de ensino está subordinado aos métodos investigativos da disciplina ensinada. Se o aluno não tem consciência dos métodos investigativos do objeto ensinado, não há possibilidade de formação do pensamento teórico.

Ao analisar a teoria de Davydov para o ensino, no tocante a necessidade de aquisição e desenvolvimento do pensamento teórico para formar a autonomia e personalidade dos estudantes, um questionamento pode ser expresso da seguinte forma: de que forma é possível ao professor organizar o ensino para que o aluno tenha possibilidades concretas de aquisição e de desenvolvimento do pensamento teórico?

Rubtsov (p.130) afirma que “através de uma atividade concreta em que o conteúdo dos conhecimentos teóricos é adquirido é que as regras que comandam esse processo de aquisição são estabelecidas”. Leontiev, ao incorporar os estudos de Vigotski, elaborou a estrutura da atividade de aprendizagem, destacando seus elementos componentes a serem privilegiados na tarefa desenvolvida pelo aluno: necessidade, motivo (objeto), objetivos, ações, condições e operações.

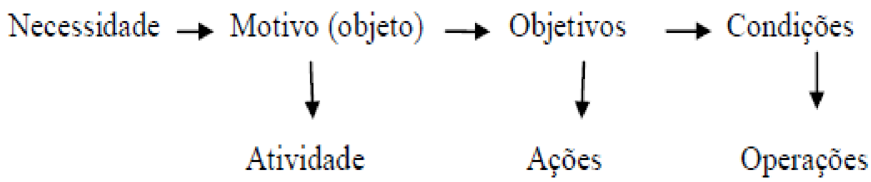
Convém destacar que a tarefa se caracteriza pela união entre os objetivos e as condições necessárias para a sua realização. De certa forma, isso a define também como elemento constituinte da atividade de aprendizagem. Freitas (2009) acrescenta que “as ações mentais estarão contidas em tarefas, cuja execução vai encaminhando os alunos para a formação do conceito de determinado conteúdo”.

Na perspectiva de Davydov, parte-se primeiramente do núcleo da necessidade, o desejo, e, em seguida, vai-se ao encontro da necessidade com o objeto, para ter-se o motivo que impulsiona a atividade. Vale destacar que, na verdadeira atividade, objeto e motivo se identificam mutuamente. A atividade prossegue sendo concretizada por meio de ações que se relacionam estreitamente com os objetivos. Nesse processo, essas ações ficam mais complexas e se tornam operações, as quais se relacionam com as condições existentes.

Conforme Leontiev (1988, p.74), por operações compreende-se “o modo de execução de um ato”. Por outro lado, “uma mesma ação pode ser realizada por diferentes operações e, inversamente, numa mesma operação podem-se, às vezes, realizar diferentes ações”, tendo em vista que a “operação é determinada pela tarefa, isto é, o alvo, dado em condições que requerem certo modo de ação”.

Contemplando os argumentos de Davydov a respeito da inserção do desejo como núcleo básico da necessidade, para efeitos didáticos, tem-se o esquema da estrutura da atividade de Leontiev (Figura 4), da seguinte forma:

Figura 4 – Esquema da estrutura da atividade de Leontiev.



Fonte: GARNIER, C.; BEDNARZ, N.; ULANOSVSKAYA, 1996, p.13.

Para explicar a questão da formação e do desenvolvimento do pensamento teórico, Davydov apoiou-se na estrutura da atividade humana esboçada por Leontiev, mas nela inseriu o elemento desejo. De outra forma, não basta que o aluno esteja envolvido em uma determinada atividade para a garantia do desenvolvimento cognitivo e, sobretudo, do desenvolvimento integral.

É importante ressaltar que o conceito de atividade está estreitamente relacionado ao conceito de consciência, uma vez que o homem, diferentemente dos demais animais, antes da realização de suas ações, planeja-as mentalmente de acordo com os fins vislumbrados. Isso se justifica porque o trabalho é o precursor responsável pelo aparecimento da consciência:

> O trabalho é um processo social para interferir sobre a natureza com um fim determinado. Com o trabalho, os homens modificam a natureza segundo suas necessidades, mas, ao modificá-la, modificam também a si mesmos. O trabalho é um fator primeiro e principal graças ao qual se formou o homem e apareceu sua consciência. (LEONTIEV et al,, 1969, p. 79, tradução nossa)

Chaiklin (1999) ressalta que o propósito da atividade de aprendizagem “é que as pessoas adquiram conhecimento teórico, quer dizer, que reproduzam conscientemente as compreensões teóricas”. Isso significa que o objetivo da atividade de aprendizagem não se limita a obter apenas novos conhecimentos sobre determinado objeto, de outra forma, caminha na direção da transformação do sujeito, na mudança do seu modo de pensar, de forma a atingir o domínio dos fundamentos teóricos que determinam os modos de ação.

Davydov, a partir da estrutura da atividade humana prática e mental, formulou em sua teoria uma estrutura de atividade de aprendizagem dos aprendizes. Essa estrutura contempla o método de reflexão dialética, ou seja, o método de pensamento do abstrato ao concreto. A estruturação da tarefa do aluno pelo professor abrange seis ações, a saber: 1) transformação dos dados da tarefa, a fim de revelar a relação universal do objeto de estudo; 2) modelação da relação universal, de forma gráfica; 3) transformação do modelo da relação universal, a fim de estudar suas propriedades em forma pura; 4) construção de um sistema de tarefas particulares que são resolvidas por um procedimento geral; 5) monitoramento das etapas anteriores e 6) avaliação quanto à realização da tarefa de aprendizagem.

Davydov reconhece no ensino por problemas, da perspectiva histórico cultural, uma forma de descoberta independente por parte do aluno, inclusive ressaltando a sua estreita ligação com o método investigativo. Por outro lado, o autor demonstra compreender que tal ensino deve ser sistematicamente organizando, pois afirma ser o professor a encaminhar o aluno a seguir o movimento dialético do pensamento até o desvelamento da verdade:

> Sua essência consiste em que o mestre não somente comunica às crianças as conclusões finais da ciência, mas que em certo grau reproduz o caminho de sua descoberta (“embriologia da verdade”). Aqui o mestre “demonstra ao aluno o caminho do pensamento cientifico, os obriga a seguir o movimento dialético do pensamento ate a verdade, os faz algo assim como coparticipantes da busca científica”. A exposição de caráter problemático está estreitamente ligada ao emprego do ensino do método investigativo. (DAVÍDOV, 1988, p. 169, tradução nossa, destaques do autor)

Embora na teoria do ensino desenvolvimental não tenha estruturado uma metodologia de ensino por problemas, Davydov destaca tal ensino como meio para o desenvolvimento da do pensamento teórico:

> Como afirmam os especialistas no ensino de caráter problemático, os conhecimentos não são transmitidos aos alunos de forma acabada, mas são adquiridos por eles no processo da atividade cognoscitiva autônoma em presença da situação problemática. A atividade de estudo aponta também que os alunos assimilem os conhecimentos no processo de solução autônoma das tarefas, o que lhes permite descobrir as condições de origem dos conhecimentos. Observemos que o ensino de caráter problemático, assim como a atividade de estudo, está internamente ligado com o nível teórico de assimilação dos conhecimentos e com o pensamento teórico. (DAVÍDOV, 1988, p.181, tradução nossa)

Na visão davydoviana, os métodos de ensino decorrem do conteúdo e o conteúdo da atividade de aprendizagem é o pensamento teórico, isto é, o conhecimento científico. Freitas (2011) ressalta ainda que cabe ao professor organizar a atividade de estudo como processo de investigação do objeto, de modo a potencializar a atividade mental do aluno e promover a formação do seu pensamento teórico.

Para que o ensino resulte no pensamento teórico e, portanto, se oriente para o desenvolvimento de novas ações mentais, a tarefa cognoscitiva organizada pelo professor deverá exigir do aluno os seguintes procedimentos mentais:

> 1) a análise do material factual a fim de descobrir nele alguma relação geral que apresente uma vinculação governada por uma lei com as diversas manifestações deste material, ou seja, a construção da generalização e da abstração substantiva; 2) a dedução, baseada na abstração e generalização, das relações particulares do material dado e sua união (síntese) em algum objeto integral, ou seja, a construção de seu "núcleo" e do objeto mental concreto e 3) o domínio, neste processo de análise e síntese, do procedimento geral ("modo geral") de construção do objeto estudado. (DAVÍDOV, 1988, p.179, tradução nossa, destaques do autor)

Davydov destaca semelhanças entre a teoria da atividade de estudo e a teoria do ensino de caráter problêmico em uma série de ideias e conceitos fundamentais, por exemplo, ambas estão internamente ligadas em nível teórico de assimilação dos conhecimentos e com o pensamento teórico. Além disso, ambas as teorias direcionam o aluno a desenvolver certa independência cognoscitiva, uma vez que os conhecimentos são adquiridos em uma busca independente por meio de ações intencionais (Davídov, 1988).

2.8 TEORIA DO ENSINO PROBLÊMICO DE MAJMUTOV

Mirza. I. Majmutov, pedagogo russo, nasceu em 1926 e faleceu em 2008. Ele é pertencente à terceira geração de pesquisadores da escola de Vigotski, foi membro da Academia de Ciências Pedagógicas da União Soviética e contribuiu com a didática por meio de suas investigações nas escolas da República Socialista Soviética Autônoma de Tartaria, destacando-se por desenvolver e sistematizar o Ensino Problêmico entre as décadas de 1960 e 1970.

Fruto de uma investigação teórica e prática em escolas da República Socialista Soviética Autônoma de Tartaria, a obra "La Enseñanza Problémica[13]", na qual se baseia parte considerável desta pesquisa, fornece uma fundamentação teórica do ensino problêmico e revela as vias fundamentais para a materialização prática das ideias desenvolvidas por Majmutov. Tal obra é direcionada, sobretudo, a professores e estudantes que procuram uma maior qualidade no processo de ensino-aprendizagem.

O teórico compreende o ensino problêmico como uma nova etapa no desenvolvimento da didática soviética e como importante componente no sistema de ensino da escola soviética,

[13] Por não terem sido localizadas outras obras, *La Enseñanza Problémica* é o único livro de Majmutov (1983) utilizado nesta tese. O referido trabalho é uma tradução do russo para o espanhol.

tendo em vista que objetiva formar nos alunos a independência cognoscitiva e desenvolver suas capacidades criativas.

Segundo Majmutov (1983), o interesse pelo ensino problêmico surgiu na busca de sistemas novos de métodos ativos e da elaboração dos princípios organizativos de ensino formativo, o que ocorreu devido à necessidade de superação do ensino tradicional, que se apresentava insuficiente para alcançar os objetivos desejáveis pela sociedade naquele momento histórico. Sob o ponto de vista das tarefas da escola contemporânea, Majmutov (1983) critica o ensino tradicional, ressaltando que ele se caracteriza por certas deficiências, como a inexistência de garantia do nível científico aos alunos por meio dos conteúdos de instrução e pelos métodos de ensino, a ausência de formação de interesses cognoscitivos para a aprendizagem, a inexistência da garantia de formação exitosa de procedimentos para atividade intelectual e, além disso, pela falta de condições para a formação das capacidades criadoras, uma vez que o ensino tradicional limita a atividade cognoscitiva:

> Em primeiro lugar, os conteúdos da instrução e dos métodos de ensino não garantem aos alunos o *nível científico* dos que conhecimentos que necessitam. Em segundo lugar, o ensino tradicional, por garantir aos alunos um sistema de conhecimentos e desenvolver sua memória, não forma um sistema de interesses cognoscitivos para a aprendizagem, como base para o desenvolvimento do pensamento para um objeto, e somente realiza, deficientemente nos alunos, os hábitos da atividade cognoscitiva independente e da autossuperação. Em terceiro lugar, os métodos do sistema didático formado contém uma grande parte da aprendizagem dogmática e não assegura a formação exitosa de procedimentos para a atividade intelectual [...] Em quarto lugar, o tipo tradicional de ensino limita a atividade cognoscitiva independente dos alunos e não cria as condições para desenvolver as atitudes naturais dos escolares e formar suas capacidades criadoras. (MAJMUTOV, 1983, p. 13, tradução nossa, itálico do autor)

Na perspectiva de Majmutov (1983, p.23), a independência cognoscitiva é uma qualidade da personalidade do aluno, fator que se relaciona estreitamente com as suas capacidades criativas, em oposição à imitação e à atividade padronizada por modelos ou algoritmos.

O autor compreende a independência cognoscitiva como a capacidade intelectual do aluno e o desenvolvimento de habilidades para separar traços essenciais e secundários dos objetos, mediante a abstração e a generalização. Além disso, ele enumera os indicadores da existência da independência cognoscitiva, a saber:

> a) a habilidade do aluno em alcançar, de forma independente, novos conhecimentos de diferentes fontes e de adquirir novas habilidades e hábitos, tanto mediante a memorização, como através da investigação independente e das "descobertas"; b) a habilidade de empregar os conhecimentos, habilidades e hábitos adquiridos para autossuperação ulterior; c) a habilidade de empregá-los em sua atividade prática para

> resolver qualquer tipo de problema abordado pela vida. (MAJMUTOV, 1983, p. 24, tradução nossa)

Para o autor, as qualidades que sinalizam a presença de independência cognoscitiva estão estreitamente vinculadas ao nível elevado da necessidade cognoscitiva, ao interesse pelos conhecimentos e à presença de motivos para aprendizagem.

O fundamento metodológico do ensino problêmico é a teoria marxista-leninista do conhecimento. Portanto, o método contemplado para apreensão da realidade é a lógica dialética, cujas vias fundamentais, constituídas pelo reflexo e pela solução de contradições, permitem concluir que "a atividade cognoscitiva independente do homem, relacionada com a obtenção de conhecimentos novos e com a revelação da essência de conceitos novos, somente são possíveis mediante a solução de problemas" (Majmutov, 1983, p.125, tradução nossa).

É importante destacar que, na concepção majmutoviana, o conceito de problema está estreitamente relacionado com a existência de uma contradição:

> [...] a essência do conceito problema, como categoria da lógica dialética, consiste em que na investigação científica, essa reflita a existência de uma contradição dialética no objeto a conhecer, enquanto que, como uma categoria psicológica, reflete as contradições dentro do processo do conhecimento do objeto pelo sujeito. (MAJMUTOV, 1983, p.59, tradução nossa)

Kopnin (1978) ressalta que "a tese fundamental do marxismo é o reconhecimento da universalidade das contradições e da necessidade de representação das contradições objetivas no pensamento". Conforme Majmutov (1983, p.63), o sistema de contradições é a força motriz do processo de aprendizagem problêmico do aluno e o problema docente é o líder, tendo em vista que:

> O problema docente se relaciona com as necessidades cognoscitivas do aluno, com os motivos de aprendizagem, e expressa o movimento do nível empírico de assimilação de conhecimentos, ao teórico, o que, por sua vez, se caracteriza por um elevado nível de atividade mental (cognoscitiva) do sujeito. (MAJMUTOV, 1983, p. 63, tradução nossa)

Todavia, uma condição indispensável para que a contradição seja considerada a força motriz do ensino problêmico em geral e do ensino-aprendizagem em particular, é que ela adquira um caráter interno, incorporado na consciência do próprio aluno, em sua personalidade e que seja conscientemente reconhecida como dificuldade.

De fato, no processo de apreensão de um determinado objeto de conhecimento, ao se deparar com as contradições, na tentativa de compreendê-las e eliminá-las, o aluno promove um avanço no seu próprio intelecto. Isso se justifica porque o ensino problêmico é organizado de forma que o aluno entre em atividade e se direcione na perspectiva da essência do objeto.

Ao construir o conceito de ensino problêmico, Majmutov (1983), mesmo consciente da impossibilidade de abarcar todos os aspectos de um conceito em uma definição, critica a maioria das definições do termo, tendo em vista que elas desconsideram os traços essenciais do objeto e, de forma incompleta, refletem somente a atividade do professor ou somente a atividade do aluno, ou ainda, apenas as fases do processo cognoscitivo e, ao invés da definição do conceito, se limitam a caracterizá-lo.

> Deste modo, na maioria das definições do conceito de ensino problêmico não se leva em consideração todos os traços essenciais; a definição reflete somente a atividade do mestre ou somente a atividade do aluno, ou as etapas do processo cognoscitivo; às vezes no lugar da definição do conceito se dá simplesmente sua caracterização. Resumindo, violam-se as exigências de exatidão, clareza e proporcionalidade da definição. Claro que não podemos exigir que na definição destaquem-se todos os traços substanciais do conceito. (MAJMUTOV, 1983, p. 265, tradução nossa)

Na expectativa de abarcar todos os aspectos do objeto, de garantir o enfoque histórico para análise de sua essência e revelar seu movimento, Majmutov sob a base da generalização da prática e da análise das investigações teóricas, define o ensino problêmico da seguinte forma:

> O ensino problêmico é um tipo de ensino que tende ao desenvolvimento, onde se combinam a atividade sistemática independente de busca dos alunos, com a assimilação das conclusões já preparadas pela ciência, e o sistema de métodos estrutura-se levando em consideração a suposição do objetivo e o princípio da problematicidade; o processo de interação do ensino-aprendizagem orientado a formação da concepção comunista do mundo nos alunos, sua independência cognoscitiva, motivos estáveis de estudo e capacidades mentais (incluindo as criativas) durante a assimilação de conceitos científicos e modos de atividade, que estão determinados pelo sistema de situações problêmicas. (MAJMUTOV, 1983, p. 265 e 266, tradução nossa)

De outra forma, o teórico prossegue definindo o ensino problêmico como a atividade do mestre na construção de situações problêmicas e a direção da atividade dos alunos na busca investigativa, de forma a contemplar as suas etapas do processo cognoscitivo:

> Definimos o ensino problêmico como a atividade do mestre encaminhada à criação de um sistema de situações problêmicas, a exposição do material docente e a sua explicação (total ou parcial), e a direção da atividade dos alunos com respeito à assimilação de conhecimentos novos, tanto em forma de conclusões já preparadas, como mediante a abordagem independente de problemas docentes e sua solução. (MAJMUTOV, 1983, p. 266, tradução nossa)

Outro ponto que merece destaque é que o ensino problêmico não se limita a fomentar a aprendizagem de novos conhecimentos científicos, mas cria condições para que o aluno, no processo de apropriação dos objetos contemplados, também aprenda a produzir outros conhecimentos de forma consciente e crítica, desenvolvendo a sua criatividade e formando a independência cognoscitiva.

O mérito de ensino problêmico caracteriza-se também pelo fato de que, no processo de análise do problema, o aluno se depara com a necessidade de busca e construção teórica dos conhecimentos utilizados pelo cientista no desenvolver da ciência. Dessa forma, o aluno é direcionado a percorrer, ainda que abreviadamente, o mesmo caminho que o precursor do conhecimento percorreu ao desvelar o objeto investigado:

> O aluno não pode, nem deve repetir todo o caminho histórico de desenvolvimento do saber humano. Sem dúvida, os princípios deste desenvolvimento e os modos generalizados de ação deve repeti-los para assimilá-los e que se formem nos modos da atividade criativa. (MAJMUTOV, 1983, p. 346 e 347, tradução nossa)

Majmutov esclarece que problêmicas são as perguntas que geram certa dificuldade intelectual, uma vez que as suas respostas não se encontram nos conhecimentos anteriores, nem mesmo nas informações recentes, mas que exigem uma nova ação mental.

Para o teórico, o ensino problêmico é um dos meios mais eficazes para a ativação do pensamento. Todavia, não é fator suficiente para a garantia de que o aluno entre em atividade, é preciso, antes de tudo, despertar o interesse cognoscitivo. O grau da dificuldade da pergunta problêmica deve contemplar a zona de desenvolvimento proximal, isto é, ela não pode ser inacessível ao aluno.

Majmutov (1983) alerta que a organização do ensino problêmico exige do mestre conhecimento a respeito das regras e procedimentos para criar situações problêmicas e direcionar a atividade dos alunos no processo de busca pelo conhecimento. Tal ensino difere-se substancialmente de outras formas de ensino por meio de problemas, por estar fundamentado na teoria histórico-cultural, e, portanto, não possuir caráter pragmático, uma vez que o objetivo principal não é a mera resolução dos problemas apresentados, mas a aquisição das ações mentais necessárias para pensar dialeticamente a respeito das situações (FREITAS, 2011).

Ao indagar se todo o ensino deve ser problêmico, Majmutov (1983, p. 346) apoia-se no entendimento do termo "ensino problêmico" para construir sua resposta. Se por ensino problêmico entende-se "somente a solução de problemas e a assimilação de todo o material", nem todo ensino deve se problêmico. Por outro lado, o autor ressalta que todo ensino deve tender ao desenvolvimento e sendo o ensino problêmico um tipo de ensino que garante o desenvolvimento, ele conclui que não há ensino que tenda verdadeiramente ao desenvolvimento se não forem empregadas as regularidades do ensino problêmico. Tendo em vista que:

> A maioria dos cientistas reconhece que o desenvolvimento das capacidades criativas dos alunos e a formação de sua independência cognoscitiva são impossíveis sem o ensino problêmico. Sem dúvida, as capacidades criativas são, em primeiro lugar, possibilidades intelectuais. Por acaso pode-se considerar uma pessoa desenvolvida, sem o desenvolvimento do seu intelecto, isto é, de suas capacidades mentais? (MAJMUTOV, 1983, p. 347, tradução nossa)

2.9 APROXIMAÇÕES ENTRE AS TEORIAS DO ENSINO DESENVOLVIMENTAL DE DAVYDOV E DO ENSINO PROBLÊMICO DE MAJMUTOV

Embora Majmutov (1983) destaque Davydov como um entre os investigadores acerca da natureza do ensino problêmico, a teoria do ensino desenvolvimental apenas contempla o ensino por problemas em suas tarefas cognoscitivas, diferente da teoria formulada por Majmutov, que possui a essência nas contradições produzidas necessariamente por meio dos problemas.

Não apenas Davydov tem razão na questão de que o ensino desenvolvimental deve ser potencializado por meio de tarefas com caráter problêmico, mas também é relevante afirmar que as teorias de Davydov e Majmutov se complementam em diversos aspectos. E, se implementadas de forma concomitante, elas representam um diferencial altamente promissor para o desenvolvimento integral dos alunos.

De fato, o ensino desenvolvimental é organizado de forma a promover o desenvolvimento do pensamento teórico, com vistas no desenvolvimento integral dos alunos (cognitivo, ético, moral e efetivo). Na mesma direção, o ensino problêmico, efetivamente estruturado sobre uma sólida base de situações problêmicas, garante o desenvolvimento da independência cognoscitiva e das capacidades criativas dos alunos.

Ambas as teorias utilizam e valorizam o método investigativo na descoberta dos objetos de conhecimentos. Outro aspecto comum é a exigência do conhecimento sólido e substancial por parte do professor, tanto dos fundamentos científicos teóricos e epistemológicos da ciência e objeto que se pretende ensinar, como dos procedimentos psicopedagógicos e didáticos relacionados aos métodos de ensino contemplados.

As duas teorias, muito além de tornar o aluno ativo e consciente na assimilação de novos conhecimentos, de forma integral, formam qualidades e princípios éticos, relacionados ao caráter e à personalidade. Embora os alunos adquiram independência cognoscitiva para/ao aprender novos conhecimentos, também aprendem a valorizar, a aproveitar e a participar com maior intensidade do aprendizado coletivo. Na oportunidade da atividade em grupo, eles aprendem a lidar com o contraditório e o distinto, argumentando, debatendo, convencendo, ouvindo e, por vezes, ratificando as suas ideias, sobretudo, de forma respeitosa e ética.

Cabe destacar que, embora o Ensino Problêmico de Majmutov tenha fundamentação na lógica dialética e se constitua em uma teoria valorosa e bastante pertinente para potencializar o processo de ensino-aprendizagem dos conceitos, o Ensino Desenvolvimental de Davydov avança em relação a essa teoria, porque aponta e descreve as ações e o caminho didático para o desenvolvimento integral do aluno.

No próximo capítulo, será apresentada a descrição e a análise dos dados empíricos coletados, sobretudo mediante as categorias da zona de desenvolvimento proximal e da mediação, ressaltando as possibilidades e as contradições no ensino do conceito de função sob a perspectiva de Davydov e Majmutov.

3 ENSINO DO CONCEITO DE FUNÇÃO POR MEIO DE PROBLEMAS: CONTRIBUIÇÕES DE DAVYDOV E DE MAJMUTOV

Neste capítulo, o objetivo é a descrição aprofundada e a análise do ensino-aprendizagem do conceito de função para alunos do ensino médio, por meio de problemas, tendo como fundamento teórico-metodológico as teorias de Davydov e de Majmutov. A pesquisa de campo é apresentada com ênfase nas ações realizadas pelos alunos, no processo de mudança de suas relações com o conceito de função e nas contradições verificadas.

Como já foram referenciados na introdução, os instrumentos de recolha de dados selecionados para este estudo foram: gravações audiovisuais, observação direta não participante, entrevistas semiestruturadas com o docente e com alguns discentes, além da aplicação de instrumentos avaliativos, tais como pré-testes e pós-testes, realizados antes e após o desenvolvimento do experimento didático formativo já mencionado. A primeira avaliação teve por objetivo identificar as zonas de desenvolvimento proximal e a segunda buscou vislumbrar o alcance da intervenção concretizada.

É muito importante destacar que não se teve a pretensão de esgotar o ensino do conceito de função, pois o tempo disponível para o desenvolvimento do experimento era absolutamente insuficiente para isso, tendo em vista que tal conceito estabelece conexões com vários outros conceitos (conforme mostrado na Figura 1) e, portanto, demanda maior tempo para o seu estudo e seu amadurecimento.

Com isso, o que se quer dizer é que não foi possível aprofundar no estudo do conceito de função. Mais especificamente, gráficos e propriedades de funções não foram estudadas em virtude do tempo destinado ao desenvolvimento do experimento. O conceito de função foi estudado na abordagem de Bourbaki (universalmente aceita pela comunidade acadêmica) e foram contemplados, nos problemas organizados, aspectos básicos presentes na gênese desse conceito, tais como: relação, dependência e variação. Assim, a intervenção proposta alcançou apenas uma etapa bem inicial e básica do percurso do estudo do conceito de função.

3.1 PROCEDIMENTO INVESTIGATIVO: O EXPERIMENTO DIDÁTICO FORMATIVO

A sessão foi iniciada com a apresentação de uma descrição do experimento didático formativo como procedimento de pesquisa, que é fundamentado na teoria histórico-cultural.

Para isso, utilizou-se como base o referencial teórico de Freitas (2010; 2011; 2012) e o próprio Davydov (1988).

Davydov (1988, p. 195) menciona claramente que em sua pesquisa "o estudo das peculiaridades da organização do ensino experimental e sua influência no desenvolvimento mental dos escolares exigiu a aplicação de um método especial de pesquisa, que, na psicologia, é comumente chamado de *experimento formativo"*. O autor explica que esse método se baseia na organização e reorganização de novos programas de educação e de ensino e dos procedimentos necessários à sua concretização, considerando-se que no ensino e na educação experimentais não se busca a adaptação do aluno a um nível de desenvolvimento já existente, já formado e, sim, de procedimentos que, por meio do diálogo do professor com os alunos, contribuem para formar neles um novo nível de desenvolvimento.

Ao apresentar o experimento didático formativo, Freitas (2010) afirma que o termo experimento, neste caso, não tem equivalência com a pesquisa quantitativa experimental e também não diz respeito aos experimentos realizados em aula para demonstrações científicas aos alunos. Conforme a autora, o que distingue o experimento didático formativo como investigação pedagógica de base histórico-cultural é que seu foco está na relação entre professor e alunos em atividade de ensino-aprendizagem.

> É "experimento" por tratar-se de por em prática uma intervenção pedagógica por meio de determinada metodologia de ensino, visando promover as ações mentais do aluno para que haja mudanças em seus níveis futuros esperados de desenvolvimento mental. É "formativo porque se trata de uma sucessão de ações e interações que vão ocorrendo na atividade dos alunos, obedecendo a um processo em que vão sendo formadas ações mentais". Desse modo, o experimento didático formativo pode ser caracterizado como pesquisa da, para a, com a, prática de ensino, gerando elementos variados para uma análise das suas possibilidades e limites. (FREITAS, 2010, p. 3, destaques da autora)

Em síntese, Freitas (2010, p.3) explica que o experimento didático formativo é uma investigação que resulta em conhecimento sobre as mudanças no sujeito durante o processo de ensino-aprendizagem. A autora explica que:

> A investigação resulta em um conhecimento que busca explicar o objeto estudado (funções psicológicas), buscando também resultar em mudança qualitativa no sujeito investigado. No experimento didático, o que se busca é a explicação histórica das mudanças qualitativas no pensamento do sujeito, mudanças estas que são investigadas como uma cadeia complexa de processos inseparáveis de aprendizado, decorrentes da realização de uma tarefa proposta no experimento e contida no modo como este se encontra organizado. A tarefa proposta e os passos da tarefa estão ancorados em um determinado conceito científico a ser aprendido. A organização desses passos está ancorada em princípios teóricos da teoria histórico-cultural e da teoria do ensino desenvolvimental. Esses passos, ao serem cumpridos pelos sujeitos participantes exigem determinado movimento do pensamento, movimento este que pode resultar em mudanças na sua qualidade em relação ao conteúdo da tarefa, ou

> seja, o conceito científico. Em outras palavras: no decorrer do experimento acontece aquisição de atos mentais, atos esses que contribuem para reorganizar o pensamento, as operações mentais realizadas pelo sujeito. (FREITAS, 2007, p.11)

Assim, na presente pesquisa, o experimento didático formativo é compreendido como o procedimento investigativo que permitiu analisar o ensino-aprendizagem do conceito de função em movimento e tempo real, durante o ensino experimental, revelando a relação entre a organização do ensino fundamentado nos pressupostos de Davydov e Majmutov e o desenvolvimento apresentado pelos alunos no processo de formação desse conceito para si. Com esse propósito, ao mesmo tempo em que a pesquisadora investigou a relação da organização desse ensino na aprendizagem dos alunos, interveio pedagogicamente, pois os educandos foram formados pela metodologia contemplada.

Conforme foi ressaltado anteriormente, a tarefa de elaborar o plano de ensino e organizá-lo na perspectiva desenvolvimental foi executada pela pesquisadora, sobretudo porque além de ser uma de suas principais responsabilidades, exige rigor e maior aprofundamento teórico. No entanto, a organização desse ensino sofreu pequenas alterações, tendo em vista as necessidades dos alunos, suas relações e seus diagnósticos individual, relativa às habilidades e limitações no processo de assimilação do conhecimento matemático.

É importante destacar que em sala de aula, tal ensino foi conduzido exclusivamente pela professora colaboradora e registrado por meio de observações e gravações audiovisuais pela pesquisadora.

Em síntese, o experimento didático formativo consistiu em uma pesquisa de campo na qual a pesquisadora organizou intencionalmente o ensino para a formação do pensamento teórico de função e acompanhou a execução e o resultado desse ensino, ministrado pela professora colaboradora, uma professora de matemática.

3.2 O CAMPO DA PESQUISA

O experimento didático formativo foi realizado em um *câmpus* do Instituto Federal de Goiás, localizado em uma cidade do interior de Goiás, implantado em uma área ampla e privilegiada, com fácil acesso aos moradores da cidade, com cerca de 60 mil m^2. As instalações e estrutura geral do *câmpus* contemplado, notavelmente se apresentavam excelentes e apropriadas ao público em geral, sobretudo aos alunos e professores. Além disso, tal instituição ofertava gratuitamente aos seus alunos e professores atendimento básicos na área médica, odontológica e psicológica.

O Instituto Federal de Goiás foi criado pela lei n° 11.982 de 29 de dezembro de 2008 e instituído Rede Federal de Educação Profissional, Científica e Tecnológica. Todavia, sua história e tradição na qualidade gratuita de ensino nos leva ao ano de 1909 quando a instituição era conhecida como “Escola de Aprendizes Artífices da Cidade de Vila Boa" e sediada na antiga capital de Goiás. De lá para cá, foram vários movimentos decorrentes de mudanças em suas atribuições e, passando por Escola Técnica de Goiânia, Escola Técnica Federal de Goiás e Centro Federal de Educação Tecnológica de Goiás, se transformou em Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, sediado em Goiânia, e com várias unidades implantadas e em fase de implantação nas diversas cidades do interior de Goiás.

Equiparado com as Universidades Federais, em termos de qualidade educacional gratuita, pesquisas, valorização dos docentes e demais servidores, o Instituto Federal de Goiás atua na educação superior, básica e profissional, com maior ênfase na educação profissional.

A opção pelo Instituto Federal de Goiás está relacionada, primeiramente ao pronto acolhimento da proposta de pesquisa por parte de uma professora de matemática, empossada em um *câmpus* da instituição. Acrescenta-se a isso, o fato de que a pesquisadora também tem vínculo profissional com o Instituto Federal de Goiás e, portanto melhor conhece a dinâmica geral dos campi, além de possuir acesso facilitado aos documentos e pessoas.

Não será identificado o *câmpus* do Instituto Federal de Goiás contemplado e nem o curso técnico realizado pelos sujeitos da pesquisa, será utilizado inclusive nomes fictícios para a professora e para os alunos[14], visando preservar eticamente a identidade dessa instituição de ensino e dos sujeitos que participaram da pesquisa.

3.3 A BUSCA PELOS SUJEITOS DA PESQUISA

A procura pelo docente colaborador atuante especificamente no 1° ano do ensino médio foi um grande desafio, tendo em vista a dificuldade de encontrar um profissional com disposição e disponibilidade para estudos e encontros semanais, visando à apropriação adequada dos princípios básicos que norteiam as categorias teóricas, bem como, orientação e acompanhamento para realização e posteriormente prosseguimento do experimento didático formativo a ser desenvolvido.

---

[14] A lista com os nome fictícios se encontra no Apêndice A.

Todavia, essa pesquisa foi privilegiada com o pronto acolhimento do projeto de pesquisa por parte da professora Gabriela, lotada em um *câmpus* do Instituto Federal de Goiás, com turmas do 1° ano dos variados cursos técnicos de nível médio e responsável pela disciplina de matemática. O contato inicial com a professora colaboradora se deu por indicação de uma colega que a reconhece a professora Gabriela como colega de trabalho ministrante da disciplina de matemática no ensino técnico, responsável, comprometida e, sobretudo extremamente interessada em estudos pedagógicos em nível de doutorado, uma vez que pretende prosseguir seus estudos na área de educação.

O projeto de pesquisa foi apresentado à professora Gabriela e ao chefe de departamento, ambos em comum acordo aprovaram e acolheram a proposta e, além disso, a professora se comprometeu a cooperar por meio da realização de leituras, encontros semanais orientados e no que fosse necessário para a execução do projeto.

Na etapa seguinte, não foi difícil conseguir o aceite da participação da pesquisa por alunos e pais de alunos. Sendo os alunos menores de idade, após a apresentação da proposta de ensino e convite de participação, foram distribuídos termos de compromisso para que eles conversassem com seus pais ou responsáveis e caso se interessassem e obtivessem consentimento, trouxessem o termo assinado para iniciarmos o desenvolvimento do experimento. Os alunos foram orientados a, caso seus pais tivessem dúvidas a respeito da proposta, procurar a professora pesquisadora que estava à disposição para esclarecê-las.

De posse dos termos de compromisso[15] assinados por todos os sujeitos da pesquisa, o trabalho foi iniciado. A primeira etapa ocorreu por meio de observações do contexto histórico-social dos sujeitos, contemplando, sobretudo suas interações em sala de aula e em toda a estrutura institucional, tendo em vista que a professora colaboradora precisava de um prazo de aproximadamente um mês para concluir o conteúdo anterior e começar a execução do experimento didático formativo.

3.4 OS SUJEITOS DA PESQUISA

Os sujeitos da pesquisa foram constituídos por: uma professora da disciplina de matemática do 1° ano do ensino técnico, de um curso integral do nível médio, e uma de suas turmas composta de 38 alunos. Ressaltamos que a turma foi escolhida pelo critério de

[15] O termo de compromisso se encontra no Apêndice B.

apresentar maior dificuldade na aprendizagem em matemática, tendo em vista a necessidade mais emergente de contribuições para o desenvolvimento dos alunos.

A professora colaboradora graduou-se em Bacharelado e Licenciatura em Matemática e concluiu Mestrado em Matemática Pura. Possui aproximadamente cinco anos de experiência e há três anos exerce a docência em um *câmpus* do Instituto Federal de Goiás, em regime de dedicação exclusiva, após a sua aprovação em concurso público.

Os alunos do ensino técnico integrado ao ensino médio, em particular da turma com a qual realizamos experimento, pertenciam a um curso técnico de nível médio em regime integral, com entrada às 7h30min e saída às 17h15min e, por esse motivo, recebem auxílio governamental para a alimentação.

Os alunos ingressaram na instituição por meio de processo seletivo, todavia não muito concorrido, não atingindo sequer a concorrência de três candidatos por vaga em virtude da preferência da comunidade por outros cursos ofertados na instituição.

É importante destacar que a maioria dos alunos da turma considerada veio de instituições públicas, estaduais e municipais e, infelizmente, apresentam graves problemas na formação matemática. Além disso, oito alunos da turma são repetentes na disciplina de matemática.

Ainda que a professora colaboradora repassasse o diagnóstico da turma e particularmente dos alunos que chamavam a sua atenção pelo impacto de suas características no meio escolar, visando entre outras coisas melhor compreender o contexto sociocultural, foram feitas observações pela pesquisadora, iniciadas há aproximadamente um mês antes do início do experimento e realizadas até o seu final. Durante as observações em sala de aula e nos intervalos, procurávamos nos posicionar de forma que não chamássemos atenção dos alunos e também que nossa presença não fosse tão notada. Todavia, no início os alunos nos observavam e faziam perguntas, mas com o tempo se acostumaram e não mais notaram a nossa presença.

A seguir, algumas características de cinco alunos da turma são apresentadas. Eles se destacaram durante a observação[16], ressaltando que a turma apresentava a mesma faixa etária, em média 15 anos. Lembramos que os nomes escolhidos são fictícios para resguardar os sujeitos da pesquisa:

[16] Tais alunos se destacaram na observação porque participaram das entrevistas e suas características parecem melhor representar o perfil geral da turma investigada. O roteiro de observações se encontra no Apêndice C.

- Ângelo: tímido quase não se comunicava com as pessoas, nem mesmo com seus colegas, se esquivava quando indagado pela professora, salientando que se não participava também não prejudicava ninguém. Todavia, Ângelo era extremamente observador e conseguia compreender razoavelmente o conteúdo ministrado. Ângelo foi encaminhado ao serviço psicológico, porém rejeitou o acompanhamento.
- Leonardo: agitado e de temperamento forte, Leonardo participava com colocações alheias aos assuntos abordados. Gostava de chamar a atenção dos colegas, demonstrava desinteresse pela disciplina e consequentemente apresentava dificuldades de aprendizagem.
- Maria Eduarda: extrovertida e alegre participava das discussões, porém apresentava sérios problemas relacionados à disciplina de matemática. Tinha histórico razoável nas disciplinas, exceto em matemática. Acreditava não ter capacidade para aprender matemática, afirmou diante dos colegas que sempre ouvira de seu pai que matemática era só para os gênios. Todavia, esforçava-se para compreender a disciplina na tentativa de ser reconhecida e valorizada pelo pai.
- Taylor: bastante reservado, não gostava de expor suas ideias e tinha dificuldades para o trabalho coletivo, embora contribuísse com as discussões sempre que a professora o indagava. Taylor se destacava por habilidades na disciplina de matemática, segundo ele não precisava se esforçar muito para compreender, bastava prestar atenção e revisar o conteúdo designado para a prova**.**
- Zilda: extrovertida e esforçada, essa adolescente sempre se mostrava preocupada com o desempenho das colegas mais próximas que tinham sérias dificuldades de aprendizagem em matemática. Possuía desempenho regular e mesmo apresentando lacunas em pré-requisitos anteriores, se mantinha motivada e interessada no aprendizado.

Em geral, os alunos demonstravam bastante satisfação com a instituição de ensino, tanto no aspecto físico quanto no aspecto das relações sociais. Isso se justifica porque o ambiente realmente era bastante agradável, permeado de atividades, como apresentações culturais e estudantis, valorização e reconhecimentos das atividades coletivas e individuais, de forma a favorecer um clima de amizades.

Vale destacar que os alunos sujeitos da pesquisa, em sua maioria, pertenciam à classe social menos favorecida, com pais ganhando em média dois salários mínimos e com baixo grau de escolaridade. Portanto, a instituição representava mais que um ambiente educacional, também um espaço de cultura, lazer e amizade, já que muitos não tinham acesso às atividades de lazer equivalentes às proporcionadas pela escola. Também era o local que provia a alimentação dos alunos que, por outro meio, seria financeiramente difícil para alguns deles.

Segundo a professora colaboradora, a maioria dos pais não comparecia às reuniões previamente agendadas e realizadas, no final de cada bimestre, e poucas justificativas de ausência eram apresentadas, geralmente relacionadas ao trabalho ou à falta de tempo. Tal ocorrência fornece um indicativo de que o envolvimento dos pais no processo educacional escolar desses alunos era baixo.

3.5 ENTREVISTAS COM DOCENTE E DISCENTES[17]

Em busca da compreensão das relações estabelecidas no contexto da sala de aula, dos perfis da professora colaboradora e dos alunos da turma contemplada, das estratégias de organização e mediação de ensino utilizadas pela professora e vivenciada pelos alunos, bem como das formas de superação das dificuldades do ensino-aprendizagem em matemática, foram realizadas entrevistas individuais com a professora Gabriela e com dez alunos da turma.

A entrevista com a professora Gabriela foi realizada em uma sala de estudos do programa de pós-graduação da PUC Goiás, com duração de 17 minutos. Na entrevista, ela afirmou ser apaixonada por matemática e ter gosto pelo ensino, e destacou mais os aspectos positivos do que as dificuldades que envolvem a profissão docente.

Mestre e graduada em matemática, a professora Gabriela inicialmente fez bacharelado e mestrado e, posteriormente, concluiu a licenciatura. Possui experiência profissional de cinco anos e há três anos atua como professora efetiva do Instituto Federal de Goiás com dedicação exclusiva.

A entrevistada demonstrou satisfação pelo trabalho no Instituto Federal de Goiás, sobretudo em virtude da flexibilidade e autonomia frente aos problemas. Ressaltou, também, que atribui grande importância à matemática em termos de formação humana.

---

[17] A transcrição integral da gravação da entrevista com a professora Gabriela está disposta no Apêndice D e as sínteses das entrevistas com os alunos estão nos Apêndices E e F.

Se revelando bastante comprometida com o Instituto Federal de Goiás e com o ensino-aprendizagem dos alunos, destacou que, futuramente, além das aulas, assumirá uma coordenação de cursos técnicos.

Quanto à organização de suas aulas, afirmou prepará-las repetidas vezes após cada nova experiência, todavia sem se basear em nenhum referencial teórico, mas somente por meio de livros didáticos de matemática. Embora relate muita conversa entre os alunos e dificuldades de sua parte para manter a disciplina, a professora afirma ter um bom relacionamento com os alunos. Sustenta também, não existir maiores problemas no relacionamento dos alunos entre si.

Todavia, considerando o relacionamento dos alunos para com a matemática, ela acredita que há muito a ser feito, tendo em vista que a maioria deles não gosta de matemática, alguns apresentando, inclusive, aversão à disciplina. Na entrevista, a professora disse que a maioria dos alunos é proveniente da classe média baixa ou mesmo da classe baixa.

Por acreditar que a forma de ensinar pode influenciar na aprendizagem dos alunos, a professora afirma tentar mudar a dinâmica de suas aulas. Além disso, recorre a filmes de história de matemática para despertar o interesse e também disponibiliza horários alternativos de atendimento fora do horário regular, na tentativa de sanar as dificuldades de matemática básica.

As entrevistas com os 10 alunos selecionados por melhor representarem a turma e, sobretudo, por aceitar o convite da entrevista, foram realizadas durante o experimento, no Instituto Federal de Goiás, em uma sala de aula desocupada, em horário especial, no intervalo entre as aulas de manhã e as aulas da tarde. Foram entrevistas rápidas que duraram em média 10 minutos.

Nas entrevistas com os alunos e por meio das observações, foi possível perceber que eles possuem uma imagem bastante positiva da instituição, considerando-a como lócus privilegiado, principalmente na questão da qualidade educacional e também em termos de amizades.

Em sua maioria, consideram a professora Gabriela como uma excelente professora, inclusive alguns a apontavam como a melhor entre demais os professores. Já a disciplina de matemática quase que unanimemente foi indicada como uma entre as difíceis, perdendo apenas para a disciplina de física.

Apenas um, entre os entrevistados, não reconhece utilidade na matemática, e a considera um obstáculo inútil para a formação.

A atividade de estudo ocupa a maior parte do tempo desses alunos, porém como as aulas ocorrem em período integral, quase não estudam em casa, se limitando apenas à instrução recebida no Instituto Federal de Goiás.

Também se percebe que os alunos, estavam em um período de adaptação, em relação às exigências do ensino na instituição. Quase em sua totalidade, vieram de instituições públicas, permeadas por muitos problemas, principalmente no quesito qualidade.

São adolescentes, com muita energia, provenientes das classes baixas e médias baixas, em sua maioria são educados e veem no estudo uma possibilidade de ascensão social. No desenvolvimento do experimento, eles tiveram dificuldades iniciais e suas expressões faciais demonstravam que sempre almejavam uma resposta direta. Porém, eles se envolveram no experimento e avançaram na aprendizagem.

3.6 O DESENVOLVIMENTO DO EXPERIMENTO DIDÁTICO FORMATIVO

Entre os meses de fevereiro e julho de 2014, a professora pesquisadora e a professora colaboradora se encontravam semanalmente em uma biblioteca, ora para discutir os textos sobre os referenciais teóricos adotados, ora para analisar o andamento e, ao mesmo tempo, para dar prosseguimento ao experimento didático formativo, que foi desenvolvido entre os meses de abril a Julho de 2014.

As dezesseis aulas do experimento foram filmadas[18], observadas e analisadas, visando relacionar a organização do ensino com a formação de ações mentais percebidas. Por meio das observações e entrevistas, procurou-se captar o movimento do pensamento dos alunos no que ser refere à formação do conceito de função em face da organização do ensino.

Considerando as orientações de Davydov e Majmutov, bem como os ensinamentos de Freitas e Libâneo (2013) foi construído um plano de ensino[19] composto pelos problemas 1, 2, 3, 4 e uma dinâmica conforme o apêndice H.

Entre os desafios na realização desse experimento, pode-se destacar as particularidades do calendário do primeiro semestre de 2014, algumas principais foram: os feriados, a realização da copa do mundo, além de vários eventos internos na instituição e, infelizmente, isso gerou certa descontinuidade nas aulas, tendo em vista que os alunos permaneciam até mais de quinze dias sem retomar a disciplina de matemática.

---

[18] Os pais ou responsáveis pelos estudantes permitiram a realização das filmagens para fins didáticos e de pesquisa, manifestando seus consentimentos através da assinatura do termo de consentimento (apêndice B), coletado antes do desenvolvimento do experimento didático formativo.

[19] O plano de ensino das aulas se encontra no Apêndice G.

O trabalho de campo teve início no mês de fevereiro de 2014 e término mês de julho do mesmo ano. Durante o experimento didático formativo, foram ministradas dezesseis aulas com duração de 45 minutos cada[20]. As aulas foram distribuídas em oito encontros semanais, sendo cada encontro composto de duas aulas seguidas de 45 minutos, conforme a regra praticada na instituição.

Inicialmente, a professora pesquisadora foi apresentada à turma pela professora colaboradora, na condição de docentes pesquisadores da área de Educação com a proposta de desenvolver um trabalho acadêmico de doutorado com a participação da turma, visando beneficiar o seu processo de ensino-aprendizagem em Matemática. Em seguida, foram apresentados os objetivos de presente pesquisa, explicando, sobretudo, sobre a necessidade de filmagens. Naquela ocasião, foram esclarecidas dúvidas a respeito do desenvolvimento das aulas e procurou-se motivar a participação dos alunos e, por fim, foram distribuídos os termos de compromisso a serem assinados pelos responsáveis e entregues antes do início das atividades, caso concordassem em participar da pesquisa. Também foi esclarecido que nenhum estudante ficaria prejudicado caso optasse por não participar da proposta, todavia os alunos unanimemente se mostraram contentes e abertos à nova tentativa para melhor aprender a disciplina de matemática.

3.7 O EXPERIMENTO DIDÁTICO FORMATIVO: ENSINANDO O CONCEITO DE FUNÇÃO POR MEIO DO ENSINO PROBLÊMICO

3.7.1 Diagnosticando a zona de desenvolvimento proximal e iniciando a compreensão do desenvolvimento do conceito de função

Nos primeiros 60 minutos, os alunos realizaram individualmente um pré-teste constituído por dois problemas, envolvendo os conceitos de função, conjunto e relação. O objetivo dessa avaliação foi fazer um diagnóstico da situação de aprendizagem dos alunos em relação ao conceito de função e também identificar as dificuldades que apresentassem, a fim de considerá-las na estruturação das tarefas a serem desenvolvidas por eles durante o experimento didático formativo. Em outras palavras, buscou-se identificar a zona de desenvolvimento proximal dos alunos. No entanto, ainda nessa aula, com o objetivo de aproveitar o restante do tempo disponível, a professora discutiu com os alunos durante 30 minutos sobre a origem do conceito de função.

---

[20] A transcrição das aulas ministradas se encontra no Apêndice O.

Inicialmente, a professora solicitou aos alunos, que ordenassem as cadeiras em círculo. Imediatamente, a aluna Vida questionou se teria aula e se mostrou surpresa porque conforme relata, nunca vira fazer círculo em aula de matemática:

> **Professora:** Façam um grande círculo. Vamos conversar.
> **Vida:** Falta pouco tempo para o sinal bater. Vai ter aula não né?
> **Professora:** Lógico que vai. Por que achou que não teria?
> **Vida:** E que eu nunca vi fazer círculo em aula de matemática. Risos.

A fala da aluna Vida aponta para o caráter tradicional das aulas de matemática, onde as carteiras são enfileiradas e voltadas para frente.

Em seguida, a aluna Maria Eduarda pediu à professora que primeiro corrigisse a avaliação que haviam realizado. Diante da solicitação, a professora argumentou que a correção do pré-teste seria em aulas posteriores, tendo em vista que, primeiro gostaria de analisar os conhecimentos prévios que eles possuíam a respeito do conceito de função, para melhor qualidade da correção do pré-teste.

Ao perguntar aos alunos se já haviam estudado o conceito de função, a maioria dentre eles, falava ou mesmo balançava a cabeça indicando que já havia estudado tal conceito. Três alunas se manifestaram diretamente afirmando que, embora tivessem estudado o conceito, não conseguiram compreender os problemas abordados no pré-teste. A aluna Zilda chegou, inclusive, a afirmar a impossibilidade de resolução do pré-teste, não disfarçando a sua satisfação pelo caráter exclusivamente diagnóstico de tal instrumento:

> **Biscoito:** Já estudei função, mas cheguei à conclusão de que não sei nada. Esse teste foi muito difícil. Eu não consegui entender nada.
> **Lya**: Nem eu.
> **Zilda:** Teste difícil? Impossível! Ainda bem que não valeu nota.

A nosso ver, a fala da aluna Zilda sinaliza a preocupação por parte dos alunos a respeito das notas referentes às avaliações. Tal preocupação se torna extremamente prejudicial à medida que a aprendizagem deixa de ser o motivo principal do aluno e cede lugar à problemática da aprovação ou retenção.

Prosseguindo, a professora perguntou aos alunos a respeito da utilidade do conceito de função. Depois de uma longa pausa, o aluno Leonardo respondeu que tal conceito servia para dar dor de cabeça, se constituindo, portanto, um problema a mais para estudar. Em contrapartida, os colegas riram e a professora prosseguiu argumentando a esse aluno que estava equivocado e ainda afirmando que tal conceito começou a ser investigado há aproximadamente quatro mil anos até chegar à elaboração atual:

> **Professora:** Gente, vamos começar, não pelo teste. Vocês sabem me dizer para quê serve o conceito de função?
> **Leonardo:** serve para dar dor de cabeça, um problema a mais para estudar.

> **Professora:** Você está enganado Leonardo. Olha só, o conceito de função começou a ser investigado há aproximadamente quatro mil anos até ser elaborado da forma como o conhecemos nos livros de matemática. Você sabia disso Leonardo?
> **Leonardo:** Eu não. Tanta coisa interessante para saber. Risos.

Entende-se que, nesse momento, a professora poderia de ter apontado algumas entre as várias utilidades do conceito de função, de forma a despertar o desejo e a necessidade do aluno por tal conceito.

Nessa direção, outro fato notável é que, embora a professora tenha se dedicado às leituras dos teóricos contemplados e demonstrado comprometimento para com o desenvolvimento do experimento, nem sempre, ela conseguia aproveitar os questionamentos dos alunos, fazendo-os refletir e os colocando na perspectiva desenvolvimental. Ao contrário, infelizmente, algumas vezes, se limitava a dar respostas diretas:

> **Gil:** Mas, função serve para que professora?
> **Professora:** Função serve para relacionar grandezas que variam. Por exemplo, na física, podemos relacionar tempo e distância. Quanto maior a distância a ser percorrida, maior será o tempo gasto para percorrer, considerando a mesma velocidade. Então meninos, quando alguém perguntar para quê serve função, vocês devem se lembrar de que esse conceito surgiu da necessidade do homem em relacionar grandezas e compreender a realidade.

No diálogo acima mencionado, o questionamento do aluno poderia ser conduzido pela professora para fazê-lo avançar em alguns aspectos essenciais da abordagem do conceito de função. Por exemplo, na tentativa de identificar a zona de desenvolvimento proximal, a professora poderia se valer da mediação tornando o aluno mais ativo no processo de ensino-aprendizagem.

Outro fator a se observar, é que parte dos alunos estava demasiadamente preocupada com a correção do pré-teste dentro do tempo disponível:

> **Eva:** Professora, não vai dar tempo de corrigir o teste né? Daqui a 2 minutos é o intervalo.
> **Professora:** Como já falei, não corrigirei o teste hoje, a correção será feita nos próximos encontros. Hoje quero que vocês se atentem para o fato de que o conceito de função surgiu da necessidade humana de relacionar grandezas e compreender a realidade.

Todavia, conforme foi observado e discutido com a professora, a preocupação dos alunos com a correção do pré-teste, sobretudo, nesse primeiro momento, pareceu articulada apenas ao simples registro no caderno dos problemas corrigidos, em detrimento do autêntico interesse na aprendizagem do conceito de função. Isso se justifica, porque os alunos estavam acostumados a registrar em seus cadernos as correções apresentadas pela professora, sem que fossem necessárias as suas próprias buscas investigativas.

Dessa forma, nesse primeiro encontro, o processo de ensino-aprendizagem não permitiu a aquisição de novas ações mentais de forma a reorganizar o pensamento empírico para o pensamento teórico.

3.7.2 O aspecto nuclear do conceito de função: identificando a relação universal por meio da análise de problemas

Para que os alunos realizassem essa ação, nos primeiros 15 minutos, a professora organizou a sala em oito grupos, contemplando todos os alunos. De forma que seis grupos eram compostos de cinco membros e dois grupos eram compostos de quatro membros. Os alunos livremente formaram os grupos, apontando em cada grupo um representante. Foi feita apenas uma exigência: que os grupos permanecessem com os mesmos membros do início ao fim do experimento visando melhor organização.

Conforme os alunos determinaram e indicaram seus representantes, os grupos ficaram divididos de acordo com o quadro 2.

Quadro 2 – Distribuição dos alunos nos grupos.

Organização dos grupos	
Grupo 1	**Bia***, Leidy, Marcio e Taylor.
Grupo 2	Gil, Keith, **Maria Eduarda*** e Regis.
Grupo 3	Alfredo, Ana, Jamaica, **Lara*** e Rafa.
Grupo 4	Cida, **Daiane*,** Kelly, Paula e Biscoito.
Grupo 5	Bruno, Carol, Fred, **Jiló*** e Leonardo.
Grupo 6	Ângelo, **Bel***, Luê, Lya e Roger.
Grupo 7	Aline, Cris, **Eva***, Caco, Zilda.
Grupo 8	Alex, **Cleo*,** Diva, Marcelo e Vida.
***representantes do grupo**	

Fonte: Elaborado pela pesquisadora de acordo com as escolhas dos alunos.

Em seguida, foi distribuída uma atividade, contendo os problemas 1 e 2 (apêndice G) para que os alunos lessem e discutissem em seus grupos, dentro do prazo médio de 30 minutos. Dentro desse período, a professora colaboradora foi solicitada incessantemente em todos os grupos a fim de sanar dúvidas de interpretação, entre outras.

Findado esse prazo, foi realizado um sorteio para exposição e discussão dos problemas 1 e 2 na lousa, que resultou na distribuição indicada no quadro 3.

Quadro 3 – Ordem de discussão dos itens pelos grupos.

PROBLEMA 1: FORMATURA - RIFA DO IPHONE	
Item a	Grupo 4
Item b	Grupo 8
Item c	Grupo 3
Item d	Grupo 1
Item e	Grupo 7
PROBLEMA 2: NOTAS	
Item a	Grupo 2
Item b	Grupo 2
Item c	Grupo 6
Item d	Grupo 3
Item e	Grupo 5

Fonte: Elaborado pela autora de acordo com as escolhas dos alunos.

Ao buscar o principal interesse da turma de alunos pesquisados, o assunto que mais estavam preocupados e discutindo, identificou-se que era a formatura, isto é, a cerimônia que academicamente e culturalmente marca a conclusão daquela etapa de ensino. Eles estavam frequentemente interessados e discutindo o assunto. Assim, buscou-se incluir esse assunto no experimento didático formativo, por ser, naquele momento, o que mais motivava os alunos a interagir, a conversar e a discutir. Partiu-se da necessidade dos estudantes relacionadas ao levantamento de fundos para realização da própria formatura, apresentando-se a eles uma tarefa com o problema a ser resolvido.

Após o sorteio das apresentações, a aluna Daiane, representante do grupo 4, foi a lousa para socializar o preenchimento da tabela e discutir a resolução do item “a” do problema 1.

Como a aluna Daiane conseguiu demonstrar domínio dos procedimentos mentais necessários para a realização da tarefa e os colegas não apresentaram questionamentos quanto à resolução desse item, a professora indagou o porquê de que alguns deles não conseguiram resolver o problema similar a este na avaliação pré-teste:

> **Professora:** Entendeu pessoal?
> **Diva:** Essa é a parte fácil.
> **Professora:** Muito fácil mesmo Diva. Só gostaria de entender porque alguns entre vocês não fizeram isso no teste que realizamos.
> **Diva:** É que a gente não entendeu que era para fazer só isso. E o teste era diferente.

A fala da Aluna Diva sugere que parte dos alunos possuem problemas de interpretação de texto e não apenas insuficiências na disciplina de matemática. Por vezes, o problema não é especificamente matemático, mas também se situa na incompreensão e interpretação dos dados.

Com a intenção de melhor orientar seus alunos nesse aspecto, a professora interveio em vários momentos:

> **Professora:** Quando passei nos grupos, notei que infelizmente muitos não compreenderam o problema porque não entenderam o que leram. Parece-me que muitos nem leram. Ou fizeram uma leitura muito apressada. Gente, leitura também faz parte da matemática. Não tem jeito de resolver se ao menos não entender o que foi pedido. Mas vamos voltar para a nossa discussão.

Outro fato notável é o contínuo esforço da professora para que os alunos de distintos grupos interagissem entre si:

> **Professora:** Daiane, antes de escrever a próxima resposta na lousa, primeiro nos diga o que está ocorrendo nesta tabela?
> **Daiane:** Uai professora, o valor que a gente paga, depende do tanto de bilhete que a gente compra. A gente acha que é isso.
> **Professora:** O raciocínio está excelente, mas poderia explicar melhor. Concordam com o grupo da colega? Algum grupo viu outra coisa?
> Pessoal, vamos ajudar a Daiane. Seria isso mesmo? Segundo o grupo da Daiane, o aspecto principal é a relação de dependência entre a quantidade de bilhetes adquiridos e os valores pagos por esses bilhetes. Alguém pensou diferente? (pausa, silêncio). Cadê os grupos?

Na citação anterior, quando a aluna Daiane se manifesta, percebemos os indícios das ações mentais manifestados por ela, sobretudo, quando percebe que existe o nexo "dependência" entre os números de bilhetes e os valores pagos.

Por sua vez, com a intenção de criar espaço para o desenvolvimento do pensamento teórico, a professora mediava por meio de questionamentos e também valorizava e elogiava cada ação dos alunos. Com isso, os alunos começaram participar mais ativamente, demonstrando maior atenção:

> **Professora:** Concordam com o grupo da colega? Algum grupo viu outra coisa? Taylor, você viu algo diferente?

> **Taylor:** Existe uma relação entre o número de ingressos adquiridos e os valores pagos.
> **Daiane:** Foi isso que falei.
> **Professora:** Excelente Taylor. Daiane, você falou mesmo, mas o nosso colega contribuiu acrescentando uma palavra chave: relação. Vamos juntar as duas falas: então vocês perceberam que existe uma relação entre os valores pagos e a quantidade de ingressos. Em tal relação, podemos observar que os valores pagos dependem da quantidade de ingresso que adquirimos. Correto?

Pode-se, também, inferir da citação anterior que o aluno Taylor conseguiu identificar o nexo interno “relação” por meio do processo investigativo que a turma estava realizando. Trata-se, portanto, de um indício de que o pensamento empírico já começava a ceder lugar ao pensamento teórico.

Na sequência, a aluna Cleo, representante do grupo 8, após destacar que o seu grupo tivera dificuldades, se dirige a lousa na tentativa de resolver o item “b” do problema 1:

> **Cleo:** Eu não sei o que é um modelo matemático. É uma fórmula professora?
> **Professora:** Alguém pode ajudar a Cleo? O que é um modelo matemático gente?
> **Bianca:** É uma função?
> **Professora:** O que é uma função?

Nas falas anteriores, é possível identificar a mediação que a professora realiza com a intenção de estimular o debate e a discussão entre o grupo de alunos. E, embora o aluno Alfredo se direcionasse na perspectiva do conceito de função, a professora novamente se precipitou na resposta:

> **Alfredo:** É uma fórmula que relaciona x e y.
> **Professora:** Gente, vamos por partes. Função é uma relação particular de dependência entre grandezas, que expressamos algebricamente usando as variáveis x e y. Vamos estudar a variação de uma grandeza, conforme as mudanças sofridas pela outra. Por exemplo, y=4x+1 é um exemplo de função. De outra forma b=4a+1, também é. Podemos usar x, y, a, b, ou seja, qualquer letra que vocês quiserem para expressar as variáveis. Mas x e y são mais usadas. Vamos usar x e y, já que vocês estão acostumados. Observe que x e y são variáveis. E ao escolher o valor de x, determinamos o valor de y. Assim, chamamos x de variável independente e y de variável dependente. Entenderam?

Todavia, quando a aluna Cleo se manifesta, a professora elabora uma questão que coloca a turma numa perspectiva desenvolvimental:

> **Professora:** Entenderam?
> **Cleo:** mais ou menos.
> **Professora:** Você consegue pensar uma fórmula, de maneira que você consiga relacionar em nosso exemplo o número de bilhetes vendidos e o número de valores pagos?
> **Cleo:** sei não.
> **Professora:** Meninos do grupo da Cleo, vamos ajudar. Vocês sabem?
> **Marcelo:** Se a gente multiplica a quantidade de bilhetes por 15 sempre, daí sempre descobre o valor pago.
> **Professora:** Entenderam?

Nesse momento, o sinal toca. Portanto, a professora ao perceber a zona de desenvolvimento proximal expressa na resposta do aluno Marcelo, finaliza o encontro deixando uma dica para que os alunos pensem sobre o assunto:

> **Professora:** Certo. Marcelo, esse é o caminho. Só falta escrever o que disse na linguagem matemática. Gente, por favor, só um minuto. Então vamos fazer assim, vamos chamar de x a quantidade de bilhetes adquiridos e y a quantidade de valores pagos. Então, pensem como relacionar x e y. Com essa dica e com a observação do Marcelo, terminem em casa. Continuaremos na próxima aula.

3.7.3 Criando o modelo da relação universal do conceito de função e introduzindo a transformação no modelo

O terceiro encontro aconteceu transcorridas duas semanas após o segundo encontro, devido à combinação entre um feriado e a reduzida carga horária semanal de matemática. É importante ressaltar que essa descontinuidade das aulas prejudicou o processo de ensino-aprendizagem.

No inicio da aula, a aluna Cleo incumbida da discussão do item “b” do problema 1, foi a lousa e colocou um modelo incompleto. E, embora a professora tenha se precipitado em fornecer de imediato à resposta correta, ela conseguiu estabelecer alguns questionamentos:

> **Cleo**: 15x.
> **Professora:** Não entendi? Vocês entenderam? O que é 15x?
> **Cleo:** Uai não tá certo? Assim, oh, se compro um ingresso pago 15 reais, se compro dois ingressos pago 30 reais e assim vai.
> **Professora:** Gente, por favor, cadê o y? O correto é y=15x. O produto 15x não é uma função. Só tem sentido y=15x. Ok? Aliás, o que são x e y?

Após uma pausa, o aluno Roger se manifestou ressaltando não gostar de matemática em virtude de questões tais como essa, onde a falta de um termo faz grande diferença no resultado final. A professora explicou o porquê da situação e o aluno Roger demonstrou entendimento:

> **Professora:** Não pode ser! 15x é apenas uma constante multiplicada por x e nem sabemos quem é x, se não falar. Aliás, se não escrevermos o que significa x, então x pode significar qualquer coisa. Queremos expressar uma relação entre duas grandezas e por isso precisamos de duas variáveis. A variável que representa a quantidade de bilhetes adquiridos e a variável que representa os valores pagos. Vamos chamar uma de x e a outra de y. Mas poderíamos chamá-las também de qualquer outra letra. Aí tanto faz. Por favor, Cleo conserte a resposta e escreva o que significa x e o que significa y em nosso problema.
> **Professora:** Roger entendeu porque é preciso relacionar x e y e escrever as coisas direito?
> **Roger:** Agora sim. Dessa vez a senhora ganhou. (risos).

Um fato que chamou a atenção foi a atitude do aluno Taylor em não compartilhar com os colegas do mesmo grupo a resolução do item que ficaram responsáveis. Quando a aluna Bia, represente do grupo, expôs uma resposta errada na lousa, a professora interveio:

> **Professora:** Todos fizeram assim?

> **Taylor:** Eu não fiz assim. O meu deu 440.
> **Professora:** E você discutiu com eles a sua ideia?
> **Taylor:** Não.
> **Professora:** Por que Taylor? O trabalho é em grupo e não individual. Você e do grupo da Bia, não é mesmo?
> **Taylor:** Sim, do mesmo grupo. Ah, se eles pensam de outro jeito... E depois a senhora explica se está certo ou não. Vai que estou errado.
> **Professora:** E se você estiver errado, qual é o problema?
> **Taylor:** Não tem, mas é chato. Eu gosto mais de fazer sozinho.
> **Professora:** Se você estiver errado é uma oportunidade para descobrir e aprender. Estudando junto crescem você e seus colegas. Alguém de outro grupo fez diferente?

Na atitude de Taylor, observa-se as dificuldades que alguns alunos apresentam em relação a uma metodologia que exige maior interação e respeito para com os colegas. Isso se justifica pelo fato de estarem acostumados a metodologias passivas, nas quais o professor é o centro do processo de ensino-aprendizagem e, praticamente, inexiste interação entre os colegas. Em contrapartida, pode-se verificar também a resistência sutil da aluna Jamaica quando o aluno Taylor colocou a sua ideia:

> **Professora:** Taylor, como você achou o valor de 6600?
> **Taylor:** Peguei 4500 e somei com o valor do iphone e daí deu 6600. É porque para sobrar dinheiro para despesa, primeiro precisa pagar o iphone que a gente comprou para rifa.
> **Professora:** Excelente raciocínio. Só não gostei porque você poderia primeiramente ter discutido com o seu grupo. O trabalho não é individual. Você tem muito a ensinar e a aprender no trabalho em equipe. Quando a gente ensina a gente aprende duas vezes. Pense sobre isso. Vamos lá, pessoal vocês entenderam a colocação do Taylor?
> **Jamaica:** Eu não entendi não.
> **Professora:** O que você não entendeu?
> **Jamaica:** Não entendi nada do que ele falou. Eu fiz igual a Bia e pensei que tava certo.

Naquele momento, a professora poderia ter se aproveitado para colocar os alunos em interação. Contudo, talvez porque a aula já estivesse acabando, a professora se limitou a esclarecer a dúvida da aluna Jamaica:

> **Professora:** Pessoal, ao fazer a rifa, houve um gasto inicial, o valor do iphone para rifar. Concordam? Então, além da despesa de 4500 reais, temos a despesa de 2100 reais referente ao iphone. Então, a despesa total é 4500 reais mais 2100 reais e, portanto, 6600 reais. Concordam? Então escrevemos: $y=15x \rightarrow 6600=15x \rightarrow x=440$, ou seja, 440 é o valor mínimo de bilhetes necessários para pagar o iphone e ainda suprir uma despesa de 4500 reais.

Ao final, a aluna Jamaica demonstrou compreensão e o sinal tocou.

3.7.4 Utilizando o modelo da relação universal do conceito função para resolver diversos problemas

No início desse encontro, foi possível perceber claramente o envolvimento e satisfação de alguns alunos com a nova organização de ensino, o que evidencia o desejo pelo aprendizado e a receptividade pelo método, apesar das dificuldades também apresentadas:

> **Leidy:** Que dia que essas aulas vão acabar?
> **Professora:** Até o meio do ano pelo menos vamos estudar assim. Por quê? Não está aprendendo?
> **Leidy:** Estou gostando, a gente tira mais dúvidas. Eu tava até falando com a Bia, estudando desse jeito a gente aprende mais.
> **Professora:** Pessoal, vocês ouviram o que a Leidy falou. Ela disse que está aprendendo mais com a nossa experiência. Vocês concordam?
> Muito barulho.
> **Taylor:** eu acho mais difícil. Prefiro normal mesmo. Gosto mais de estudar sozinho. A gente fica perdendo tempo. E também acho melhor estudar a teoria para depois fazer os exercícios.

Em seguida, a aluna Eva, primeira a apresentar as conclusões do seu grupo na lousa, por meio de sua fala, nos forneceu indícios de que os alunos realmente estavam conseguindo captar o princípio geral do conceito e a construir um sistema de tarefas particulares:

> **Eva:** Certo. E se o bilhete for alterado para 20 reais será o mesmo raciocínio. Assim um bilhete custa 20 reais, dois bilhetes 40 reais e assim vai. E podemos usar a mesma ideia anterior. Tudo fica bem parecido.
> **Professora:** Parabéns a Eva e ao grupo da Eva. Estou gostando muito.

Também merece destaque a participação da aluna Maria Eduarda, representante do grupo 2, que apresentou dificuldades não necessariamente na aprendizagem do conceito de função, mas em problemas de aritmética:

> **Professora:** Olha só, nesse raciocínio, se o aluno conseguiu 0,8 nas atividades, quanto ele tirou na prova?
> **Maria Eduarda:** Hum. Sete?
> **Professora:** Vinte por cento de sete é 0,8?
> **Maria Eduarda:** Não? Eu não sei.

Mais especificamente, a aluna demonstrou dificuldades em efetuar operações que exigem o domínio da lógica e dos conceitos das operações básicas. Outros alunos também manifestaram dificuldades em relação à matemática básica. Nesse sentido, a professora se esforçava tentando ensinar o conhecimento anterior, sobretudo, disponibilizando horários extraclasses para que os alunos com dificuldades em matemática básica pudessem ser mais bem assistidos: “Poderíamos marcar uma aula em algum horário vago para estudarmos matemática básica, caso contrário, não tem como avançar”.

3.7.5 Ensino problêmico organizado na perspectiva das ações de aprendizagem de Davydov

O aluno Jiló, representante do grupo 5, sem maiores dificuldades, representou e discutiu por meio de um diagrama, a relação expressa na tarefa designada ao grupo. Desse modo, pode-se dizer que os alunos estavam avançando nas ações de Davydov, tendo em vista que eles conseguiram identificar a relação geral do conceito de função e criar um modelo que a representasse.

Em seguida, a professora distribuiu outra atividade, contendo um problema que privilegia o conceito de função e que notadamente exige que o aluno realize as duas primeiras ações de Davydov.

Os alunos tiveram dificuldades em transformar os dados da tarefa, uma vez que essa primeira ação exige uma leitura aprofundada para identificar os dados. Nesse sentido, a professora circulava entre os grupos mediando os questionamentos e orientando-os na perspectiva do conceito:

> **Professora:** Silêncio. Pessoal, por favor, vamos prestar atenção aqui oh. Primeira coisa, vocês leram? Conseguiram identificar o problema? Gente tá escrito assim “descubra o que está ocorrendo entre a quantidade de canudos e a quantidade de quadrados”. Então eu tenho que relacionar o quê?
> **Zilda:** A quantidade de canudos e a quantidade de quadrados?
> **Professora:** Sim. Vejam a figura I, quantos quadrados? Quantos canudos?
> **Caco:** 1 quadrado e 4 canudos ?
> **Professora:** Isso. Faz uma tabela para facilitar. De um lado você coloca o número de canudos e do outro o número de quadrados. Vamos lá gente. Mãos a obra!

A professora, na tentativa de fazer com que todos os alunos participassem das discussões, direcionava perguntas e, com o decorrer do tempo, alguns alunos se mostravam mais abertos:

> **Professora:** Então, vamos juntos. Alguém vem à lousa para nos ajudar. Alex?
> **Alex:** ah, não quero não. Outro dia.
> **Professora:** Eu ajudo. Vem.
> **Alex:** Ah não, quero não.
> **Professora:** Zilda, vamos lá. Eu ajudo.
> **Zilda:** Eu vou, mas não consegui fazer tudo não.

Neste encontro, os alunos conseguiram identificar os dados da tarefa e compreender o problema. Porém, alguns apresentaram dificuldades na modelação da relação principal:

> **Zilda:** O difícil é adivinhar a fórmula.
> **Maria Eduarda:** É mesmo.
> **Professora:** Que isso! Não existe adivinhar na matemática. Como você fez Taylor?
> **Taylor:** Observei a regra da relação entre canudos e quadrados, com base nisso, fiz tentativas e até que deu certo.
> **Professora:** Isso não é adivinhar, mas observar e deduzir. De qualquer forma, tem outro jeito de fazer e daí vocês podem escolher como preferem pensar.

Embora o aluno Taylor tivesse dificuldades para justificar teoricamente suas resoluções, sobretudo na discussão com colegas, sua linguagem e organização matemática eram excelentes.

3.7.6 As ações de aprendizagem de Davydov

Ao iniciar o encontro, a professora anunciou aos alunos que novamente iriam trabalhar em grupo. Em seguida, distribuiu folhas com atividade, avisando que num prazo de 30 minutos convidaria esporadicamente aos alunos que ainda não participaram das apresentações para discutir a solução na lousa.

Naquele encontro, foram contemplados dois problemas que resultaram em uma infinidade de soluções corretas. Dessa forma, os alunos tiveram a oportunidade de desenvolver a independência cognoscitiva e atingir maior maturidade matemática.

No início da aula, houve muito barulho e a professora transitou entre os grupos incessantemente, buscando mediar o conhecimento por meio de questionamentos e orientações.

Findado o prazo estabelecido para resolução nos grupos, a aluna Luê foi designada pela professora para ir à lousa e discutir o resultado encontrado pelo seu grupo:

> **Professora:** Por favor, Luê.
> **Luê:** Ah não professora. Eu não gosto.
> **Professora:** Até o final do ano, todos virão ao quadro e isso será computado como nota. Caso você não consiga, podemos ajudá-la. O que conta é a participação.

Havia a preocupação constante e o trabalho incansável da professora para que os alunos participassem e interagissem entre si. Nesse sentido, foram observados avanços, sobretudo no envolvimento dos alunos:

> **Professora:** Então Luê, o que você percebeu? Qual aspecto chamou a atenção do seu grupo?
> **Luê:** (risos) Seria variação?
> **Professora:** (risos). Eu perguntei primeiro? Seria gente?
> **Jiló:** Seria. Cada vez que muda a mesada fixa, para ganhar o dobro no final, também muda a quantidade que a pessoa precisa tirar de nota máxima. É isso, né!
> **Professora:** Isso mesmo. Concorda pessoal?
> **Luê:** Foi isso que a gente viu, só ficamos na dúvida na hora de escrever.
> **Professora:** Então, qual é o aspecto principal Luê?
> **Luê:** ah, variação e relação?
> **Professora:** Isso. Mas fale com firmeza. Vocês concordam? Alguém fez diferente?

Percebemos na fala do aluno Caco indícios do desenvolvimento do pensamento teórico, uma vez que ele se utiliza da relação geral (modelo) para estabelecer as relações particulares.

> **Caco:** Agora muito ficou fácil. Se o ordenado fixo for 200 euros, por exemplo, basta eu usar o modelo e fica $600=200 + 50y \rightarrow y=8$ e se $x=400 \rightarrow y=16$ e assim vai. E os resultados são diferentes porque podemos escolher o ordenado fixo. Além do mais, o valor do prêmio por ação é sempre 50 euros.

Ao final da fala do aluno Caco, a professora liberou a turma, tendo em vista que naquele horário haveria uma palestra sobre iniciação científica no ensino médio.

3.7.7 Aspecto nuclear do conceito de função segundo a abordagem de Bourbaki (dinâmica)

No sétimo encontro, foi organizada uma atividade contemplando o aspecto nuclear do conceito de função segundo a abordagem de Bourbaki.

É válido ressaltar que identificar todos os elementos que compõem o conceito de função é, sem dúvida, uma tarefa indispensável, contudo não é suficiente. A essência do conceito de função não está especificamente em seus elementos, mas em uma determinada relação entre esses elementos.

Tendo em vista o nuclear de função, conforme a orientação da professora, cada grupo composto por quatro ou cinco alunos, elegeu oito atividades prediletas e posteriormente considerou uma relação particular[21] entre o conjunto formado pelos integrantes do grupo (conjunto A) e o conjunto formado por tais atividades (conjunto B).

Em geral, os alunos demonstraram que entenderam a tarefa. A aluna Cleo, por exemplo, expôs o digrama do seu grupo na lousa, caracterizando corretamente os elementos e os conjuntos. Em contrapartida, o aluno Ângelo se mantinha em silêncio e se negava a participar, ainda que convidado pela professora:

> **Professora:** Agora quero que o Ângelo me diga se esse diagrama ilustra uma relação.
> **Ângelo:** Ah não, eu não. Eu estou quieto, não estou atrapalhando ninguém. Sei não.

Todavia, a professora prosseguia questionando e propiciando maior interação entre os demais alunos:

> **Professora:** Gil, você pode nos ajudar.
> **Gil:** O quê?
> **Professora:** Esse diagrama que a Cleo colocou ilustra uma relação?
> **Gil:** Sim. É uma relação entre o pessoal do grupo e as atividades.
> **Professora:** Isso. Gil, agora me diga, essa relação é uma função? Aliás, o que é uma função?
> **Gil:** Ah, eu acho que é função sim, mas não sei explicar.
> **Professora:** Alguém sabe me explicar o que é uma função?

A fala da aluna Daiane se aproximou do conceito nuclear ou aspecto central do conceito estudado. E a professora acertadamente buscou mediar o novo conhecimento por meio de questionamentos:

> **Daiane:** A gente estudou que função é uma relação entre grandezas, tipo relação de dependência.
> **Professora:** E você sabe me dar um exemplo?

---

[21] A relação particular é estabelecida entre alunos e atividades prediletas, de tal forma que cada aluno integrante do grupo escolhe uma única atividade no conjunto das atividades prediletas.

> **Daiane:** (silêncio). Ah, acho que essa relação que a gente fez entre nós e as atividades é uma função. É?
> **Professora:** É. Mas tem que justificar direito. Nem toda relação é função. O que é função?

Em geral, os alunos demonstravam caminhar na apropriação do conceito de função, ainda que não tivessem internalizado completamente. Ilustramos um exemplo dessa situação:

> **Cris:** Função é quando uma coisa depende da outra, ou seja, quando está relacionada, né professora? Assim oh, por exemplo, o valor a ser pago pelas rifas do iphone depende do número de rifas que a gente compra.

Durante todo o experimento, por várias vezes, era perceptível que a professora procurava valorizar a contribuição dos alunos, motivando-os a prosseguir por meio de questionamentos:

> **Professora**: Excelente Cris! Você está no caminho certo. Mas quando a gente fala de função, considerando conjuntos e elementos tem um detalhe importantíssimo que vocês precisam identificar. Cris, você sabe me dizer que detalhe é esse? Vamos lá, você consegue. Alguém pode nos ajudar? Quero que vocês entendam que nem toda relação é uma função. Por quê?

Considerando a zona de desenvolvimento proximal dos alunos e o fato de que o conceito de função na abordagem de Bourbaki seria abordado pela primeira vez no ensino de matemática, a professora colocou a definição na lousa e fez alguns questionamentos:

> **Professora:** Dados dois conjuntos A e B, $f: A \rightarrow B$ é função, se para cada $x \in A$ existe um único $y \in B$ tal que $f(x) = y$. Podemos dizer que o diagrama do grupo da Cleo é uma função? Por quê?

Após as inquietações expostas pelos alunos ante a apropriação do novo conhecimento, os indícios de pensamento teórico aparecem na fala do aluno Fred, ao argumentar que certo diagrama apresentado pela professora se tratara de uma função:

> **Fred:** É função porque todo elemento do conjunto A tem correspondente no conjunto B e depois cada elemento do conjunto A corresponde a um único elemento do conjunto B.

Ao final do encontro, a aluna Maria Eduarda nos pareceu insegura em relação à conclusão que o aluno Fred expôs. Todavia, a professora interveio por meio de outro questionamento numa abordagem diferente, fazendo com que a aluna compreendesse:

> **Professora:** Olha só, o elemento “c” está ligado ao elemento “3” e ao elemento “4” (observação referente a um diagrama na lousa). Isso pode?
> **Maria Eduarda:** Ah! Não pode não. Então, não é função. Ah, agora sim. Entendi o que o Fred falou. Naquele caso era mesmo função.

Por fim, os alunos foram relembrados do pós-teste previsto para o próximo encontro e do horário de atendimento que a professora disponibilizava aos alunos com dificuldades.

3.7.8 O exame consciente do aluno sobre suas ações no ensino-aprendizagem do conceito de função

No primeiro momento oitavo encontro, os alunos discutiram a resolução do pré-teste em grupo e não mais apresentaram as dificuldades iniciais. A professora circulava entre os grupos, todavia era solicitada pelos alunos somente para confirmar os resultados.

Tendo em vista que os conhecimentos abordados no pré-teste haviam sido discutidos numa abordagem diferente nas atividades anteriores, pôde-se constatar que houve um salto qualitativo considerável no processo de ensino-aprendizagem do conceito de função.

Contudo, foi perceptível na fala da aluna Lara que os estudantes esperavam que o pós-teste fosse simplesmente a reaplicação do pré-teste e, talvez por terem se preparado para isso, não apresentassem dificuldades na discussão do pré-teste:

> **Professora:** Bom dia pessoal! Sabe o teste do primeiro encontro? Aquele que vocês viviam me cobrando a correção. Então, hoje a nossa revisão será a discussão do teste em grupo e nos 60 minutos restantes faremos uma avaliação individual. Eu estarei passando por todos os grupos, para esclarecer quaisquer dúvidas. Ah, por favor, já avisando, o importante é o domínio do raciocínio. O teste que aplicarei hoje não será o mesmo do aplicado anteriormente, podem ter certeza. Então não gaste a energia na tentativa de memorizar. Ao invés disso, fique atento ao raciocínio. Ok?
> **Lara:** Ah não professora, eu jurava que o teste de hoje seria o mesmo. Tô lascada.

No segundo momento do encontro, conforme o previsto, os alunos realizaram individualmente o pós-teste. Alguns alunos não conseguiram terminar a avaliação no tempo disponibilizado. Contudo, a professora concedeu mais quinze minutos referentes ao intervalo entre aulas, para que terminassem a atividade avaliativa.

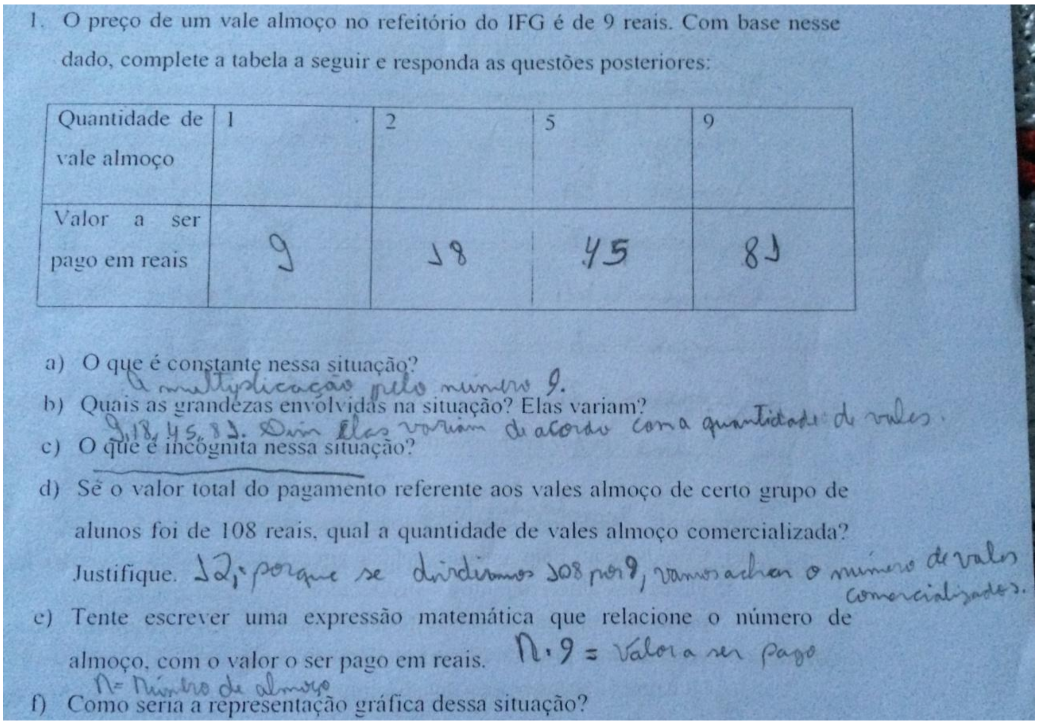
3.8 A APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE FUNÇÃO PELOS ALUNOS MEDIANTE O ENSINO POR MEIO DE PROBLEMAS

No início do experimento didático formativo, os alunos realizaram pré-testes a fim de que se pudessem identificar os seus conhecimentos prévios e melhor organizar o plano de ensino da turma.

Nos pré-testes, 100% dos alunos presentes obtiveram rendimento inferior a 60%. Mais especificamente, 15 alunos entregaram o pré-teste com todos os problemas em branco, 21 alunos obtiveram menos de 60% de acertos e 2 alunos da turma não compareceram.

Os pré-testes evidenciaram que a maioria dos alunos, além de apresentar problemas em relação à compreensão dos conteúdos básicos matemáticos, possui dificuldades de interpretação de texto. Percebeu-se também, nessas primeiras manifestações escritas, que, embora alguns alunos sinalizem o entendimento do conceito de função, tal compreensão era demasiadamente fragmentada e se situava no nível puramente empírico. Talvez por isso, os alunos não conseguiam nem mesmo transpor o que estava sendo pedido no enunciado para uma linguagem matemática, conforme se observa na Figura 5, a seguir:

Figura 5 – Atividade pré-teste.



1. O preço de um vale almoço no refeitório do IFG é de 9 reais. Com base nesse dado, complete a tabela a seguir e responda as questões posteriores:

Quantidade de vale almoço	1	2	5	9
Valor a ser pago em reais	9	18	45	81

a) O que é constante nessa situação?
A multiplicação pelo número 9.
b) Quais as grandezas envolvidas na situação? Elas variam?
9, 18, 45, 81. Sim Elas variam de acordo com a quantidade de vales.
c) O que é incógnita nessa situação?
d) Se o valor total do pagamento referente aos vales almoço de certo grupo de alunos foi de 108 reais, qual a quantidade de vales almoço comercializada? Justifique. 12; porque se dividirmos 108 por 9, vamos achar o número de vales comercializados.
e) Tente escrever uma expressão matemática que relacione o número de almoço, com o valor o ser pago em reais. n · 9 = Valor a ser pago
n = Número de almoço
f) Como seria a representação gráfica dessa situação?

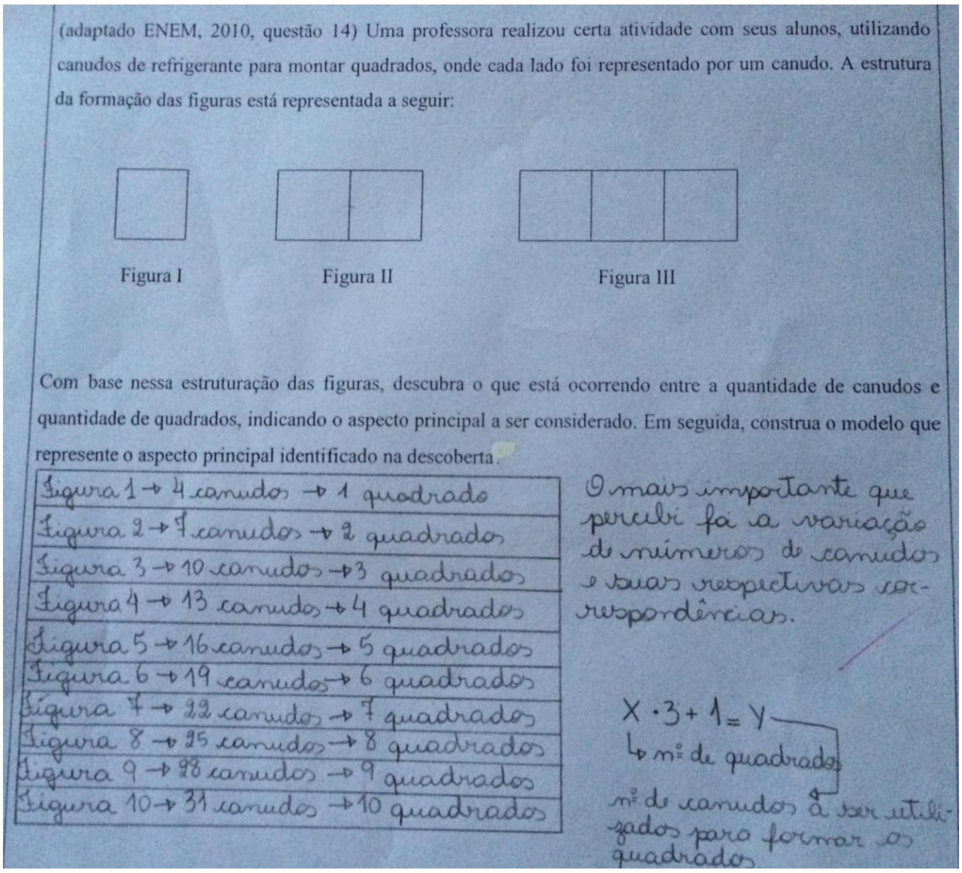
Fonte: elaborado pela autora.

Os pós-testes foram realizados com o objetivo de avaliar a interação e o alcance da organização de ensino em face da aprendizagem do aluno. Os testes realizados permitiram aos alunos avaliar os seus próprios desenvolvimentos em face do processo de ensino-aprendizagem.

Durante o experimento, mediados pela professora colaboradora, os alunos demonstraram um avanço em suas manifestações orais e escritas quando convidados a socializar o conhecimento na lousa.

Na correção dos pós-testes também foi possível constatar avanços nas manifestações escritas. Por exemplo, no problema apresentado na Figura 6, a seguir, contemplado no pós-teste, o aluno encontrou o modelo da relação desejada e demonstrou certa compreensão, embora devesse melhor justificar a relação entre as quantidades de canudos e quadrados com base na teoria e não apenas indicando a fórmula matemática:

Figura 6 – Problema apresentado no pós-teste



(adaptado ENEM, 2010, questão 14) Uma professora realizou certa atividade com seus alunos, utilizando canudos de refrigerante para montar quadrados, onde cada lado foi representado por um canudo. A estrutura da formação das figuras está representada a seguir:

Figura I Figura II Figura III

Com base nessa estruturação das figuras, descubra o que está ocorrendo entre a quantidade de canudos e quantidade de quadrados, indicando o aspecto principal a ser considerado. Em seguida, construa o modelo que represente o aspecto principal identificado na descoberta.

Figura 1 → 4 canudos → 1 quadrado
Figura 2 → 7 canudos → 2 quadrados
Figura 3 → 10 canudos → 3 quadrados
Figura 4 → 13 canudos → 4 quadrados
Figura 5 → 16 canudos → 5 quadrados
Figura 6 → 19 canudos → 6 quadrados
Figura 7 → 22 canudos → 7 quadrados
Figura 8 → 25 canudos → 8 quadrados
Figura 9 → 28 canudos → 9 quadrados
Figura 10 → 31 canudos → 10 quadrados

O mais importante que percebi foi a variação de números de canudos e suas respectivas correspondências.

$X \cdot 3 + 1 = Y$

↳ nº de quadrados

nº de canudos a ser utilizados para formar os quadrados

Fonte: elaborado pela autora.

Nos pós-testes realizados, aproximadamente 95% dos alunos presentes conseguiram acertar pelo menos 60% dos itens propostos. Mais especificamente, 1 aluno acertou todos os itens, 20 alunos acertaram 70% dos itens, 12 alunos acertaram 60%, 2 alunos acertaram 40% e 3 alunos não compareceram. Portanto, comparando os resultados entre os pré-testes e os pós-testes, pode-se afirmar que ocorreu um avanço considerável no processo de aprendizagem.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desejo e a necessidade de superação das dificuldades de ensino-aprendizagem em Matemática motivaram a escrita desta tese. Nesse sentido, por meio da intervenção na organização de ensino, foram feitos esforços para analisar a aprendizagem do conceito de função por alunos do ensino médio. O estudo se apoiou nos fundamentos das teorias do Ensino Desenvolvimental de Davydov e do Ensino Problêmico de Majmutov.

Além das teorias citadas acima, buscou-se apoio em obras de autores da matemática, da educação matemática, da história da matemática, em dissertações, em teses e em publicações que contemplaram o conceito de função, visando deliberadamente organizar o ensino com vistas ao desenvolvimento do pensamento teórico, da criticidade, da independência cognoscitiva e da criatividade.

O ponto de partida para esta pesquisa foi o pressuposto de que a organização do ensino, conduzida pelo professor, está intrinsecamente relacionada à qualidade da aprendizagem apresentada pelo aluno, podendo, inclusive, auxiliar no enfrentamento e na superação dos graves problemas de aprendizagem que se verifica em relação à matemática no contexto escolar brasileiro. Desse modo, tendo em vista que na abordagem histórico-cultural o ensino por problemas é recomendado para instrução, inclusive por Davydov, procurou-se utilizar, ao mesmo tempo, o ensino desenvolvimental formulado por Davydov e o ensino problêmico formulado por Majmutov.

Como já mencionado anteriormente, o ensino problêmico também é um tipo de instrução que tende ao desenvolvimento. Tal ensino está ancorado, principalmente, na organização de situações problêmicas pelo professor, de forma a proporcionar condições para que o aluno, no processo de apropriação dos objetos contemplados, também aprenda a produzir outros conhecimentos de forma consciente e crítica, desenvolvendo a criatividade e formando a independência cognoscitiva.

Com esses fundamentos, a partir da análise do conteúdo de função, foi organizado um experimento didático formativo por meio de um plano de ensino de dezesseis aulas, que posteriormente foi ministrado pela professora, de uma turma de alunos do Instituto Federal de Goiás, sob a observação da professora pesquisadora.

Antes da realização do experimento didático formativo, visando identificar a zona de desenvolvimento proximal dos alunos e elaborar o plano de ensino, foram aplicados pré-testes, abordando dois problemas que necessitavam do conceito de função para serem resolvidos.

É importante ressaltar também que, antes e durante o experimento, por meio de observações e entrevistas, foram realizadas ações no intuito de conhecer o contexto sociocultural, para, a partir dos motivos dos alunos, estabelecer uma necessidade de solução de problemas vinculada às esses motivos.

Realizada a pesquisa, pode-se afirmar que a escolha das categorias teóricas articulada, sobretudo, à análise minuciosa do desenvolvimento do experimento didático formativo e do posterior confronto dos dados empíricos foi acertada. Além do mais, por eles foi possível constatar que o objetivo inicial foi alcançado.

Convém retomar a questão inicial que norteou a pesquisa: como estruturar o ensino aproximando as teorias do Ensino Desenvolvimental de Davydov e do Ensino Problêmico de Majmutov para que o aluno aprenda o conceito de função? Para mais bem responder, é necessário detalhar o problema nos seguintes questionamentos: Quais as aproximações e diferenças entre as teorias do Ensino Desenvolvimental de Davydov e do Ensino Problêmico de Majmutov? Considerando-se estas teorias, qual pode ser indicado como aspecto nuclear do conceito de função a ser apreendido pelo aluno? De que forma organizar o ensino do conceito de função a partir dessas teorias? Que contribuições e que limitações podem ser encontradas no ensino do conceito de função por meio de problemas, fundamentado nas teorias de Davydov e de Majmutov?

Respondendo ao primeiro questionamento, os resultados apresentados permitem reiterar como aspecto original e inédito desta pesquisa o esforço teórico, ao mesmo tempo ousado e humilde, de extrair das teorias Ensino Desenvolvimental de Davydov e Ensino Problêmico de Majmutov contribuições para o ensino de função por meio de problemas. Os resultados também mostram que essas teorias se complementam e se aproximam em vários aspectos teóricos: a forma de organização de ensino deve voltar-se ao desenvolvimento do pensamento teórico do aluno; os alunos devem aprender os objetos de conhecimentos a partir de processos investigativos e não como conclusões; o processo de ensino-aprendizagem deve proporcionar a apropriação ativa e criativa do conhecimento pelo aluno; devem ser introduzidas tarefas com caráter de problemas a serem resolvidos, mediante investigação pelos alunos; a investigação deve contemplar as contradições existentes nos objetos de conhecimento.

Em relação às diferenças entre as teorias, argumentamos que o Ensino Desenvolvimental de Davydov avança em relação à teoria do Ensino Problêmico de Majmutov, por apontar e descrever as ações e o caminho didático para o desenvolvimento integral do aluno.

Para responder ao segundo questionamento, necessário se faz considerar o conceito de função conforme a abordagem de Bourbaki, tendo em vista ser uma teoria universalmente aceita na comunidade científica. A análise do conceito de função, do modo como foi proposto e realizado no contexto dos objetivos desta pesquisa, permitiu apontar como aspecto nuclear a particularidade da relação entre os elementos dos dois conjuntos envolvidos. Essa particularidade presente nas relações funcionais reside na forma como os elementos dos conjuntos considerados se relacionam. Portanto, na perspectiva de Bourbaki, o aluno precisa apreender como aspecto nuclear para a compreensão do conceito de função a forma específica pela qual os elementos dos conjuntos considerados se relacionam, caso contrário, não restará dúvida de que o conceito elaborado não foi apropriado.

Respondendo a terceira inquietação, sobre de que forma se pode organizar o ensino do conceito de função a partir dessas teorias, encontrou-se que é pela aquisição do modo teórico de pensar esse conceito, em que a organização do ensino privilegie a experiência dos alunos, extraindo daí elementos para a elaboração de problemas que vão exigir deles uma atitude teórica, um método teórico de pensar, para sua resolução.

Por fim, a quarta inquietação, referiu-se às contribuições e limitações que podem ser encontradas no ensino do conceito de função por meio de problemas, fundamentado nas teorias de Davydov e de Majmutov. A esse respeito, as seguintes contribuições podem ser destacadas:

- mudanças qualitativas nas manifestações orais e escritas dos alunos, verificadas, sobretudo nas discussões em sala de aula e no confronto entre os resultados dos pré-testes e pós-testes;

- indícios do desenvolvimento do pensamento teórico e independência cognoscitiva em relação ao conceito de função;

- maior criticidade e criatividade ao lidar com o conceito, propiciadas pela exigência de análises e sínteses a partir da compreensão do seu desenvolvimento lógico histórico;

- maior interação entre os alunos, o que possibilitou, inclusive, por meio da mediação, melhor aprendizado;

- maior envolvimento e comprometimento dos alunos para com a apropriação do conceito de função.

Quanto às contradições identificadas na utilização dessas teorias para concretizar o ensino do conceito de função, no decorrer da pesquisa destacam-se:

- o tempo reduzido para o estudo desse conceito, em face à reduzida carga horária da disciplina de matemática no currículo da escola investigada;

- a resistência apresentada inicialmente pelos alunos habituados ao estudo individual, transmissivo e passivo;

- a exigência de que o professor, primeiramente, conheça o desenvolvimento lógico-histórico do conteúdo enquanto um conceito e não apenas uma definição, o que não é uma condição objetiva na realidade escolar brasileira quanto ao ensino de matemática em geral e de função em particular;

- a exigência de criatividade por parte do professor para propor problemas em uma forma que, de fato, se caracterize como o ensino por problemas na perspectiva de Davydov e de Majmutov, correspondendo aos princípios desses teóricos;

Os resultados mostraram que é possível aproximar as teorias de Davydov e de Majmutov. Ambas as teorias têm como ponto forte o desenvolvimento do pensamento pela aquisição de conceitos científicos e a ação investigativa do aluno durante a aprendizagem de um conceito. Utilizadas de forma consonante, tais teorias representam uma alternativa aos professores para que os alunos aprendam de modo mais consistente os conceitos matemáticos.

Cabe ressaltar como uma limitação desta pesquisa, e também da pesquisadora, o fato de que a teoria de Davydov, ao exigir a análise lógico-histórica do conceito a ser ensinado no experimento didático, impõe à pesquisadora um enorme desafio: o de realizar um exame epistemológico do próprio conceito, orientando-se pela perspectiva dialética. Esse se configura um exercício complexo e desafiador, uma vez que tanto no contexto da pesquisa em educação matemática como na educação matemática concreta, no interior das escolas, com raras exceções, essa perspectiva não está presente.

Em que pesem as contradições e limitações apontadas, sugere-se Davydov e Majmutov para a aprendizagem do conceito de função, em específico e, mais extensivamente, para que conceitos matemáticos sejam inseridos e ampliados na discussão com os próprios professores e pesquisadores da área de educação matemática.

Devido ao entrelaçamento do conceito de função a outros conceitos e à complexidade do tema, sugere-se, também, que sejam realizadas mais esforços de pesquisa no sentido de aproveitar o potencial das teorias de Davydov e Majmutov para o ensino-aprendizagem dos conceitos.

Ciente de que a finalização desta tese, definitivamente, não avaliou o alcance máximo da aprendizagem promovida pela organização do experimento didático desenvolvido, tendo em vista a dinamicidade da aprendizagem e o tempo demasiado longo para que ela se revele completamente, a conclusão do estudo abre-se para novos horizontes e para futuras investigações.

REFERÊNCIAS

ALEKSANDROV, A. D.; KOLMOGOROV, A. N.; LAURENTIEV, M. A. y otros. *La matemática:* su contenido, métodos y significado. Volume I. Madrid, Alianza Universidad, 1994.

ANNES, A. D. A. *Educação Matemática:* interações no processo de formação de conceitos. 2006. 131f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade de Passo Fundo, Passo Fundo, 2006.

BARONI, R. L.S; OTERO-GARCIA, S. C. *Análise Matemática no Século XIX*. Campinas: SBHMat, 2013.

BAQUERO, R. *Vygotsky e a aprendizagem escolar*. Porto Alegre: editora Artes Médicas, 1998. Tradução do espanhol por Ernani F. da Fonseca Rosa.

BARRETO, A. L. O. *A análise da compreensão do conceito de função mediado por ambientes computacionais*. 2009. 363f. Tese (Doutorado em Educação Brasileira) - Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2009.

BELL, E. T. *Historia de las matematicas*. Tradução R. O. 2ª ed. México: Fundo de Cultura Econômica Editora, 1985.

BERNARDES, M. E. M. B. *Mediações simbólicas na atividade pedagógica:* contribuições do enfoque histórico-cultural para o ensino e aprendizagem. Curitiba: editora CRV, 2012.

BOLÍVAR, O. L. D. *La enseñanza problémica e su incidencia en el aprendizaje del concepto de integral, em estudiantes de uma institución de educación superior de la ciudad de Bucaramanga*. 2009. 151 f. Trabajo de grado para optar al título de Magíster em pedagogia – Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, 2009.

BOYER, C. B. *Tópicos de História de Matemática para uso em sala de aula.* São Paulo: Atual Editora LTDA, 1993.

BRAGA, C. *Função:* a alma do ensino da matemática. São Paulo: Annablume; FAPESP, 2006.

BRAGA, C. *O processo inicial de disciplinarização de função da matemática no ensino secundário brasileiro.* 2003.165 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade de São Paulo, SP, 2003.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio – PCNEM*. Brasília: MEC, 2000. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em 25/03/2015.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. Secretaria da Educação Continuada, Alfabetização, Diversidade e Inclusão. Secretaria da Educação Profissional e Tecnológica. Conselho Nacional da Educação. Câmara Nacional da Educação Básica.

Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica - DCNEPTNM. Brasília: MEC, SEB, DICEI, 2013. Disponível em <http://educacaointegral.org.br/wp-content/uploads/2014/07/diretrizes_curiculares_nacionais_2013.pdf>.

BRITO, M. R. F. *Um estudo sobre as atitudes em relação à matemática em estudantes de 1º e 2º Graus.* 1996. 398f. Tese de Livre Docência - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1996.

BUENO, R. W. S. *As múltiplas representações e a construção do conceito de função*. 2009. 68f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2009.

CARAÇA, B. de J. *Conceitos Fundamentais da Matemática.* Lisboa: Ed. Tipografia Matemática LTDA, 1951.

CEDRO, W. L. *O motivo e a atividade de aprendizagem do professor de Matemática*: uma perspectiva histórico-cultural. 2008. 242f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade de São Paulo, 2008.

CHAIKLIN, S. Developmental teaching in Upper-Secondary School. In: HEDEGGARD, Mariane; LOMPSCHER, Joachim (ed.) *Learning Activity and development*. Aarhus (Dinamarca), Aarhus University Press, 1999. Tradução do inglês por José Carlos Libâneo e Raquel A. Marra da Madeira Freitas.

CORREA, J. ; MACLEAN, M. Era uma vez... Um vilão chamado matemática: um estudo intercultural da dificuldade atribuída à matemática. *Psicologia, Reflexão e Crítica*, Porto Alegre, v. 12, n.1, 1999.

DAMAZIO, A. O Processo de Elaboração do Conceito de Potenciação de Números Fracionários: uma abordagem histórico-cultural. *Bolema*: Boletim de Educação Matemática, Vol. 24, n. 38, 2011.

DANIELS, H. (Org.). *Uma introdução a Vygotsky.* São Paulo: Loyola, 2002.

DANTE, L. R. *Didática da Resolução de Problemas de Matemática.* São Paulo: Editora Ática, 1989.

DAVÝDOV, V. V. *Tipos de Generalización en la enseñanza.* Playa, ciudad de la Habana: Editorial Pueblo e Educación , 1982.

DAVÍDOV, V. V. *La enseñaza escolar y el desarollo psiquico: investigación psicológica teórica y experimental.* Moscu: Editorial Progreso, 1988.

DAVYDOV, V. V. What is real learning activity? In: HEDEGAARD. M.; LOMPSCHER, J. (Eds.), *Learning, activity and development*. Aarhus: Aarhus University Press, 1999. Tradução do inglês por Cristina Pereira Furtado, com revisão de José Carlos Libâneo e Raquel A. Marra da Madeira Freitas.

DAVYDOV, V.; MÁRKOVA, A. La concepción de la atividad de estúdio de los escolares. In: SHUARE, Marta (comp.). *La psciología evolutiva y pedagógica em la URSS*. Antología. Moscú: Editorial Progreso, 1987.

EVES, H. *Introdução à história da Matemática.* Campinas, SP: Ed. UNICAMP, 2011.

FERREIRA, M. S., *Buscando caminhos uma metodologia para o ensino-aprendizagem de conceitos*. Brasília: Liberlivro, 2009.

FONSECA, V. G. *O uso de tecnologias no ensino médio:* a integração de mathlets no ensino de função afim. 2011. 141f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011.

FREITAS, R. A. M. M. *Teoria Histórico-Cultural e Pesquisa:* O Experimento Didático como Procedimento Formativo. Texto de uso restrito para orientação de projetos de pesquisa de alunos vinculados ao Grupo de Estudos sobre Teoria Histórico-Cultural, da Linha de Pesquisa Teorias da Educação e Processos Pedagógicos, do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Católica de Goiás. Goiânia, 2007.

FREITAS, R. A. M. M. Pesquisa em Didática*:* o experimento didático formativo. In: X ENCONTRO DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO DA ANPED CENTRO-OESTE, *Anais*... 2010, UBERLÂNDIA.

FREITAS, R. A. M. M. Aprendizagem e formação de conceitos na teoria de Vasili Davydov. In: LIBÂNEO, José Carlos; SUANNO, Marilza Vanessa Rosa; LIMONTA, Sandra Valéria (Orgs.). *Concepções e práticas de ensino num mundo em mudança.* Diferentes olhares para a Didática. Goiânia: CEPED/PUC GO, 2011, p. 71-84.

FREITAS, R. A. M. M. Ensino por problemas: uma abordagem para o desenvolvimento do aluno. *Educação e Pesquisa*: Revista da Faculdade de Educação da USP, Vol. 38, n.2, 2012. Disponível em <http://www.scielo.br/pdf/ep/2011nahead/aop478.pdf>. Acesso em 25/03/2015.

GARNIER, C.; BEDNARZ, N.; ULANOSVSKAYA, I. (Orgs). *Após Vygotsky e Piaget:* Perspectivas Social e Construtivista Escolas Russa e Ocidental. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

GUIMARÃES, R. S. *Atividades para o aprendizado do conceito matemático de função.* 2010. 201f. Dissertação (Mestrado profissional). Universidade Federal de São Carlos, São Carlos/SP, 2010.

HEDEGAARD, M. A zona de desenvolvimento proximal como base para o ensino. In: DANIELS, Harry (Org.). *Uma introdução a Vygotsky*. São Paulo: Loyola, 2002.

HEDEGAARD, M.; CHAIKIN, S. A abordagem do "duplo movimento" no ensino. In:______;______. *Radical-local teaching and learning:* a cultural historical approach. Aarhus: University Press, 2005. Tradução do inglês de José Carlos Libâneo e Raquel A. Marra da Madeira Freitas.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D. e outros. *Matemática:* ciência e aplicações. Volume I. São Paulo: Saraiva, 2013.

KARLSON, P. *A Magia dos Números.* Rio de Janeiro: Ed. Globo, 1961.

KOPNIN, P. V. *A dialética como lógica e teoria do conhecimento.* Rio de Janeiro. Coleção Perspectivas homem, tradução Paulo Bezerra, Civilização Brasileira, 1978.

KOSIK, K. *Dialética do concreto.* Rio de Janeiro: Paz & Terra, 2002.

LEFEBVRE, H. *Lógica Formal Lógica Dialética.* Tradução de Carlos Nelson Coutinho. 5ª ed., Rio de Janeiro, Editora Civilização Brasileira, 1991.

LEMES, N. C. S. *Evidências da produção de sentidos dos princípios da proposta didática lógico-histórica da álgebra por professores de matemática em atividade de ensino.* 2012. 153f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2012.

LEONTIEV, A. N. Uma contribuição à teoria do desenvolvimento infantil. In: VIGOTSKII, L. S., LURIA, A. R., LEONTIEV, A. N. *Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem*. São Paulo: Ícone/EDUSP, 1988.

LIBÂNEO, J. C. A aprendizagem escolar e a formação de professores na perspectiva da psicologia histórico-cultural e da teoria da atividade. *Educar*, Curitiba, n.24, p. 113-147, 2004.

LIBÂNEO, J. C. A integração entre didática e epistemologia das disciplinas: uma via para a renovação dos conteúdos da didática. In: SIMPÓSIO "EPISTEMOLOGIA E DIDÁTICA" – XV ENDIPE, *Anais...* 2010.

LIBANEO, J. C.; FREITAS, Raquel Aparecida Marra da Madeira. Vasily Vasilyevich Davydov: a escola e a formação do pensamento teórico-científico. In: LONGAREZI, Andréa Maturano; PUENTES, Roberto Valdes (Orgs.). *Ensino desenvolvimental*: vida, pensamento e obra dos principais representantes russos. Uberlândia: Editora Edufu, 2013, v. 1, p. 315-350.

LOMPSCHER, J. Learning activity and its formation: ascending from the abstract to the concret. In: HEDEGAARD, M; LOMPSCHER, J. (Ed). *Learning activity and development*. Aarhus (Dinamarca): Aarhus University Press. 1999.

MACIEL, P. R. C. *A construção do conceito de função através da história da matemática*. 2011. 95f. Dissertação (Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática) - Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, Rio de Janeiro, 2011.

MADEIRA, S. C. *Prática: uma leitura histórico-crítica e proposições davydovianas para o conceito de multiplicação*. 2012. 165f. Dissertação (Programa de Pós-graduação em Educação) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, 2012.

MAJMUTOV, M. I. (1983). *La Enseñanza Problémica.* Habana: Pueblo y Revolución.

MIGUEL, A.; GARNICA, A. V. M.; CAMARGO, S. M.; D'AMBRÓSIO, U. A educação matemática: breve histórico, ações implementadas e questões sobre sua disciplinarização. *Revista Brasileira de Educação*. São Paulo, n. 27, set./out./nov./dez. 2004.

MORAES, S. P. G.; MOURA, M. O. Avaliação do Processo de Ensino e Aprendizagem em Matemática: contribuições da teoria histórico-cultural. *Bolema:* Boletim de Educação Matemática, Vol. 22, n. 33, 2009.

MOYSÉS, L. *Aplicações de Vygotsky à Educação Matemática.* 7ed. São Paulo: Papirus, 2006.

NÚÑES, I. B. *Vygotsky, Leontiev, Galperin*: formação de conceitos e princípios didáticos. Brasilia: Liber Livro, 2009.

OLIVEIRA, M. K. *Vygotsky Aprendizado e desenvolvimento Um processo sócio-histórico.* São Paulo: Editora Scipione, 2004.

OLIVEIRA, D. C. *Indícios de apropriação dos nexos conceituais da álgebra simbólica por estudantes do clube da matemática.* 2014. 255f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2014.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.) *Pesquisa em educação matemática:* concepções e perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 199-218.

ORAMAS, M. S.; TORUNCHA, J. Z. *Hacia una Didáctica Desarrolladora.* Habana: Pueblo y Revolución, 2002.

PANOSSIAN, M. L. *Manifestações do pensamento e da linguagem algébrica de estudantes:* indicadores para organização de ensino. 2008. 179f. Dissertação (Mestrado em Educação: Ensino de Ciências e Matemática) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.

PANOSSIAN, M. L. *O movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos como princípio para construção do objeto de ensino da álgebra.* 2014. 317f. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

PANOSSIAN, M. L. O Movimento Histórico e Lógico dos Conceitos e a Constituição do Objeto de Ensino da Álgebra. In: XIV CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, *Anais...* Santiago, 2015. Disponível em <http://xiv.ciaem-iacme.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/621/90>. Acesso em 16/03/2015.

PERES, T. F. C. *Volume De Sólidos Geométricos* – Um Experimento De Ensino Baseado Na Teoria De V. V. Davydov. 148 f. Dissertação de Mestrado (Programa de Pós-graduação em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de Goiás, Goiânia, 2010.

PERES, T. F. C.; FREITAS, R. A. M. M. Matemática no Ensino Médio: ensino para a formação de conceitos e desenvolvimento dos alunos. *Práxis Educativa*, Ponta Grossa, V.8, n.1, p.173-196, jan./jun. 2013.

PINHEIRO, M. F. *O Ensino por problemas nos livros de química:* uma análise do conceito de estrutura atômica. 188 f. Dissertação de Mestrado (Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2012.

POLYA, G. *A arte de resolver Problemas.* Trad. e adap. H. L. A. Rio de Janeiro, Interciência, 1995.

POZO, J. I. (Org.) *A solução de problemas:* aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: Artmed, 1998.

RÍBNIKOV, K. *História de las Matemáticas.* Traducción al español, Editorial Mir Moscú, 1987.

ROCHA, S. M. C. R. *Investigação histórica na formação de matemática*: um estudo centrado no conceito de função. 2008. 188f. Dissertação (Mestrado em Ciências Naturais e Matemática) - Universidade do Rio Grande do Norte, Natal, 2008.

ROSA, V. M. G. *Aprendizagem da equação do 2º grau* – uma análise da utilização da teoria do ensino desenvolvimental. 2009. 124 f. Dissertação de Mestrado (Programa de Pós-graduação em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de Goiás, Goiânia, 2009.

ROSA, J. E. *Proposições de Davydov para o ensino de matemática no primeiro ano escolar:* inter-relações dos sistemas de significações numéricas. 2012. 244f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2012.

ROSENTAL, M. M.; STRAKS, G. M. *Categorías del materialismo dialéctico.* Distrito Federal do México: Grijalbo, 1960.

ROSSINI, R. *Saberes docentes sobre o tema função:* uma investigação das praxeologias. 2006. 382f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

RUBTSOV, V. A Atividade de Aprendizado e os Problemas Referentes à Formação do Pensamento teórico dos Escolares. In: GARNIER, C.; BEDNARZ, N.; ULANOSVSKAYA, I. (Orgs). *Após Vygotsky e Piaget:* Perspectivas Social e Construtivista Escolas Russa e Ocidental. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

SILVA, I. B. G. *Formação de conceitos matemáticos na educação infantil na perspectiva histórico-cultural.* 179f. Dissertação de Mestrado (Programa de Pós-graduação em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de Goiás, Goiânia, 2010.

SILVA, R. S. *Os indícios de um processo de formação:* a organização do ensino no clube de matemática. 2013. 213f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2013.

SILVA, S. T. T. *O Ensino das Funções Exponencial e Logarítmica por Atividades.* 2014. 220f. Dissertação (Mestrado profissional) - Universidade do Estado do Pará, Belém, 2014.

SILVA, M. M. *Estágio Supervisionado:* o planejamento compartilhado como organizador da prática pedagógica. 2014. 246 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2014.

SMIRNOV LEONTIEV et al. Psicologia: *Tratados y Manuales Grijalbo.* México: Editorial Grijalbo S. A, 1969.

SOARES, F. C. C. *O Ensino Desenvolvimental e a aprendizagem de matemática na primeira fase do ensino fundamental*. 2007.118 f. Dissertação de Mestrado (Programa de Pós-graduação em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de Goiás, Goiânia, 2007.

SOUSA, M. C. *O ensino de álgebra numa perspectiva lógico-histórica:* um estudo das elaborações correlatas de professores do ensino fundamental. 2004. 286 f. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 2004.

SOUSA, M. C; PANOSSIAN, M. L; CEDRO, W. C. *Do movimento lógico histórico à organização do ensino:* o percurso dos conceitos algébricos. 1ª Edição. Campinas, SP: mercado das letras, 2014 - (Série Educação Matemática).

SPINOSA, B. *Obras escogidas*. Moscú, 1957, p.352.

SPIVAK, M. *Cálculo Infinitesimal.* Segunda Edição. Editora Reverté S.A. México, 1996.

TOGNI, A. C. *Construção de funções em matemática com o uso de objetos de aprendizagem no ensino noturno*. 2007. 290f. Tese (Doutorado em Informática na Educação) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2007.

UGALDE, W. J. Funciones: desarrollo histórico Del concepto y actividades de enseñanza aprendizaje. *Revista digital Matemática, Educación e Internet*, Vol. 14, N 1. Setiembre - Febrero 2014, Costa Rica. Disponível em <http://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/ARTICULOS_V14_N1_2013/RevistaDigital_Ugalde_V14_n1_2013/index.html>. Acesso em 20/03/2015.

VIGOTSKI, L. S. *A Formação Social da Mente O desenvolvimento dos processos psicológicos superiores*. Tradução José Cipolla Neto; Luís Silveira Menna Barreto e Solange Castro Afeche. 6. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2002.

VIGOTSKI, L. S. *Psicologia Pedagógica*. Tradução Claudia Schilling. Porto Alegre: Artmed, 2003.

VIGOTSKI, L. S. *A construção do pensamento e da linguagem*. Tradução Paulo Bezerra. São Paulo: Martins Fontes, 2010.

VIGOTSKI, L. S. *Pensamento e Linguagem*. Tradução Jefferson Luiz Camargo. 4. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2013.

ZUFFI, E. M; PACCA, J. L. A. O conceito de função: seu desenvolvimento histórico e sua apresentação no Ensino Médio. In: III SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, Vitória, ES. *Anais...*, 1999. V. I, p. 243-254.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Nomes fictícios dos sujeitos da pesquisa

Nome fictício da professora colaboradora: Gabriela

Formação: Mestrado e graduação em Matemática. Graduação nas duas modalidades: bacharelado e licenciatura.

Experiência: cinco anos.

Nomes fictícios dos alunos participantes da pesquisa:

1) Alfredo
2) Aline
3) Alex
4) Ana
5) Ângelo
6) Bel
7) Bia
8) Biscoito
9) Bruno
10) Caco
11) Carol
12) Cida
13) Cleo
14) Cris
15) Daiane
16) Diva
17) Eva
18) Fred
19) Gil
20) Jamaica
21) Jilô
22) Keith
23) Kelly
24) Lara
25) Leidy
26) Leonardo
27) Luê
28) Lya
29) Marcelo
30) Márcio
31) Maria Eduarda
32) Paula
33) Rafa

34) Regis
35) Roger
36) Taylor
37) Vida
38) Zilda

APÊNDICE B – Termo de consentimento livre e esclarecido

O (A) Sr (a) está sendo convidado (a) a participar como voluntário em uma pesquisa. Meu nome é Simone Ariomar de Souza. Minha área de atuação é educação, com foco em matemática. Sou pesquisadora responsável pela execução desta pesquisa de doutorado, sob orientação da Drª Raquel A. M. M Freitas, professora do Programa de Pós-Graduação em Educação (mestrado e doutorado) da PUC Goiás.

Após ler com atenção todas as páginas desse documento, o (a) Senhor (a) terá um tempo sem limites para ser esclarecido (a) sobre as informações a seguir e retirar todas as suas dúvidas comigo e, se julgar necessário, com a orientadora. No caso de aceitar fazer parte do estudo, assine em todas as folhas e ao final deste documento, que está em duas vias, uma das quais lhe será entregue ao final. Ambas as vias também serão assinadas por mim em todas as folhas.

Em caso de dúvida sobre a pesquisa, você poderá entrar em contato comigo ou com a orientadora, através do telefone 81634600 ou do e-mail sariomars@yahoo.com.br.

INFORMAÇÕES IMPORTANTES QUE O(A) SR(A) PRECISA SABER SOBRE A PESQUISA:

Título: “ENSINO DO CONCEITO DE FUNÇÃO POR MEIO DE PROBLEMAS: CONTRIBUIÇÕES DE DAVYDOV E DE MAJMUTOV”

- Informações sobre quem está aplicando este termo de consentimento: eu sou pesquisadora responsável por essa pesquisa e a estou desenvolvendo como parte das atividades do Curso de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Educação da Pontifícia Universidade Católica de Goiás, no qual estou regularmente matriculada. Sou professora no Instituto Federal de Goiás - Inhumas e atualmente me encontro de licença para dedicar-me exclusivamente a pesquisa de doutorado que estou realizando.
- O objetivo geral da pesquisa é analisar o ensino-aprendizagem do conceito de função por meio de problemas, com fundamento nas teorias do ensino desenvolvimental de Davydov e do ensino problêmico de Majmutov.
- Detalhamento dos procedimentos: Após assinar este documento, eu o (a) convidarei a participar de entrevista sobre o seu contexto sociocultural e suas limitações/facilidades no processo de ensino-aprendizagem em matemática e participar de observação sobre o contexto sociocultural. A entrevista levará em torno de 10 minutos. A observação será feita durante as

aulas, com previsão de duração de 20 aulas. Também utilizaremos recursos audiovisuais (gravação de voz e vídeo).

- Especificação sobre riscos, prejuízos, desconforto, lesões que podem ser provocados pela pesquisa: em princípio essa pesquisa não oferece nenhum tipo de risco, prejuízo, desconforto ou lesão, exceto a possibilidade mínima de algum cansaço devido ao acréscimo de mais essa em sua rotina, durante a fase de coleta de dados da pesquisa.
- A participação na pesquisa não implicará em nenhum tipo de gasto da parte do Senhor (a), portanto, não necessitando de ressarcimento.
- O benefício de participar dessa pesquisa consiste única e exclusivamente em colaborar com a comunidade científica.
- Esclareço que não haverá nenhum tipo de pagamento ou gratificação financeira pela sua participação.
- Nós garantimos que em momento algum nenhuma informação pessoal que for conhecida sobre o (a) Senhor (a) será divulgada, seus dados permanecerão confidenciais e sua privacidade será totalmente preservada.
- O (A) Senhor (a) tem plena liberdade de não aceitar participar dessa pesquisa e não haverá nenhuma modificação em seu tratamento caso não aceite.
- Os dados coletados serão utilizados apenas para essa pesquisa e não serão armazenados para estudos futuros.

CONSENTIMENTO DA PARTICIPAÇÃO COMO SUJEITO DE PESQUISA

Eu, abaixo assinado, concordo em participar como sujeito voluntário desse estudo, sob-responsabilidade da Profª Simone Ariomar de Souza. Fui devidamente informado (a) e esclarecido (a) pela pesquisadora sobre a pesquisa, os procedimentos nela envolvidos, assim como os possíveis riscos e benefícios decorrentes de minha participação. Foi-me garantido que posso retirar meu consentimento a qualquer momento, sem que isto resulte em qualquer prejuízo para mim.

____

NOME COMPLETO DO PARTICIPANTE

____

ASSINATURA DO PARTICIPANTE

____

NOME COMPLETO DO RESPONSÁVEL PELO ALUNO PARTICIPANTE

ASSINATURA DO RESPONSÁVEL PELO ALUNO PARTICIPANTE

DATA

PARTICIPAÇÃO DO RESPONSÁVEL PELA PESQUISA

NOME DO RESPONSÁVEL

ASSINATURA DO RESPONSÁVEL

DATA DA ASSINATURA

APÊNDICE C – Roteiro das observações

1) Como são as relações pedagógicas entre a professora e os alunos? E entre os estudantes? O que essas relações estão indicando?
   - Que tipo de relações há entre eles? De aceitação, de exclusão, de discriminação, de violência, ou o contrário; - se há agressividade entre eles, ou formas grosseiras e ofensivas de se dirigirem uns aos outros – que valores são explicitados (respeito, cooperação, amizade, solidariedade, afetividade etc.).
   - Que possíveis indícios de tipos de relação com o conhecimento matemático eles manifestam nas relações de sala de aula?
   - Há alunos que fornecem indícios de ter um pensamento mais conceitual e menos conceitual teórico, ou o contrário?
   - Do que os alunos expressam gostar, o que expressam fazer, do que mais gostam de falar ou do que mais falam etc. Isso fornece indícios do que está se apresentando como motivo em sua atividade na escola?
   - Pelos assuntos de interesse, pelas formas de relações, pelo que valorizam e pelo que recusam a valorizar, é possível captar elementos sobre qual está sendo a atividade principal na vida deles? É o jogo, o estudo, as relações com os pares, a relação afetiva, a relação socialmente útil, o trabalho?
   - E a professora? Que tipo de relação com o conhecimento matemático ela expressa? Isso influencia nos alunos? De que modo?
   - Que tipo de ação de ensino da professora tem mais aceitação por parte dos alunos e que tipo tem mais rejeição?
   - A professora valoriza a participação dos alunos? Forma grupos heterogêneos para haver mútuas influencias de ZDP?
2) A professora oportuniza a questão de perguntas, críticas e comentários por parte dos alunos a respeito do objeto de conhecimento? Os alunos são ouvidos e compreendidos em suas dificuldades? Ou a professora demonstra pressa nas respostas impedindo a conclusão do raciocínio por parte dos alunos? Caso o aluno não compreenda o raciocínio na primeira ou segunda vez, a professora procura formas diferenciadas para novas explicações ou desiste do processo de ensino? A professora considera as

perguntas, críticas, erros e dúvidas na elaboração de novos questionamentos? As perguntas individuais são socializadas para proveito geral da turma?

3) Quando as tarefas são destinadas para resolução em casa, existe um espaço na aula posterior para correções e discussões?
4) Quando há atividades em grupos existem predileções entre os estudantes e exclusão de alguns alunos pelos próprios colegas?
5) De que forma a professora aborda o conteúdo? Os recursos utilizados são suficientes para assegurar a aprendizagem (me refiro ao espaço físico (mesa, cadeira, janelas, sala de aula, instituição, biblioteca etc.)?). Os conhecimentos abordados na aula anterior são brevemente resumidos? Há espaço para a história da matemática e a epistemologia do conhecimento? O mestre consegue estimular e aguçar a curiosidade dos alunos através do objeto de conhecimento? Qual a formação acadêmica do professor?
6) Que tipo de ações a professora propõe? Há indícios de que essas ações mobilizem o desejo dos alunos para entrar numa relação de aprendizagem com o objeto de estudo?
7) A professora organiza mecanismos de forma que o aluno perceba o elo entre seus conhecimentos anteriores e o novo conhecimento que está sendo ensinado?
8) Os alunos compreendem claramente os objetivos de aprendizagem propostos pela professora? Empenham-se em manter-se no caminho didático proposto pela professora? Apresentam alguma dificuldade para isso? Os elementos da estrutura da atividade estão presentes no grupo? Os alunos comungam do desejo e da necessidade de conhecer o objeto de estudo?
9) Que tipo de relação com o saber os alunos apresentam em relação à matemática?
10) Que possíveis manifestações da experiência cultural de seu cotidiano os alunos trazem para as relações na sala de aula? Que práticas culturais podem ser desprendidas que há em seu cotidiano a partir daquelas que aparecem nas práticas deles na sala de aula? Ex: família, religião, mídia/TV/internet, leitura, dança, jogos, cigarro, drogas, sexo etc.

APÊNDICE D – Transcrição da entrevista com a professora colaboradora

1) Fale-me a respeito de sua relação com a matemática. Gosta de ensinar matemática?

Eu sou apaixonada por matemática. Confesso sempre fui (risos). Desde criança, minha maior habilidade foi com os números, por isso não tinha dúvidas de que faria um curso na área de exatas. Na escola, eu sempre ajudava meus colegas com dificuldade. E assim começou a questão do ensino de matemática na minha história. Mas, não imaginava desde cedo que seria professora de matemática. Até porque, sempre escutei meus professores reclamando da desvalorização profissional. E é claro, eu não queria isso para mim (risos). Por outro lado, a cada dia me identificava mais com a disciplina de matemática e quando terminava os exercícios, chegava a ajudar a professora a tirar dúvidas dos colegas na carteira. Ela me pedia isso e eu gostava muito, me sentia mais segura e via nisso uma maneira de me preparar para as provas.

Quando chegou a época de prestar vestibular, como sempre estudei em escola pública e, como você sabe na esfera estadual a qualidade do ensino é lamentável, e foi de lá que eu vim, sabia que não tinha condições de ser aprovada de imediato em um curso da área de exatas como engenharia ou computação. Então, pensei assim, vou prestar vestibular para matemática e no decorrer do primeiro ano, continuo estudando para prestar para engenharia ou computação posteriormente. Na verdade, eu nem mesmo sabia direito o que queria. Imaginava assim, começo matemática, não perco tempo, enquanto faço matemática vou prestando vestibular para outro curso.

Então comecei a fazer a faculdade e me identifiquei muito com o curso, de forma que não quis mais nem prestar vestibular para outro curso e nem mesmo tentar transferência. Dentro da faculdade, percebi que havia possibilidades de ser professora de matemática e ao mesmo tempo ter uma vida digna, fazendo o que realmente gostava e gosto.

2) Você fez licenciatura ou bacharelado em matemática? Quanto tempo de experiência profissional?

Fiz o dois. Primeiro fiz bacharelado, porque gosto de matemática e depois via no bacharelado maiores possibilidades de crescimento profissional e valorização no que escolhi. Na verdade, eu não queria trabalhar no estado e sabia que com o bacharelado, teria maiores possibilidades de me ingressar em um mestrado de matemática na UFG e posteriormente prestar concursos em universidades.

Depois que fiz mestrado em matemática e comecei a trabalhar no ensino superior, nessa época sem vínculo efetivo em nenhum lugar, resolvi então a fazer licenciatura porque a maioria dos concursos como você sabe, exige também a licenciatura. No entanto a licenciatura foi ótima para mim, sempre me preocupei muito com a questão da aprendizagem dos meus alunos, mas depois da formação me sinto mais preparada para lidar com as dificuldades. Agora o próximo passo é o doutorado em educação.

Tenho aproximadamente cinco anos de experiência em sala de aula. Sou professora efetiva com dedicação exclusiva no IFG há três anos. E possivelmente, ainda neste ano, também assumirei uma coordenação de curso técnico.

3) Você considera a matemática importante para formação dos nossos adolescentes e jovens?

Sem dúvida, a matemática é muito importante, não apenas em termos de êxito em vestibulares ou concursos, mas em termos de formação humana. A matemática está presente em tudo, no entanto a maioria das pessoas ignora isso porque desconhece a matemática. Sem falar que com a matemática, o aluno desenvolve o raciocínio lógico, aprende ser mais disciplinado e persistente.

4) Como prepara as suas aulas de matemática? Ao preparar às suas aulas, você se apoia em algum referencial teórico?

Primeiro reviso o conteúdo e escrevo as ideias principais que devo abordar. Ainda que já tenha dado a aula várias vezes, sempre estudo novamente, procurando sempre melhorar as aulas com base nas experiências anteriores. Uso vários livros didáticos para preparar as minhas aulas e não me apoio exclusivamente em algum referencial teórico.

5) Você poderia falar sobre as possibilidades, limitações e desafios que se depara no processo de ensino-aprendizagem de matemática, sobretudo no primeiro ano um curso

técnico do ensino médio, no contexto do IFG? Em relação a esses problemas, o que tem feito?

Então, como você sabe no IFG, temos mais flexibilidade e autonomia frente aos problemas. Podemos exigir mais do aluno sem sermos condenados por isso (risos). Outro fato que vejo bastante positivo no IFG é que temos a possibilidade de dedicar exclusivamente à instituição, fazendo um trabalho mais apurado, pois a política de valorização ainda permite isso.

Em particular no primeiro ano técnico do ensino médio, as dificuldades de ensino-aprendizagem em todas as disciplinas, não somente em matemática, são muito maiores se comparada aos demais anos. A começar pelas turmas, que são maiores. Além disso, os alunos em sua maioria chegam muito despreparados e gastam um tempo para a adaptação. Só para você ter uma ideia tem turmas que o processo seletivo não dá nem dois por vaga.

Procuro lidar com essas dificuldades de aprendizagem, de várias formas, uma delas é mudando a dinâmica da minha aula, por exemplo, procuro mostrar aos alunos outros caminhos de resolução. Tento inovar, levando algumas vezes até filmes da história da matemática, na tentativa de que eles vejam a matemática assim como eu vejo e sintam o gosto pelo estudo.

Além disso, também tenho disponibilidade para atender os alunos que quiserem fora do horário de aula regular, pois sou DE (dedicação exclusiva). Procuro inclusive conversar com os alunos problemáticos de forma individual nesse horário, ou mesmo encaminho para serviço de atendimento psicológico da própria instituição.

6) Considerando a turma do experimento, fale-me a respeito das relações em sala de aula. Mais especificamente, relacionamento entre você e os alunos, relacionamento dos alunos entre si e relacionamento dos alunos com o conteúdo de matemática.

Então, creio que tenho um bom relacionamento com os alunos. Procuro tratá-los bem, de maneira igual e com respeito. Sou acessível e sinceramente acho que eles se sentem a vontade para fazer perguntas. Agora a turma conversa muito e não é fácil manter a disciplina. Mas até que eles me respeitam e não tenho maiores problemas.

Os alunos se relacionam razoavelmente bem com os colegas. Não há entre eles maiores problema. Por vezes percebo um ou outro aluno, que é mais tímido, mas nada anormal. Quanto ao relacionamento dos alunos para com a matemática, muito há de ser feito. Em sua maioria, os alunos não gostam de matemática, têm muitas dificuldades em matemática básica e inclusive também em interpretação. Muitas vezes, não leem a tarefa, querem resolvê-la se ao menos entender o que foi pedido. Em geral, eles não têm aquele interesse pela matemática, por isso tenho tentado desde que assumi a turma motivá-los, mas tem sido uma tarefa difícil.

7) Em relação à turma do experimento, você saberia me informar a respeito do perfil econômico dos alunos?

Sim. Em sua maioria são provenientes da classe média baixa ou mesmo da classe baixa. Praticamente todos vêm de escolas públicas e com uma e outra exceção tem muitas dificuldades de aprendizagem não só em matemática, mas em todas as disciplinas.

8) Em sua opinião, a forma de ensinar pode influenciar na questão da aprendizagem dos estudantes?

Sim, claro que pode. Inclusive, como falei, tento mudar a dinâmica das minhas aulas para melhorar a aprendizagem. Tento explicar de formas diferentes para que o aluno tenha a possibilidade de conhecer diversos caminhos e optar pelo que julga mais fácil. Nem sempre o caminho que considero mais fácil é o caminho mais fácil para o aluno.

9) Como compreende o papel do professor e do próprio aluno no processo de ensino-aprendizagem de matemática?

Penso que o papel do professor no processo de ensino aprendizagem em matemática é fundamental, sobretudo no ensino médio, fase em que é mais fácil em relação ao ensino superior, contornar as deficiências básicas e o preconceito em relação à aprendizagem em matemática.

Esse preconceito em relação à matemática, que me refiro é o fato do aluno acreditar equivocadamente que não é capaz de aprender porque a matemática é algo confuso e difícil. Geralmente esse preconceito se traduz em aversão a matemática. Isso é muito comum. E quando aluno chega com essa aversão a matemática, aí só um trabalho psicológico sério pode resolver. Penso que os alunos não gostam de matemática porque adquirem uma visão negativa e distorcida da disciplina.

Penso também que, ainda que o professor se desdobre para ensinar, se o aluno realmente não quer aprender, não tem como o processo de aprendizagem acontecer. Penso que professor e aluno devem se empenhar igualmente e em conjunto. Por isso o papel do aluno no processo de ensino-aprendizagem também é indispensável.

APÊNDICE E – Aspectos socioculturais dos alunos

Nome do Aluno	Idade	Com quem mora?	Profissão do pai	Profissão da mãe	Nível de instrução do pai	Nível de instrução da mãe	Renda familiar
Ângelo	14	Pais	Taxista	Doméstica	Segundo Grau	Ensino Fundamental	Dois salários
Biscoito	14	Mãe	Pedreiro	Manicure	Fundamental	Ensino médio	Dois salários
Daiane	15	Tia	Guarda	Falecida	Fundamental	Falecida	Três salários
Jilô	14	Pais	Comerciante	Do lar	Ensino médio	Ensino Médio	Cinco salários
Leonardo	15	Pai	Marceneiro	Falecida	Fundamental	Falecida	Dois salários
Maria Eduarda	15	Pais	Gari	Cabeleireira	Fundamental	Ensino Médio	Dois salários
Lya	15	Pais	Frentista	Professora	Ensino Médio	Ensino Médio	Não sabe
Rafa	15	Mãe	Não sabe	Doméstica	Não sabe	Ensino Fundamental	Um salário e meio
Taylor	14	Pais	Comerciante	Comerciante	Superior	Segundo Grau	Não sabe
Zilda	15	Mãe	Aposentado	Vendedora	Segundo grau	Segundo Grau	Três salários

APÊNDICE F – Aspectos dos alunos e sua inserção na escola

Nome do Aluno	Atividade preferida	Grau de satisfação com o IFG	Estuda fora do horário de aula?	Gosta da disciplina de matemática?	Considera matemática importante?	Considera a Gabriela uma boa professora de matemática?
Ângelo	Internet	Muito satisfeito	Não	Mais ou menos	Sim	Sim
Biscoito	Conversar	Satisfeita	Sim	Não	Sim	Sim
Daiane	Passear	Muito satisfeita	Às vezes	Mais ou menos	Sim	Sim
Jilô	Internet	Satisfeito	Não	Mais ou menos	Sim	Sim
Leonardo	Jogar	Satisfeito	Não	Não	Não	Sim
Maria Eduarda	Dormir	Muito satisfeita	Sim	Não	Sim	Sim
Lya	Conversar	Muito satisfeita	Sim	Sim	Sim	Sim
Rafa	Jogar Bola	Satisfeito	Não	Mais ou menos	Sim	Sim
Taylor	Estudar	Muito satisfeito	Sim	Sim	Sim	Sim
Zilda	Dançar	Satisfeita	Às vezes	Mais ou menos	Sim	Sim

APÊNDICE G – Plano de ensino

Nível de ensino: Ensino Médio 1º ano.

DISCIPLINA: Matemática

N. de aulas: 16 aulas de 45 minutos cada (8 encontros)

CONCEITO: FUNÇÃO

PRINCÍPIO GERAL: **RELAÇÃO ESPECÍFICA ENTRE OS ELEMENTOS DOS CONJUNTOS (BOURBAKI)** /RELAÇÃO DE DEPENDÊNCIA/VARIAÇÃO (GÊNESE)

Conteúdos	Objetivos específicos	Objetivo Geral	Aulas	Ações
Noção intuitiva de função;	Formação inicial do conceito de função;	Formação inicial do conceito de função.	02	Diagnosticando a zona de desenvolvimento proximal e iniciando a compreensão do desenvolvimento do conceito de função (realização dos pré-testes e a discussão preliminar sobre o lógico-histórico do conceito de função);
O conceito de função segundo a abordagem de Bourbaki;	Desvendar os principais aspectos relacionados à gênese e evolução do conceito de função;		02	O aspecto nuclear do conceito de função: identificando a relação universal por meio de problemas (transformação dos dados da tarefa a fim de revelar a relação universal do objeto de estudo: discussão do problema 1: item “a”);
Função como uma relação especial.	Compreender a gênese e a evolução do conceito função como construção coletiva proveniente do desejo e da necessidade de relacionar objetos, episódios ou quaisquer partes distintas;		02	Criando o modelo da relação universal do conceito de função e introduzindo a transformação no modelo (Modelação e transformação da relação universal: discussão do problema 1: itens “b”, “c” e “d”);
			02	Utilizando o modelo da relação universal do conceito de função para resolver diversos problemas (discussão dos problemas 1 (item “e”) e 2 (item “a”, “b”, “c” e “d”));

	Desenvolver o conceito intuitivo de função (correspondência, dependência, variável e regularidade) e por fim formalizá-lo; Realizar mudanças cognitivas na forma de compreender o conceito de função.		02	O ensino problêmico organizado na perspectiva das ações de aprendizagem de Davydov (discussão dos problemas 2 (item “e”) e 3);
			02	As ações de aprendizagem de Davydov (discussão dos problemas 4 e 5);
			02	Aspecto nuclear do conceito de função segundo a abordagem de Bourbaki (dinâmica);
			02	O exame consciente do aluno sobre suas ações no ensino-aprendizagem do conceito de função (monitoramento das etapas anteriores; avaliação quanto à realização das tarefas de aprendizagem).

Referências

CHAIKLIN. S. Developmental teaching in Upper-Secondary School. In: HEDEGGARD, Mariane; LOMPSCHER, Joachim (ed.) *Learning Activity and development*. Aarhus (Dinamarca), Aarhus University Press, 1999.

DAVÝDOV, V. V. *Tipos de Generalización en la enseñanza.* Playa, ciudad de la Habana: Editorial Pueblo e Educación , 1982.

DAVÍDOV, V. V. *La enseñaza escolar y el desarollo psiquico: investigación psicológica teórica y experimental*. Moscu: Editorial Progreso, 1988.

DAVYDOV, V. V. What is real learning activity? In: HEDEGAARD. M.; LOMPSCHER, J. (Eds.), *Learning, activity and development*. Aarhus: Aarhus University Press, 1999. Tradução do inglês por Cristina Pereira Furtado, com revisão de José Carlos Libâneo e Raquel A. Marra da Madeira Freitas.

DAVYDOV, V.; MÁRKOVA, A. La concepción de la atividad de estúdio de los escolares. In: SHUARE, Marta (comp.). *La psciología evolutiva y pedagógica em la URSS*. Antología. Moscú: Editorial Progreso, 1987.

FREITAS, R. A. M. M. *Teoria Histórico-Cultural e Pesquisa:* O Experimento Didático como Procedimento Formativo. Texto de uso restrito para orientação de projetos de pesquisa de alunos vinculados ao Grupo de Estudos sobre Teoria Histórico-Cultural, da Linha de Pesquisa Teorias da Educação e Processos Pedagógicos, do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Católica de Goiás. Goiânia, 2007.

FREITAS, R. A. M. M. Pesquisa em Didática*:* o experimento didático formativo. In: X ENCONTRO DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO DA ANPED CENTRO-OESTE, *Anais*... 2010, UBERLÂNDIA.

FREITAS, R. A. M. M. Aprendizagem e formação de conceitos na teoria de Vasili Davydov. In: LIBÂNEO, José Carlos; SUANNO, Marilza Vanessa Rosa; LIMONTA, Sandra Valéria (Orgs.). *Concepções e práticas de ensino num mundo em mudança.* Diferentes olhares para a Didática. Goiânia: CEPED/PUC GO, 2011, p. 71-84.

FREITAS, R. A. M. M. Ensino por problemas: uma abordagem para o desenvolvimento do aluno. *Educação e Pesquisa*: Revista da Faculdade de Educação da USP, Vol. 38, n.2, 2012. Disponível em <http://www.scielo.br/pdf/ep/2011nahead/aop478.pdf>. Acesso em 25/03/2015.

GUIMARAES, R. S. *Atividades para aprendizagem do conceito matemático de função*, 2010, p.86 e 87. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas): Universidade Federal de São Carlos, 2010.

HEDEGAARD, M. *A zona de desenvolvimento proximal como base para o ensino.* In: DANIELS, Harry (Org). *Uma introdução a Vygotsky*. São Paulo: Loyola, 2002.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D. e outros. *Matemática:* ciência e aplicações. Volume I. São Paulo: Saraiva, 2013.

KARLSON, P. *A Magia dos Números.* Rio de Janeiro: Ed. Globo, 1961.

LIBÂNEO, J.C; FREITAS, R. A. M. M. Vygotsky, Leontiev, Davídov – contribuições da teoria histórico-cultural para a didática. In: SILVA, C.C.; SUANNO, M.R.V. (Orgs). *Didática e interfaces.* Rio de Janeiro/Goiânia: Deescubra, 2007.

LIBÂNEO, J. C; FREITAS, R. A. M. M. *A elaboração de planos de ensino* (ou unidades de estudo) conforme a teoria do ensino desenvolvimental.

LIBÂNEO, J.C. *Teoria histórico-cultural e metodologia de ensino:* para aprender a pensar geograficamente. Texto aprovado para apresentação no XII Encuentro de geógrafos de América Latina (EGAL), Montevidéu, 2009.

LIBÂNEO, J. C. *A aprendizagem escolar e a formação de professores na perspectiva da psicologia histórico-cultural e da teoria da atividade*. *Educar*, Curitiba, n.24, p. 113-147, 2004.

LIBÂNEO, J. C. *A integração entre didática e epistemologia das disciplinas:* uma via para a renovação dos conteúdos da didática. In: SIMPÓSIO EPISTEMOLOGIA E DIDÁTICA – XV ENDIPE, *Anais…,* 2010.

LOMPSCHER, J. Learning activity and its formation: ascending from the abstract to the concret. In: HEDEGAARD. M.; LOMPSCHER. J. (Ed.). *Learning activity and development*. Aarhus (Dinamarca): Aarhus University Press. 1999.

MAJMUTOV, M. I. (1983). *La Enseñanza Problémica.* Habana: Pueblo y Revolución.

VIGOTSKI, L. S. *A Formação Social da Mente O desenvolvimento dos processos psicológicos superiores*. Tradução José Cipolla Neto; Luís Silveira Menna Barreto e Solange Castro Afeche. 6. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2002.

VIGOTSKI, L. S. *Psicologia Pedagógica*. Tradução Claudia Schilling. Porto Alegre: Artmed, 2003.

VIGOTSKI, L. S. *A construção do pensamento e da linguagem*. Tradução Paulo Bezerra. São Paulo: Martins Fontes, 2010.

VIGOTSKI, L. S. *Pensamento e Linguagem*. Tradução Jefferson Luiz Camargo. 4. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2013.

APÊNDICE H – Problemas 1 e 2

Alunos:

1.
2.
3.
4.
5.

Observações:

- ✓ A tarefa deverá ser realizada em grupos formados por 4 ou 5 alunos;
- ✓ As apresentações devem ser realizadas por um representante de cada grupo e os demais devem ouvir atentamente. Após a apresentação, serão dados aos membros do grupo e em seguida aos demais alunos, oportunidades de fazer acréscimos ou correções ao que foi apresentado;
- ✓ A cada tarefa deverá ser escolhido um novo representante do grupo responsável pela apresentação.

1. A comissão de formatura de um curso do ensino técnico integrado ao ensino médio do Instituto Federal de Goiás organizará uma rifa de um iphone 5s com o objetivo de arrecadar fundos para a formatura dos estudantes. Sabendo que o iphone custou 2100 reais e que cada bilhete de rifa será vendido por 15 reais, complete as lacunas da tabela abaixo e, em seguida, resolva os seguintes itens.

Tabela									
Número de bilhetes vendidos	1	2	3	140	141	142	143	200	500
Valores pagos									

a) Considerando o problema 1, examine as informações contidas na tabela, descubra o que está ocorrendo e qual aspecto pode ser destacado como o principal (obs. um representante do grupo apresentará a descoberta, o aspecto principal e a justificativa).

b) Construa um modelo que represente o aspecto principal identificado na descoberta (um representante do grupo apresenta o modelo explicando o caminho utilizado para a sua construção).
c) Se o valor pago por certa venda de bilhetes foi de 420 reais, qual o número de bilhetes vendidos? (um representante do grupo resolve o problema se utilizando do modelo construído no item "b" e em seguida discute e resolve o item "d").
d) Se os lucros da rifa destinam-se ao suprimento de uma despesa com valor de 4500 reais, qual o número mínimo de bilhetes que deverão ser vendidos para cobrir tal despesa?
e) Se o valor do bilhete individual for alterado para 0,50 centavos, resolva as tarefas anteriores e destaque as mudanças percebidas. (obs. um representante do grupo apresentará as conclusões). E se ainda o bilhete individual for alterado para 20 reais, o que acontecerá? (obs. um representante do grupo apresentará as conclusões).

2. Com base no aspecto principal identificado na tarefa anterior, discuta o contexto apresentado realizando as seguintes análises:
    a. Do que se trata?
    b. Que informações é possível extrair através de sua análise?
    c. De acordo com a tabela, qual a nota máxima que um aluno poderá atingir na nota bimestral? Por quê?
    d. Construa o modelo matemático para descobrir a nota bimestral.
    e. Represente por meio do digrama de venn, a relação entre as notas da prova N1 e a nota bimestral.

Notas da prova N1 (o valor total da prova N1 é 10,0 pontos).	Notas das atividades (o valor atribuído às atividades corresponde a 20% da nota alcançada na prova N1).	Nota bimestral
7,0	1,4	8,4
5,0	1,0	6,0
	1,6	
		9,0
		7,2

APÊNDICE I – Problema 3

Alunos:

1.
2.
3.
4.
5.

(adaptado ENEM, 2010, questão 14) Uma professora realizou certa atividade com seus alunos, utilizando canudos de refrigerante para montar quadrados, onde cada lado foi representado por um canudo. A estrutura da formação das figuras está representada a seguir:

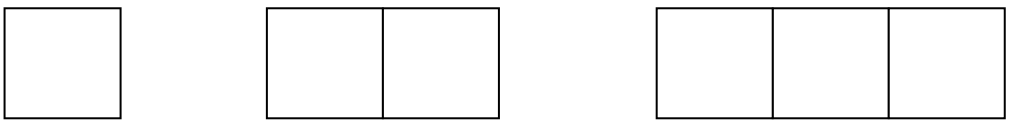


Figura I Figura II Figura III

Com base nessa estruturação das figuras, descubra o que está ocorrendo entre a quantidade de canudos e quantidade de quadrados, indicando o aspecto principal a ser considerado. Em seguida, construa o modelo que represente o aspecto principal identificado na descoberta.

APÊNDICE J – Problemas 4 e 5

Alunos:

1.
2.
3.
4.
5.

1. Um aluno do ensino técnico de um curso do Instituto Federal de Goiás recebe mensalmente, além de uma mesada fixa, um prêmio por nota máxima alcançada em provas mensais. Suponha que o valor do prêmio por nota máxima alcançada seja de 20 reais.

a. O grupo deve escolher um valor em reais para a mesada fixa do aluno e, em seguida, descobrir qual deverá ser o número de notas máximas alcançadas para que o valor mensal total recebido pelo aluno seja duas vezes o valor da mesada estipulada anteriormente pelo grupo. Posteriormente alterando sucessivamente o valor mensal total recebido pelo aluno (sugestão: organize os dados em uma tabela), o grupo deverá refazer a tarefa anterior. Por fim, o grupo deverá destacar as mudanças percebidas e apontar o aspecto principal.
b. Embora o problema abordado pela turma seja o mesmo, as contas de todos os grupos podem ser distintas e corretas. Cada grupo deve produzir uma explicação da razão por que isso ocorreu.
c. Cada grupo deve criar um modelo que represente o aspecto principal identificado na tarefa.

2. Um vendedor de ações de clube recebe mensalmente, além de seu ordenado fixo, um prêmio por ação vendida. Suponha que o valor do prêmio por ação vendida seja de 50 euros.

a. O grupo deve escolher um valor em euros para o ordenado fixo do vendedor e, em seguida, descobrir qual deverá ser o número de ações vendidas para que o valor mensal total recebido pelo vendedor seja três vezes o valor do ordenado estipulado anteriormente pelo grupo. Posteriormente alterando sucessivamente o valor mensal total recebido pelo vendedor (sugestão: organize os dados em uma tabela), o grupo deverá refazer a tarefa anterior. Por fim, o grupo deverá destacar as mudanças percebidas e apontar o aspecto principal.
b. Embora o problema abordado pela turma seja o mesmo, as contas de todos os grupos podem ser distintas e corretas. Cada grupo deve produzir uma explicação da razão por que isso ocorreu.
c. Cada grupo deve criar um modelo que represente o aspecto principal identificado na tarefa.

APÊNDICE K – Dinâmica

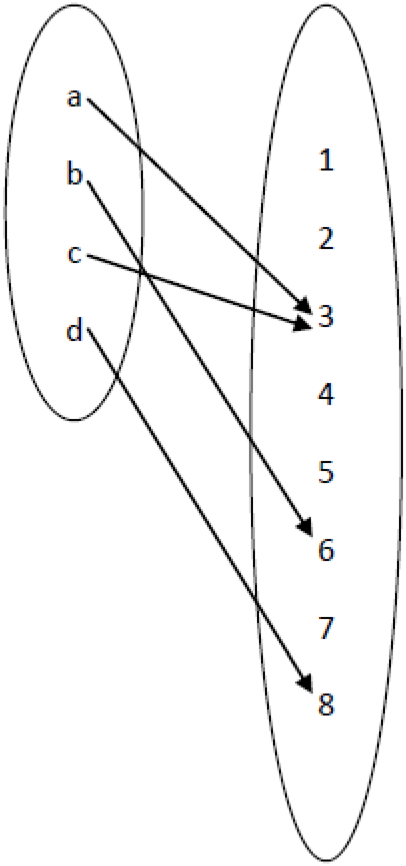
Alunos:

1.
2.
3.
4.
5.

Orientações:

1. A turma será dividida em grupos compostos de quatro estudantes;
2. Cada grupo considera o conjunto formado pelos seus respectivos integrantes, associando aleatoriamente uma letra distinta a cada integrante do grupo. Por exemplo, seja A= {a, b, c, d} o conjunto formado pelos respectivos estudantes: Ana associada à letra “a”, Bruno associado à letra “b”, Joel associado à letra “c” e Selma associada à letra “d”;
3. Os alunos conversam e elegem oito atividades prediletas entre os membros do grupo. Por exemplo: estudar, passear, namorar etc.
4. Cada grupo considera o conjunto formado pelas oito atividades prediletas entre os integrantes, associando aleatoriamente um número distinto a cada atividade. Por exemplo, seja B= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} o conjunto formado pelas atividades prediletas entre os estudantes da seguinte forma: “1” associado à atividade de “estudar”; “2” associado à atividade de passear; “3” associada à atividade de “namorar”; “4” associado à atividade de “viajar”; “5” associado à atividade de “nadar”; “6” associada à atividade de “malhar”; “7” associado à atividade de “cantar” e “8” associado à atividade de “dançar”;
5. Cada membro do conjunto A, escolhe uma e somente uma atividade predileta no conjunto B (não há nenhum problema caso dois ou mais alunos optem pela mesma atividade). Por exemplo, a aluna “a” escolhe a atividade predileta “3”, o aluno “b” escolhe a atividade predileta “6”, o aluno “c” escolhe a atividade predileta “3” e a aluna “d” escolhe atividade predileta “8”;

6. Os estudantes ilustram em um diagrama a relação entre alunos do grupo e as atividades prediletas, de forma que cada aluno no conjunto A corresponda a uma única atividade no conjunto B, conforme o diagrama ilustrado:



7. Em seguida, o professor convida um aluno qualquer para ir à lousa e o solicita para ilustrar o diagrama referente à atividade desenvolvida no seu grupo. Feito isso, o professor questiona e inicia o debate com a turma com as seguintes questões: (I) Esse diagrama ilustra uma relação? Por quê? (II) Essa relação é uma função? (III) O que é uma função? (IV) Toda relação é uma função? Exemplifique.

APÊNDICE L – Pré-teste

PRÉ-TESTE / MATEMÁTICA

Alunos:

1.
2.
3.
4.
5.

Resolva os seguintes problemas individualmente, com atenção e de forma bastante espontânea. Observe que essa atividade não valerá nota e seu único objetivo será identificar as dificuldades e os conhecimentos prévios para melhor organização didática do próximo conteúdo de ensino.

1. O preço de um vale almoço no refeitório do IFG é de 9 reais. Com base nesse dado, complete a tabela a seguir e responda as questões posteriores:

Quantidade de vale almoço	1	2	5	9
Valor a ser pago em reais				

a) O que é constante nessa situação?
b) Quais as grandezas envolvidas na situação? Elas variam?
c) O que é incógnita nessa situação?
d) Se o valor total do pagamento referente aos vales almoço de certo grupo de alunos foi de 108 reais, qual a quantidade de vales almoço comercializada? Justifique.
e) Tente escrever uma expressão matemática que relacione o número de almoço, com o valor o ser pago em reais.
f) Como seria a representação gráfica dessa situação?

2. Resolva o seguinte problema:

a) Conclua a construção da tabela abaixo, de forma a relacionar os nomes de todos os seus professores atuais do ensino técnico com os nomes de suas respectivas disciplinas ministradas.

Nome do professor	Nome da disciplina ministrada pelo professor
Gabriela / Cláudio	Matemática
	História
	Física
	Biologia

b) Quais as grandezas envolvidas na situação? Elas variam?

c) Com base no item anterior, esboce em um diagrama de Venn a relação entre os elementos dos conjuntos considerados na ordem estabelecida (observe que o primeiro conjunto a ser considerado deverá ser o conjunto constituído pelos nomes dos professores e o segundo conjunto, portanto será, o conjunto constituído pelos nomes das disciplinas).

d) Analisando o diagrama construído no item “c”, qual é a particularidade que existe entre os elementos professor (a) e disciplina? Você consegue expressar esse fato matematicamente?

e) Se esboçarmos o digrama de Venn considerando os conjuntos em ordem contrária (oposta), isto é, primeiro o conjunto constituído pelos nomes das disciplinas e posteriormente o conjunto formado pelos nomes de seus respectivos professores responsáveis, podemos identificar a mesma particularidade matemática entre os elementos dos conjuntos, detectada no item “c”? Justifique.

APÊNDICE M – Pós-teste

PÓS-TESTE / MATEMÁTICA

1. (adaptado ENEM, 2010, questão 14) Uma professora realizou certa atividade com seus alunos, utilizando canudos de refrigerante para montar quadrados, onde cada lado foi representado por um canudo. A estrutura da formação das figuras está representada a seguir:

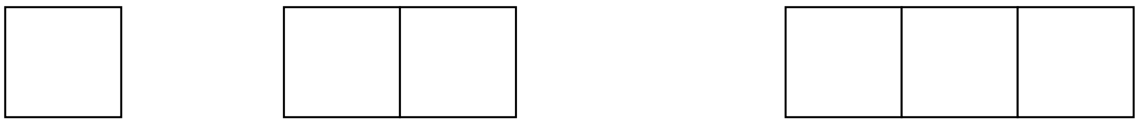


Figura I Figura II Figura III

a. Com base nessa estruturação das figuras, descubra o que está ocorrendo entre a quantidade de canudos e quantidade de quadrados, indicando o aspecto principal a ser considerado.

b. Construa o modelo que represente o aspecto principal identificado na descoberta.

2. Observe a tabela abaixo e em seguida responda os itens propostos:

Nomes de alguns jogadores brasileiros da Copa 2014	Cidades de origem
Neymar	Mogi das Cruzes
Hulk	Campina Grande
Júlio César	Rio de Janeiro
Thiago Silva	Rio de Janeiro

a. Do que se trata? Quais as grandezas envolvidas? E ainda, qual é o aspecto principal (notável) na tabela?

b. Represente por meio do digrama de Venn, a relação entre os nomes dos jogadores brasileiros apresentados e as suas respectivas cidades de origem.

c. Analisando o diagrama construído no item anterior, descubra a particularidade que existe entre os elementos dos conjuntos nomes de alguns jogadores brasileiros da copa 2014 e cidades de origem? Explique esse fato matematicamente?

d. Se esboçarmos o digrama de Venn considerando os conjuntos em ordem contrária (oposta), isto é, primeiro o conjunto constituído pelas cidades de origem dos jogadores e posteriormente o conjunto formado pelos nomes de alguns jogadores brasileiros da copa 2014, podemos identificar a mesma particularidade entre os elementos dos conjuntos verificada no item anterior? Por quê?

APÊNDICE N - Transcrições

Transcrição do Primeiro Encontro

Diagnosticando a zona de desenvolvimento proximal e iniciando a compreensão do desenvolvimento do conceito de função

17/04/2014 Horário: 09h15min - 10h45min

Professora: Façam um grande círculo. Vamos conversar.

Vida: Falta pouco tempo para o sinal bater. Vai ter aula não né?

Professora: Lógico que vai. Por que achou que não teria?

Vida: E que eu nunca vi fazer círculo em aula de matemática. Risos.

Professora: Pois é, agora teremos boas novidades. Pessoal silêncio, silêncio! Prestem atenção! Pessoal, por favor, vamos aproveitar esse pouco tempo que temos para conversamos sobre o conceito de função, nosso próximo conteúdo. Pessoal, pessoal, silêncio, por favor!

Maria Eduarda: Professora, corrigi o teste primeiro.

Professora: Corrigiremos em outras aulas, não hoje. Primeiro, vou analisar os conhecimentos que possuem sobre o conceito de função. Pessoal, pessoal, silêncio, por favor!

Ao olhar para os alunos, em alguns casos, de forma particular e pausada, eles foram silenciando.

Professora: Então, todos vocês já estudaram o conceito de função. Certo ou errado?

A maioria dos alunos falava ou mesmo acenava com a cabeça concordando que já havia estudado o conceito de função em outra ocasião. Uma aluna manifestou diretamente:

Biscoito: Já estudei função, mas cheguei à conclusão de que não sei nada. Esse teste foi muito difícil. Eu não consegui entender nada.

Lya: Nem eu.

Zilda: Teste difícil? Impossível! Ainda bem que não valeu nota.

Professora: Difícil provisoriamente. Impossível exagero. Teremos oportunidades de resolvê-lo coletivamente e vocês verão que é mais simples do que imaginam.

Momento de agitação leve. Os alunos riem dos nomes fictícios que escolheram e conversam entre si sobre vários assuntos alheios a aula.

Professora: Gente, vamos começar, não pelo teste. Vocês sabem me dizer para quê serve o conceito de função?

Leonardo: serve para dar dor de cabeça, um problema a mais para estudar.

Os alunos riem e a professora continua:

Professora: Você está enganado Leonardo. Olha só, o conceito de função começou a ser investigado há aproximadamente quatro mil anos até ser elaborado da forma como o conhecemos nos livros de matemática. Você sabia disso Leonardo?
Leonardo: Eu não. Tanta coisa interessante para saber. Risos.
Gil: Mas função serve para que professora?
Professora: Função serve para relacionar grandezas que variam. Por exemplo, na física, podemos relacionar tempo e distancia. Quanto maior a distancia a ser percorrida maior será o tempo gasto para percorrer, considerando a mesma velocidade. Então, meninos quando alguém perguntar para quê serve função, vocês devem se lembrar de que esse conceito surgiu da necessidade do homem de relacionar grandezas e compreender a realidade.
Eva: Professora, não vai dar tempo de corrigir o teste né? Daqui 2 minutos é o intervalo.
Professora: Como já falei, não corrigirei o teste hoje, a correção será feita nos próximos encontros. Hoje quero que vocês se atentem para o fato de que o conceito de função surgiu da necessidade humana de relacionar grandezas e compreender a realidade. Na antiguidade o homem relacionava os dedos de suas próprias mãos com objetos de interesse para melhor contá-los. O conceito de função é um dos conceitos mais importantes da matemática, portanto ele sempre aparece e nós precisamos entendê-lo melhor.
Nesse momento o sinal o tocou.
Na próxima aula, começaremos com os problemas para melhor compreender o conceito de função.

Transcrição do Segundo Encontro

O aspecto nuclear do conceito de função: identificando a relação universal por meio de problemas

Problema Abordado: problema 1

24/04/2014 Horário: 09h15min - 10h45min

Professora: Bom dia pessoal! Primeiro quero que formem seis grupos de cinco alunos e dois grupos de quatro alunos. Pode ser?
Os alunos concordaram. Escolheram livremente seus grupos. Em seguida, foi feito sorteio para ordenar a apresentação dos resultados. O grupo 4 foi o primeiro sorteado para apresentação.

Daiane, representante do grupo 4, foi a lousa, expondo e preenchendo corretamente a tabela que relaciona a quantidade de bilhetes adquiridos e os valores pagos. Assim que a aluna terminou de preencher a tabela a professora interveio:

Professora: Daiane, por favor, nos explique como vocês chegaram a essa conclusão.

Daiane: É porque cada bilhete custou 15 reais. Daí o valor pago para dois bilhetes é 30 reais, o valor pago para três bilhetes é 45 reais e assim vai.

Professora: Entendeu pessoal?

Diva: Essa é a parte fácil.

Professora: Muito fácil mesmo Diva. Só gostaria de entender porque alguns entre vocês não fizeram isso no teste que realizamos.

Diva: É que a gente não entendeu que era para fazer só isso. E o teste era diferente.

Professora: Quando passei nos grupos, notei que infelizmente muitos não compreenderam o problema porque não entenderam o que leram. Parece-me que muitos nem leram. Ou fizeram uma leitura muito apressada. Gente, leitura também faz parte da matemática. Não tem jeito de resolver se ao menos não entender o que foi pedido. Mas vamos voltar para a nossa discussão. Daiane, antes de escrever a próxima resposta na lousa, primeiro nos diga o que está ocorrendo nessa tabela?

Daiane: Uai professora, o valor que a gente paga, depende do tanto de bilhete que a gente compra. A gente acha que é isso.

Professora: O raciocínio está excelente, mas poderia explicar melhor. Concordam com o grupo da colega? Algum grupo viu outra coisa? Pessoal, vamos ajudar a Daiane. Seria isso mesmo? Segundo o grupo da Daiane, o aspecto principal é a relação de dependência entre a quantidade de bilhetes adquiridos e os valores pagos por esses bilhetes. Alguém pensou diferente? (pausa, silêncio). Cadê os grupos? Vamos! Concordam com o grupo da colega? Algum grupo viu outra coisa? Taylor, você viu algo diferente?

Taylor: Existe uma relação entre o número de ingressos adquiridos e os valores pagos.

Daiane: Foi isso que falei.

Professora: Excelente Taylor. Daiane você falou mesmo, mas o nosso colega contribuiu acrescentando uma palavra chave: relação. Vamos juntar as duas falas: então vocês perceberam que existe uma relação de entre os valores pagos e a quantidade de ingressos. Em tal relação, podemos observar que os valores pagos dependem da quantidade de ingresso que adquirimos. Correto?

Daiane: Isso mesmo professora.

Professora: Tem ainda outro detalhe importante. Observem que para cada quantidade específica de ingressos adquiridos, pagaremos um valor único. Estou dizendo que, caso eu compre somente um ingresso pagarei 15 reais. Por exemplo, não tem como eu comprar um ingresso e pagar ao mesmo tempo 15 reais e 30 reais. Entenderam?

Daiane: Ah sim.

Professora: Deixa eu me explicar melhor para quem tem dúvidas. Quero dizer que para cada quantidade de ingresso eu pagarei uma única quantia determinada (a professora falava isso mostrando os valores na tabela).

Professora: Daiane, por favor, escreva a nossa discussão no quadro.

Daiane então escreveu na lousa "Existe uma relação entre a quantidade de bilhetes que compramos e os valores pagos por nós. Isto é, os valores pagos dependem do número de bilhetes que compramos".

Professora: Perfeito. Prosseguindo, qual é o aspecto principal que o grupo de vocês destacou?

Daiane: Pois é, professora. Nós ficamos em dúvida, seria mesmo a relação que acabamos de falar?

Professora: Pessoal, vamos ajudar a Daiane. Seria isso mesmo? Segundo o grupo da Daiane, o aspecto principal é a relação de dependência entre a quantidade de bilhetes adquiridos e os valores pagos por esses bilhetes. Alguém pensou diferente? (pausa, silêncio).

Professora: Cadê os grupos?

Rafa: Nosso grupo, também destacou como mais importante à relação entre os números de bilhetes que compramos e o valor que pagamos, porque foi o que ficou evidente na hora de fazer a tabela.

Professora: Ok. É isso mesmo, parabéns aos dois grupos. Está ótimo! Obrigada Daiane, (a aluna retorna a sua cadeira). Ah pessoal uma coisa importante também, anotem isso ai (a professora dita): "o número de bilhetes vendidos e os valores pagos são grandezas variáveis. Observem ainda que podemos atribuir qualquer valor ao número de bilhetes vendidos e dependendo desse número, encontraremos os valores pagos. Por isso, o número de bilhetes é chamado variável independente e os valores pagos são variáveis dependes". Entenderam?

A maioria dos alunos se manifesta dizendo que entendeu ou mesmo acenando com a cabeça.

Professora: Muito bom. Nós estamos avançando. Então vamos para a letra b. Quem ficou responsável?

Cleo: Foi o meu grupo professora. Mas a gente teve dificuldade.

Professora: Não tem problema. Vem para lousa apresentar as dúvidas do grupo.

Se dirigindo a lousa, **Cleo** se manifestou: eu não sei o que é um modelo matemático. É uma fórmula professora?

Antes de responder a dúvida, a professora chama a atenção de Leonardo, um aluno do grupo 5, que não parava de brincar com celular e mostrar fotos para os colegas do grupo.

Professora: Leonardo, por favor, vamos prestar atenção. Você não percebe que além de se prejudicar, está prejudicando seus colegas? Se continuar, será convidado a se retirar.

Leonardo: Que saco! Tá bom.

Professora: Alguém pode ajudar a Cleo? O que é um modelo matemático gente?

Bianca: É uma função?

Professora: O que é uma função?

Alfredo: É uma fórmula que relaciona x e y.

Professora: Gente, vamos por partes. Função é uma relação específica entre grandezas variáveis, que expressamos algebricamente usando as variáveis x e y. Por exemplo, $y=4x+1$ é um exemplo de função. De outra forma $b=4a+1$, também é. Podemos usar x, y, a, b, ou seja, qualquer letra que vocês quiserem. Mas x e y são mais usadas. Vamos usar x e y, já que vocês estão acostumados. Observe que x e y são variáveis. E dependendo do valor que eu escolho para x, determino y. Assim, chamamos x de variável independente e y de variável dependente. Entenderam?

Cleo: mais ou menos.

Professora: Você consegue pensar uma fórmula, de maneira que você consiga relacionar em nosso exemplo o número de bilhetes vendidos e o número de valores pagos?

Cleo: sei não.

Professora: Meninos do grupo da Cleo, vamos ajudar. Vocês sabem?

Marcelo: Se a gente multiplica a quantidade de bilhetes por 15 sempre, daí sempre descobre o valor pago.

Professora: Entenderam?

Nesse momento o sinal tocou.

Professora: Certo. Marcelo, esse é o caminho. Só falta escrever o que disse na linguagem matemática. Gente por favor, só um minuto. Então vamos fazer assim, vamos chamar de x a quantidade de bilhetes adquiridos e y a quantidade de valores pagos. Então, pensem como relacionar x e y. Com essa dica, terminem em casa. Continuaremos na próxima aula.

Transcrição do Terceiro Encontro

Criando o modelo da relação universal do conceito de função e introduzindo a transformação no modelo

Problema Abordado: problema 1

08/05/2014 Horário: 09h15min - 10h45min

Professora: Bom dia pessoal. Vamos organizar um círculo maior. Vamos cooperar, por favor. Vamos retomar nossas atividades. Silêncio gente, por favor! Faz duas semanas, mas na aula passada vimos que função é uma relação particular entre grandezas variáveis e, usualmente utilizamos as letras x e y para exprimir as relações entre as grandezas. Lembro-me que na aula passada a Cleo ia resolver a letra b do problema 1, mas não deu tempo. Vamos lá?

Então, **Cleo** se levantou, foi à lousa e escreveu: 15x.

Professora: Não entendi? Vocês entenderam? O que é 15x?

Cleo: Uai não tá certo? Assim, oh, se compro um ingresso pago 15 reais, se compro dois ingressos pago 30 reais e assim vai.

Professora: Gente, por favor, cadê o y? O correto é y=15x. O produto 15x não é uma função. Só tem sentido y=15x. Ok? Aliás, o que são x e y?

Roger: Credo! A gente custa achar 15x e dá a mesma reposta, mas por causa de um y tá errado. (Risos) Ué, 15x num dá a mesma resposta de y=15x? Por isso que eu não gosto de matemática.

Professora: Não pode ser! 15x é apenas uma constante multiplicada por x e nem sabemos quem é x, se não falar. Aliás, se não escrevermos o que significa x, então x pode significar qualquer coisa. Queremos expressar uma relação entre duas grandezas e por isso precisamos de duas variáveis. A variável que representa a quantidade de bilhetes adquiridos e a variável que representa os valores pagos. Vamos chamar uma de x e a outra de y. Mas poderíamos chama-las também de qualquer outra letra. Aí tanto faz. Por favor, Cleo conserte a resposta e escreva o que significa x e o que significa y em nosso problema.

Cleo foi à lousa e com ajuda da professora por fim escreveu: "y=15x onde x é a quantidade de bilhetes adquiridos e y é o valor pago pelos bilhetes".

Professora: Pessoal, vocês entenderam? Isso é muito importante. Tem alguma dúvida?

Nesse momento alguns falam que entenderam, outros acenam positivamente com a cabeça.

Professora: Roger entendeu porque é preciso relacionar x e y e escrever as coisas direito?

Roger: Agora sim. Dessa vez a senhora ganhou. (risos).

Professora: Gente não leva dúvida para casa. Cleo pode se sentar. Muito obrigada e parabéns ao grupo.

Professora: Letra c. Quem ficou responsável?

Nesse momento Lara representante do grupo 3, se dirige à lousa.

Lara: Sou eu. Escreveu na lousa: $y=15x \rightarrow 420=15x \rightarrow x=420/15 \rightarrow x=28$.

Professora: Excelente. Entenderam?

Nesse momento alguns falam que entenderam, outros acenam positivamente com a cabeça.

Professora: Ótimo. Letra d. Quem fará?

Bia se dirige a lousa e escreve: $y=15x \rightarrow 4500=15x \rightarrow x=300$

Professora: Todos fizeram assim?

Taylor: Eu não fiz assim. O meu deu 440.

Professora: E você discutiu com eles a sua idéia?

Taylor: Não.

Professora: Por que Taylor? O trabalho é em grupo e não individual. Você e do grupo da Cleo, não é mesmo?

Taylor ficou desconcertado.

Taylor: Sim, do mesmo grupo. Ah, se eles pensam de outro jeito, depois a senhora explica se está certo ou não. Vai que estou errado.

Professora: E se você estiver errado, qual é o problema?

Taylor: Não tem, mas é chato. Eu gosto mais de fazer sozinho.

Professora: Se você estiver errado é uma oportunidade para descobrir e aprender. Estudando junto cresce você e seus colegas. Alguém de outro grupo fez diferente?

Como ninguém se manifestou a **professora** prosseguiu: Taylor, por favor, vem aqui e escreva a sua resolução na lousa para discutirmos.

Nesse momento, chega um pessoal do grêmio estudantil e pede para conversar com a turma. Isso demora aproximadamente 20 minutos. Ao terminar a conversa a professora continua.

Professora: Gente, por favor, não vamos nos dispersar. Taylor, por favor, escreva a sua idéia na lousa.

Taylor escreve: $6600=15x \rightarrow x=440$, já que o iphone custou 2100.

Professora: Taylor, como você achou o valor de 6600?

Taylor: Peguei 4500 e somei com o valor do iphone e daí deu 6600. É porque para sobrar dinheiro para despesa, primeiro precisa pagar o iphone que a gente comprou para rifa.

Professora: Excelente raciocínio. Só não gostei porque você poderia primeiramente ter discutido com o seu grupo. O trabalho não é individual. Você tem muito a ensinar e a aprender no trabalho em equipe. Quando a gente ensina a gente aprende duas vezes. Pense sobre isso. Vamos lá, pessoal vocês entenderam a colocação do Taylor?

Jamaica: Eu não entendi não.

Professora: O que você não entendeu?

Jamaica: Não entendi nada do que ele falou. Eu fiz igual a Bia e pensei que tava certo.

Professora: A idéia foi boa, mas vocês esqueceram que primeiro precisa pagar o iphone para depois de ter lucro. Pessoal, ao fazer a rifa, houve um gasto inicial, o valor do iphone para rifar. Concordam? Então, além da despesa de 4500 reais, temos a despesa de 2100 reais referente ao iphone. Então, a despesa total é 4500 reais mais 2100 reais e, portanto, 6600 reais. Concordam? Então escrevemos: $y=15x \rightarrow 6600=15x \rightarrow x=440$, ou seja, 440 é o valor mínimo de bilhetes necessários para pagar o iphone e ainda suprir uma despesa de 4500 reais. Entenderam?

Jamaica: Hum. Agora sim

Os demais alunos também se manifestaram oralmente e também por meio de gestos dizendo que entenderam.

O sinal tocou.

Professora: Continuaremos na próxima aula.

Transcrição do Quarto Encontro

Utilizando o modelo da relação universal do conceito de função para resolver diversos problemas

Problema Abordado: Conclusão do problema 1 e problema 2

15/05/2014 Horário: 09h15min - 10h45min

Professora: Bom dia pessoal. Vamos começar?

Leidy: É para formar círculo de novo?

Professora: Sim pessoal. Um grande círculo, para melhor conversarmos.

Leidy: Que dia que essas aulas vão acabar?

Professora: Até o meio do ano pelo menos vamos estudar assim. Por quê? Não está aprendendo?

Leidy: Estou gostando, a gente tira mais dúvidas. Eu tava até falando com a Bia, estudando desse jeito a gente aprende mais.

Professora: Pessoal, vocês ouviram o que a Leidy falou. Ela disse que está aprendendo mais com a nossa experiência. Vocês concordam?

Muito barulho.

Taylor: eu acho mais difícil. Prefiro normal mesmo. Gosto mais de estudar sozinho. A gente fica perdendo tempo. E também acho melhor estudar a teoria para depois fazer os exercícios.

Professora: Mesmo? Você não esta aprendendo?

Taylor: Aprendo mais sozinho. Presto atenção quando você fala, depois leio o livro e o caderno e aprendo.

Maria Eduarda: É porque o Taylor é mais inteligente professora. Eu acho mais fácil estudar junto mesmo.

Regis: Eu também gostei de estudar matemática em grupo. A gente aprende mais. Quando você pensa que sabe vai explica e ai vê que não consegue. E mais, a gente aprende mesmo explicando. Eu acho que a prova também devia ser um grupo. A idéia é boa né gente?

Muito barulho e risos.

Maria Eduarda: Adorei a idéia. É mesmo professora, vamos fazer a prova em grupo. (risos).

Professora: (risos) Não mesmo! Aí todo mundo se acomoda, fica confiando no estudo do colega. Não estamos ainda preparados para isso. Agora, vamos começar a trabalhar. Gente, silêncio, silêncio, outro dia a gente continua essa conversa. Onde paramos na aula passada? Ah, faltou o item “e” do problema 1. Antes que da apresentação, vamos recapitular: vimos que função serve para resolver problemas que necessitam relacionar variáveis. Como é o nosso caso não é? Em nosso caso, foi preciso relacionar a quantidade de bilhetes adquiridos com os valores pagos. Sendo x o número de bilhetes adquiridos e y os valores pagos pelos bilhetes, chegamos na função: $y=15x$. Além disso, x é dito a variável independente porque podemos escolher o valor e y a variável dependente, pois depende de x. A questão da variação dos valores, vimos que é algo muito importante. Ok? Agora vamos à apresentação de hoje. Quem ficou responsável?

Se dirigindo a lousa, **Eva** disse: sou eu professora. Oh falta de sorte, essa letra tem todo o exercício de novo. É sempre assim, fico com a pior parte.

Professora: (risos) Nada. Isso é porque moça disposta e inteligente.

Eva: risos. Vai nessa.

Eva fez e preencheu a tabela corretamente escrevendo $y=0,5x$.

Professora: Eu quero que você explique a tabela. Faltou também você escrever quem é x e quem é y e, também nos falar o qual o aspecto principal que seu grupo observou na tabela.

Eva: Ah, eu não sei direito não. Um bilhete vale 0,50 centavo, ai dois bilhetes vale 1 real, três bilhetes 1,50 e continua assim. A gente viu que os valores vão mudando e o número de bilhetes tem tudo haver com o valor de pago. Ah, a função fica y=0,5x onde x significa a quantidade de bilhetes e y é o valor pago. Certo?

Professora: Muito bom. Você pode até dizer que o número de bilhetes tem haver com o valor pago, mas escreva assim: os valores pagos dependem do número de bilhetes adquiridos. Na hora de escrever temos que colocar direito de forma que qualquer um entenda. Ok?

Eva: Certo. E se o bilhete for alterado para 20 reais será o mesmo raciocínio. Assim um bilhete custa 20 reais, dois bilhetes 40 reais e assim vai. Podemos utilizar a mesma idéia anterior. Tudo fica bem parecido.

Professora: Parabéns a Eva e ao grupo da Eva. Estou gostando muito. Agora finalmente vamos para o próximo.

Maria Eduarda: Somos nós. Foi difícil professora. Vou escrever o que fizemos: a) a tabela é composta de notas.

Nesse momento Maria Eduarda começa copiar a tabela preenchida do seu caderno.

Professora: Por favor, Maria Eduarda, não preencha a tabela ainda. Copie a tabela, mas deixe os espaços a serem preenchidos em branco. Você preencherá nos explicando.

Maria Eduarda: Não dó conta não. Deixe-me copiar. Sou péssima em matemática, fico nervosa, não dó conta de fazer assim não. Meu pai sempre fala que matemática é só para gênios. E eu sou uma pobre mortal.

Os colegas começaram a rir.

Professora: Que isso! Que conversa estranha é essa? Você é uma menina inteligente, esforçada e não tem dificuldade nenhuma que você não consiga superar. Explique-me o que esta acontecendo na tabela.

Maria Eduarda: Assim oh, a prova vale dez e as atividades é 20% do valor da prova. Se você tira zero na prova, fica com zero nas atividades. Né? Isso eu entendo bem. (risos).

Os alunos se agitam.

Professora: Silêncio! Olha só, nesse raciocínio, se o aluno conseguiu 0,8 nas atividades, quanto ele tirou na prova?

Maria Eduarda: Hum. Sete?

Professora: Vinte por cento de sete é 0,8?

Alguns alunos dizem não, não é.

Maria Eduarda: Não, eu não sei.

A professora foi no quadro e escreveu:

(20/100). x=0,8 → 20x=80 →x=4. Entenderam? Eu quero encontrar um número x, sendo que vinte por cento dele dá 0,8. Simples não é?

Maria Eduarda: Então, se o aluno ficou com 0,8 na atividade é porque ele tirou 4, né ? Só não entendi um negócio, por que você escreveu 20 dividido por 100?

Professora: Sim, 20 por cento de 4 é 0,8, fizemos as contas. Agora por que eu escrevi 20 dividido por 100? Por que vinte por cento é o mesmo que 20 dividido por 100. Certo?

Maria Eduarda: Acho que entendi.

Professora: Mas que informações você Maria Eduarda consegue extrair da tabela?

Maria Eduarda: É uma tabela de notas, sendo a nota bimestral a soma da nota N1 e das atividades. Isso eu sei. (risos).

Professora: Ótimo. Obrigada. Parabéns a você e ao seu grupo. Estamos caminhando. Quem é o próximo?

Bel: Aqui. Professora, pensamos o seguinte, se um aluno tira dez, então ele fica com dois pontos nas atividades. Como a nota a bimestral é a nota da prova mais as atividades, então a nota dela vai ultrapassar dez. Seria doze. É isso né?

Professora: Perfeito! Mas vamos preencher a tabela para ver qual a nota máxima que o aluno fica nessa tabela.

Embora **Bel** preenchesse corretamente a tabela, alguns alunos demonstraram muita dificuldade na manipulação algébrica que permite encontrar os valores.

Maria Eduarda: Não entendi.

A aluna se referiu a expressão escrita por Bel: (20/100)x=1,6 → 20x=160 →x=8.

Bel: Uai Maria Eduarda, multiplica cruzado que dá certo.

Maria Eduarda: Ih, eu não sei multiplicar número com vírgula.

Professora: Maria Eduarda, 1,6 é o mesmo que (16/10). Não é?

Nesse momento, a professora foi ao quadro e fez a conta.

Maria Eduarda: Ah. Agora sei fazer o resto.

Bel ainda determinou os demais valores da tabela e apresentou as contas com alguns problemas relacionados com a matemática básica.

Em geral, houve bastantes dúvidas nas contas porque os alunos têm dificuldades de operar com frações.

Professora: Poderíamos marcar uma aula em algum horário vago para estudarmos matemática básica, porque se não, não tem como avançar.

Os alunos concordaram e foi agendado aula com a professora em horário diferente do regular.

Professora: Item d, quem ficou responsável?

Lara: Meu grupo.

Lara escreveu na lousa: nota bimestral = N1 + (20%). N1

Professora: Só faltou chamar a nota bimestral de alguma coisa. E também especificar as incógnitas. Por exemplo, chame nota bimestral de NB por exemplo. Como fica então:

Lara: NB=N1+(20%).N1 onde NB é a nota bimestral e N1 é a nota da prova.

Professora: Vocês entenderam? Eu também poderia melhorar essa resposta. Ok?

Lara: Como?

Professora: Assim oh. NB=N1+(20/100)N1 →NB=(12/10)N1. Além disso, ao invés de usar NB e N1, poderia usar x e y. Daí ficaria assim: y=(12/10)x onde x é a nota que o aluno tirou na prova e y é a nota bimestral alcançada. Entenderam?

Carol: A gente sabe o que tem que fazer, mas as contas é bem canseira. Precisa mesmo?

Professora: Então, se você não simplificasse eu consideraria. Mas imagina se fosse um concurso ou o vestibular, com itens de múltiplas escolhas. Você só encontraria a opção com a resposta simplificada. Por isso tem que aprender a simplificar.

O sinal tocou.

Transcrição do Quinto Encontro

O ensino problêmico organizado na perspectiva das ações de aprendizagem de Davydov

Problema Abordado: conclusão do problema 2 e problema 3

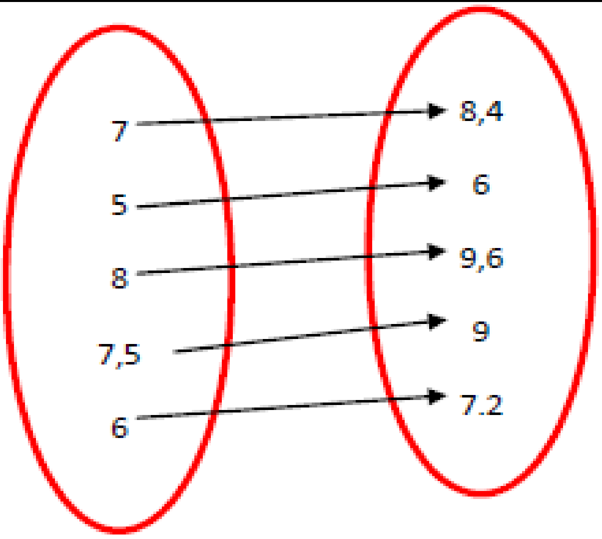
22/05/2014 Horário: 09h15min - 10h45min

Professora: Bom dia! Vamos nos organizar em grupos novamente, hoje ainda temos a apresentação do grupo 5 e depois irei distribuir outra folha com problema para pensarmos em grupo. Quem é o representante do grupo 5?

Jiló: Presente. Professora é só fazer o desenho e ligar a nota N1 e a nota bimestral.

Professora: Faça ai para vermos.

Jiló apresentou corretamente:



Professora: Só falta dizer e escrever quem são os conjuntos.

Jiló: O primeiro conjunto são as notas da prova e o segundo conjunto são as notas bimestrais.

Logo em seguida o aluno também escreveu a reposta na lousa.

Professora: Excelente. Parabéns a você e ao grupo. Agora distribuiremos o próximo problema, vocês permanecerão nos grupos anteriores e daqui a mais ou menos 30 minutos, novamente faremos o sorteio para apresentações e correções.

Muito barulho. Os alunos chamam a professora insistentemente nos grupos para esclarecer dúvidas.

Professora: Silêncio. Pessoal, por favor, vamos prestar atenção aqui oh. Primeira coisa, vocês leram? Conseguiram identificar o problema? Gente tá escrito assim "descubra o que está ocorrendo entre a quantidade de canudos e a quantidade de quadrados". Então eu tenho que relacionar o quê?

Zilda: A quantidade de canudos e a quantidade de quadrados?

Professora: Sim. Vejam a figura I, quantos quadrados? Quantos canudos?

Caco: 1 quadrado e 4 canudos ?

Professora: Isso. Faz uma tabela para facilitar. De um lado você coloca o número de canudos e do outro o número de quadrados. Vamos lá gente. Mãos a obra!

Muito barulho. Alguns grupos não conseguiram chegar ao modelo.

Professora: Então, vamos juntos. Alguém vem à lousa para nos ajudar. Alex?

Alex: Ah, não quero não. Outro dia.

Professora: Eu ajudo. Vem.

Alex: Ah não, quero não.

Professora: Zilda, vamos lá. Eu ajudo.

Zilda: Eu vou, mas não consegui fazer tudo não.

Zilda fez a tabela corretamente associando o número de quadrados e o número de canudos. Mas não soube encontrar o modelo.

Professora: Alguém consegue pensar numa fórmula que relaciona o número de quadrados e o número de canudos.

Taylor: Eu achei.

Professora: Coloca aqui na lousa.

Taylor escreveu na lousa: y=3x+1 onde x é o número de quadrados e y é o número de canudos.

Professora: Vocês concordam? Olha só, se x for 1 então y será 4. Se x for 2 então y será 7, se x for 3 então y será 10 e assim por diante. Olha na tabela.

Zilda: O difícil é adivinhar a fórmula.

Maria Eduarda: É mesmo professora.

Professora: Que isso, não existe adivinhar na matemática. Como você fez Taylor?

Taylor: Observei a regra da relação entre canudos e quadrados. Com base nisso, fiz tentativas e até que deu certo.

Professora: Sim. Isso não é adivinhar, mas observar e deduzir. De qualquer forma, tem outro jeito de fazer e daí vocês podem escolher como preferem pensar. Vocês se lembram de que a equação do primeiro grau é expressa assim: y=ax+b? Daí, no nosso problema, vamos chamar x o número de quadrados e y o número de canudos. Olha só, dado dois pontos se determina uma reta, não é mesmo? Pegue os pontos (1,4) e (2,7) e vamos montar um sistema assim: 4=a.1+b e 7=a.2+b. Portanto resolvendo temos a=3 e b=1. E ai, substituindo na expressão y=ax+b, temos y=3x+1.

Maria Eduarda: Ah, eu prefiro o outro jeito mesmo.

Professora: É importante também entender esse outro forma.

Caco: Ih, eu também.

Bia: Assim, achei mais fácil.

Caco: Achei que complicou.

Professora: Mas vocês entenderam?

Os alunos se manifestaram positivamente.

O sinal tocou.

Transcrição do Sexto Encontro **As ações de aprendizagem de Davydov** **Problema Abordado: problema 4 e problema 5** **05/06/2014 Horário: 09h15min - 10h45min**
Professora: Bom dia! Vamos nos organizar em nossos grupos. Vou distribuir uma folha para fazermos e corrigirmos, dentro de 30 minutos. Irei chamar alguém que ainda não veio no quadro para nos ajudar. Ou seja, hoje não irei chamar os representantes de grupo. Muito barulho. Os alunos chamam a professora nos grupos para esclarecer dúvidas. Passado os trinta minutos, a professora convida a aluna Luê para ir à lousa. **Professora:** Por favor, Luê. **Luê:** Ah não professora. Eu não gosto. **Professora:** Até o final do ano, todos virão ao quadro e isso será computado como nota. Caso você não consiga, podemos ajudá-la. O que conta é a participação. Luê se dirigiu a lousa e começou a copiar do caderno. **Professora:** Calma Luê. Vamos por partes. Quais os valores de mesada fixa que seu grupo escolheu? **Luê:** 20, 60, 100 e 200. Se a mesada fixa for 20 e eu tirar uma nota máxima, ganho 40 reais. Ou seja, o dobro de 20. Se for 60, preciso tirar 3 notas para ganhar 120. Se for 100, preciso tirar 5 notas para ganhar 200 reais. **Professora:** Muito bom. Todos concordam? Muito barulho, mas todos concordaram. **Professora:** Então, Luê o que você percebeu, qual aspecto chamou a atenção do seu grupo? **Luê:** (risos) Seria variação? **Professora:** (risos) Eu perguntei primeiro? Seria gente? **Jiló:** Seria. Cada vez que muda a mesada fixa, para ganhar o dobro no final, também muda a quantidade que a pessoa precisa tirar de nota máxima. É isso, né! **Professora:** Isso mesmo. Concorda pessoal? **Luê:** Foi isso que a gente viu, só ficamos na dúvida na hora de escrever. Professora: Então, qual é o aspecto principal Luê? **Luê:** ah, variação e relação? **Professora:** Isso. Mas fale com firmeza. Vocês concordam? Alguém fez diferente? **Daiane:** Nosso grupo fez. A senhora falou que tá certo.

Professora: Daiane, você sabe me explicar o porquê está certo?

Daiane: Uai professora, a senhora falou. (risos).

Professora: Sim. Mas, tem uma explicação. Você sabe?

Daiane: É porque cada nota máxima vale 20 reais sempre. E os outros valores a gente escolhe, mas ideia é a mesma para fazer as contas.

Professora: Vocês concordam?

Bia: Sim. É isso mesmo.

Professora: Ok Daiane. Obrigada. Bia, agora você, por favor.

Bia: Ah nem, falei demais. (risos).

Professora: Bia, por favor, coloque na lousa, o modelo que seu grupo encontrou.

Bia: y+20x=2y

Professora: Quem é x? Quem é y?

Bia: x é a quantidade de notas máximas e y é o valor da mesada fixa.

Professora: Agora sim. Alguém fez diferente?

Taylor: Eu fiz. Mas é a mesma coisa, chamei o “x” de” a” e o “y” de “b”. Pode né?

Professora: Sim. Claro. Gente, alguém tem alguma dúvida? (Pausa). Ninguém? (Pausa). Então, vamos ao próximo. Caco, você ainda não veio na lousa. Por favor, venha fazer o próximo. Ah, pessoal hoje teremos que uma palestra sobre iniciação científica no ensino médio. Pediram-me para dispensá-los mais cedo. Após a correção do próximo, vocês irão para o auditório.

Muito barulho.

Caco: Professora, é quase igual o outro, só mudou o modelo. Né?

Professora: Sim. Como ficou?

Caco: 3x=x+50y onde x é o valor do ordenado fixo e y é o número de ações vendidas.

Professora: Excelente. Esta é a letra c.

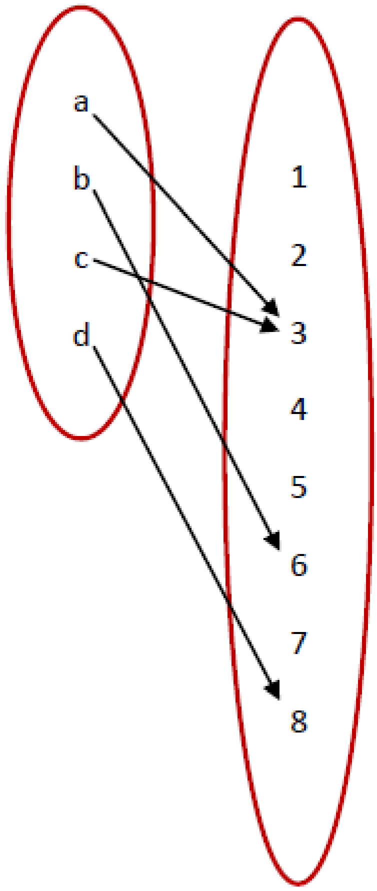
Caco: Agora ficou muito fácil. Se o ordenado fixo for 200 euros, por exemplo, basta eu usar o modelo e fica 600=200 + 50y →y=8 e se x=400 → y=16 e assim vai. E os resultados são diferentes porque podemos escolher o ordenado fixo. Além do mais, o valor do premio por ação é sempre 50 euros.

Professora: Excelente. Entenderam?

Leonardo: Pode ir professora?

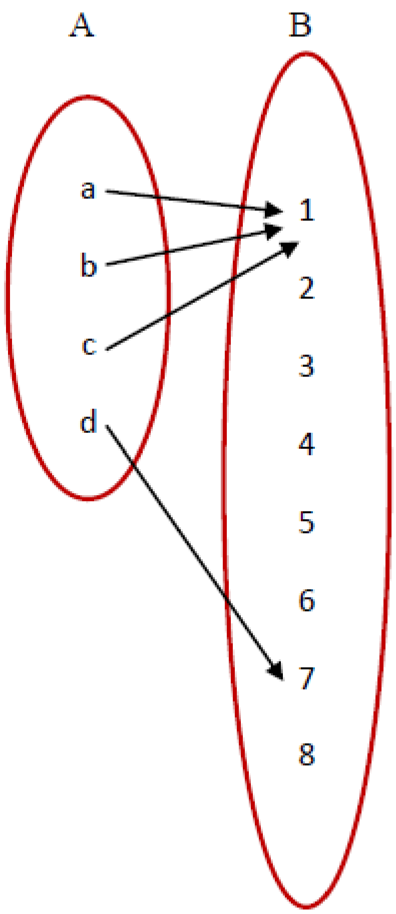
Professora: Pode sim. Boa palestra pessoal.

Transcrição do Sétimo Encontro **Aspecto nuclear do conceito de função segundo a abordagem de Bourbaki** **(Dinâmica)** **26/06/2014 Horário: 09h15min - 10h45min**
Professora: Bom dia pessoal! Hoje teremos uma dinâmica. A professora explica como será a dinâmica, orientando-os nos seguintes passos: 1) Cada grupo deve considerar o conjunto formado pelos seus respectivos integrantes (quatro ou cinco), associando aleatoriamente uma letra distinta a cada integrante do grupo. Por exemplo, seja A= {a, b, c, d} o conjunto formado pelos respectivos estudantes: Lara associada à letra “a”, Taylor associado à letra “b”, Bel associado à letra “c” e Maria Eduarda associada à letra “d”; 2) Os integrantes do grupo conversam e elegem oito atividades prediletas entre os membros. Por exemplo: estudar, passear, namorar etc. 3) Cada grupo considera o conjunto formado pelas oito atividades prediletas entre os integrantes, associando aleatoriamente um número distinto a cada atividade. Por exemplo, seja B= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} o conjunto formado pelas atividades prediletas entre os estudantes da seguinte forma: “1” associado à atividade de “estudar”; “2” associado à atividade de passear; “3” associada à atividade de “namorar”; “4” associado à atividade de “viajar”; “5” associado à atividade de “nadar”; “6” associada à atividade de “malhar”; “7” associado à atividade de “cantar” e “8” associado à atividade de “dançar”; 4) Cada membro do conjunto A, escolhe uma e somente uma atividade predileta no conjunto B (não há nenhum problema caso dois ou mais alunos optem pela mesma atividade). Por exemplo, a aluna “a” escolhe a atividade predileta “3”, o aluno “b” escolhe a atividade predileta “6”, o aluno “c” escolhe a atividade predileta “3” e a aluna “d” escolhe atividade predileta “8”; 5) Os estudantes ilustram em um diagrama a relação entre alunos do grupo e as atividades prediletas, de forma que cada aluno no conjunto A corresponda a uma única atividade no conjunto B, conforme o diagrama ilustrado:



A professora estipulou 15 minutos para que todos os grupos apresentassem o seu diagrama. Findado o prazo, a professora convidou a aluna Cleo representante do grupo 7, para expor o digrama do seu grupo na lousa.

Cleo: O conjunto A foi formando pelo grupo e o conjunto B são as atividades que escolhemos. O número 1 é a atividade assistir filmes, o número 2 é atividade dormir, o número 3 é a atividade comer, o número 4 é a atividade estudar, o número 5 é a atividade jogar, o número 6 é atividade passear e o número 7 é a atividade namorar. Letra a, sou eu, letra b é a Vida, letra c é o Alex e letra d é o Marcelo. Assim:



.

Professora: Ótimo Cleo. Obrigada. Agora quero que o Ângelo me diga se esse diagrama ilustra uma relação?

Ângelo: Ah não, eu não. Eu estou quieto, não estou atrapalhando ninguém. Sei não.

Professora: A participação também conta. Mas, tudo bem. Gil, você pode nos ajudar.

Gil: O quê?

Professora: Esse diagrama que a Cleo colocou ilustra uma relação?

Gil: Sim. É uma relação entre o pessoal do grupo e as atividades.

Professora: Isso. Gil, agora me diga essa relação é uma função? Aliás, o que é uma função?

Gil: Ah, eu acho que é função sim, mas não sei explicar.

Professora: Alguém sabe me explicar o que é uma função?

Daiane: A gente estudou que função é uma relação entre grandezas, tipo relação de dependência.

Professora: E você sabe me dar um exemplo?

Daiane: (silêncio). Ah, acho que essa relação que a gente fez entre nós e as atividades é uma função. É?

Professora: É. Mas tem que justificar direito. Nem toda relação é função. O que é função?

Cris: Função é quando uma coisa depende da outra, ou seja, quando está relacionada, né professora? Assim oh, por exemplo, o valor pago pelas rifas do iphone depende o número de rifas que a gente compra.

Professora: Excelente Cris. Mas quando a gente fala de função, considerando conjuntos e elementos tem um detalhe importantíssimo que preciso mostrar para vocês. Quero que vocês entendam que nem toda relação é uma função. O diagrama que a Cleo fez é uma função uma vez que a definição de função é a seguinte:

Nesse momento a professora escreve na lousa:

Dados dois conjuntos A e B, $f: A \rightarrow B$ é função, se para cada $x \in A$ existe um único $y \in B$ tal que $f(x) = y$. Isso quer dizer que o diagrama do grupo da Cleo é uma função.

Keith: Não entendi nada. Quem é x, quem é y?

Professora: Ok. Vamos lá ao diagrama do grupo da Cleo. Quem são os elementos de A e B?

Keith: Os elementos do conjunto A, são as pessoas do grupo e os elementos do conjunto B são as atividades.

Professora: Ótimo. Então, quando eu digo que $x \in A$, observem que esse x é qualquer elemento de A. O x pode ser qualquer um dos integrantes do grupo e o y qualquer uma das atividades. Entenderam?

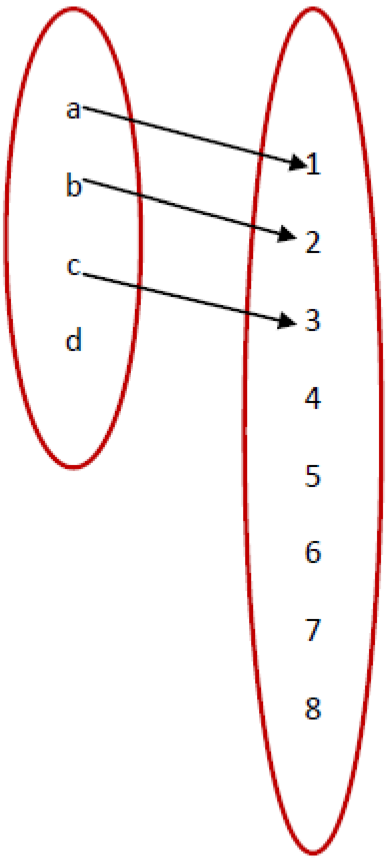
Keith: Ah.

Professora: Observem que todos os integrantes do grupo devem escolher uma única atividade. Se alguém do grupo não escolher nenhuma atividade não teremos função. Também se alguém do grupo escolher duas ou mais atividades não teremos uma função. Todavia, duas pessoas diferentes podem escolher a mesma atividade igual aconteceu com o exemplo da Cleo. Ficou claro?

Keith: mais ou menos.

Fred: Professora me dá um exemplo de quando uma relação não é função.

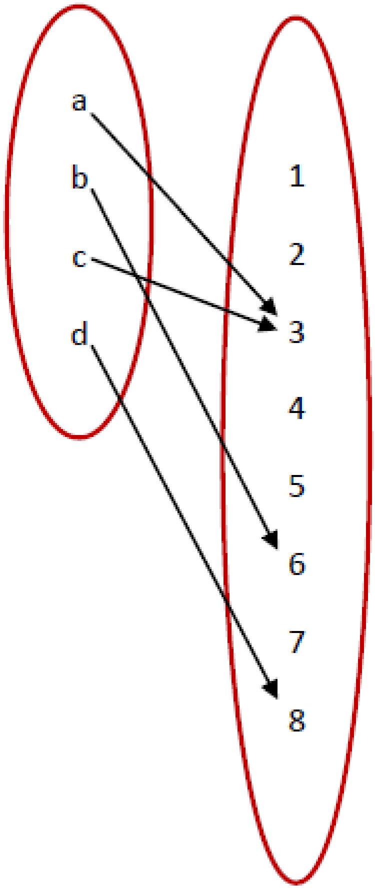
Professora: Sim, claro. Vou te dar um exemplo e ajudar a Keith também. Olha só: Sejam $A=\{a,b,c,d\}$ e $B=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$



A relação entre os dois conjuntos não é uma função porque não existe elemento em B que corresponda ao elemento d em A. Entenderam? Entendeu Fred?

Fred: Entendi.

Professora: Quero ver então**.** Fred, por favor, e se fosse assim, seria função (a professora escreve na lousa):



Ressalto que A= {a, b, c, d} e B= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,8}.

Fred: É função porque todo elemento do conjunto A tem correspondente no conjunto B e depois cada elemento do conjunto A corresponde a um único elemento do conjunto B.

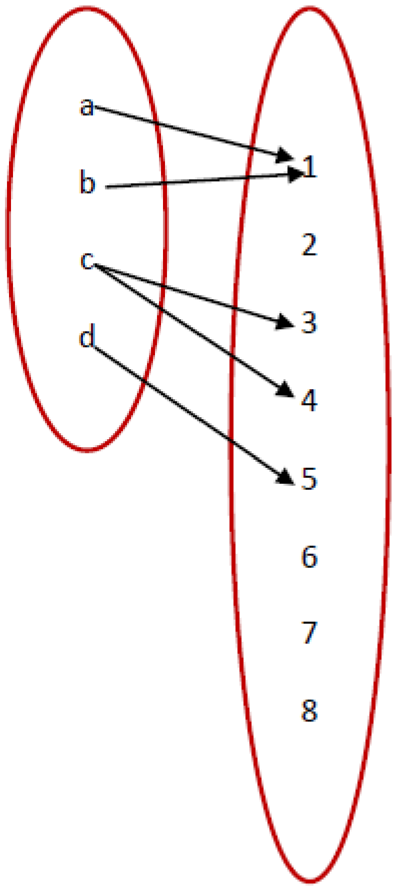
Professora: Excelente. Alguma dúvida pessoal?

Maria Eduarda: Eu não entendi direito. O “a” e o “c” estão ligados ao 3. Pode?

Fred: Pode sim. O que não pode é um elemento do primeiro conjunto estar ligado a dois elementos do segundo conjunto. Assim, se o “a” estivesse ligado ao “3” e a outro número não poderia.

Maria Eduarda: Ah.

Professora: Vou te dar um exemplo Maria Eduarda:



Olha só, o elemento "c" está ligado ao elemento "3" e ao elemento "4". Isso pode? **Maria Eduarda:** Ah! Não pode não. Então, não é função. Ah, agora sim. Entendi o que o Fred falou. Naquele caso era mesmo função.

Professora: Perfeito.

O sinal tocou.

Professora: Pessoal, hoje era isso. Aula que vem teste como havíamos combinado desde o início. Estudem, não esperem o final do ano. Como vocês sabem na terça a tarde também estou na instituição e quem tiver alguma dúvida, me procure.

Transcrição do Oitavo Encontro

O exame consciente do aluno sobre suas ações no ensino aprendizagem do conceito de função

03/07/2014 Horário: 09h15min - 10h45min

Professora: Bom dia pessoal! Sabe o teste do primeiro encontro? Aquele que vocês viviam me cobrando a correção. Então, hoje a nossa revisão será a discussão do teste em grupo e nos

60 minutos restantes faremos uma avaliação individual. Eu estarei passando por todos os grupos, para esclarecer quaisquer dúvidas. Ah, por favor, já avisando, o importante é o domínio do raciocínio. O teste que aplicarei hoje não será o mesmo do aplicado anteriormente, podem ter certeza. Então não gaste a energia na tentativa de decorar. Ao invés disso, fique atento ao raciocínio. Ok?

Lara: Ah não professora, eu jurava que o teste de hoje seria o mesmo. Tô lascada.

Professora: Pessoal, penso que não tem motivo para preocupação. Estudamos juntos, vocês participaram e tem tudo para sair bem.

Muito Barulho.

Os alunos resolveram novamente o pré-teste, não apresentaram muitas dificuldades, solicitando a presença da professora somente para confirmar a resolução.

Nos últimos 60 minutos da aula, os alunos enfileirados realizarem um pós-teste individualmente para que pudéssemos inferir sobre a sua aprendizagem e por fim analisar a viabilidade das teorias de Davydov e Majmutov para o ensino do conceito de função.